arXiv:2603.10464v1 [math.AC] 11 Mar 2026

关于部分迹理想

Souvik Dey 和 Shinya Kumashiro

Abstract. 我们研究了 Maitra 最近提出的部分迹理想这一概念。我们首先确立了部分迹理想的若干性质，并对 Maitra 提出的问题给出了肯定回答。随后，我们研究了由典范模的部分迹理想定义的不变量，并得到了一个上界，该上界还原了 Kobayashi 一项结果的一个方向。此外，对于由三个元素生成的数值半群环，我们给出了该不变量的显式公式。

1. Introduction

设 R 是一个诺特环， M 是一个 R-模。长期以来， M 的迹理想，即所有同态模 $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ 的像之和，一直被视为交换代数中的有用工具（例如，参见 [2, 7, 23]）。近年来，受 Lindo 的工作 [19], 启发，人们积极研究迹理想的普遍性以及典范模的迹理想。

另一方面，最近 Maitra [20] 引入了 M 的部分迹理想这一概念。对于一个 R-模 M，令

$$h(M) := \inf\{\ell_R(R/\operatorname{Im} f) \mid f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)\}.$$

采用此记号， M 的部分迹理想是 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ 的像，满足 $\ell_R(R/\operatorname{Im} f) = h(M)$。Maitra 利用部分迹理想这一概念，在 Berger 猜想 [20], 方面取得了新的进展，并且还给出了几乎 Gorenstein 性质 [21] 的一种刻画。然而，部分迹理想的一些基本性质仍未解决。本文列出我们要探讨的问题。令 R 表示 R 的整闭包—我们考虑全商环 $\mathrm{Q}(R)$ 中的商理想。

问题 1.1. • 何时 $h(M)$ 是有限的?

• ([21, 定理 B 之后、定理 2.5 之后以及结论 (2)1]): 对于给定的 R-模 M， M 有多少个部分迹理想?

• ([20, 定理 B 之后、定理 2.5 之后以及结论 (2)]): 设 $(R,\ \mathfrak{m})$ 是一维 Cohen-Macaulay 局部环。对于一个 $\mathfrak{m}$-主理想 I, $_I$ 是某个 R-模的部分迹理想，当且仅当 R： $I \subseteq R$?

本文的首要目的是回答上述问题，并证明以下结果。

定理 1.2。 (命题 2.6 和定理 2.11) 设 $S = R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)\setminus \mathrm{Max}(R)} \mathfrak{p}$ 是一个乘法封闭的子集。考虑以下条件。

(1) $h(M) < \infty$. *(2)* $S^{-1}R$ 是 $S^{-1}M$ 的直和项。*(3)* $\ell_R(R/\operatorname{tr}_R(M)) < \infty$.

(4) 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \setminus \mathrm{Max}(R)$, $M_{\mathfrak{p}}$ 都有一个自由直和项。那么，

(1)⇔(2)⇒(3)⇔(4) 成立。若 R 是局部的且 $\dim R = 1$, 则 *(3)⇒(2)* 成立。

定理 1.3。 (定理 2.14 和推论 2.20) 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个一维 *Cohen-Macaulay* 局部环，并设 I 是 $\mathfrak{m}$ 的一个主理想。 R。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13B22 , 13B30 , 13H10.*Key words and phrases.* 迹理想，科恩–麦考利，典范模，整闭包，数值半群环。Souvik Dey 的部分研究经费由查理大学研究中心项目 No.UNCE/SCI/022 及捷克科学基金会拨款 GA CR 23-05148S 资助。Shinya Kumashiro 的研究经费由 JSPS KAKENHI Grant Number JP24K16909 资助。

(1) 假设所有 $\mathfrak{m}$-主理想都有主约化（例如，剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 是无限域，或者 R 是一个局部环，且其剩余域与 R 的剩余域相同）。那么， I 是某个 R-模的部分迹理想，当且仅当 $R: I \subseteq R$.(2) 假设 R 是一个离散赋值环，其极大理想为 $\mathfrak{n}$,且 $R/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{n}$。假设 J 是 I的一个部分迹理想。那么，

$$\{partial\ trace\ ideals\ of\ I\} = \{\alpha J \mid \alpha \in R : J, v(\alpha) = 0\},$$

其中 $v(\alpha)$ 表示与 R 相关的归一化赋值（参见事实2.17 ）.

本文的第二个目标是分析不变量 $h(\omega_R)$，其中 ω_R 表示 R 的典范模。下文中，我们假设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个具有典范模ω_R的 Cohen–麦考利局部环。一个简单的观察表明， R 是 Gorenstein 环当且仅当 $h(\omega_R) = 0$。此外，满足 $h(\omega_R) = 1$ 的 Artin 局部环称为 Teter 环，其结构已由若干论文阐明（例如，参见[1, 17]）。此外，Kobayashi [18] 针对满足 $\dim R = 1$ 且 $h(\omega_R) = 2$ 的 R 得到了以下结果。

事实 1.4。 ([18, 定理 1.4]) 设 R 是一个维数为一且具有典范模 ω_R 的 Cohen-Macaulay 局部环。那么， $h(\omega_R) \leq 2$ 当且仅当 $bg(R) \leq 1$，其中

$$bg(R) := \inf\{\ell_S(R/S) \mid S \subseteq R \text{ is a module finite}, \mathrm{Q}(S) = \mathrm{Q}(R), \text{ and } S \text{ is Gorenstein}\}.$$

