arXiv:2603.10372v1 [math.AG] 11 Mar 2026

卡利宁有效性与美妙紧化

VIATCHESLAV KHARLAMOV 和 RARES. RASDEACONU

Abstract. 我们回顾 Kalinin 有效性的定义及其主要性质，并介绍构造有效空间的方法，同时给出若干例子。我们分析美妙紧化的 Kalinin 有效性，并证明：由 Kalinin 有效的紧复流形所关联的超平面配置及构形空间的美妙紧化本身也都是 Kalinin 有效的。作为应用，我们证明带标记点的实有理曲线的 Deligne–Mumford 空间是有效的。最后，我们运用 Kalinin 有效性研究 Hilbert 平方的 Smith–Thom 极大性。

> 我想说，数学是这样一门科学：它运用为此目的而发明的概念和规则，进行巧妙的操作。
>
> E. Wigner——《数学在自然科学中的不合理有效性》

Contents

1. 引言 2
1.1. 动机与背景 2
1.2. 框架：Smith 理论、Kalinin 有效性与共轭空间 2
1.3. 主要结果与应用 3
致谢 5
2. Kalinin 有效性与极大性 6
2.1. Kalinin 谱序列 6
2.2. 有效性 9
2.3. 极大性 10
2.4. 共轭空间 12
3. 例子与构造 13
3.1. Kalinin 有效空间的例子 13
3.2. 标准构造下的 Kalinin 有效性 16
3.3. 极大空间的构造 17
4. Kalinin 有效性与拉伸性 18

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14P25；次要分类：14C05，14J99。
Key words and phrases. 实代数流形、史密斯正合序列、Smith-Thom 极大性、伽罗瓦极大性、Kalinin 有效性。

4.1. 拉伸 G-对 204.2. 关于缺乏拉伸性 224.3. 保持拉伸性的构造 225. 美妙紧化 235.1. 拉伸 G-配置 266. 例子 326.1. 子空间配置的美妙紧化——定理 A 的证明 326.2. 带标记点的实稳定有理曲线模空间——定理 B 的证明 326.3. 构形空间的美妙紧化——定理 D 的证明 347. Hilbert 平方 35参考文献 38

1. Introduction

1.1. **动机与背景**。 本文主要研究对象是德利涅–芒福德空间 $\overline{\mathcal{M}}_{0,\ n}$ 以及更一般地，所谓美妙紧化的实点集的拓扑 [25] ，这些紧化对应于各种配置。

此前关于这些实流形拓扑的大部分研究结果，都涉及对其贝蒂数和上同调环的计算。在[10], P. Etingof、A. Henriques、J. Kamnitzer 和 E. Rains 描述了实标记点的一种选取所对应的实模型中，$\overline{\mathcal{M}}_{0,\ n}$ 的实点集的整上同调环。对于$\overline{\mathcal{M}}_{0,\ n}$上的其他实结构，O. Ceyhan [3] 用图同调描述了其系数为 $\mathbb{F}_2$的上同调的加法结构。最近，X. Chen、P. Georgieva 和 A. Zinger [4] 计算了具有共轭标记点的实有理曲线德利涅–芒福德模空间的有理上同调环，并证明其整同调只有 2-挠。对于与实射影空间构形相关联的德·孔奇尼–普罗切西模型，E. Rains 在 [26]计算了其实点集的模 2-挠整同调，并描述了其乘法结构。

受到斯廷罗德平方在理解对合及其不动点集的拓扑性质方面重要性的启发，我们采用一种不同但相关的视角。具体而言，我们运用 Kalinin 的方法 [17, 18], ，该方法将等变上同调中的上同调环和斯廷罗德代数结构与不动点集中的相应结构联系起来。

1.2. **框架：Smith 理论、Kalinin 有效性与共轭空间**。长期以来，人们一直运用经典的

Smith 理论方法研究带有反全纯对合的复流形的实点集的拓扑。该理论的一个基本推论是，不动点集的贝蒂数总和不超过外围复流形的贝蒂数总和[1]。当等号成立时，称该流形为 Smith-Thom 极大。此处另一项重要工具是 Borel-Serre 谱序列，以及专门针对对合的稳定化版本——Kalinin 谱序列 [16, 6]。用这一语言来说，Smith-Thom 极大性等价于 Kalinin 谱序列在第一页退化，而另一个密切相关的条件——伽罗瓦极大性——则对应于谱序列在第二页退化（见第 2节）。

Kalinin 的有效空间概念源于他的工作 [16] 关于实射影超曲面的拓扑，并在 [17]中得到进一步发展。非正式地说，有效空间是配备了对合的空间，Kalinin 谱序列的极限项对不动点集的上同调环以及斯廷罗德代数结构提供完整且函子性的控制（见定理2.10）。特别地，对于 Smith-Thom极大有效空间，这种控制变得尤为强：作为斯廷罗德代数上的代数，它们的上同调环同构于不动点集的上同调环，如定理2.19所述。

Kalinin 在其2002年的论文中引入了有效空间的概念 [17]。三年后，J. C. Hausmann、T. Holm 与 V. Puppe [15]引入了共轭空间的概念，其应用范围从变换群到环面拓扑。然而，事实表明这两种理论以一种非常精确的方式交汇：共轭空间是 Kalinin 意义下满足 Smith-Thom 极大性的有效空间。我们在命题 2.22中证明了这一等价，从而将共轭空间纳入 Kalinin 有效性的框架之中。

有效空间的类别远比共轭空间广泛。这种额外的灵活性使我们能够在史密斯-汤姆极大性不成立的情形下分析实轨迹的拓扑。本论文的主要目标之一，是找出能够保持有效性，并在具备相应性质时也能保持史密斯-汤姆或伽罗瓦极大性的自然几何构造。具体而言，我们得到了新的卡利宁有效空间以及史密斯-汤姆极大空间和伽罗瓦极大空间的例子。

1.3. **主要结果与应用。** 我们首先回顾卡利宁谱序列以及针对偶对的卡利宁有效性的概念；对于本文所讨论的应用而言，这是最方便的框架。我们还展示了若干有效空间的新例子。随后，我们研究并证明了卡利宁有效性在爆破下的稳定性，适用于满足一种我们称为拉伸性的上同调条件的偶对（见第4.1节）。

随后，我们将这一稳定性结果应用于，在李引入的一般框架下，构造关于配置的 Kalinin 有效性以及美妙紧化之间共轭空间的新例子

[1]在本文中，我们只考虑系数取自 $\mathbb{F}_2$. 的上同调

的配置 [25]。我们在这一方向上的主要结果将在第5节证明，并给出一个一般判据（见定理 5.11），描述带有实结构的构形的美妙紧化何时有效。作为应用，我们将在第 6 节研究若干特别重要的美妙紧化的 Kalinin 有效性，并得到如下结果：

定理 A. 任意实线性子空间配置的德·孔奇尼–普罗切西美妙紧化 $\mathbb{P}^n$ 是一个共轭空间。

辫子配置的德·孔奇尼–普罗切西美妙紧化 A_{n-2} 可以与德利涅–芒福德紧化$\mathcal{M}_{0,\ n}$ [5, 页 483]等同。这一观察表明，为证明定理5.11而发展的方法也适用于具有实标记点的实稳定有理曲线模空间。

德利涅–芒福德空间$\mathcal{M}_{0,\ n}$ 具有若干自然的实结构 c_σ，这些实结构由 $\sigma \in S_n$ 作用于标记点且阶为 2 的置换（见第6.2节）。情形 $\sigma =$id 对应于所有标记均为实数的实稳定有理曲线。我们证明：

定理 B. 设 $n \geq 3$且令c_σ 为德利涅–芒福德空间 $\mathcal{M}_{0,\ n}$ 上由一个阶为2 的置换 $\sigma \in S_n$定义的实结构。那么以下结论成立：

(i) 如果 $\sigma = \mathrm{id}$，则实对 $(\mathcal{M}_{0,n}, \mathrm{c}_{\mathrm{id}})$ 是一个共轭空间。(ii) 如果 $\mathrm{Fix}(\sigma) \neq \emptyset$，则实对 $(\mathcal{M}_{0,n}, \mathrm{c}_\sigma)$ 是有效且伽罗瓦极大的。

作为定理 B 和定理 2.19 的直接推论，我们得到对 [10] 中定理 5.6 的如下改进：

推论 C. 令 $F\mathcal{M}_{0,n}$ 表示对合 c_{id} 在$\mathcal{M}_{0,\ n}$上的不动点集。那么 $H^*(F\mathcal{M}_{0,n})$ 赋予其标准结构，以及 $H^{2*}(\mathcal{M}_{0,n})$ 赋予其作为斯廷罗德代数上的代数的内禀结构，两者自然同构[2]。

并非共轭空间的卡利宁有效空间也出现在有序点构形空间的美妙紧化中。设 (X, c) 是一个带有反全纯对合的闭光滑复代数簇，且 n 是一个正整数。那么， n 个互异点构成的元组空间

$$\mathrm{Conf}_n(X) = \{(p_1, \ldots, p_n) \,|\, p_i \in X,\ p_i \neq p_j \text{ for every } i \neq j\}$$

自然诱导出一个反全纯对合。Fulton-MacPherson $_n(X)$ 的若干种奇妙紧化由 [11],Ulyanov [27] 和 Kuperberg-Thurston [24] 构造，并由李在 [25]中讨论。这些紧化自动满足上述拉伸条件，我们得到：

[2]参见第2.2 节对此同构的描述。

定理 D。令(X,c) 为一个带有反全纯对合的闭光滑复代数簇。

1) 若 X 是 *Kalinin*有效的，则 *Fulton-MacPherson*、*Ulyanov* 和 *Kuperberg-Thurston* 美妙紧化都是 *Kalinin* 有效空间。2) 若 X 是极大或伽罗瓦极大的，则 *Fulton-MacPherson*、*Ulyanov* 和 *Kuperberg-Thurston* 美妙紧化分别是极大空间或伽罗瓦极大空间。3) 若 X 是共轭空间，则 *Fulton-MacPherson*、*Ulyanov* 和 *Kuperberg-Thurston* 美妙紧化都是共轭空间。

作为 Kalinin 有效性的另一项应用——它也是我们研究 Kalinin 有效性的起点——我们计算了有效的伽罗瓦极大簇的希尔伯特平方的亏格。

定理 E. 设 X 是一个紧致连通光滑复流形，其维数为 n，满足 $H_{\mathrm{odd}}(X) = 0$，并配备实结构；该实结构是有效且伽罗瓦极大的。若 X的史密斯–托姆亏格为 $\mathfrak{D}(X) = a$，则配备诱导实结构的希尔伯特平方 $X^{[2]}$ 的史密斯–托姆亏格为

$$\mathfrak{D}(X^{[2]}) = \sum_{k=1}^{2n}(2k-1)\delta_k + a\beta_* + \frac{a(a-1)}{2}.$$

这一结果改进并拓展了 [22]中的定理 1.7 和 1.8。因此，我们在 Hilbert 平方中发现了新的极大空间例子：

推论 F. 极大有效空间的希尔伯特平方是极大的。

致谢。 第二作者感谢斯特拉斯堡大学的支持，并特别感谢 Dan Margalit 和范德堡大学在本工作准备期间给予的支持。

记号与约定：

1) 配备实结构的复流形是指一对 $(X,\ \mathrm{c})$，由复流形 X 和反全纯对合 $\mathrm{c}:\ X \to X$组成。2) 设 $G = \{\mathrm{id},\ \mathrm{c}\}$ 为 2 阶循环群。若复流形X 配备反全纯对合 $\mathrm{c}: X \to X$，则 c 可典范地确定 G 在 X上的作用，我们将 $(X,\ \mathrm{c})$ 视为关于此作用的 G-空间。3) 若 $(X,\ \iota)$ 是一个配备对合的空间，我们用 $F(X)$ 表示 ι的不动点集合。4) 除非另有明确说明，所有同调群和上同调群均取系数于域 $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。我们用 $\beta_i(\ \cdot)$ 表示带 $\mathbb{F}_2$系数的第 i 个贝蒂数，用 $\beta_*(\ \cdot)$ 表示总贝蒂数，用 $\beta_{\mathrm{odd}}(\ \cdot)$ 表示奇数次的贝蒂数之和。

2. Kalinin effectivity and maximality

设 G 为 2 阶循环群。

定义 2.1. *A* G-旗$(V_p, V_{p-1}, \dots, V_1; \mathrm{c})$ 由一个 *CW* 复形$V = V_p$ 构成，该复形配备了一个连续对合c，它将胞腔映到胞腔，并在每个不变胞腔上恒等作用；此外还配备了c-不变子复形$V_k \subseteq V$，使得 $V_k \subseteq V_{k+1}$ 对所有 $k = 1, \dots, p-1$.

为方便起见，若 $p = 1$，则称 G-旗为 G-空间；若$p = 2$，则称其为 G-对；若 $p = 3.$，则称其为 G-三元组。当上下文已明确时，我们常在 G-旗的记号中省略对合c。

G-旗 $(V_p, V_{p-1}, \dots, V_1; \mathrm{c})$ 的不动点集构成一个 CW-复形旗

$$F(V_p, \dots, V_1) := (F(V_p), \dots, F(V_1)),$$

其中 $F(V_j) = F(V_p) \cap V_j$ 是 V_j 的不动点集，$j = 1$，……，$p.$ 旗$F(V_p$，……，$V_1)$ 将被视为一个 G-旗，其中 G 在其上的作用为恒等作用。

注 2.2。 </style}本文中所考虑的所有 G-旗都是流形的旗。下文中，我们主要使用 G-对和 G-三元组。

2.1. Kalinin 谱序列。

定理 2.3 (Kalinin, [16])。 设(X, Y) 是一个 G<*style id='23}*-对。那么以下对象存在，且关于 G-映射自然：

1) 一个群滤过 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_n(X, Y)\}_{n \geq -1}$，其中

$$0 = \mathcal{F}_{-1}(X, Y) \subseteq \mathcal{F}_0(X, Y) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n(X, Y) \subseteq \cdots H^*(F(X, Y)).$$

2) 一个 $\mathbb{Z}$-分次谱序列 $({}^rH^*(X, Y)\ {}^rd^*)$，其中

$${}^rd^q : {}^rH^q(X, Y) \to {}^rH^{q-r+1}(X, Y), \quad {}^rd^{q-r+1} \circ {}^rd^q = 0,$$

对此我们有

$${}^1H^q = H^q(X, Y), \quad {}^1d^* = 1 + \mathrm{c}^*,$$

and

$${}^2H^q = H^1(G, H^q(X, Y)).$$

3) 一个同构

$$\phi_i : \mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}}(H^*(F(X, Y))) \to {}^{\infty}H^i,$$

其中 $\mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}}(H^*(F(X, Y)))$ 是与滤过 $\mathcal{F}$. 相关联的分次群 □