我们给出条件 $h(\omega_R) = 2$ 的另一种刻画，它不同于上述刻画（定理 3.12）。此外，我们如下恢复上述定理的"如果"部分。

定理 1.5. （定理 3.14）设 $(R, \mathfrak{m})$ 是具有典范模 ω_R 的一维 *Cohen-Macaulay* 局部环。若 R 一般地 *Gorenstein*, 则 $h(\omega_R) \leq 2bg(R)$。

我们进一步给出计算 $h(\omega_R)$ 的公式，该公式适用于三元生成数值半群环的情形（定理 4.4）。

我们描述本文的组织结构。在第 2 节中，我们探讨部分迹理想的性质，并证明定理 1.2 与 1.3。在第 3 节中，我们研究 $h(\omega_R)$，并证明定理 1.5。在第 4 节中，我们给出 $h(\omega_R)$ 在三元生成数值半群环情形下的公式。全文始终给出例子。

设定 1.6. 下文中，所有环均为含幺交换诺特环，并假设所有模均为有限生成模。设 R 为一个环。分别用 $\mathrm{Q}(R)$ 和 R 表示 R 的全商环和 R 的整闭包。若 $X \subseteq \mathrm{Q}(R)$ 且 X 含有 R 的一个非零因子，则称 R-模 X 为分式理想。设 X, Y 为 R的分式理想。我们用 $Y: X$ 表示在 $\mathrm{Q}(R)$ 中考察的商分式理想。众所周知，存在一个同构

$$Y : X \cong \mathrm{Hom}_R(X, Y);\ \alpha \mapsto \cdot\alpha,$$

其中 $\cdot\alpha$ 表示同态 $X \to Y$，它由乘以 $\alpha \in Y : X$ ([15]定义，我们将会随时使用这一事实。当我们在 R中考察商时，将其记为 $Y :_R X$。若理想 I 含有 正则 ，且 I 含有的一个非零因子。

若 R 是局部环，则 $\mathfrak{m}$ 表示 R的唯一极大理想。对于局部环 R上的 R-模 M ，我们分别用 $\mathrm{e}(M)$ $\mu_R(M)$ $\ell_R(M)$表示重数、极小生成元的个数和长度。若R 是 Cohen-Macaulay 局部环，则 $\mathrm{r}(R)$表示 R的*Cohen-Macaulay* 型。

2. Trace ideals and partial trace ideals

在本节中，设 R 为诺特环， M 为一个 R-模。

2.1. 迹理想。

本小节总结迹理想的基本性质。

定义2.1。 对于一个 R-模 M，理想

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} \mathrm{Im} f$$

称为t $race$ 的理想。如果某个理想 I 是某个 R-模的迹理想，则称其为迹理想。

事实 2.2。以下结论成立。
(1) $\mathrm{tr}_R(M) = \mathrm{Im}\ \varphi$，其中 φ 是求值映射

$$\varphi : \mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_R M \to R; f \otimes x \mapsto f(x) \quad \text{for } f \in \mathrm{Hom}_R(M,R) \text{ and } x \in M.$$

当 M 是分式理想 I 时，映射 φ 可识别为 $(R:I) \otimes_R I \to R$；$f \otimes x \mapsto fx$；因此，$\mathrm{tr}_R(I) = (R:I)I$。
(2) ([19, 命题 2.8(viii)])：对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$，$\mathrm{tr}_R(M)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{tr}^{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$。(3) (参见 [19, 命题 2.8(iii)])：当且仅当对某个 $n > 0$，$M^{\oplus n}$ 有一个自由直和项时，$\mathrm{tr}_R(M) = R$。若 R 是局部的，则 $n = 1$ 足够。

以下给出迹理想的一个刻画。

事实 2.3. ([9, 推论 2.2]) 设 I 是 R 的一个理想，且包含 R 的一个非零因子。那么以下条件等价。

(1) I 是一个迹理想。(2) I 是 I 的迹理想，即 $I = (R:I)I$。(3) $R : I = I : I$。

2.2. **部分迹理想**。

定义 2.4. ([20, 定义 2.1]) 对于一个 R-模 M，我们定义一个不变量

$$h(M) := \inf\{\ell_R(R/\operatorname{Im} f) \mid f \in \mathrm{Hom}_R(M,R)\}$$

并称之为 M 的 h-不变量。我们称理想 J 为 M 的部分迹理想，如果 $J = \mathrm{Im}\ f$ 对某个 $f \in$ 同态模$_R(M,\ R)$ 成立，并且 $\ell_R(R/J) = h(M)$。理想 J 称为部分迹理想，如果 J 是某个 R-模 M 的部分迹理想。

注 2.5. (1) 对于理想 I，I 是部分迹理想当且仅当 I 是 I 的部分迹理想。
(2) 阿廷环的任意理想都是其自身的部分迹理想。
(3) 正如我们稍后将看到的，模的部分迹理想并不能由该模唯一确定。事实上，设 $R = k[[t^3, t^4, t^5]]$，其中 k 是一个域，$k[[t]]$ 是 k 上的形式幂级数环，并且 $M = (t^4,\ t^5)$。对于 $a \in k$，令 $I_a = (t^3 + at^4,\ t^4 + at^5)$。那么，对于所有 $a \in k$，I_a 都是 M 的部分迹理想。另一方面，$I_a = I_b$ 当且仅当 $a = b$。

证明。(1)：见 [20, 注 2.5]。
(2)：设 R 是一个阿廷环，I 是 R 的一个理想。令 $f \in$ 同态模$_R(I,\ R)$。由于 $I \xrightarrow{f} \mathrm{Im}\, f \to 0$，我们得到

$$\ell_R(I) \geq \ell_R(\mathrm{Im}\, f) = \ell_R(R) - \ell_R(R/\operatorname{Im} f).$$