上述谱序列称为卡利宁谱序列。[3] 我们简要回顾卡利宁谱序列如何由 Borel 纤维化的Leray-Serre 谱序列得到。

[3]同调中也存在一个类似的谱序列 [6]。

Kalinin 谱序列由Leray-Serre 谱序列 $\{E_r^{p,q}\}$（Borel 纤维化 π 的）按如下方式导出：$(X,\ Y)_G = S^\infty \times_G (X,\ Y) \to BG$。由于 $BG = \mathbb{RP}^\infty$，与生成元的乘法

$$u \in H^1(\mathbb{RP}^\infty, \mathbb{F}_2) \simeq \mathbb{F}_2[u]$$

产生同构 ${}^r\phi_p$ ： ${}^rE^{p,\ *} \to {}^rE^{p+1,\ *}$ 对于 $p \gg 0$ ，并考虑直极限

$${}^rH^q := \varinjlim({}^rE^{p,q}, {}^r\phi_p).$$

根据博雷尔定理，包含同态

$$H^i((X,Y)_G) \to H^i(F(X,Y)_G)$$

对于每个 $i >$ 维 X 都是同构，这就建立了自然同构

$$\varinjlim H^i((X,Y)_G) = \varinjlim H^i(F(X,Y)_G) = H^*(F(X,Y)). \tag{2.1}$$

$\{\mathcal{F}_n\}$ 上的滤过 $H^*(F(X,\ Y))$ 定义为

$$\mathcal{F}_n := \varinjlim(\mathcal{F}'_i \cap H^{n+i}((X,Y)_G)),$$

其中 $H^*((X,\ Y)_G) = \mathcal{F}'_0 \supseteq \mathcal{F}'_1 \supseteq \ldots$是按 $\mathcal{F}'_j = \pi^*(H^{\geq j}(BG))$ 进行的滤过。特别地，取 i 充分大，并利用恒等式（2.1），可得

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}'_{i-n} \cap H^i((X,Y)_G).$$

注意到，由该谱序列的函子性可知

$$\mathcal{F}_i(X,Y) \subseteq H^{\leq i}(F(X,Y)) \quad \text{for each } i. \tag{2.2}$$

为方便读者，下面回顾 Kalinin 谱序列的若干基本性质。

命题 2.4 (Kalinin, [16])。 中的杯积下降为 中的乘法结构， ${}^rH^*$，因此 ${}^rH^*$ 是一个 $\mathbb{Z}_2$-代数。此外：

1）所有 $r \geq 2$ 下的微分 ${}^rd^*$ 均为导子，即

$${}^rd^*(x \cup y) = {}^rd^*x \cup y + x \cup {}^rd^*y.$$

2）滤过 $\mathcal{F}_*$ 是乘法的，即对于每个 $p, q \geq 0$

$$\mathcal{F}_p \cup \mathcal{F}_q \subseteq \mathcal{F}_{p+q}.$$

3）映射 ϕ_i, $i \geq 0$ 满足

$$\phi_{i+j}(x \cup y) = \phi_i(x) \cup \phi_j(y),$$

对于每个 $x \in \mathrm{gr}^i_{\mathcal{F}}(H^*(F(X,\ Y)))$ 以及 $y \in \mathrm{gr}^j_{\mathcal{F}}(H^*(F(X,\ Y)))$。

命题 2.5 (Kalinin, [17])。 设 (X,Y) 和 (A,B) 是两个 G-对。那么：

1) 乘法

$$\times : H^*(X,Y) \otimes H^*(A,B) \to H^*(X \times A, Y \times A \cup X \times B)$$

诱导谱序列同构

$$\times : {}^rH^i(X,Y) \otimes {}^rH^j(A,B) \to {}^rH^{i+j}(X \times A, Y \times A \cup X \times B),$$

其中 ${}^rd(a \otimes b) = a \otimes {}^rd(b) + {}^rd(a) \otimes b$，对于任意 $r > 1$.

2) 我们有

$$\times : \mathcal{F}_i(X,Y) \otimes \mathcal{F}_j(A,B) \subseteq \mathcal{F}_{i+j}(X \times A, Y \times A \cup X \times B).$$

3) 我们有

$$\phi_*(a \otimes b) = \phi_*(a) \times \phi_*(b).$$

□

命题 2.6 (Kalinin, [17])。设 (X, Y) 为一个 G-对，其中 X 是一个n维闭流形，而 Y 是一个子流形。

1) 对于 $r \leq \infty$，非退化双线性形式

$$\Phi_{(X,Y)} : H^*(X,Y) \otimes H^*(X \setminus Y) \to \mathbb{F}_2, \Phi_{(X,Y)}(x \otimes y) = (x \cup y) \cap [X,Y],$$

诱导出一个非退化双线性形式

$${}^r\Phi_{(X,Y)} : {}^rH^*(X,Y) \otimes {}^rH^*(X \setminus Y) \to \mathbb{F}_2;$$

对于 $r < \infty$，微分 ${}^rd_{(X,Y)}$ 与 ${}^rd_{X \setminus Y}$ 关于该形式互为伴随。

2) 我们有

$$\mathcal{F}_i(X,Y)^\perp = w^{-1}\mathcal{F}_{n-i-1}(X \setminus Y),$$

其中 w 是子流形 $F(X \setminus Y)$ 在 $X \setminus Y$. 中的法向量丛的全斯蒂弗尔-惠特尼类

3) 我们有

$${}^\infty\Phi_{(X,Y)}(\phi_* x \otimes \phi_* y) = \Phi_{F(X,Y)}((w^{-1}x) \otimes y)$$

对于任意 $x \in H^*(F(X、 Y))$ 以及 $y \in H^*(F(X \setminus Y))$。

□

命题 2.7 (Kalinin, [18])。设 $(X、 Y、 Z)$ 是一个 G-三元组。则：

1) 三元组的上同调序列中的边界同态 δ： $H^*(X、 Y) \to H^{*+1}(Y、 Z)$ 诱导出一个谱序列态射

$${}^r\delta : {}^rH^*(X,Y) \to {}^rH^{*+1}(Y,Z).$$

2) $F\delta(\mathcal{F}_i(X,Y)) \subseteq \mathcal{F}_{i+1}(Y,Z)$，其中 $F\delta$ 是三元组 $F(X,Y,Z)$ 的上同调序列中的边界同态。3) $\phi_* F\delta = {}^\infty\delta\phi_*$.

□

2.2. **有效性**。

定义 2.8. 设 (X,Y) 是一个 G-对。

1) G-对 (X,Y) 称为有效的，如果

$$\mathcal{F}_i(X,Y) = \mathrm{Sq}\, H^{\leq i/2}(F(X,Y)),$$

其中 $\mathrm{Sq} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \cdots$ 是全斯廷罗德运算。

2) 若 G-空间 X 有效，则称 G-对 $(X,\emptyset)$ 有效。

命题 2.9. 设 (X,c) 是一个 G-空间，其中 X 是一个 n 维闭流形，Y 是一个 c-不变子流形。那么，G-对 (X,Y)有效，当且仅当 G-空间 $X \setminus Y$ 有效。

证明。 命题 2.6 和吴公式推出

$$(\mathrm{Sq}^{-1}\, \mathcal{F}_i(X,Y))^{\perp} = \mathrm{Sq}^{-1}\, \mathcal{F}_{n-i-1}(X \setminus Y),$$

其中 $\mathrm{Sq} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \cdots$ 是全斯廷罗德运算。根据定义和庞加莱-亚历山大-莱夫谢茨对偶性，该断言的证明现在可直接得出。□

设 (X,Y) 是一个有效的 G-对。我们记

$$\psi^i_{X,Y} : H^i(F(X,Y)) \to {}^{\infty}H^{2i}(X,Y).$$

同态的复合

$$H^i(F(X,Y)) \xrightarrow{\mathrm{Sq}} \mathcal{F}_{2i}(X,Y) \xrightarrow{\mathrm{pr}} \frac{\mathcal{F}_{2i}(X,Y)}{\mathcal{F}_{2i-1}(X,Y)} \xrightarrow{{}^{\infty}\phi_{2i}} {}^{\infty}H^{2i}(X,Y).$$

这一显著性质是 Kalinin 提出并研究有效空间概念的主要动机之一。

定理 2.10 (Kalinin [17, 18])。 设 $(X,\ Y)$ 是一个有效 G-对。那么：

1) $\psi^i_{X,Y}$ 是一个同构。

2) 同态

$$\psi^*_{X,Y} = \bigoplus_{i\geq 0} \psi^i_{X,Y} : H^*(F(X,Y)) \to {}^{\infty}H^*(X,Y)$$

is a ring isomorphism.

3) $\psi^*_{X,Y}(\mathrm{Sq}^i\, x) = \mathrm{Sq}^{2i}(\psi^*_{X,Y}(x))$ *for any* $x \in H^*(F(X,Y))$. □

命题 2.11。 ([18, 命题 3。6]) 设 (X,Y,Z) 是一个 G-三元组，满足 G-对 (X,Y) 和 (Y,Z) 均有效。那么边界同态

$$\delta : H^*(F(Y,Z)) \to H^{*+1}(F(X,Y))$$

是平凡的。

证明。 令 $x \in H^i(F(Y,Z))$。 利用命题 2.7 的第 2) 项，我们得到

$$\mathrm{Sq}(\delta x) = (F\delta)(\mathrm{Sq}\, x) \in \mathcal{F}_{2i+1}(X,Y) \subseteq \mathcal{F}_{2i+2}(X,Y).$$

因此，

$$\psi^{i+1}_{X,Y}(\delta x) = \phi_{2i+2}(\mathrm{pr}(\mathrm{Sq}(\delta x))) = \phi_{2i+2}(0) = 0.$$

由于对（X, Y）是有效的，映射 $\psi^{i+1}_{X\,Y}$,是一个同构，从而 $\delta x = 0$. □

2.3. **极大性**。 设 $(X, Y;$ c) 是 G-对，其中 dim $H^*(X, Y) < \infty$，并¯ ¯记 X 和 Y 分别为商空间 $X/$ c 和 $Y/$ c，。存在 [6, 第 1.2 节。8] 一个自然的正合序列

$$\cdots \to H^k(\bar{X}, F(X) \cup \bar{Y}) \xrightarrow{\mathrm{pr}^*} H^k(X, Y) \xrightarrow{\mathrm{tr}_* \oplus \mathrm{in}^*} H^k(\bar{X}, F(X) \cup \bar{Y}) \oplus H^k(F(X), F(Y)) \xrightarrow{\Delta_k} H^{k+1}(\bar{X}, F(X) \cup \bar{Y}) \to \cdots, \tag{2.3}$$

以及一个类似的同调序列。连接同态 Δ_k 由 $x \oplus f \mapsto x \cup \omega + \delta x$ 给出，其中 $\omega \in H^1(\bar{X} \setminus F)$ 是二重覆盖的特征¯类 $X \setminus F \to X \setminus F$. 序列 (2.3) 称为上同调中的史密斯序列。

因此，以下不等式成立：

1) dim $H^*(F(X, Y)) \le$ dim $H^*(X, Y)$ (*Smith*不等式)。2) dim $H^*(F(X, Y)) \le$ dim $H^1(G; H^*(X, Y))$ (博雷尔-斯旺不等式)，其中 $H^1(G; H^*(X, Y)) = \ker(1 + \mathrm{c}_*)/\operatorname{Im}(1 + \mathrm{c}_*)$。差

$$\mathfrak{D}(X, Y) = \dim H^*(X, Y) - \dim H^*(F(X, Y))$$

称为$(, Y)$ 的史密斯–托姆亏格。 我们将使用简化记法 $\mathfrak{D}(X)$ 表示 $\mathfrak{D}(X, \emptyset)$。

定义 2.12。 设$(X, Y;$c) 是一个 G-对，其中维数 $H^*(X, Y) < \infty$.

1) 若一个对(X, Y) 的史密斯–托姆亏格为零，则称其为 *Smith-Thom*极大。2) 若(X, Y) 是 *Galois* 极大，或是一个 GM-对，则

$$\dim H^*(F(X, Y)) = \dim H^1(G; H^*(X, Y)).$$

注 2.13。 在本文中，为方便起见，只要上下文允许，“极大”均指“Smith-Thom极大”。

史密斯–托姆极大性或伽罗瓦极大性条件控制 Kalinin 谱序列退化的阶段，因此量化了不动点集的上同调与外围空间的上同调之间的接近程度。以下判据是定理2.3 (分别参见 [6] 和 [23],。

命题 2.14。设 (X, Y) 为一个 G-对。

1) 对 (X, Y) 是极大对当且仅当卡利宁谱序列在第一页坍缩。2) 对 (X, Y) 是伽罗瓦极大对当且仅当卡利宁谱序列在第二页坍缩。 □

接下来我们分别回顾极大性和伽罗瓦极大性的以下判据。

命题 2.15. [1, 13] 设 (X,Y) 是一个 G-对。以下条件等价:

1) (X,Y) 是一个极大对。*2)* G 在 $H^*(X,Y)$ 上的作用是平凡的，且与纤维化 $(X,Y) \hookrightarrow (X_G,Y_G) \to BG$ 相关联的 *Leray-Serre* 谱序列在第二页退化。*3)* $H^*_G(X,Y)$ 是一个自由 $H^*(BG) = H^*(\mathbb{RP}^\infty)$-模。*4)* 限制同态 $\rho: H^*_G(X,Y) \to H^*(X,Y)$ 是满射。*5)* 限制同态 $r_G: H^*_G(X,Y) \to H^*_G(F(X,Y))$ 是单射。□

命题 2.16. 设 (X,Y) 是一个 G-对。下列条件等价:

1) (X,Y) 是一个伽罗瓦极大对。2) 任意 c_*-不变同调类 $\alpha \in H_*(X,Y)$ 都可以由一个 c-不变循环表示。

证明。 这是史密斯同调正合序列的一个已知的简单推论（参见 [6,条目 1.2.4]）。□

命题 2.17。 若 G-对 (X,Y) 是伽罗瓦极大的，则 *Kalinin* 过滤 $\{\mathcal{F}_n\}$ 与 $H^*(F(X,Y))$ 由同态的像$\operatorname{Im}\beta^n$ 给出的滤过重合

$$\beta^n : H^n_G(X,Y) \to H^n_G(F(X,Y)) = \bigoplus_{i\le n} H^i(F(X,Y)).$$

证明。 由于对 (X,Y) 是伽罗瓦极大的，Borel-Serre 谱序列在第二页退化，因此

$$^\infty E^{p,q} = {}^2E^{p,q} = H^1(G; H^q(X,Y)),\ p>0, q\ge 0,$$
$$^\infty E^{0,q} = {}^2E^{0,q} = H^q(X,Y)^G.$$

此外，对每个 $r \ge 0,$ ，环同态

$$H^*_G(X,Y) \to H^{*+1}_G(X,Y)$$

由 $H^*_G(pt) = \mathbb{F}_2[u]$ 的生成元 u 进行乘法给出，在谱序列上作用为简单的平移

$${}^rE^{p,q} = H^1(G, H^q(X,Y)) \to {}^rE^{p+1,q} = H^1(G, H^q(X,Y))$$

若 $p>0$ 且作为商满同态

$${}^rE^{0,q} = H^q(X,Y)^G \to {}^rE^{1,q} = H^1(G, H^q(X,Y))$$

其像为 $\{1+c^*:\ H^q(X,\ Y) \to H^q(X,\ Y) \subseteq H^q(X,\ Y)^G\}$ 作为核。这意味着

$$\beta^n(H^n_G(X,Y)) = \beta^{n+i}(H^{n+i}_G(X,Y) \cap \mathcal{F}'_n) = \mathcal{F}_n$$