因此，对于所有 $f \in$ 同态模$_R(I,\ R)$，$\ell_R(R/\mathrm{Im}\ f) \geq \ell_R(R) - \ell_R(I) = \ell_R(R/I)$。由此可得 $h(I) \geq \ell_R(R/I)$。另一方面，考虑嵌入 $\iota : I \to R$，得到 $\ell_R(R/\mathrm{Im}\ \iota) = \ell_R(R/I)$；因此，$I = \mathrm{Im}\ \iota$ 是 I 的部分迹理想。

(3)：考虑同态 $\iota : I \to R; x \mapsto x$ 和 $f : I \to R; x \mapsto tx$，得到 $\mathrm{tr}_R(I) \supseteq \mathrm{Im}\, \iota + \mathrm{Im}\, f = \mathfrak{m}$。由于 R 是整环，且 I 不是主理想，因此 $\mathrm{tr}_R(I) \neq R$ (事实 2.2(3))。于是，$\mathrm{tr}_R(I) = \mathfrak{m}$。根据注 2.17，$(t^3 + at^4)$ 是 $\mathfrak{m} = \mathrm{tr}_R(I)$ 的一个约化。注意到通过乘法 $t^3 + at^4$ 有 $M \cong I_a$，由定理 2.14 可知，I_a 是 M 的部分迹理想。
假设 $I_a = I_b$。那么，$t^3 + at^4 \in I_b = k(t^3 + bt^4) + k(t^4 + bt^5) + \sum_{i \geq 6} kt^i$。因此，存在 $c_i \in k$ 使得

$$t^3 + at^4 = c_3(t^3 + bt^4) + c_4(t^4 + bt^5) + \sum_{i \geq 6} c_i t^i.$$

通过比较系数，我们得到 $1 = c_3$、$a = bc_3 + c_4$ 和 $0 = c_4$，即 $a = b$。 ■

正如我们将从部分迹理想的定义方式中看到的，我们需要考虑何时满足 $h(M) < \infty$ 这一条件。我们从以下内容开始。

命题 2.6. 设 $S = R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(R)\setminus \mathrm{Max}(R)} \mathfrak{p}$ 是……的乘法封闭子集 R。考虑以下条件。
(1) $h(M) < \infty$。(2) $S^{-1}R$ 是 $S^{-1}M$的直和项。(3) $\ell_R(R/$ 转置$_R(M)) < \infty$。(4) $M_{\mathfrak{p}}$ 对所有 $\mathfrak{p} \in$ 谱$(R) \setminus$ 极大(R) 都有自由直和项。于是，(1)⇔(2)⇒(3)⇔(4)均成立。

证明。(1)⇒(2)：取一个同态 $f \in$同态模$_R(M, R)$，使得 $\ell_R(R/\mathrm{Im}\ f) < \infty$。由于 $S^{-1}(\mathrm{Im}\ f) = S^{-1}R$，我们得到一个满射 $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}R$。这个同态可分裂。

(2)⇒(1)：存在一个满射同态 $\varphi \in$ 同态模$_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}R)$。另一方面，由于$M$是有限表示的，$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}R) \cong S^{-1}(\mathrm{Hom}_R(M, R))$。因此，存在 $f \in$ 同态模 $_R(M, R)$ 和 $s \in S$，使得 $f/s = \varphi$。由于 $s/1$ 是 $S^{-1}R$ 的单位，可得

$$\mathrm{Im}(f/1) = (1/s)\cdot \mathrm{Im}(f/1) = \mathrm{Im}(f/s) = \mathrm{Im}\,\varphi = S^{-1}R.$$

由于 $(\mathrm{Im}\ f)_{\mathfrak{m}} \cong (S^{-1}(\ \mathrm{Im}\ f))_{\mathfrak{m}} \cong (S^{-1}R)_{\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}}$对每个 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}\ R$, $\ell_R(R/\mathrm{Im}\ f) < \infty$；因此，$h(M) < \infty$。

(1)⇒(3)：这显然成立，因为对于任意 M 的部分迹理想 J，都有 $J \subseteq \mathrm{tr}_R(M)$。

(3)⇔(4)：这由事实 2.2(2) 和 (3) 得出。 ■

蕴含关系 (3) ⇒命题2.6 中的 (2) 一般不成立（例 2.9）。我们先准备一个引理 .

引理 2.7. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 *Cohen-Macaulay* 局部环。若存在秩一的极大 *Cohen-Macaulay* R-模M，使得 $h(M) < \infty$, 则 $\dim R \leq 1$。

证明. 设 $J = \mathrm{Im}\ f$为 M 的一个部分迹理想，其中 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$。则 $\ell_R(R/J) = h(M) < \infty$，并且我们有一个正合列

$$0 \to \mathrm{Ker}\, f \to M \xrightarrow{f} R \to R/J \to 0.$$

假设 $\mathrm{Ker}\ f \neq 0$，并选取 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{Ker}\ f)$。则 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_R(M) \subseteq \mathrm{Ass}(R)$，因为 M是极大 Cohen-Macaulay 的。将上述正合列在 $\mathfrak{q}$处局部化，我们得到一个分裂正合列 $0 \to (\mathrm{Ker}\ f)_{\mathfrak{q}} \to M_{\mathfrak{q}} \to R_{\mathfrak{q}} \to 0$。由于 M是秩一的，$(\mathrm{Ker}\ f)_{\mathfrak{q}} = 0$。这与 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{Ker}\ f)$ 矛盾。由此可得 $\mathrm{Ker}\, f = 0$。因此，f 是单射，并且我们得到 $0 \to M \xrightarrow{f} R \to R/J \to 0$。由于 M 与 R 是极大 Cohen-Macaulay 的，且 R/J 是有限的，由深度引理，$\dim R \leq 1$。 ■