对每一个 $n,i \ge 0$。 □

我们以关于极大卡利宁有效空间的上同调的若干结果来结束本节。设(X,Y)为一个Smith-Thom极大Kalinin有效 G-对。

命题 2.18。 对于任意 *Smith-Thom*极大 *Kalinin*有效 G-对，奇数维上同调群 $H^{2i+1}(X、Y)\ i\geq 0$ 均为零。

证明。 根据命题 2.14 和定理 2.10，如果（X， Y）是一个极大对，那么对于任意 $r\geq 0$. 根据有效对的定义，只需注意到： $\mathcal{F}_r$（X， Y）同构于 $H^{\leq r}$（X， Y）。

$$\mathcal{F}_{2i+1}(X,Y)=\operatorname{Sq} H^{\leq i}(F(X,Y))=\mathcal{F}_{2i}(X,Y)$$

对于任意 $i\geq 0$。 □

作为命题 2.18的推论， （X， Y）的奇数阶斯廷罗德平方为零。这意味着 H^{2*}（X， Y）继承了一个内在的模 2 斯廷罗德代数上的代数结构，其中斯廷罗德代数的 i-阶标准生成元的作用为 Sq^{2i} （而不是 Sq^{i}）。另一方面，应用定理 2.10，在命题 2.18的假设下，我们得到一个“加倍”环同构

$$\psi^*_{X,Y}=\bigoplus_{i\geq 0}\psi^i_{X,Y}: H^*(F(X,Y))\to {}^{\infty}H^{2*}(X,Y)=H^{2*}(X,Y)$$

满足

$$\psi^*_{X,Y}(\mathrm{Sq}^i x)=\mathrm{Sq}^{2i}(\psi^*_{X,Y}(x)), \tag{2.4}$$

对任意 $x\in H^*(F(X,Y))$。 于是，我们得到：

定理 2.19. 设(X,Y) 为一个*Smith-Thom*极大有效 G-对。则$H^{2*}(X,Y)$ 连同其作为斯廷罗德代数上代数的内在结构，自然同构于 $H^*(F(X,Y))$ 连同其作为斯廷罗德代数上代数的标准结构。□

注 2.20. 定理2.19 的结论是Kalinin于2002年引入有效空间概念的动机之一（见注 2.2，载于 [18]）。关键结果（2.4）后来于2006年由M. Franz与V. Puppe [12]在共轭空间的背景下重新发现。

2.4. **共轭空间**。

定义 2.21 (豪斯曼-霍尔姆-普佩 [15]**).** 一个 G-对 (X,Y) 是共轭 G-对，如果满足以下条件：

1) $H^{\mathrm{odd}}(X,Y)=0$,
2) *There exist a section* $\sigma: H^*(X,Y)\to H^*_G(X,Y)$ *of the restriction homomorphism* $\rho: H^*_G(X,Y)\to H^*(X,Y)$ *together with a degree-halving isomorphism* $\kappa: H^{2*}(X,Y)\to H^*(F(X,Y))$ *with the property that for every* $x\in H^{2n}(X,Y), n\in\mathbb{N}$ *there exist elements* $y_1,\dots,y_n\in H^*(F(X,Y))$ *such that*

$$r_G(\sigma(x))=\kappa(x)u^n+y_1u^{n-1}+\cdots+y_n\in H^*_G(F(X,Y))=H^*(F(X,Y))\otimes\mathbb{F}_2[u],$$

其中 $r_G : H^*_G(X,Y) \to H^*_G(F(X,Y))$ 是等变上同调中的限制同态。

此外，正如在 [12]中所证明的， σ 以及 κ 对于每个 $y_i = \mathrm{Sq}^i(\kappa(x))$ 都是唯一的、乘法的和 $i = 1, \ldots\ldots, n$.

命题 2.22。 (X,Y) 是一个共轭 G-对，当且仅当 (X,Y) 是一个极大且有效的 G-对。

证明。首先回顾一下，(X,Y) 是极大对，当且仅当 $H^*_G(X,Y)$ 是一个自由的 $H^*(BG) = H^*(\mathbb{RP}^\infty)$- 模 $H^*(\mathbb{RP}^\infty) \otimes H^*(X,Y) = H^*(X,Y)[u]$（见命题 2.15）。因此，如果一个 G-对 (X,Y) 是极大且有效的，则 Kalinin 的同构 ψ^* 的逆可以取作减半同构κ. 此外，由于将 $u = 1$ 代入

$$r_G : H^*(X,Y)[u] \to H^*(F(X,Y))[u]$$

将滤过 $H^{\leq i}(X, Y) \subseteq H^*(X, Y)$ 变换为 Kalinin 过滤$\mathcal{F}_i(X, Y) = \mathrm{Sq}\ H^{\leq i/2}(F(X, Y))$，所需的同态 σ通过一个方程变得定义良好

$$r_G(\sigma(x)) = \kappa(x)u^n + \mathrm{Sq}^1(\kappa(x))u^{n-1} + \cdots + \mathrm{Sq}^n(\kappa(x)). \tag{2.5}$$

反过来，如果 (X, Y) 是一个共轭 G-对，那么由于存在一个减半同构，它是极大的；而由于 [12] 共轭方程必须具有以下形式(2.5)，这意味着 Kalinin 的有效性条件$\mathcal{F}_i(X, Y) = \mathrm{Sq}\ H^{\leq i/2}(F(X, Y))$。 □

最后，在本节结束时，我们不加证明地回顾 Kalinin 的一个结果 [18,引理 3。10] 我们将在下一节中用到它。

引理 2.23。 设 (Y, Z) 为一个有效极大对，并设 Z 为一个有效极大空间。那么：

1） Y 是一个极大空间。2）存在一个

短正合列

$$0 \to {}^\infty H^*(Y,Z) \to {}^\infty H^*(Y) \to {}^\infty H^*(Z) \to 0.$$

□

3. Examples and constructions

3.1. 卡利宁有效空间的例子。 有效 G空间的例子可以通过依次附加 G-胞腔来构造。

定义 3.1。 一个复维数为 n 的 G-胞腔是一个有序对($\mathbb{C}^n$,复共轭)，其中复共轭是标准复共轭。

定义 3.2。 (参见 [18, 15]) 我们称一个 G空间(X,c) 具有 G-胞腔分解，若存在一个有限的 G-旗$(A_r, \ldots, A_0)$ 使得：

1) 对于每个 $i \geq 0$， $A_i \subseteq X$ 是一个闭子集，并且 $A_0 = \emptyset$；2) 对于每个 $i \geq 1$， G-空间 $(A_i \setminus A_{i-1},\mathrm{c})$ 与一个 G-胞腔 G-等变同胚。

引理 3.3。 如果 (X, Y) 是一个 G-对，其中 Y 是一个有效空间，且 $X \setminus Y$ 是一个 G-胞腔，那么 X 是一个有效空间。

证明。 由于 $X \setminus Y$ 同胚于一个 G-胞腔，因此它是有效的。于是，根据命题 2.9，G-对 (X, Y) 是有效的，并且根据命题2.11，对每个 $i \geq 0$， 我们都有一个短正合列

$$0 \to \mathcal{F}_i(X, Y) \to \mathcal{F}_i(X) \to \mathcal{F}_i(Y) \to 0.$$

因此，我们得到一个短正合列

$$0 \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X, Y) \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X) \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y) \to 0.$$

由 (X, Y) 和 Y 的有效性，我们有

$$\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X, Y) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(X), F(Y)) \quad \text{and} \quad \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(Y))$$

由于包含映射和相对同态保持维数分次，我们得到

$$\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(X)),$$

因此 X 是有效的。 □

定理 3.4. [18, 定理 1.2] 设 (X,c) 是一个 G-空间，它容许一个 G-胞腔分解[4]。则 (X,c) 是一个共轭空间。

证明。 该证明通过对 G-胞腔的个数作归纳，并由命题 2.22、引理2.23 以及引理3.3立即得到。 □

推论 3.5. 实射影空间、实格拉斯曼流形、实旗簇以及非奇异环簇都是共轭空间。

共轭空间的更多例子可作为 van Hamel 下述结果的直接推论得到 [28]:

定理 3.6. 设 (X,c) 是一个配备反全纯对合的紧复流形，使得 $H^*_{\mathrm{odd}}(X) = 0$. 若 $H^*(X)$ 的每个元素均可由一个 c-不变的复解析闭链表示，则 X是一个共轭空间。 □

非共轭空间的有效空间例子可由以下结果推得:

命题 3.7。 每个实非奇异二次超曲面都是有效空间。

证明。 偶维极大二次超曲面 X 具有实 G-胞腔分解，因此对它们而言，结论由定理3.4得出。否则，存在一个整数 s 满足 $0 \leq s < \frac{1}{2}$ 维数 X，使得 $H^*(F(X))$ 由反复取超平面截面所得基本类的对偶生成

[4]Kalinin 在 [18] 中对实代数簇陈述了这一结果，但他的证明并未使用代数性假设。该定理也可用于构造非代数的共轭空间例子。其中一个例子是 S^6 赋予标准近复结构及其自然关联的实结构。

超平面截面 $[F(X) \cap F(H^r)]$ 满足 $0 \le r \le s$，以及线性子空间 $[F(L^r)]$ 满足 $0 \le r \le s$时其基本类的对偶。由于庞加莱对偶性下降到卡利宁谱序列中（见 [6]），类 $[X \cap H^r]$ 和 $[L^r]$ 在 ${}^{\infty}H^*(X)$ 中给出非零类。特别地，我们发现，对每个 i，均有 $\mathcal{F}_{2i}(X) = \mathcal{F}_{2i+1}(X)$；对每个 $i \le r$和每个 $i \ge n-r$，均有 $\mathcal{F}_{2i}(X)/\mathcal{F}_{2i-1}(X) = \mathbb{F}_2$；而 $\mathcal{F}_{2r}(X) = \cdots = \mathcal{F}_{2n-2r-1}(X)$。还需注意，对于每个类 $u = [Z]^* \in H^*(X)$，都有 $\phi^{-1}(u) = \mathrm{Sq}([F(Z)]^*)$，其中 Z 是子流形 $X \cap H^r$或 L^r, $0 \le r \le s$中的任意一个；这由推论 A.2.10] 得出。因此，每个分次分量 $\mathcal{F}_{2i}(X)/\mathcal{F}_{2i-1}(X)$ 都由 $H^{\le i/2}(F(X))$ 中元素的斯廷罗德平方生成，故根据定义，X 是有效的。□

命题 3.8. 若 X 是具有非空连通实点集的非奇异实曲线，或是具有非空连通实点集的非奇异实曲面 X，且 $H^1(X) = 0$，则 X 是有效的且为伽罗瓦极大。

证明。当 $F(X)$ 非空且连通时，我们得到 dim $\mathcal{F}_0(X) = 1$.由于 $\mathcal{F}_0(X) \subseteq H^0(F(X))$，我们得出 $\mathcal{F}_0(X) = H^0(F(X))$。

若 X 是具有非空连通实点集的曲线，则对 $i = 0$，2 有 ${}^{\infty}H^i(X) = \mathbb{F}_2$，而对 $i = 1$. 它为 0。因此，在此情形下，$\mathcal{F}_0(X) = H^0(F(X))$ 是 Kalinin 过滤中唯一的非平凡项。这表明，对于具有连通实点集的曲线，有效性成立。

如果 X 是一张具有 $H^1(X) = 0$ 的曲面，我们发现当 $i = 0$,4 时 ${}^{\infty}H^i(X) = \mathbb{F}_2$，而当 $i = 1$,3 时它为 0。用与上文相同的论证可得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(X) &= H^0(F(X)), \\ \mathcal{F}_1(X) &= \mathcal{F}_0(X), \\ \mathcal{F}_3(X) &= \mathcal{F}_2(X), \\ \mathcal{F}_4(X) &= H^*(F(X)), \\ \mathcal{F}_4(X)/\mathcal{F}_3(X) &= \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

最后，为了证明 X 的有效性，还需检验 $\mathcal{F}_2^{\perp} \subset H_*(F(X))$ 由 W_1 和 $[F(X)]$ 生成，其中 $W_1 \in H_1(F(X))$ 是 $w_1(F(X))$ 的庞加莱对偶，而 $[F(X)] \in H_2(F(X))$ 是基本类。后一个性质直接由 [6, Proposition 2.4.9(1)] 以及同调与上同调中的 Kalinin 谱序列之间的对偶性得出（见 [6,Subsection 1.5.3]）。

上述两种情形中的伽罗瓦极大性在更一般的条件下也成立，无需假设实点集连通（另见[23, 第 262] 页）。假设 $F(X) \ne \emptyset$ 以及在曲面情形下的 $H^1(X) = 0$，分别推出 ${}^rH^0(X) = \mathbb{F}_2$ 以及在曲面情形下的 ${}^rH^1(X) = 0$，对任意 $r \ge 1$均成立。于是，根据对偶性（见命题 2.6（1））， 对于曲线有 ${}^rH^2(X) = \mathbb{F}_2$，而对于曲面有 ${}^rH^3(X) = 0$，${}^rH^4(X) = \mathbb{F}_2$。因此，对任意 $r \ge 2$, 都有 ${}^rd^q = 0$ $q \ge 0$；根据命题 2.14，这等价于伽罗瓦极大性。□

我们在本小节末尾回顾 Kalinin 的以下结果（不作证明）；该结果是定理证明E:

命题 3.9。 [18, 命题 1。3] 设 X 是一个有限 *CW* 复形，且 $\tau\colon\ X\times X\to X\times X, \tau(x,y)=(y,x)$。那么 $(X\times X,\tau)$ 是一个伽罗瓦极大有效空间。□

3.2. **标准构造下的 Kalinin 有效性**。 现在我们转而系统地构造更多有效空间的例子，并首先回顾 Kalinin 的以下两个结果:

命题 3.10。 [18, 命题 3。3] 有限个有效对的积是一个有效对。□

命题 3.11。 [18, 命题 3。11] 设 (X,c) 是一个 G-空间，ξ 是定义在 X 上的一个复向量丛，并配备了一个覆盖对合 c 的反线性对合；Y 是在 ξ 中的一个旗丛，并配备诱导对合。若 X 有效，则 Y 有效。□

3.2.1. 有效爆破。 设 $(Y,B,\ \mathrm{c})$ 是一个 G-对，其中 Y是装备了反全纯对合 c 的复流形，而 $B\subseteq Y$ 是一个 c- 不变的复子流形，其复余维至少为二。考虑沿 B，对 Y 进行的爆破 $\pi:\ X\to Y$，并记例外除子为 E。注意，在所诱导的反全纯对合下，(X,E) 是一个 G-对。

命题 3.12。 如果 Y 是有效的，并且 $F(B)=\emptyset$，那么 X 是有效的。

证明。 由于 $F(B)=\emptyset$，拉回同态 $\pi^*\colon\ H^*(Y)\to H^*(X)$ 在 X 和 Y的 Kalinin 谱序列之间诱导了第二页的同构。因此，得益于 Kalinin 谱序列的自然性，它在极限之前各页均诱导同构。此外，由于 π在 $F(Y)$ 与 $F(X)$ 之间建立了同胚，根据 Kalinin 滤过的自然性，$\pi^*\colon\ H^*(F(Y))\to H^*(F(X))$ 在 $F(Y)$ 和 $F(X)$ 中的 Kalinin 滤过之间诱导了同构。因此，Y的有效性等价于 X的有效性。□

命题 3.13。 若 B 和 $(Y、B)$ 有效，则 $E、X$ 和 $(X、E)$ 有效。

证明。由命题 3.11 可知，B 的有效性蕴含 $E.$ 的有效性。另一方面，由命题 2.9 可知，数对 (Y,B) 的有效性等价于数对 (X,E) 的有效性。根据命题 2.11，边界同态 $\delta^i_{\mathbb{R}}\colon\ H^i(F(E))\to H^{i+1}(F(X)\ F(E))$ 对每个 $i\geq 0$ 都是平凡的。因此，对每个 $i\geq 0$，我们都有一个短正合列

$$0\to\mathcal{F}_i(X,E)\to\mathcal{F}_i(X)\to\mathcal{F}_i(E)\to 0.$$

因此，我们得到一个短正合列

$$0 \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X,E) \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X) \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(E) \to 0.$$

由 (X,E) 和 E 的有效性，我们得到

$$\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X,E) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(X),F(E)) \quad \text{and} \quad \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(E) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(E))$$

由于包含映射和相对同态保持维数分次，我们得到

$$\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(X) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(X)),$$

因此 X 是有效的。 □

3.3. **极大空间的构造**。 接下来，我们讨论若干一般构造分别对极大性和伽罗瓦极大性的影响，这与上一节关于 Kalinin 有效性的讨论相呼应。

作为 K¨unneth 公式和命题2.16 的直接应用，我们有：

命题 3.14。 极大（伽罗瓦极大）对的有限积仍是极大（伽罗瓦极大）对。□

命题 3.15。 设(X,c) 是一个 G-空间， ξ 是定义在 X 上的复向量丛，带有覆盖对合c的反线性对合，而Y 是 ξ 中的一个旗丛，并配备诱导对合。

1) X 是极大空间，当且仅当 Y 是极大空间。2) X 是伽罗瓦极大，当且仅当 Y 是伽罗瓦极大。

证明。 设 $\pi : Y \to X$ 表示投影。由纤维化 $\pi\colon Y \to X$和$\pi_{|F(Y)}\colon F(Y) \to F(X)$的 Leray–Hirsch 定理，我们得到

$$\beta_*(X)\beta_*(\mathrm{Fl}) = \beta_*(Y) \quad \text{and} \quad \beta_*(F(X))\beta_*(F(\mathrm{Fl})) = \beta_*(F(Y)). \tag{3.1}$$

由于 Fl 是极大簇，我们有 $\beta_*(\mathrm{Fl}) = \beta_*(F(\mathrm{Fl}))$。因此，由（3.1）我们推断 X 的极大性等价于Y. 的极大性。最后，第 2) 项的证明直接由 Leray-Hirsch 同构以及命题 2.4 与2.14。 □

3.3.1. 极大爆破。 如同第 3.2.1 节，设（Y， B，c）为一个 G-对，其中 Y 是配备反全纯对合 c 的复流形，且 $B \subseteq Y$ 是复余维至少为 2 的 c 不变复子流形。考虑爆破 $\pi : X \to Y$ （ Y沿 B），并将E 记为例外除子。

命题 3.16. X 为极大，当且仅当 Y 与 B 均为极大。

证明。 令 $d = $余维$_Y^{\mathbb{C}} B$. 由于众所周知的同构

$$H^*(X) \oplus H^*(B) = H^*(Y) \oplus H^*(E),$$
$$H^*(F(X)) \oplus H^*(F(B)) = H^*(F(Y)) \oplus H^*(F(E)),$$

我们得到

$$\mathfrak{D}(X)+\mathfrak{D}(B)=\mathfrak{D}(Y)+\mathfrak{D}(E).$$

另一方面，根据 Leray–Hirsch 定理，我们有

$$\beta_*(E)=d\beta_*(B)\quad\text{and}\quad\beta_*(F(E))=d\beta_*(F(B)),$$

因此

$$\mathfrak{D}(X)=\mathfrak{D}(Y)+(d-1)\mathfrak{D}(B). \tag{3.2}$$

由于 $d\geq 2$ 且史密斯–托姆亏格非负，结论由（3.2）得出。□

我们在本节末尾回顾 Derval 的以下结果 [9]，该结果阐明了伽罗瓦极大性在爆破下的行为。为方便读者，我们简要勾勒一个不同于 Derval 的证明，该证明基于命题 2.16。

命题 3.17。 [9, 命题 3.5] 若 Y 和 B 均为伽罗瓦极大，则 X 也是伽罗瓦极大。

证明。 根据爆破公式，对于每个 $i\geq 0$，都存在一个 G-不变同构

$$H^i(Y)\oplus\bigoplus_{k\geq 1}H^{i-2k}(B)\to H^i(X),$$

由下式给出

$$(y,b_1,b_2,\dots)=\pi^*(y)+\sum_{k\geq 1}j_*(\pi_E^*(b_k)\xi^k)$$

其中 $\pi_E:\ E\to B$ 是 π的限制， E 被识别为 $\mathbb{P}(N_{B|Y})$，而 ξ 表示 $c_1(\mathcal{O}_E(1))$（模 2） $\in H^2(E)$，(例如参见 [29, 定理 7。31] 及其证明）。因此，将命题 2.16 应用于庞加莱˙对偶同构，即得所求结果。□

注 3.18。 一般而言，命题 3.7、3.8、3.9和 3.12中找到的例子虽然有效，却不是共轭空间。这表明有效空间类严格大于共轭空间类。

4. Kalinin effectivity and stretchedness

设 (Y,B,c) 是一个 G-对，其中 Y 是一个配备了反全纯对合 c 的复流形，而 $B\subseteq Y$ 是一个 c-不变的复子流形，其复余维至少为二。正如命题 3.13 所指出的，Kalinin 有效性在爆破下的稳定性要求 G-空间 B 以及 G-对 (Y,B) 都具有有效性。要使 Smith-Thom 极大性和伽罗瓦极大性在爆破下保持稳定，通常假设 B 和 Y. 都具有 Smith-Thom 极大性（分别为伽罗瓦极大性）。本节将介绍一类 G-对 (Y,B)，对于这类对， B 以及 (Y,B) 的 Kalinin 有效性或极大性等价于 B 和 Y.的 Kalinin 有效性或极大性。这将有助于下一节的应用。

在此之前，我们先考虑如下情形：假设 B 和 $(Y,\ B)$ 都具有 Kalinin 有效性和极大性。

命题 4.1. 若 B 和 (Y, B) 均为极大且有效，则 Y 是一个共轭空间。

证明。 由这对 (Y, B) 的正合序列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(Y, B) \to H^i(Y) \to H^i(B) \xrightarrow{\delta^i} \cdots,$$

我们可得总贝蒂数满足

$$\beta_*(Y) = \beta_*(B) + \beta_*(Y, B) - 2\sum_{i\geq 0} \dim \operatorname{Im} \delta^i. \tag{4.1}$$

由于 B 以及 G-对（$Y,\ B$）是有效的，根据命题2.11，对每个$i \geq 0$边缘算子 $\delta^i_{\mathbb{R}}$： $H^i(F(B)) \to H^{i+1}(F(Y)\ F(B))$均为零，因此我们有以下短正合序列：

$$0 \to H^i(F(Y), F(B)) \to\ H^i(F(Y)) \to H^i(F(B)) \to 0, \tag{4.2}$$

因此，总贝蒂数满足

$$\beta_*(F(Y)) = \beta_*(F(B)) + \beta_*(F(Y), F(B)). \tag{4.3}$$

由于 B 以及 G-对（$Y,\ B$）是极大的，我们有

$$\beta_*(F(B)) = \beta_*(B) \quad \text{and} \quad \beta_*(F(Y), F(B)) = \beta_*(Y, B),$$

而Smith不等式给出 $\beta_*(F(Y)) \leq \beta_*(Y)$。 由（4.1）和（4.3）可得

$$\begin{aligned}\beta_*(B) + \beta_*(Y, B) - 2\sum_{i\geq 0} \dim \operatorname{Im} \delta^i &= \beta_*(Y)\\ &\geq \beta_*(F(Y))\\ &= \beta_*(F(B)) + \beta_*(F(Y), F(B))\\ &= \beta_*(B) + \beta_*(Y, B).\end{aligned}$$

因此， Y是极大的，且边界映射 δ^i 对所有 $i \geq 0$.为了证明 Y 是有效的，只需注意到由正合序列（4.2）可得滤过上的诱导短正合序列：

$$0 \to \mathcal{F}_i(Y, B) \to \mathcal{F}_i(Y) \to \mathcal{F}_i(B) \to 0,$$

因此

$$0 \to \operatorname{Sq}^{-1} \mathcal{F}_i(Y, B) \to \operatorname{Sq}^{-1} \mathcal{F}_i(Y) \to \operatorname{Sq}^{-1} \mathcal{F}_i(B) \to 0.$$

由 (Y, B) 和 B 的有效性可得

$$\operatorname{Sq}^{-1} \mathcal{F}_i(Y, B) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(Y), F(B)) \quad \text{and} \quad \operatorname{Sq}^{-1} \mathcal{F}_i(B) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(B)).$$

由于包含和相对同态保持维数分次，因此我们得到

$$\operatorname{Sq}^{-1} \mathcal{F}_i(Y) = H^{\leq \frac{i}{2}}(F(Y)),$$

因此， Y 是有效的。因此，根据命题2.22，由于同时是有效且极大的， Y 是一个共轭空间。□

推论 4.2. 若 B 和 (Y, B) 是极大且有效的， X 是沿 B 对 Y 作的爆破，且 E 是例外除子，那么 X、 E 和 (X, E) 都是极大且有效的。

证明。 该结果由命题 4.1以及命题 3.11、3.13和3.16得出。 □

注 4.3. 命题4.1 的证明表明，当边界映射 G-对的 δ^i 和 $\delta^i_{\mathbb{R}}$ 对每个 $i \geq 0$. 都为零时，Kalinin 有效性和极大性表现同样良好

4.1. **拉伸 G-对**。 设 (X,c) 是一个连通紧复流形，配备有反全纯对合 c。

定义 4.4. 若一个由 X 的 c-不变子空间构成的 G-对 (A, B) 满足对每个 $p \geq 0$, 包含同态

$$\begin{aligned} H^p(A) &\to H^p(B), \\ H^p(F(A)) &\to H^p(F(B)) \end{aligned} \tag{4.4}$$

是满同态。

引理 4.5。 设(A, B) 和(B, C) 是 X. 中两个由 G 给出的c-不变子空间对

1) 如果 G-对(A, C) 是拉伸的，那么 G-对(B, C) 也是拉伸的。2) 如果 G-对(A, B) 和(B, C) 都是拉伸的，那么 G-对(A, C)也是拉伸的。

证明。 设 $i\colon B \to A$, $j\colon C \to B$ 和 $k\colon C \to A$ 表示包含映射，而 $F(i)\colon F(B) \to F(A)$ $F(j)\colon F(C) \to F(B)$ 和 $F(k)\colon F(C) \to F(A)$, 是相应不动点集的包含映射。由函子性可知，对每个 $p \geq 0$，都有以下交换图：

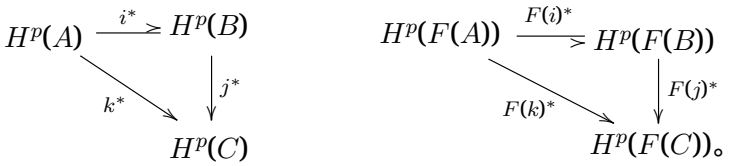


FIGURE 1. 三元组的拉伸性。

由于 $j^* \circ i^* = k^*$和 $F(j)^* \circ F(i)^* = F(k)^*$, 引理的结论便得证。 □

命题 4.6。 设(Y, B) 是一个拉伸的 G-对。那么

1) 如果 Y 和 B 是有效的，那么(Y, B) 是有效的。
2) 如果 B 和(Y, B) 是有效的，那么 Y 是有效的。

3) 如果 Y 和(Y,B) 是有效的，那么 B 是有效的。

证明。 由于 G-对（Y， B）是拉伸的，对于每个整数 $i \geq 0$，我们都有一个短正合列

$$0 \to H^i(F(Y), F(B)) \to H^i(F(Y)) \to H^i(F(B)) \to 0. \tag{4.5}$$

应用卡利宁谱序列，对于每个 $i \geq 0$，我们得到一个短正合列

$$0 \to \mathcal{F}_i(Y,B) \to \mathcal{F}_i(Y) \to \mathcal{F}_i(B) \to 0.$$

因此，我们有一个短正合列

$$0 \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y,B) \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y) \to \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(B) \to 0. \tag{4.6}$$

由于包含映射和相对同态保持维数分次，由短正合序列（4.5）和（4.6）可推知，以下三个关系中若有两个成立，

$$\begin{aligned}\mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y,B) &= H^{\leq i/2}(F(Y,B)),\\ \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(Y) &= H^{\leq i/2}(F(Y)),\\ \mathrm{Sq}^{-1}\mathcal{F}_i(B) &= H^{\leq i/2}(F(B))\end{aligned}$$

则第三个也成立。 □

Smith-Thom 极大性也有类似的结果:

命题4.7。 设(Y,B) 是一个拉伸的 G-对。则

1) 若 Y 和 B 是极大的，则(Y,B) 是极大的。2) 若 B 和 (Y,B) 是极大的，则 Y 是极大的。3) 若 Y 和 (Y,B) 是极大的，则 B 是极大的。

证明。 根据假设，对每个 $i \geq 0$，我们都有短正合序列

$$\begin{aligned}0 \to H^i(Y,B) \to H^i(Y) \to H^i(B) \to 0\\ 0 \to H^i(F(Y),F(B)) \to H^i(F(Y)) \to H^i(F(B)) \to 0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

因此，我们得到

$$\beta_*(Y) = \beta_*(B) + \beta_*(Y,B) \text{ and } \beta_*(F(Y)) = \beta_*(F(B)) + \beta_*(F(Y,B)),$$

结论随即成立。 □

以下例子表明，命题4.6和4.7 对于伽罗瓦极大性并不存在直接的类比。

例 4.8. 设 (Y, c) 为二次椭球，即配备了反全纯对合、其不动点集同胚于S^2 的 $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，并设 B 为一个没有实点的超平面截面。在这种情况下，我们可以立即看出，(Y,B) 是拉伸的。根据命题 3.8， Y 是伽罗瓦极大的。此外，(Y,B) 的伽罗瓦极大性等价于 $Y \setminus B$. 的伽罗瓦极大性。后者可通过 G-等变变形收缩到 $(F(Y), \mathsf{c} = \mathrm{Id})$，由于 c 的作用是恒等变换，因此它是伽罗瓦极大的。因此，(Y,B) 是伽罗瓦极大的。然而， B 并非伽罗瓦极大，因为 $F(B) = \emptyset$.