注 2.8. 如果去掉引理 2.7 中关于 M 的秩的假设，则结论不成立。例如，令 $R = k[[x^3, x^2y, xy^2, y^3]]$ 和 $M = (x, y) \oplus (x^2, xy, y^2)$。那么，$R$是一个维数为二的 Cohen-Macaulay 局部环，而 M 是一个秩为二的极大 Cohen-Macaulay R-模。此外，由于存在满射 $M \to \mathfrak{m}; (f, g) \mapsto fg$，可得 $h(M) = 1 < \infty$。

例 2.9。令 $k[[X, Y]]$ 为域 k上的形式幂级数环。设 $R = k[[X, XY, XY^2, XY^3]]$,$\mathfrak{m} = (X, XY, XY^2, XY^3)$，以及 $I = (XY, XY^2)$。那么，$\mathrm{tr}_R(I) = \mathfrak{m}$，也就是说，$\ell_R(R/\mathrm{tr}_R(I)) = 1$，但 $h(I) = \infty$。

证明。由于 R 是局部整环，且 $I \not\cong R$, I 没有自由直和项。因此，根据事实 2.2(3)，$\mathrm{tr}_R(I) \subseteq \mathfrak{m}$。另一方面，考虑包含映射 $I \to R$ 和映射 $I \to R$，我们有 $\mathrm{tr}_R(I) \supseteq I + Y^2I = \mathfrak{m}$；$a \mapsto Y^2a$ 对于 $a \in I$。由此可得 $\mathrm{tr}_R(I) = \mathfrak{m}$。另一方面，我们注意到 I 是典范模（例如参见 [3, 定理 6.3.5]）；因此，I 是极大 Cohen-Macaulay 模。此外，由于 R 是整环，理想 I 的秩为一。因此，由于 $\dim R = 2$，根据引理 2.7，$h(I) = \infty$。 ■

我们考虑命题⇒2.6 的蕴含关系 (3)到 (2)。如例 2.9所示，这通常并不成立。然而，当 R 是局部的且 $\dim R = 1$ 时成立（见定理 2.11）。以下结果是证明它的关键。

命题 2.10。设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。设 M 是一个有限生成的 R-模。设$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_\ell \in \mathrm{Spec}(R)$。若$\mathrm{tr}_R(M) \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{p}_i$，则存在一个同态 $f \in$同态模$_R(M, R)$，使得$\mathrm{Im}\, f \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{p}_i$。

证明。若 M 有一个自由直和项，则存在一个满射 $M \to R$。因此，我们可以假设 M 没有自由直和项。于是 $\operatorname{tr}_R(M) \subseteq \mathfrak{m}$ 根据事实2.2(3)，可得 $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{m}$ 对所有 $1 \leq i \leq \ell$都成立。假设对每个 $f \in$同态模$_R(M,R)$，$\operatorname{Im} f \subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{p}_i$。由素理想避免引理可知，对某个$1 \leq i \leq \ell$，$\operatorname{Im} f \subseteq \mathfrak{p}_i$。由此可得

$$\operatorname{Hom}_R(M,R) = \bigcup_{i=1}^{\ell} \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{p}_i). \tag{2.10.1}$$

然后我们通过对 ℓ 使用归纳法得到矛盾。若 $\ell = 1$，则（2.10.1）表明 $\operatorname{tr}_R(M) \subseteq \mathfrak{p}_1$。这与我们的假设 $\operatorname{tr}_R(M) \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{p}_i$ 相矛盾。

设 $\ell > 1$，并假设对 $\ell - 1$ 存在矛盾。我们可以假设存在下列元素

$$f_1 \in \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{p}_1) \setminus \bigcup_{j\neq 1} \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{p}_j) \quad \text{and} \quad f_2 \in \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{p}_2) \setminus \bigcup_{j\neq 2} \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{p}_j).$$

事实上，若不存在满足上述条件的元素，我们可以从（2.10.1）的右侧并集中去掉同态模$_R(M,\mathfrak{p}_1)$ 或同态模$_R(M,\mathfrak{p}_2)$。选取一个元素 $a \in \mathfrak{m} \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{p}_i$，并令 $m \geq 0$。

断言 1. $f_1 + a^m f_2 \notin$同态模$_R(M,\mathfrak{p}_1) \cup$同态模$_R(M,\mathfrak{p}_2)$ 对所有 $m \geq 0$ 成立。

断言 1 的证明。若 $f_1 + a^m f_2 \in$同态模$_R(M,\mathfrak{p}_2)$，则 $f_1 = (f_1 + a^m f_2) - a^m f_2 \in$同态模$_R(M,\mathfrak{p}_2)$。这与 f_1 的选取相矛盾。假设 $f_1 + a^m f_2 \in$同态模$_R(M,\mathfrak{p}_1)$。则 $a^m f_2 = (f_1 + a^m f_2) - f_1 \in$同态模$_R(M,\mathfrak{p}_1)$，即 $a^m \operatorname{Im} f_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$。由于 $\mathfrak{p}_1$ 是素理想且 $a^m \notin \mathfrak{p}_1$，$\operatorname{Im} f_2 \subseteq \mathfrak{p}_1$。这就证明了 $f_2 \in$同态模$_R(M,\mathfrak{p}_1)$，矛盾。■