例 4.9. 设 (B,c_B) 为二次椭球，并考虑配备对合 $\mathrm{c}^{[-1,1]}(t) = -t$. 的区间 $[-1,1]$ 。令 Y 由 B 和 $[-1,1]$ 通过将一对 $\{\pm 1\}$ 与 B的纯虚超平面截面 H 上的一对共轭复点识别而得到。我们在 Y 上赋予由 c_B 和 $\mathrm{c}^{[-1,1]}\cdot$ 诱导的对合 c。于是 (Y,B) 是一个伽罗瓦极大G-对，因为限制在 $Y\setminus B=(-1,1)$上的对合 $\mathrm{c}^{[-1,1]}$ 是极大的。请注意，尽管 B 也是伽罗瓦极大的， Y 却不是伽罗瓦极大的。事实上，若 $\xi\in H_1(Y)$ 是由区间 $[-1,1]$ 与 H中的一条子午线闭合而成的 1-循环， 那么第二页上的 Kalinin 微分为

$$d^2(\xi)=[H]\neq 0\in {}^2H_2=H^1(G,H_2(Y))=\mathbb{F}_2[H].$$

还应注意，在这个例子中， G-对（Y， B）是拉伸的。

4.2. **关于拉伸性的缺失**。一般而言，在缺乏拉伸性的情况下，命题 4.6 和 4.7中分别体现出的 Kalinin 有效性和极大性的行为并不成立，以下例子将说明这一点。这些例子表明，拉伸性并非仅仅是技术性条件，而是在第 5 节和第 6节所讨论的情形中确实不可或缺。

例子 4.10. 设 $Y=\mathbb{CP}^2$ 赋有标准共轭，并设 $B\subseteq\mathbb{CP}^2$ 是非空实圆锥曲线。则， G-对（Y， B）不是拉伸的，而 Y和 B均有效。然而，由于 $F(Y\setminus B)$ 不连通，我们可知 G-对（Y， B）无效。

例 4.11. 设 (Y,c) 为二次椭球， B 为一个具有实点的非奇异超平面截面。则， B 和对 (Y,B) 是极大的，而 Y不是。注意，在此情形下，映射 $H^1(F(Y))\to H^1(F(B))$ 是零映射，因此对 (Y,B) 不是拉伸的。

4.3. **保持拉伸性的构造**。 我们以两个结果结束本节，它们讨论了下一节应用中相关的两种情形下拉伸性的表现。

命题 4.12. 设 (Y,c) 是一个配备反全纯对合的紧复流形，且 $Z\subseteq Y$ 是一个 c-不变子流形。若 $\mathcal{E}$是一个配备覆盖对合 c 的反线性对合$\hat{}$c的全纯向量丛 Y，且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$ 的一个$\hat{}$c-不变子丛，则：

1) G对$(\mathbb{P}(\mathcal{E})\ \mathbb{P}(\mathcal{F}))$ 是拉伸的。2) 如果$(Y,\ Z)$ G对是拉伸的，那么 G对$(\mathbb{P}(\mathcal{E})\ \mathbb{P}(\mathcal{E})_{|Z})$ 也是拉伸的。

证明. 两项均为 Leray–Hirsch 定理的直接推论，因为 $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ 与 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{|Z})$ 的重言丛是 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 的重言丛的限制。 特别地，上同调上的限制映射在每一次数上均为满射，在复轨迹与实轨迹上皆然，故由定义 4.4，这些对是拉伸的。□

命题 4.13. 设 (Y,c) 为配备反全纯对合的紧致连通复流形，且 Z 为 c 不变子流形~，即 $Y.$ 的子流形。若 G 对 (Y,Z) 是拉伸的，则 G 对 (Y,E) 是拉伸的，~其中 Y 是 Y 沿 Z 的爆破，而 E 是该爆破的例外除子。

~证明。令 $\pi:\ Y\to Y$ 为爆破映射，并记 $i:\ Z\to Y$ 和~$j:\ E\to Y$ 为包含映射。由 Leray–Hirsch 定理，对于每个$p\geq 0$ 和 $x\in H^p(E)\ =H^p(\mathbb{P}($ $N_{Z|Y}))$，我们有

$$x=\sum_{i+2k=p}(\pi^*a_i)\xi^k,$$

其中 $\xi=c_1(\mathcal{O}_E(1))\ (\mathrm{mod}\ 2)\ \in H^2(E)$ 且 $a_i\in H^i(Z)$。现在注意到$c_1(\mathcal{O}_E$ $(1))\ =j^*\eta,$ 其中 $\eta=c_1(\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-E))\ \in H^2(\widetilde{Y})$。此外，由于 $(Y,\ Z)$ 是拉伸的，对于每个 $i\geq 0$ ，都存在 $b_i\in H^i(Y)$，使得 $b_i=i^*(a_i)$。因此

$$x=\sum_{i+2k=p}\pi^*a_i\xi^k=\sum_{i+2k=p}(\pi^*i^*b_i)(j^*\eta)^k=j^*(\sum_{i+2k=p}(\pi^*b_i)\eta^k)\in H^p(\widetilde{Y}),$$

~因此包含同态 $j^*:\ H^p(Y)\ \to H^p(E)$ 是满射。

为证明包含同态 $H^p(F(E))\to H^p(F(\widetilde{Y}))$ 的满射性，我们以类似的方式进行。再次利用 Leray–Hirsch 定理，对每一个 $p\geq 0$ 以及

$$x\in H^p(F(E))=H^p(F(\mathbb{P}(N_{Z|Y})))=H^p(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(N_{F(Z)|F(Y)})),$$

我们得到

$$x=\sum_{i+k=p}(\pi^*a_i)\xi^k,$$

其中 $a_i\in H^i(F(Z))$ 与 $\xi=w_1(\mathcal{O}_{F(E)}(1))\ \in H^1(F(E))$。接下来我们注意到 w_1 $(\mathcal{O}_E(1))\ =j^*\eta,$ 其中 $\eta=w_1(\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}(-E))\ \in H^1(F(\widetilde{Y}))$。此外，由于 $(Y,\ Z)$ 是拉伸的，对每一个 $i\geq 0$ 存在 $b_i\in H^i(F(Y))$ 使得 $b_i=i^*(a_i)$。因此

$$x=\sum_{i+k=p}\pi^*a_i\xi^k=\sum_{i+k=p}(\pi^*i^*b_i)(j^*\eta)^k=j^*(\sum_{i+k=p}(\pi^*b_i)\eta^k)\in H^p(F(\widetilde{Y})).$$

~因此，映射 $j^*:\ H^p(F(Y))\ \to H^p(F(E))$ 是满射。 □

5. Wonderful Compactifications

设 X 是一个紧致连通复流形。 X 中的子流形配置 $\mathcal{A}$ 是 $X,$ 中子流形的一个有限集合（不一定连通），满足对每个 $A,\ B\in\mathcal{A}$ 都有 $A\cap B\in\mathcal{A}$ ，且它们的切丛满足 $T(A\cap B)\ =TA\cap TB,$ 即 A与 B干净相交。

定义 5.1。 设(X,c) 是一个配备反全纯对合的紧致连通复流形。X 中的子流形配置 $\mathcal{A}$ 称为一个 G-配置，如果对每个 $A \in \mathcal{A}$都有$\mathrm{c}(A) = A$ 。

接下来，我们引入一种 G等变版本的李关于配置之奇妙紧化的构造。以下定义是对 [25,定义 2。2]的改编，适用于我们的 G等变情形。

定义 5.2。 设 (X,c) 是一个配备反全纯对合的紧致连通复流形。 $\mathcal{B}$ 称为 X 中子流形的一个 G-配置的 $\mathcal{A}$子集；若对每个 $A \in \mathcal{A}$，$\{B \in \mathcal{B} : B \supseteq A\}$ 的极小元横截地相交，且它们的交为 $A.$，则称其为 G-构建集 $\mathcal{A}$ 。

定义 5.3。 设 (X,c) 是一个配备反全纯对合的紧致连通复流形。 $\mathcal{B}$ 称为 X 的有限个c-不变子流形组成的集合；若由 $\mathcal{B}$ 中子流形的各类交集构成的集合形成一个 G-配置 $\mathcal{A}$，且该 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}.$ 的一个 G-构建集，则称其为 G-构建集。在这种情况下， $\mathcal{A}$ 称为由配置诱导的$\mathcal{B}.$

对于 X中子流形的任意 G-配置 $\mathcal{A}$ ，我们定义

$$X^\circ := X \setminus \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$

如果 $\mathcal{B}$ 是 G-配置 $\mathcal{A}$的一个 G-构建集，则我们有

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \quad \text{and} \quad \bigcup_{B\in\mathcal{B}} F(B) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} F(A),$$

从而

$$X^\circ = X \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \quad \text{and} \quad F(X^\circ) = F(X) \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{B}} F(B).$$

我们定义（参见 [25, 定义1.1]）由一个 G-构建集 $\mathcal{B}$ 诱导的 X°的美妙紧化如下:

定义5.4. 设$(X,\ \mathrm{c})$ 是带有反全纯对合的紧致连通复流形，且 $\mathcal{B}$ 是 $X.$中子流形的一个 G-构建集，对角嵌入的像的闭包

$$X^\circ \hookrightarrow \prod_{B\in\mathcal{B}} \mathrm{Bl}_B X,$$

称为由 $\mathcal{B}$诱导的配置的美妙紧化，并记为 $X_{\mathcal{B}}$。

定义 5.5. 设 X 是一个紧致连通复流形，且 $\pi : Bl_C X \to X$ 是沿子流形 $C.$ 对 X 进行的爆破。对于任意解析 $\widetilde{}$ 子空间 $V \subseteq X$， V 的主变换记为 V，定义为：若 $V \not\subseteq C$，则为 V 的严格变换；若 $V \subseteq C.$，则为 $\pi^{-1}(V)$ 。

命题 5.6. 设 (X,c) 是一个配备反全纯对合的紧致连通复流形， $\mathcal{B}$ 是一个 G-建筑集，其诱导的 G-子流形配置为 $\mathcal{A}$，且位于 X. 中。设 F 是 $\mathcal{B}$ 中的一个极小元，并设 $\pi : \mathrm{Bl}_F X \to X$ 是沿 F. 对 X 进行的爆破。将例外除子记为 E.。

1) 由 $\mathcal{A}_F$ 个子流形组成的集合，位于 $\mathrm{Bl}_F X$ 中，定义为
$$\mathcal{A}_F := \{\widetilde{A}\}_{A\in\mathcal{A}} \cup \{\widetilde{A}\cap E\}_{A\in\mathcal{A},\,\emptyset\subsetneq A\cap F\subsetneq A}$$
是 $\mathrm{Bl}_F X$. 中的一个 G-子流形配置
2) $\mathcal{B}_F := \{\widetilde{B}\}_{B\in\mathcal{B}}$ 是 $\mathcal{A}_F$. 的构建集

证明。证明由 [25, 命题 28], 可知，注意到由于 X配备了一个反全纯对合 c，且 F 是 X 的 c- 不变子流形，因此爆破 $\mathrm{Bl}_F X$ 自然地带有诱导的反全纯对合 $\hat{}\mathrm{c}$，而 c-不变子流形的主变换也是 $\hat{}\mathrm{c}$-不变的。□

我们将 $\mathcal{A}_F$和 $\mathcal{B}_F$分别称为 爆破 G-配置及其 爆破 G-构建集。

设 (X,c) 是一个配备反全纯对合的紧致连通复流形， $\mathcal{A}$ G-子流形配置位于 X中，且$\mathcal{B} = \{B_1,\dots,B_N\}$ G-构建集属于 $\mathcal{A}$.。现在我们描述通过沿构建集中的元素依次进行爆破来构造美妙紧化的标准迭代过程。

对于每个 $k = 0,\dots,N$，我们归纳地定义一个三元组
$$(X_k, \mathcal{A}^{(k)}, \mathcal{B}^{(k)})$$
由一个配备反全纯对合的紧致连通复流形（X_k，c_k）、一个 G子流形配置 $\mathcal{A}^{(k)}$ 以及一个 G构建集 $\mathcal{B}^{(k)}$组成，如下所示：

(i) 对于 $k = 0$，定义 $X_0 = X$、 $\mathcal{A}^{(0)} = \mathcal{A}$、 $\mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{B}$。
(ii) 假设（X_{k-1}， $\mathcal{A}^{(k-1)}$， $\mathcal{B}^{(k-1)}$）已构造完成。
- 定义 X_k 为沿子流形 $B_{(k-1)\,k}$,对 X_{k-1} 进行的爆破，并将例外除子记为 $E_{(k)}$ 。
- 对于每个 $B \in \mathcal{B}_{(k-1)}$，令 $B_{(k)}$ 表示其在 X_k中的主变换，并定义
$$\mathcal{B}^{(k)} := \{B^{(k)}\}_{B\in\mathcal{B}^{(k-1)}}.$$
- 定义由下式给出的 X_k 的子流形集
$$\mathcal{A}^{(k)} := \{\widetilde{A}\}_{A\in\mathcal{A}^{(k-1)}} \cup \{\widetilde{A}\cap E^{(k)}\}_{\emptyset\subsetneq A\cap B_k^{(k-1)}\subsetneq A}.$$
由于 $B_k^{(k-1)}$ 假设为 c_{k-1}-不变，根据命题5.6 和 [25,命题 2。8], $\mathcal{A}^{(k)}$ 是 G中的一个 X_k子流形配置，且带有诱导的反全纯对合 c_k ，并且 $\mathcal{B}^{(k)}$是 G的一个 $\mathcal{A}^{(k)}$.-构建集。

（iii）继续进行归纳构造，直到 $k = N$。我们得到

$$(X_N, \mathcal{A}^{(N)}, \mathcal{B}^{(N)})$$

其中，构建集 $\mathcal{B}^{(N)}$ 中的所有子簇都是除子。

我们定义

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X := X_N, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{B}} := \mathcal{A}^{(N)}, \quad \widetilde{\mathcal{B}} := \mathcal{B}^{(N)}.$$

根据构造，$\mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X$ 是一个配备反全纯对合的紧复流形，并且 $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ 是由 G-构建集 $\mathcal{B}$.在$\widetilde{\ }\mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X$ 中诱导的 G-子流形配置

以下定理总结了奇妙紧化的基本性质，它是 [25, 命题 2.13、定理 1.2 和定理 1.3]的直接推论：

定理 5.7。 设(X,c) 是一个配备反全纯对合的紧复流形，且具有一个非空的 G-构建集 $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$，并设

$$X^\circ = X \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i.$$

于是：

1) $\mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X$ 是由 G-构建集 $\mathcal{B}$.诱导的 G-配置的美妙紧化。2) 对于每个 $B_i \in \mathcal{B}$，存在一个光滑除子 $D_{B_i} \subset \mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X$，使得$_{N}$ $D_{\mathcal{B}} = \bigcup D_{B_i} = \mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X \setminus X^\circ$，且 $D_{\mathcal{B}}$ 是一个正规交叉除子。$_{i=1}$3)令 $\mathcal{I}_i$ 为 $B_i \in \mathcal{B}$的理想层。美妙紧化$\mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X$ 同构于沿理想层$\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\cdots\mathcal{I}_N$对 X 进行的爆破。4) 如果我们以某种顺序排列 $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$，使得前 i项 B_1，.....，B_i 对任意 $1 \le i \le N$都构成一个 G-构建集，那么

$$\mathrm{Bl}_{\mathcal{B}} X = \mathrm{Bl}_{\widetilde{B}_N} \cdots \mathrm{Bl}_{\widetilde{B}_2} \mathrm{Bl}_{B_1} X, \tag{5.1}$$

其中每次爆破都沿着一个光滑子簇进行。 □

5.1. **拉伸的 G-配置**。

定义 5.8。 设（X，c） 是一个配备了反全纯对合的紧复流形，且 $\mathcal{A}$ 是 X. 中的一个 G-子流形配置

1）如果对于任意 $A \in \mathcal{A}$，包含同态均成立，则称 G-配置 $\mathcal{A}$ 为拉伸的

$$\begin{aligned} H^p(X) &\to H^p(A), \\ H^p(F(X)) &\to H^p(F(A)) \end{aligned} \tag{5.2}$$

是满射。

2) 如果 X 和每个 $A \in \mathcal{A}$ 分别是有效、极大或伽罗瓦极大，则称 G-配置 $\mathcal{A}$ 为有效、极大或伽罗瓦极大。

注 5.9. 若 G-配置 $\mathcal{A}$ 是拉伸的，则由引理 4.5 可知，对于任意 A, $B \in \mathcal{A}$ 使得 $B \subseteq A$, 该 G-对 (A, B) 是拉伸的。

命题 5.10. 设(X,c) 是一个配备反全纯对合的紧复流形， $\mathcal{A}$ 是 X中的子流形 G-配置，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$的 G-构建集，并设 $B \in \mathcal{B}$ 是关于包含关系的一个极小元。考虑爆破 $\pi : \mathrm{Bl}_B X \to X$. 中的爆破 G-配置 $\mathcal{A}_B$ 。则

1) 若 G-配置 $\mathcal{A}$ 是拉伸的，则爆破 G-配置$\mathcal{A}_B$ 也是拉伸的。2) 若 G-配置 $\mathcal{A}$ 是拉伸且有效的，则爆破G-配置 $\mathcal{A}_B$ 是有效的。3)若 G-配置 $\mathcal{A}$ 是极大或伽罗瓦极大的，则爆破 G-配置 $\mathcal{A}_B$ 分别是极大或伽罗瓦极大的。

证明。令 $i : A \to X$ 和 $j : B \to X$ 表示包含映射。我们用 $E = \mathbb{P}(N_{B|X})$ 表示爆破的例外除子，并用 $\widetilde{A}$ 表示 A. 的主变换。令 $j\colon E \to \mathrm{Bl}_B X$ 和 $i\colon A \to \mathrm{Bl}_B X$ 为包含映射， π_A, f_B 以及 f_A 分别为 π 在 A 和 E上的限制。它们导出如下交换图表:

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{A} & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \mathrm{Bl}_B X & \xleftarrow{\widetilde{j}} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} \\ A & \xrightarrow[i]{} & X & \xleftarrow[j]{} & B. \end{array} \tag{5.3}$$

回顾一下，$\mathrm{Bl}_B X$ 上的爆破配置 $\mathcal{A}_B$ 定义为

$$\mathcal{A}_B = \{\widetilde{A}\}_{A\in\mathcal{A}} \cup \{\widetilde{A} \cap E\}_{\emptyset\subsetneq A\cap B\subsetneq A}.$$

在继续之前，请注意，若 B 和 X 是有效、极大或伽罗瓦极大的，那么根据命题 4.6、3.13、3.16、3.17，我们可得 $\mathrm{Bl}_B X$ 分别是有效、极大或伽罗瓦极大的。我们同时证明这三个结论。由于拉伸性涉及限制映射的满射性，我们考察爆破配置 $\mathcal{A}_B$中出现的每个子流形。这将根据 $A \in \mathcal{A}$ 相对于爆破中心 B的位置关系，分为四种情形。

情形 *1*: $A \cap B = \emptyset$.

由于 $A \cap B = \emptyset$, 映射 π_A^* 是恒等映射，因此 $i^* = i^* \circ \pi^*$. G-对 (X, A) 的拉伸性意味着映射 i^* 是满射，

因此 i^* 也是满射。类似地，我们发现 $H^*(F(\mathrm{Bl}_B X)) \to H^*(F(A))$ 是满射，这表明 G-对 $(\mathrm{Bl}_B X,\ A)$ 是拉伸的。

还需注意，由于映射 π_A^* 是恒等映射，若 A有效、极大或伽罗瓦极大，则 A 也满足相应性质。

情形 2: $A \subseteq B$.

在这种情形下，$\widetilde{A} = \pi^{-1}(A)$ 与射影化法丛$\mathbb{P}(N_{B|X}|_A) \subseteq E$相同。由引理 4.5 和 4.13可知，只需证明 G-对(E, A) 是拉伸的。然而，由于 $E = \mathbb{P}(N_{B|X})$，由引理 4.12 即得。

若 A 有效，由命题 3.11 可得$A = \mathbb{P}(N_{B|X}|_A) \subseteq E$，因此 $A \cap E = A$ 也有效。类似地，若 A 极大或伽罗瓦极大，则由命题 3.15， A 因此 $A \cap E = A$也极大或伽罗瓦极大。

情形 3: $B \subseteq A$.

令 $\ell : B \to A$ 表示包含。在此情形下， A 是沿着 B 对 A 进行爆破所得的空间，而 $A \cap E$ 是例外除子 $E_A = \mathbb{P}(N_{B|A})$。注意，我们有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccc} E_A & \xrightarrow{\widetilde{\ell}} & \widetilde{A} & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \mathrm{Bl}_B X \\ {\scriptstyle f_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B & \xrightarrow[\ell]{} & A & \xrightarrow[i]{} & X, \end{array} \tag{5.4}$$

其中 $\ell : E_A \to A$ 表示包含，而 $f_A : E_A \to B$ 是 π 在 E_A. 上的限制

我们首先证明 G-对 $(\widetilde{A}, E_A)$ 是拉伸的。注意 $N_{B|A}$ 是 $N_{B|X}$ 的全纯子丛，并且由于 A 和 B 在 c 下不变，它带有一个反线性对合，该对合覆盖 c 在 B 上的限制。因此，根据引理 4.12， G-对 (E, E_A) 是拉伸的。由于 $A \cap E = E_A$，利用引理 4.5和 4.13，现在可以看出 G-对 $(\mathrm{Bl}_B X, A \cap E)$ 是拉伸的。

为了证明 G-对 $(\mathrm{Bl}_B X,\ A)$ 是拉伸的，令 R 为多项式环 $\mathbb{F}_2[v]$，其中 v 的次数为 2，并考虑图表

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) \otimes R & \xrightarrow{\phi_X} & H^*(\mathrm{Bl}_B X) \\ {\scriptstyle i^* \otimes Id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{i}^*} \\ H^*(A) \otimes R & \xrightarrow[\phi_A]{} & H^*(\widetilde{A}). \end{array} \tag{5.5}$$

水平映射由下式给出

$$\phi_X(x\otimes v^r)=\begin{cases}\pi^*x, \text{ if } r=0\\ \widetilde{j}_*(f_B^*j^*x\cup\xi^r), \text{ if } r>0\end{cases} \tag{5.6}$$

and

$$\phi_A(a\otimes v^r)=\begin{cases}\pi_A^*a, \text{ if } r=0\\ \widetilde{\ell}_*(f_A^*\ell^*a\cup\xi_A^r), \text{ if } r>0,\end{cases} \tag{5.7}$$

其中， ξ 和 ξ_A 分别表示 E 和 E_A的典范线丛的第一陈类模 2 约化。

首先证明图表（5.5）是交换的。事实上，当$r=0$，由于图表（5.4）的交换性，对于每个 $x\in H^*(X)$，我们有

$$\widetilde{i}^*\phi_X(x\otimes 1)=\widetilde{i}^*\pi^*x=\pi_A^*i^*x=\phi_A(i^*x\otimes 1).$$

对于 $r>0$的情况，我们回顾两个众所周知的结果：

1）若 $[E]$ 和 $[E_A]$ 分别表示 $\mathrm{Bl}_B\,\widetilde{X}$中的 E 和 E_A 的上同调类，以及 A，则

$$\widetilde{i}^*[E]=[E_A], \tag{5.8}$$

2）对于每个 $r\geq 0$，我们有

$$\widetilde{j}_*\xi^r=[E]^{r+1}\quad\text{and}\quad\widetilde{\ell}_*\xi_A^r=[E_A]^{r+1}. \tag{5.9}$$

利用图表 (5.3) 和 (5.4) 的交换性、公式 (5.8) 和 (5.9)，以及投影公式，对于每个 $r>0$ 和 $x\in H^*(X)$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{i}^*\phi_X(x\otimes v^r)&=\widetilde{i}^*(\widetilde{j}_*(f_B^*j^*x\cup\xi^r))\\ &=\widetilde{i}^*(\widetilde{j}_*(\widetilde{j}^*\pi^*x\cup\xi^r))\\ &=\widetilde{i}^*(\pi^*x\cup[E]^{r+1})\\ &=(\widetilde{i}^*\pi^*)x\cup[E_A]^{r+1}\\ &=({\pi_A}^*i^*)x\cup[E_A]^{r+1}.\end{aligned}$$

类似地，我们计算

$$\begin{aligned}\phi_A(i^*x\otimes v^r)&=\widetilde{\ell}_*(f_A^*\ell^*i^*x\cup\xi_A^r)\\ &=\widetilde{\ell}_*(\widetilde{\ell}^*\pi_A^*i^*x\cup\xi_A^r)\\ &=(\pi_A^*i^*)x\cup[E_A]^{r+1}\\ &=\widetilde{i}^*\phi_X(x\otimes v^r),\end{aligned}$$

这表明图表 (5.5) 是交换的[5]。

根据 [14, 定理 3。11], 爆破的上同调由来自底空间的类的拉回与例外除子的幂共同生成

[5]同样的论证可证明图表 (5.5) 在系数取值于 $\mathbb{Z}$时也是交换的。

除子类，因此映射 ϕ_X 和 ϕ_A 均为满射。由于限制映射 i^* 是满射，根据图表（5.5）的交换性，我们可得˜映射 i^* 也是满射。

˜为证明限制映射 $F(i^*)\colon H^*(F(\mathrm{Bl}_B X))$ $\to H^*(F(A))$ 是满射，我们以类似方式进行。关键要素同样是定理 3.11，见 [14]。如 [14, 第 5], 节所指出的，该结果对实爆破同样成立，其中变量 v 的次数重置为一，且第一陈类替换为第一施蒂费尔-惠特尼类。其余˜论证与用于证明 i^*的满射性的论证相同，因此不再重复。

若 G-配置是有效的，则 A与 B 是有效的。因此，由˜命题 4.6， G-对（A， B）是有效的。由于在我们的情形中， A 是 A 沿 B 的˜爆破，且 $A \cap E$ 是例外除子 $E_A = \mathbb{P}$（$N_{B|A}$），由˜命题 3.13， A是有效的。此外，由于 $A\cap E = \mathbb{P}$（$N_{B|A}$）与˜B是有效的，由命题 3.11 我们得出 $A\cap E$也是有效的。

类似地，如果 G-配置是极大或伽罗瓦极大的，则 A 与B 分别是极大或伽罗瓦极大的。通过应用命题3.16 于极大情形，以及命题3.17 于伽罗瓦极大情形，˜我们看到 A 分别是极大或伽罗瓦极大的。极大性˜，或伽罗瓦极大性之于 $A \cap E = \mathbb{P}(N_{B|A})$，是命题3.15的推论。

Case 4: $\emptyset \subsetneq A \cap B \subsetneq A$ and $B \not\subseteq A$.

˜在此情形下， A 是 A 沿 $A \cap B$ 与 $E_A = \mathbb{P}(N_{A\cap B|A})$的爆破。设 $g\colon$ $A \cap B \to A$ 与 $k\colon$ $A \cap B \to X$ 表示这些包含映射。

注意，我们有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} E_A & \xrightarrow{\widetilde{g}} & \widetilde{A} & \xrightarrow{\widetilde{i}} & \mathrm{Bl}_B X \\ \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A \cap B & \xrightarrow[g]{} & A & \xrightarrow[i]{} & X, \end{array} \tag{5.10}$$

˜其中 $\widetilde{g}\colon$ $E_A \to A$ 表示该包含，且如前， $f_A\colon$ $E_A \to B$ 是 π 到 E_A.的限制

与前一种情况一样，只需证明 G-对（$\mathrm{Bl}_B X, E_A$）是拉伸的。˜然而，由于 A 和 B 交叠干净， $N_{A\cap B|A}$ 是 $N_{B|X}$ 在 $A \cap B$. 上的限制所成的全纯向量子丛。因此，应用引理4.12可知， G-对（E， E_A）确实是拉伸的。

~为了证明（$\mathrm{Bl}_B X$， A）是拉伸的，我们沿用前一种情形的做法，考察图表（5.5）

$$\begin{array}{ccc} H^*(X)\otimes R & \xrightarrow{\phi_X} & H^*(\mathrm{Bl}_B X) \\ \downarrow{\scriptstyle i^*\otimes Id} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{i}^*} \\ H^*(A)\otimes R & \xrightarrow[\phi'_A]{} & H^*(\widetilde{A}), \end{array} \tag{5.11}$$

其中映射 ϕ_X 按（5.6）中的定义，而映射ϕ'_A 定义为

$$\phi'_A(a\otimes v^r)=\begin{cases}\pi_A^* a, \text{ if } r=0\\ \widetilde{g}_*(f_A^* g^* a\cup \xi_A^r), \text{ if } r>0,\end{cases} \tag{5.12}$$

其中 ξ_A 的典范线丛第一陈类的模 2 约化 E_A，分别。利用图表（5.10）的交换性和投影公式，对于每个 $r>0$ 和 $x\in H^*(X)$，有

$$\begin{aligned}\phi'_A(i^*x\otimes v^r)&=\widetilde{g}_*(f_A^* g^* i^* x\cup \xi_A^r)\\ &=\widetilde{g}_*(\widetilde{g}^*\pi_A^* i^* x\cup \xi_A^r),\\ &=(\pi_A^* i^*)x\cup [E_A]^{r+1}\\ &=\widetilde{i}^*\phi_X(x\otimes v^r),\end{aligned}$$