根据断言1，若 $\ell = 2$，则会导出矛盾。假设 $\ell > 2$。我们得到 $f_1 + a^m f_2 \in \bigcup_{j=3}^{\ell}$同态模$_R(M, \mathfrak{p}_j)$ 对所有 $m \geq 0$都成立。由于 ℓ 是有限的，存在整数 $3 \leq j \leq \ell$ 和 $0 \leq s < t$，使得 $f_1 + a^s f_2$，$f_1 + a^t f_2 \in$同态模$_R(M, \mathfrak{p}_j)$。因此

$$a^s(1 - a^{t-s}) f_2 = (f_1 + a^s f_2) - (f_1 + a^t f_2) \in \operatorname{Hom}_R(M,\mathfrak{p}_j),$$

也就是说，$a^s(1 - a^{t-s}) \operatorname{Im} f_2 \subseteq \mathfrak{p}_j$。由于 $1 - a^{t-s}$ 是一个单位，$a^s \operatorname{Im} f_2 \subseteq \mathfrak{p}_j$。因此，$\operatorname{Im} f_2 \subseteq \mathfrak{p}_j$，因为 $\mathfrak{p}_j$ 是一个素理想且 $a^s \notin \mathfrak{p}_j$。于是，$f_2 \in$同态模$_R(M, \mathfrak{p}_j)$。这与 f_2的选取矛盾。

Hence，至少存在一个同态 $f \in$同态模$_R(M, R)$，使得 $\operatorname{Im} f \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\ell} \mathfrak{p}_i$. ■

定理 2.11。设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个一维诺特局部环。设 M 是一个有限生成的 R-模。那么以下条件等价。

(1) $h(M) < \infty$.(2) $\ell_R(R/\operatorname{tr}_R(M)) < \infty$.(3) $S^{-1}R$ 是 $S^{-1}M$的一个直和项，其中 $S = R \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec}(R)\setminus\{\mathfrak{m}\}} \mathfrak{p}$。(4) 对于所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$，$M_{\mathfrak{p}}$ 都有一个自由直和项。

证明。根据命题 2.6，我们只需证明 (2)⇒(1)。注意到 $\operatorname{Spec}(R) = \{\mathfrak{m}\} \cup \operatorname{Min}(R)$，因为 $\dim R = 1$。假设 $\ell_R(R/\operatorname{tr}_R(M)) < \infty$。由于 $\operatorname{Spec}(R) = \{\mathfrak{m}\} \cup \operatorname{Min}(R)$，这等价于说 $\operatorname{tr}_R(M) \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min}(R)} \mathfrak{p}$。由于 $\operatorname{Min}(R)$ 是有限集，根据命题 2.10，存在一个同态$f \in$同态模$_R(M,R)$，使得 $\operatorname{Im} f \not\subseteq \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min}(R)} \mathfrak{p}$。因此 $h(M) \leq \ell_R(R/\operatorname{Im} f) < \infty$。■

接下来的目标是证明定理 2.14，该定理断言，Maitra 对正则部分迹理想的刻画（[20, 定理 2.5]）在更一般的情形下仍然成立。

引理 2.12. 设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。设 I 是一个正则理想，使得 $h(I) < \infty$。若 J 是 I的部分迹理想，则 $J \cong I$。

证明。由于 I 是正则的，$\mathrm{Hom}_R(I,R)\cong R:I$。因此，存在 $\alpha\in R:I$ 使得 $J=\alpha I$ 且 $\ell_R(R/J)=h(I)<\infty$。记 $\alpha=a/b$ 为 $a,b\in R$，并且 b 是 R的非零因子。假设 a 是零因子，并选取一个非零元素 $c\in R$ 使得 $ac=0$。那么 $cJ=c\alpha I=(ac/b)I=0$。因此，存在某个$\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(R)$使得 $J\subseteq\mathfrak{p}$。另一方面，由于 I 是正则的，我们可以假设深度 $R>0$ （否则，$I=R$）。由此可得 $\ell_R(R/J)\geq\ell_R(R/\mathfrak{p})=\infty$，这与假设矛盾。因此，$a$ 是 R 的非零因子，故$J=\alpha I\cong I$。■

引理 2.13. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是一个一维 *Cohen-Macaulay* 局部环，I 是 R的一个正则理想，且(a) 是 I的一个约化。那么，$I=(a)=aR\cap R=IR\cap R$。

证明. 根据 [16, 命题 1.5.2 和 1.6。1], 我们有

$$a\overline{R}\cap R=\overline{a\overline{R}}\cap R=\overline{(a)}.$$

由于(a)是 I的一个约化，$(a)\subseteq I\subseteq\overline{(a)}=\overline{aR\cap R}\subseteq\overline{aR}$。由此可得 $R\subseteq a^{-1}I\subseteq R$。将 R 乘入这些包含关系中，得到 $a^{-1}IR=R$，也就是说，$IR=\overline{aR}$。因此，我们得到 $a\overline{R}\cap R=IR\cap R$。等式$\overline{I}=\overline{(a)}$成立，这是因为根据假设，$\overline{(a)}$是 $\overline{I}$ 的一个约化（见 [16, 注 2.3]）。■

定理 2.14。 设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个一维 *Cohen-Macaulay* 局部环，且 I 是 R 的正则理想。考虑以下条件。

(1) I 是部分迹理想。(2) I 是 I 的部分迹理想。(3) $R:I\subseteq R$。(4) I 是 $\mathrm{tr}_R(I)$ 的约化，也就是说，$\mathrm{tr}_R(I)^{n+1}=I\mathrm{tr}_R(I)^n$，其中 $n>0$。

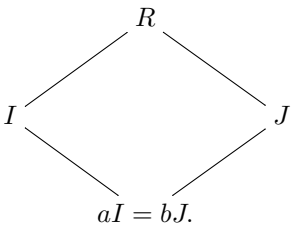
那么，(1)⇔(2)⇐(3)⇒(4)均成立。此外，如果所有 $\mathfrak{m}$-主理想都有主约化（例如，剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 是无限域，或者 R 是局部环，且其剩余域与 R的剩余域相同，见注 *2.17*），那么所有条件等价。

证明。(1)⇔(2)：这显然成立，且已在 [20,注 2.3]中写出。

(3)⇒(4)：由于 $R\subseteq R:I\subseteq\overline{R}$，我们有 $I\subseteq\mathrm{tr}_R(I)=(R:I)I\subseteq IR\cap\overline{R}=I$ 由引理 2.13可得。因此I 是由R(I生成的 tr [16, 由推论 1.2。5]。

(3)⇒(2)：令 $S:=R[R:I]$ 为 R 的扩张环，其中包含所有 R 的元素：I。注意，由于 $R:I\subseteq R$，S 是有限生成的 R-模。反设存在 I 的部分迹理想 J，使得 $\ell_R(R/J)<\ell_R(R/I)$。由引理 2.12，$J\cong I$。令 $\alpha\in\mathrm{Q}(R)$，使得 $J=\alpha I$。写作 $\alpha=a/b$，其中 $a,b\in R$。我们有 $aI=bJ$。考虑下面的包含图

(2.14.1)



这里，由于 I 和 J 都是秩为一的 Cohen-Macaulay R-模，$\ell_R(I/aI)=\ell_R(R/(a))$ 且 $\ell_R(J/bJ)=\ell_R(R/(b))$ （[22, 定理 14.8]）。因此，根据上述图和不等式 $\ell_R(R/J)<\ell_R(R/I)$，我们得到

$$\ell_R(R/(a))=\ell_R(I/aI)<\ell_R(J/bJ)=\ell_R(R/(b)).$$

由于 S 也是秩为一的 Cohen-Macaulay R-模，因此我们得到 $\ell_R(S/aS)=\ell_R(R/(a))$ 且 $\ell_R(S/bS)=\ell_R(R/(b))$；因此，$\ell_R(S/aS)<\ell_R(S/bS)$。

另一方面，由于 $\alpha I=J\subseteq R$，我们有 $\alpha\in R:I\subseteq S$。由此可得 $\alpha S\subseteq S$，也就是说，$aS\subseteq bS$。特别地，$\ell_R(S/aS)\geq\ell_R(S/bS)$。这与假设矛盾。因此，不存在满足 $\ell_R(R/J)<\ell_R(R/I)$ 的 I 的部分迹理想 J。

(2)⇒(3)：假设所有 $\mathfrak{m}$-主理想都有主约化。我们选取 R 的一个非零因子 $b \in I$。注意到 $b(R:I)$ 是 R 的正则理想，因此存在 $b(R:I)$ 的一个极小约化 (a)。根据引理 2.13，$(a) \subseteq b(R:I) \subseteq (a) = aR \cap R \subseteq aR$。由此可得

$$R \subseteq (b/a)(R:I) = R:(a/b)I \subseteq \overline{R}. \tag{2.14.2}$$

Set $J := (a/b)I$。注意到，由于 $a/b \in R:I$，J 是 R 的一个理想。进一步可得

$$\ell_R(R/J) = h(J) = h(I) = \ell_R(R/I),$$

其中，第一个等式是将结果 (3)⇒(2) 应用于 J （见 (2.14.2)）得到的，第二个等式由 $J \cong I$得出，第三个等式则由假设得出。注意，根据J的定义，$bJ = aI$。然后，考虑与 (2.14.1) 相同的图，并注意等式 $\ell_R(R/(a)) = \ell_R(I/aI)$ 和$\ell_R(J/bJ) = \ell_R(R/(b))$，可得 $\ell_R(R/(a)) = \ell_R(R/(b))$。另一方面，由于根据 (2.14.2)，$b/a \in (b/a)(R:I) \subseteq R$，扩张环 $R[b/a]$是 R 的有限生成 R-模。令 $S := R[b/a]$。由于 S是一个秩一 Cohen-Macaulay R-模，可得 $\ell_R(S/aS) = \ell_R(R/(a)) = \ell_R(R/(b)) = \ell_R(S/bS)$。另一方面，由于 $b/a \in R[b/a] = S$，我们有$(b/a)S \subseteq S$，即 $bS \subseteq aS$。结合包含关系$bS \subseteq aS$ 与等式 $\ell_R(S/aS) = \ell_R(S/bS)$，可得 $aS = bS$，即$(b/a)S = S$。将 S 乘到包含关系 $(b/a)(R:I) \subseteq R$两边，可得