而与前一种情况一样，

$$\widetilde{i}^*\phi_X(x\otimes 1)=\widetilde{i}^*\pi^* x=\pi_A^* i^* x=\phi_A(i^* x\otimes 1),$$

这证明图表（5.11）是交换的。根据 [14, 定理 3。11] 映射 ϕ_X 和 ϕ'_A 都是满射。由于 G-对（X， A）是拉伸的，因此~映射 i^* 是满射，这意味着映射 i^* 也同样是满射。

证明映射 $F($ $\widetilde{i^*})$: $H^*(F(\mathrm{Bl}_B X))\to H^*(F($ ~ $A))$ 是满射的论证与前一种情形相同，因此不再重复。

由于 G-配置 $\mathcal{A}$ 是有效的，因此 A 和 $A\cap B$（它们都属于 $\mathcal{A}$）也是有效的。由命题 4.6 可知， G-对~$(A, A\cap B)$ 是有效的，因此根据命题 3.13，我们得到 A 是有效的。~此外，由于 A 与 B 相交干净，因此 $A\cap E=\mathbb{P}(N_{A\cap B|A})$。由于 $A\cap B$ 的有效性以及引理 4.12，它是一个有效的 G-空间。

类似地，如果该 G-配置是极大或伽罗瓦极大的，那么 A， B~和 $A\cap B$ 分别是极大或伽罗瓦极大的。由于 A 是沿着~对 A 进行的 $A\cap B$爆破，因此 A 根据命题3.16 是极大的；根据命题3.17则是伽罗瓦极大的。由命题~可知，$A\cap E=\mathbb{P}(N_{A\cap B|A})$ 的极大性或伽罗瓦极大性3.15。 □

定理 5.11。 设 $\mathcal{A}$ 是紧致连通复流形 X 中的一个子流形 G-配置，$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$ 是构建集，而 $(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}})$ 是其美妙紧化。那么：

1）若配置 $\mathcal{A}$ 是拉伸的，则 G-配置 $(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}})$也是拉伸的。2）若 G-配置 $\mathcal{A}$ 是极大或伽罗瓦极大的，则 G- 配置 $(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}})$ 分别是极大或伽罗瓦极大的。3）若 G-配置 $\mathcal{A}$ 是拉伸且有效的，则 G-配置$(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}})$ 是有效的。

证明。 设 $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_N\}$是 $\mathcal{A}$.定理 5.11 的证明对 N. 配置 $\mathcal{A}$ 进行归纳。如果该配置5.10 是拉伸的，根据命题，每次沿构建集中的一个元素进行爆破时，所得的 G-配置都是拉伸的。反复进行上述操作，所得的 G-配置（$X_{\mathcal{B}}$， $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$）是拉伸的，从而证明第一项。

第二项分别由命题 3.16 和命题 3.17得出；这两个命题分别表明，沿光滑的极大（伽罗瓦极大）中心对极大（伽罗瓦极大）流形进行爆破时，Smith-Thom 极大性（伽罗瓦极大性）得以保持。

第三项通过反复应用命题5.10得出。 □

作为定理5.11的直接推论，我们得到：

推论 5.12. 如果 G-配置 $\mathcal{A}$是拉伸的、极大的且有效的，那么 $X_{\mathcal{B}}$ 是一个共轭空间。

6. Examples

本节将通过把上文得到的一般结果应用于若干自然的几何构造，来加以说明。

6.1. **子空间配置的美妙紧化——定理 A 的证明。** 设 $\mathbb{P}^n$ 是赋有标准共轭 c 的复射影空间，且 $\mathcal{A}$ 是由有限个 $\{L_i\}_{i\in I}$ c-不变线性子空间生成的配置。那么，对于每个 $i \in I$，G-对 $(\mathbb{P}^n, L_i)$ 都是拉伸的，而 $\mathbb{P}^n$ 以及每个 L_i 根据定理 3.4都是共轭空间。在这种情况下，直接应用推论 5.12，即可证明定理 A。

6.2. **带标记点的实稳定有理曲线模空间——定理 B 的证明。** 德利涅-芒福德模空间 $\mathcal{M}_{0,n}$由 n点标记的、算术亏格为 0 的稳定曲线的同构类组成，

$$((C, J); p_1, \ldots, p_n),$$

其中 C 是由光滑球面构成的底层树， J 是 C 上的复结构，而 p_1、.....、$p_n \in C$ 是标记点。对于置换群 S_n 中的每个元素 σ，我们都有一个全纯双射$g_\sigma : \mathcal{M}_{0,\ n} \to \mathcal{M}_{0,\ n}$,

$$g_\sigma((C, J); p_1, \ldots, p_n) = ((C, J); \sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_n)),$$

以及一个双射 $\mathrm{c}_\sigma : \overline{\mathcal{M}_{0,\ n}} \to \overline{\mathcal{M}_{0,\ n}}$,

$$\mathrm{c}_\sigma((C, J); p_1, \ldots, p_n) = ((C, -J); \sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_n)),$$

它是反全纯的。根据 Bruno 和 Mella [2], 对于每个$n \geq 5$ ， 全纯自同构群 Aut($\mathcal{M}_{0,\ n}$) 由g_σ、 $\sigma \in S_n$组成。注意， $\mathrm{c}_{\mathrm{Id}} \circ g_\sigma = \mathrm{c}_\sigma$ 是对合当且仅当 $\sigma^2 = \mathrm{Id}$。这意味着$\mathcal{M}_{0,\ n}$ 上的实结构集恰好由满足 $\sigma^2 =$Id 的反全纯对合 c_σ 构成。

例子 [3]:

1) $\overline{\mathcal{M}}_{0,\ 3}$ 是一个点。2) $\mathcal{M}_{0,\ 4}$ 与 $\mathbb{CP}^1$ 双全纯同构，且具有标准实结构，与 $\overline{\ \sigma}$ 无关。3) $\mathcal{M}_{0,\ 5}$ 与 $\mathbb{P}^2$ 在四个点处爆破后所得空间双全纯同构。如果$\sigma =$是恒等变换，这四个点均为实点；如果 σ 是一个换位，则其中两个是实点，另外两个是虚共轭复点；如果 σ 由两个换位组成，则这四个点构成两对虚共轭复点。

定理 B **的证明。** 卡普兰诺夫对 [19] 德利涅-芒福德模空间的描述，其中包含 n 个标记点的有理曲线，表明 $\mathcal{M}_{0,\ n}$ 是由构建集 $\mathcal{B}$ 所生成的配置 $\mathcal{A}$ 的美妙紧化；该构建集由 $\mathbb{CP}^{n-3}$ 中所有由任意一组固定 $n-1$ 一般位置点 $\Pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$. 张成的射影子空间组成。这一描述与线性子空间的美妙紧化相吻合

$$A_{n-2} = \{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} \,|\, z_i = z_j\,,\, 1 \leq i < j \leq n-1\}$$

归功于德·孔奇尼–普罗切西 [5,第 483] 页（另见 [25]）。

卡普兰诺夫的构造取决于所选的一个标记点，我们取第 n 个标记点。模空间$\mathcal{M}_{0,\ n}$ 可通过迭代爆破从 $\mathbb{CP}^{n-3}$ 得到

$$\kappa_n : \overline{\mathcal{M}}_{0,n} \to \mathbb{CP}^{n-3}$$

如下：首先，爆破 Π中的点；接着，爆破经过 Π，中各点的直线的严格变换；然后，爆破由 Π，中的点张成的平面的严格变换，依此类推。

$\mathcal{M}_{0,\ n}$ 的卡普兰诺夫爆破表示与由置换 $\overline{\ \sigma} \in S_n$ 诱导的实结构 c_σ 相容，当且仅当 σ 固定指定标记点。在这种情况下， $\mathbb{CP}^{n-3}$ 带有标准实结构

$$\mathrm{c}([z_1 : \cdots : z_{n-2}]) = [\bar{z}_1 : \cdots : \bar{z}_{n-2}]$$

并且 Π 中的点也相应地进行置换，使得迭代爆破序列 κ_n 在每个阶段都是等变的。

当 $\sigma = \mathrm{Id}$，这些 $n-1$ 点选取于 $F(\mathbb{CP}^{n-3}) = \mathbb{RP}^{n-3}$. 因此， $\mathcal{B}$ 是 G-不变的，而 $\mathcal{A}$ 是一个 G-配置。注意，由于构造集 $\mathcal{B}$ 的元素是 $\mathbb{CP}^{n-3}$中的实线性子空间，并配备标准实结构，如定理 A的证明中所示，我们看到 G-配置 $\mathcal{A}$ 是拉伸的、极大的且有效的。作为直接应用

推论 5.12的直接推论，我们发现（$\overline{\mathcal{M}_{0,\ n}}$，$\mathrm{c}_{\mathrm{Id}}$）是一个共轭空间，从而证明了定理B的第一部分。

为证明第二部分，注意到若 $\sigma \neq$Id 且不动点集为 $\overline{\text{Fix}\,\sigma} \neq \emptyset$，则 Kapranov 模型中属于 $\mathcal{M}_{0,n}$ 的集合 Π 可以选为 c-不变，并具有 Card $|\text{Fix}\,\sigma| - 1$ 个实点。由 Π 的子集张成的所有线性子空间构成的相应配置仅为 c-不变。注意，在迭代爆破 κ_n 的每一步中，各爆破中心都是两两不相交的簇。与定理 A 的证明一样，爆破中心的拉伸性得以保持。沿具有非空实点集的中心进行爆破时，根据定理 5.11，有效性得以保持；而对一对不相交的共轭复中心进行爆破时，根据命题 3.12，有效性也得以保持。由命题 3.17 应用于 Kapranov 对极大 G-空间 $(\mathbb{CP}^{n-3}, \mathrm{c})$ 沿伽罗瓦极大中心（其实点集可能为空）进行迭代爆破的描述，可得 $(\mathcal{M}_{0,n}, \mathrm{c}_\sigma)$ 的伽罗瓦极大性。□

注记 6.1. 关于 $\mathcal{M}_{0,\ n}$ 的一种替代性描述归功于 $\overline{\text{Keel}}$，它为定理 B的第一部分提供了另一种证明。

Keel 的构造 [20, 25] 是三元组 $((\mathbb{P}^1)^{n-3},\ \mathcal{A},\ \mathcal{B})$的美妙紧化，其中 $\mathcal{B}$是所有对角线和增广对角线的集合

$$\Delta_{I,a} = \{(p_4, \ldots, p_n) \in (\mathbb{P}^1)^{n-3},\ p_i = a\ \forall i \in I\}$$

对于 $I \subseteq \{4, \ldots, n\}$，$|I| \geq 2$，以及 $a \in \{0, 1, \infty\}$. 这里 $\mathcal{A}$是 $\mathcal{B}$. 中所有元素的交集的集合。再次，当 $\sigma =$Id 时，利用引理 6.3，可以看出 $\mathcal{A}$是一个拉伸的极大 G-配置；与之前一样，我们发现 $(\mathcal{M}_{0,\ n},\ \mathrm{c}_{\mathrm{Id}})$) 是一个共轭空间，这是推论5.12的结果。

注记 6.2. 对于实结构 $(\mathcal{M}_{0,\ n},\ \mathrm{c}_\sigma)$ 且 $\overline{\text{Fix}\,\sigma} = \emptyset$，无法得到等变的卡普兰诺夫模型；这一问题将在别处讨论。

推论C的证明。证明直接由定理B 和2.19即可得出。□

6.3.**构形空间的美妙紧化——定理D的证明**。设（X，c）是一个配备反全纯对合的紧致连通复流形。对于 $n \geq 2$，X^n 中的一个对角线是子流形

$$\Delta_I = \{(p_1, \ldots, p_n) \in X^n \,|\, p_i = p_j, \forall\, i, j \in I\}$$

对于 $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$，其中 $|I| \geq 2$. A 多对角线是若干对角线的交

$$\Delta_{I_1 \ldots I_k} := \Delta_{I_1} \cap \cdots \cap \Delta_{I_k}$$

其中，对每个 $1 \leq i \leq k.$，所有对角线和多重对角线的集合 $\mathcal{A}$ 是 X^n, 中的子流形配置，而 $I_i \subseteq \{1, \ldots, n\}, |I_i| \geq 2$

X中由有序的 n 元组互不相同的带标记点构成的构形空间定义为

$$\mathrm{Conf}_n(X) := X^n \setminus \bigcup_{|I|\geq 2} \Delta_I = \{(p_1,\ldots,p_n) \in X^n \,|\, p_i \neq p_j, \forall\, i \neq j\}.$$

由于所有对角线 Δ_I 都关于由下式给出的诱导反全纯对合 c_n : $X^n \to X^n$ 是 c_n-不变的

$$\mathsf{c}_n(p_1,\ldots,p_n) = (\mathsf{c}(p_1),\ldots,\mathsf{c}(p_n)),$$

$\mathcal{A}$ 是一个 G-配置，而 $\mathrm{Conf}_n(X)$ 是一个 G-空间。

引理 6.3. 对于每个 $1 \leq i \leq k$ 以及每个满足 $|I_i| \geq 2$ 的 $I_i \subseteq \{1,\ldots,n\}$，$G$-对 $(X^n, \Delta_{I_1\ldots I_k})$ 都是拉伸的。

证明。 该证明直接由 K¨unneth 公式得出。 □

空间 $\mathrm{Conf}_n(X)$ 存在若干种奇妙 G-紧化[6]。

1) 一个例子是 Fulton-MacPherson 紧化 [11], , 记作 $X[n]$. 。在这种情况下，构建集 $\mathcal{B}$ 是所有对角线的集合Δ_I，对于 $I \subseteq \{1,\ldots,n\}$，其中 $|I| \geq 2$.2) Ulyanov 紧化 [27], 记作 $X\langle n\rangle$，是 Conf 的另一种奇妙 G-紧化$_n(X)$。 在这种情况下，构建集$\mathcal{B}$ 是所有多对角线的集合。3) Kuperberg-Thurston 紧化 X^Γ，其中 Γ 是一个有 n 个带标签顶点的连通图 [25]。在这种情况下， $\mathcal{B}$ 是一个合适的多对角线集合。

定理 D的证明现在直接由引理 6.3和定理 5.11得出。

7. Hilbert Squares

本节将 Kalinin 有效性应用于实代数簇的 Hilbert 平方研究，并得到 $X^{[2]}$ 的史密斯-汤姆亏损公式。

设 (X,c) 是一个带有实结构的紧致 n 维复流形。我们用 F 表示 c, 的不动点集，并令 $F_i, i = 1,\ldots,r$ 为 F. 的连通分支。交换因子的对合 τ : $X \times X \to X \times X$ 可提升为爆破 $\mathrm{Bl}(\tau)$ 上的对合 $\mathrm{Bl}_\Delta(X\times X)$，其中 $\mathrm{Bl}_\Delta(X\times X)$ 是沿对角线 $\Delta \subset X\times X$. 对 $X\times X$ 进行的爆破。随后，$\mathrm{Bl}_\Delta(X\times X)$ 关于 $\mathrm{Bl}(\tau)$ 的商自然同构于希尔伯特平方 $X^{[2]}$. 。 X 上的实结构 c 可自然提升为 $X^{[2]}$ 上的实结构, 记为 $\mathsf{c}^{[2]}$.