$$(b/a)(R:I)S \subseteq S\overline{R} = \overline{R}.$$

由于 $R:I \subseteq (R:I)S = (b/a)(R:I)S$，我们得到 $R:I \subseteq \overline{R}$，如所需。

(4)⇒(3)：假设所有 $\mathfrak{m}$-主理想都有主约化。我们选取 I 的一个极小约化 (a)。根据假设，(a) 也是 $\mathrm{tr}_R(I)$ 的一个约化。因此，由引理 2.13 可得 $\mathrm{tr}_R(I) = (R:I)I \subseteq (a) \subseteq aR$。于是，$(R:I)a^{-1}I \subseteq R$。注意到 $a^{-1}IR = R$。事实上，由于 $(a) \subseteq I \subseteq (a) \subseteq aR$，根据引理 2.13，我们有 $R \subseteq a^{-1}I \subseteq R$。将 R 乘到该包含关系两边，得到 $a^{-1}IR = R$。因此，将 R 乘到 $(R:I)a^{-1}I \subseteq R$，可得

$$(R:I)\overline{R} = (R:I)a^{-1}I\overline{R} \subseteq \overline{R}.$$

由此可得 $R:I \subseteq R:\overline{R} = \overline{R}$。 ■

注 2.15. Maitra 证明了在⇔定理 2.14的额外假设下，（2）与（3） R 等价，其中 R 是整环，R 是约化环，且[20, 是离散赋值环（5]定理 2. R ）。尤其是，在他的证明中，假设 [20, 是离散赋值环至关重要。事实上，Maitra 在论文中反复询问，在不加这些额外假设的情况下该刻画是否仍成立，参见定理 B 之后、定理 2.5 之后以及结论（2）]。

推论 *2.16.* 设 *$(R,\mathfrak{m})$* 是一个一维 *Cohen-Macaulay* 局部环，且 I 是R的一个正则理想。设 $b \in I$ 是 R的一个非零因子。假设我们可以选取 $b(R:I)$ 的一个约化 *(a)*（例如，剩余域 $R/\mathfrak{m}$是无限域，或者 R 是局部环，且其剩余域与 R的剩余域相同，见注 *2.17*）。那么，*$J := (a/b)I$* 是 I的一个部分迹理想。

证明。 由于 $(a) \subseteq b(R:I) \subseteq \overline{(a)} = aR \cap R$，我们有

$$R \subseteq (b/a)(R:I) = R:(a/b)I \subseteq \overline{R}.$$

因此，$R:J \subseteq \overline{R}$ 且该断言由定理 2.14 (3)⇒(2)。 ■

下面给出计算解析不可约环的 $h(I)$ 的一个公式。设 $(R,\mathfrak{m})$ 为一维 Cohen-Macaulay 局部环。假设 R 是以 $\mathfrak{n}$ 为极大理想的离散赋值环。假设 $R/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{n}$。对于分式理想 J，我们用

$$v(J) := \min\{v(x) : x \in J\},$$

J 的值，其中 $v(x)$ 表示与 R 相关联的归一化赋值，其定义如下：

$$v : \mathrm{Q}(R) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}; a/b \mapsto \ell_{\overline{R}}(\overline{R}/a\overline{R}) - \ell_{\overline{R}}(\overline{R}/b\overline{R})$$

对于 a，$b \in R$ 使得 b 是 R 的非零因子。

注 2.17。 设 $(R,\ \mathfrak{m})$ 是一个一维 Cohen-Macaulay 局部环，且 I 是 R 的正则理想。假设 R 是离散赋值环，其极大理想为 $\overline{\mathfrak{n}}$，且 $R/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{n}$。若 $b \in I$ 且 $v(b) = v(I)$，则 (b) 是 I 的约化。

证明。 根据 b 的选择，我们有 $I\overline{R} = b\overline{R} = \overline{\mathfrak{n}^{v(b)}}$。由此可得

$$(b) \subseteq I \subseteq I\overline{R} \cap R = b\overline{R} \cap R = \overline{(b)}$$

由引理 2.13可知。因此，(b) 是 I ([16, 推论 1.2。5]) 的约化。 ■

引理 2.18。 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个一维 *Cohen-Macaulay* 局部环，并设 I 是 R 的正则理想。假设 R 是一个离散赋值环，其极大理想为 $\overline{\mathfrak{n}}$，且 $R/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{n}$。设 a, b 是 R 的非零因子，满足 $a/b \in R:\ I$。令 $\overline{\alpha} = a/b$。那么，$\ell_R(R/\alpha I) = \ell_R(R/I) + v(\alpha)$。

证明。令 $J = \alpha I$。那么，根据定义有 $aI = bJ$。考察图 (2.14.1) 以及等式$\ell_R(I/aI) = \ell_R(R/(a))$ 和 $\ell_R(J/bJ) = \ell_R(R/(b))$，可得 $\ell_R(R/\alpha I) = \ell_R(R/I) + \ell_R(R/(a)) - \ell_R(R/(b))$。

由于 $\overline{R}$ 是秩一的有限生成 R-模，我们也有

$$\ell_R(R/(a)) = \ell_R(\overline{R}/a\overline{R}) = v(a) \quad \text{and} \quad \ell_R(R/(b)) = \ell_R(\overline{R}/b\overline{R}) = v(b).$$

因此，该断言成立。 ■

推论 2.19. 设$(R, \mathfrak{m})$ 为一维 *Cohen-Macaulay* 局部环，并设 I 为R的正则理想。假设R 是以 $\overline{\mathfrak{n}}$ 为极大理想的离散赋值环，且 $\overline{R}/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{n}$。则 $h(I) = \ell_R(R/I) + v(R:\ I)$。

证明。选取 R的一个非零因子 $b \in I$。我们还选取 $a \in b(R:\ I)$，使得 $v(a) = v(b(R:\ I))$。由注 2.17，(a)是 $b(R : I)$的一个约化。令 $J := (a/b)I$。由推论 2.16，J 是 I的一个部分迹理想。由引理 2.18，

$$h(I) = \ell_R(R/J) = \ell_R(R/I) + v(a/b) = \ell_R(R/I) + v(a) - v(b). \tag{2.19.1}$$

另一方面，我们有 $v(a) = v(b(R:\ I)) = v(b) + v(R:\ I)$。因此，我们得到 $h(I) = \ell_R(R/I) + v(R:\ I)$，即为所求。■

以下回答了 Maitra 在另一篇论文中提出的问题 [21, 问题 5。1]也就是说，对于给定的正则理想 I，可以存在多少个部分迹理想?