根据构造，双重分歧覆盖 Bl 的分支轨迹 $E \subset X^{[2]}$ of the double ramified cov-ering $\mathrm{Bl}_\Delta(X \times X) \to X^{[2]}$ 自然同构于 $\mathbb{P}(T^*X)$，它是 $\mathsf{c}^{[2]}$-不变的，并与典范投影的例外除子重合 $X^{[2]} \to X^{(2)}$ 到对称平方 $X^{(2)}$ 的 X. 注意（参见 [22]），

[6]有兴趣的读者可参阅 [25] 了解详情。

其不动点集 $F(E) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(T^*F)$ 同时是两个实$2n$-流形 $\mathbb{H}_0$ 和 $\mathbb{H}$的边界，其内部满足

$$\operatorname{Int}\mathbb{H}_0 \cong (X/\mathrm{c}) \setminus F, \quad \operatorname{Int}\mathbb{H} \cong F^{(2)} \setminus \Delta F,$$

其中 ΔF 是 $F^{(2)}$. 中 F 的对角嵌入。设

$$\mathrm{in}_0 : F(E) \to \mathbb{H}_0 \quad \text{and} \quad \mathrm{in}_1 : F(E) \to \mathbb{H}$$

为包含映射，且 $\mu = (\mathrm{in}_0, \mathrm{in}_1) : F(E) \to \mathbb{H}_0 \sqcup \mathbb{H}$.

回顾一个众所周知的陈述，它是 [22, 引理 2。10]中所证命题的对偶。

引理 7.1。 设 M 是一个紧致的带边界 n维流形，且 $\mathrm{in} : \partial M \to M$ 是包含映射。那么

$$\dim \operatorname{Coker}(\mathrm{in}^*) = \operatorname{rank}(\mathrm{in}^*) = \frac{1}{2} \dim\, H^*(\partial M).$$

□

命题 7.2。 若 X 是伽罗瓦极大且有效的，则 $\operatorname{Im}(\mathrm{in}_0^*) = \operatorname{Im}(\mathrm{in}_1^*)$。

证明。 由引理 7.1，只需证明 $\operatorname{Im}(\mathrm{in}_1^*) \cap \operatorname{Im}(\mathrm{in}_0^*)$ 包含一个维数为 $\frac{n}{2}\beta_*(F)$ 的子空间。

考虑分解 $X = U \cup V$，其中 U 是 F的一个闭等变管状邻域，而 V 是 $X \setminus U$的闭包。这里，U可等同于 T^*F的圆盘子丛 $D(F)$，而 $U \cap V$ 可等同于球面子丛 $S(F) = \partial D(F) = \partial V$。将等变上同调中的梅耶-维托里斯序列应用于该分解，我们得到一个长正合序列

$$\cdots \to H_G^n(X) \to H_G^n(U) \oplus H_G^n(V) \to H_G^n(S) \to \dots$$

由于 U 与 F 同伦等价，且 G 在 V 和 S上自由作用，该序列变为

$$\cdots \to H_G^n(X) \to \left(\bigoplus_p H^p(F) \otimes H^{n-p}(\mathbb{RP}^\infty) \right) \oplus H^n(V/\mathrm{c}) \\ \to H^n(F(E)) = H^n(S/\mathrm{c}) \to \dots$$

根据命题 2.17，由于 X 的有效性，对每个 $z \in H^p(F)$ $p \geq 0$，存在 $\hat{} z \in H_G^{2p}(X)$，使得该映射的第一个分量

$$H_G^*(X) \to (H^*(F) \otimes H^*(\mathbb{RP}^\infty)) \oplus H^*(V/\mathrm{c})$$

将 $\hat{} z$ 映到 $u^p z + u^{p-1}\mathrm{Sq}^1 z + \cdots + \mathrm{Sq}^p z$，其中 u 是 $BG = \mathbb{RP}^\infty$ 上典范线丛的特征类。

现在令 $w \in H^*(V/\mathrm{c})$ 表示 $\hat{} z$ 的像的第二个直和项。由于梅耶-维托里斯序列的正合性，

$$(u^p z + u^{p-1}\operatorname{Sq}^1 z + \cdots + \operatorname{Sq}^p z, w)$$

在 $H^*(F(E)) = H^*(S/\mathrm{c})$ 中的像等于 0。这就得到

$$\gamma^p z + \gamma^{p-1}\operatorname{Sq}^1 z + \cdots + \gamma\operatorname{Sq}^{p-1} z + \operatorname{Sq}^p z = \mathrm{in}_0^* w$$

其中，$\gamma \in H^1(F(E))$ 是 E 上典范线丛的特征类。

由于命题 3.9，$(F \times F,\ \tau)$ 也是一个伽罗瓦极大的有效 G-空间。因此，上述论证可直接应用于此，并表明对于每个 $z \in H^p(F)$，都存在 $w' \in H^*(F^{(2)} \setminus \Delta F)$，使得

$$\gamma^p z + \gamma^{p-1}\operatorname{Sq}^1 z + \cdots + \gamma\operatorname{Sq}^{p-1} z + \operatorname{Sq}^p z = \mathrm{in}_1^* w'.$$

最后，由于对于任意整数 $l \geq 1$，我们有

$$\mathrm{in}_0^* \gamma_0^l w = \gamma^l \mathrm{in}_0^* w \quad \text{and} \quad \mathrm{in}_1^* \gamma_1^l w' = \gamma^l \mathrm{in}_1^* w',$$

其中 γ_0 和 γ_1 是相应二重覆盖的特征类，因此我们得出 $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_1^*) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{in}_0^*)$ 包含一个由以下元素生成的子空间

$$\gamma^l\left(\gamma^p z + \gamma^{p-1}\operatorname{Sq}^1 z + \cdots + \gamma\operatorname{Sq}^{p-1} z + \operatorname{Sq}^p z\right),\ 0 \leq l \leq n-1-p, z \in H^p(F).$$

因此，接下来只需注意这些生成元线性无关，从而该子空间的维数等于

$$\sum_{p=0}^{n-1}(n-p)\beta_p(F) = \frac{n}{2}\beta_*(F).$$

□

设 $\delta_k = \operatorname{秩}\Delta_k$，$k \geq 0$ 其中 Δ_k 是史密斯正合序列（2.3）中的连接同态。

命题 7.3. 设 X 是一个实的非奇异 n 维代数簇，且满足 $\operatorname{Tors}_2 H_*(X, \mathbb{Z}) = 0$，其史密斯-汤姆亏格为 $\mathfrak{D}(X) = a$。则 $X^{[2]}$ 的史密斯-汤姆亏格为

$$\mathfrak{D}(X^{[2]}) = 2\operatorname{rank}\mu_* + \sum_{k=1}^{2n}(2k-1)\delta_k + a\beta_* + \frac{a(a-1)}{2} - n\beta_*(F(X)) - \beta_{\mathrm{odd}}.$$

特别地，若 X 是极大，则 $\mathfrak{D}(X^{[2]}) = 2\operatorname{秩}\mu_* - n\beta_* - \beta_{\mathrm{odd}}$.

证明。 这个计算几乎逐字重复了 [22, 命题 6 的证明1]。变化源于将极大性假设替换为伽罗瓦极大性，具体如下。等式 $\beta_*(F(E)) = n\beta_*$应替换为 $\beta_*(F(E)) = n\beta_*(F(X))$。特别地，等式 $\beta_*(\mathbb{H}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\beta_*^2(F_i) + \frac{n-1}{2}\beta_*$被替换为 $\beta_*(\mathbb{H}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\beta_*^2(F_i) + \frac{n-1}{2}\beta_*(F(X))$。相比之下，等式 $\beta_*(\mathbb{H}_0) = \frac{n}{2}\beta_*$，在 [22, 中得到证明

引理 3.1] 作为史密斯正合序列的一个应用，应予以替换

$$\text{by } \beta_*(\mathbb{H}_0) = n\beta_* - \frac{n}{2}\beta_*(F(X)) - \sum_{k=1}^{2n}(2k-1)\delta_k. \qquad \square$$

引理 7.4. 若 $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_0^*) = \mathrm{Im}(\mathrm{in}_1^*)$ 则 $\mathrm{rank}\ \mu_* = \frac{n}{2}\beta_*(E(X))$

证明。 由于 $\beta_*(E) = n\beta_*(F(X))$，所述关系可由引理7.1 应用于任一半部 U, V. □

定理 E 的证明。 根据命题 7.2 ，我们有 $\mathrm{Im}(\mathrm{in}_0^*) = \mathrm{Im}(\mathrm{in}_1^*)$。因此，$\mathrm{rank}\ \mu_* = \dim \mathrm{Im}(\mathrm{in}_0^*) = \dim \mathrm{Im}(\mathrm{in}_1^*)$，由引理 7.4 可得 $\mathrm{rank}\ \mu_* = \frac{n}{2}\beta_*(F(X))$。 结合命题 7.3，证明完成。 □

推论 F 的证明。 由于 X 是一个共轭空间，因此它是极大且有效的。特别地，要计算 $X^{[2]}$ 的史密斯–托姆亏格，可以应用定理 E ，并且注意到对于共轭空间，我们有$\beta_{\mathrm{odd}} = 0$, $\delta_k = 0$ 且 $\mathfrak{D}(X) = 0$. 因此 $\mathfrak{D}(X^{[2]}) = 0$. □

References

[1] C. Allday, V. Puppe, *Cohomological methods in transformation groups.*剑桥高等数学研究丛书，第32卷。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[2] A. Bruno, M. Mella, *The automorphism group of $M_{0,n}$.*《欧洲数学会杂志》（JEMS）15（2013年），第3期，949–968。[3] Ö. Ceyhan, *Graph homology of the moduli space of pointed real curves of genus zero.*《数学精选》（新系列）13（2007年），第2期，203–237。[4] X. Chen, P. Georgieva, and A. Zinger, *The cohomology ring of the Deligne–Mumford space of real rational curves with conjugate marked points* 2305 08798 , arXiv: 。[ ] 数学·代数几何。[5] C. De Concini, C. Procesi, *Wonderful models of subspace arrangements.*《精选数学》1（1995年），459–494。[6] A. Degtyarev, I. Itenberg, V. Kharlamov, *Real Enriques surfaces.*《数学讲义》1746。施普林格出版社，柏林，2000年。[7] A. Degtyarev, V. Kharlamov, *Topological properties of real algebraic varieties: Rokhlin's way.* 55 2000 4 334 129 212 《数学科学进展》（），第（）期，–；译文刊于《俄罗斯数学评论》55（2000年），第4期，735–814。[8] A. Degtyarev, V. Kharlamov, *Halves of a real Enriques surface.*《瑞士数学通讯》，71, 4 1996 628 663 *Distribution of the components of a real Enriques surface.* 第（）期，–。95 58 1995 扩展版：马克斯·普朗克研究所预印本，MPI/ -（）[9] D. Derval, *Variétés Galois-maximales et éclatements.*《数学手稿》110（2003年），第4期，467–474。[10] P. Etingof, A. Henriques, J. Kamnitzer, E. Rains, *The cohomology ring of the real locus of the moduli space of stable curves of genus 0 with marked points.*《数学年刊》171（2010年），第2期，731–777。[11] W. Fulton, R. MacPherson, *A compactification of configuration spaces.*《数学年刊》（2）139（1994年），第1期，183–225。[12] M. Franz, V. Puppe, *Steenrod squares on conjugation spaces.*《巴黎科学院报告》，I辑342（2006年），187–190。[13] M. Franz, *Symmetric products of equivariantly formal spaces.*《加拿大数学通报》61（2018年），第2期，272–281。

[14] S. Gitler, *The cohomology of blow ups.* 墨西哥数学会公报（2）37（1992年），第1–2期，167–175。[15] J.-C. Hausmann, T. Holm, V. Puppe, *Conjugation spaces.* 《代数与拓扑》5（2005年），923–964。[16] I.O. Kalinin, *Cohomological characteristics of real projective hypersurfaces.* 《代数与分析》3（1991年），第2期，91–110（俄文）；英文译本刊于《圣彼得堡数学杂志》3（1992年），第2期，313–332。[17] I.O. Kalinin, *Cohomological characteristics of real algebraic manifolds.* 《代数与分析》14（2002年），第5期，39–72（俄文）；译文刊于《圣彼得堡数学杂志》14（2003年），第5期，739–763。[18] I.O. Kalinin, *Cohomology of real algebraic varieties.* （俄文）《圣彼得堡数学研究所学术研讨会纪要》（POMI）299 151, 328 2003 8, 112 329 131 2005 1, 5323 5344（），《几何与拓扑》– –；译文刊于《数学科学杂志（纽约）》（），第–期。[19] M. M. Kapranov, *Chow quotients of Grassmannians, I.* 《苏联数学进展》16，第2部分，美国数学会，普罗维登斯，1993年，29–110。[20] S. Keel, *Intersection theory of moduli space of stable n-pointed curves of genus zero* 《美国数学会汇刊》330（1992年），545–574。[21] V. Kharlamov, R. Răsdeaconu, *On the maximality problem for Hilbert squares of real surfaces.* 31, 104 2025 《数学精选》，新系列（）。[22] V. Kharlamov, R. Răsdeaconu, *On the Smith-Thom deficiency of Hilbert squares.* 《拓扑学杂志》17（2024年），第2期，论文编号e12345，共29页。[23] V.A. Krasnov, *Harnack-Thom inequalities for mappings of real algebraic varieties.* 《苏联科学院通报》，数学系列47（2）（1983年），268–297。[24] G. Kuperberg, D. Thurston, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology.* 9912167 预印本，math.GT/。[25] L. Li, *Wonderful compactification of an arrangement of subvarieties.* 《密歇根数学杂志》58（2009年），第2期，535–563。[26] E. Rains, *The homology of real subspace arrangements* 3 2010 4, , 《拓扑学杂志》（），第–期。[27] A. P. Ulyanov, *Polydiagonal compactification of configuration spaces.* 《代数几何杂志》11（2002年），第1期，129–159。[28] J. van Hamel, *Geometric cohomology frames on Hausmann-Holm-Puppe conjugation spaces.* 135 2007 5, 1557 1564 《美国数学会会刊》（），第–期。[29] C. Voisin, *Hodge Theory and Algebraic Geometry, I.* 剑桥高等数学研究丛书，第76卷，2002年。

IRMA UMR 7501, Strasbourg University, 7 rue René-Descartes, 67084 Stras-bourg Cedex, FRANCE*Email address*: kharlam@math.unistra.frDepartment of Mathematics,1326 Stevenson Center, Vanderbilt University,Nashville, TN, 37240, USA
Institute of Mathematics of the Romanian Academy, P.O. Box 1-764, Buchare ST 014700, Romania*Email address*: rares.rasdeaconu@vanderbilt.edu