推论 2.20。 设$(R, \mathfrak{m})$ 是一个一维 *Cohen-Macaulay* 局部环，且令 I 为R的正则理想。假设 R 是一个离散赋值环，其极大理想为 $\overline{\mathfrak{n}}$，且 $R/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{n}$。假设 J 是 I的一个部分迹理想。那么，

$$\{partial\ trace\ ideals\ of\ I\} = \{\alpha J \mid \alpha \in R : J, v(\alpha) = 0\}.$$

证明。（$\supseteq$）：由引理 2.18，以下等式可得 $\ell_R(R/\alpha J) = \ell_R(R/J) + v(\alpha) = \ell_R(R/J) = h(I)$。（$\subseteq$）：设 L 是 I的一个部分迹理想。由引理 2.12，$L \cong I \cong J$。因此，存在 $\alpha \in Q(R)$ 使得 $L = \alpha J$。由于 $\alpha J = L \subseteq R, \alpha \in R:\ J$。此外，由引理 2.18，我们得到

$$\ell_R(R/J) = h(I) = \ell_R(R/L) = \ell_R(R/J) + v(\alpha).$$

因此，$v(\alpha) = 0$ 如所欲证。 ■

3. Discussions on the h-invariant of the canonical module

除非另有说明，本节始终设 $(R, \mathfrak{m})$ 为具有典范模 ω_R 的 Cohen-Macaulay 局部环。本节我们关注典范模的部分迹理想以及 $h(\omega_R)$。

注 3.1.（参见 [21,定理 4.6(1)]）考虑以下条件：

(1) R 是 Gorenstein。

(2) $h(\omega_R) = 0$。

(3) $h(\omega_R) = \ell_R(R/\mathrm{tr}_R(\omega_R)) < \infty$.
于是，(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 成立。若 $\dim R > 0$，则所有条件等价。

证明。 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 和 (1) $\Rightarrow$(3) 显然成立。

(3) $\Rightarrow$ (1)：假设 $\dim R > 0$。注意到 $\ell_R(R/\mathrm{tr}_R(\omega_R)) < \infty$ 意味着 $\mathrm{tr}_R(\omega_R)$ 是 $\mathfrak{m}$-初等的，因此 R在去心谱上是 Gorenstein 的，进而 R 是一般地 Gorenstein，因为 $\dim R > 0$。该假设还意味着，对于某个 $f \in \mathrm{Hom}_R(\omega_R, R)$，有 $f(\omega_R) = \mathrm{tr}_R(\omega_R)$；也就是说，按 [8] 的定义， R 属于 Teter 型。由 [8,定理 1.1]， R 是 Gorenstein 的。■

若 dim⇒，则备注 3.1 中的蕴含 (3) $R = 0$ 不成立，如 [8]所示。

例 3.2。 ([8, 例 2.10]) 令 $K[x, y]$ 为域 K上的多项式环。设 $R = K[x, y]/(x^4, y^4, x^2y^2)$。则 $\mathrm{tr}_R(\omega_R) = (x^2, y^2)$，并且存在满同态 $\omega_R \to \mathrm{tr}_R(\omega_R)$。因此， $h(\omega_R) = \ell_R(R/\mathrm{tr}_R(\omega_R)) = 4$，但是， R 不是 Gorenstein。

如果 R 不是 Gorenstein，则 $h(\omega_R)$ 的有限性要求 $\dim R \leq 1$ ，如下所示。

注 3.3。 设 $\dim R > 0$ 且 R不是 Gorenstein。如果 $h(\omega_R) < \infty$，则 $\dim R = 1$ 且 R一般地 Gorenstein，即对于所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$， $R_{\mathfrak{p}}$ 都是 Gorenstein。

证明。 由命题 2.6(1)⇒(4)， $R_{\mathfrak{p}}$ 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(R)$ 都是戈伦斯坦环。也就是说， R 一般地 Gorenstein，且 ω_R 秩一（[3, 命题 3.3。18]）。由引理 2.7， $\dim R \leq 1$。 ■

由于注释 3.1 和 3.3，在维数 ≤ 1中， $h(\omega_R)$ 起到衡量戈伦斯坦程度的不变量的作用。因此，我们可以期待对具有较小 $h(\omega_R$ 数量的环给出刻画。从这一视角来看，以下结果基本上已为人所知，尽管 h-不变量是 Maitra 引入的新概念，因此文献中并未明确地用 h-不变量来表述。

事实 3.4. (1) ([17, 定理 2.5])：假设 2 是一个单位，且 $\mathrm{Soc}(R) \subseteq \mathfrak{m}^2$。那么以下条件等价。(a) $h(\omega_R) = 1$。(b) 存在一个阿廷戈伦斯坦环 S，使得 $R \cong S/(0)$：$\mathfrak{m}_S$。(2) ([18, 定理 1.4])：假设 $\dim R = 1$。那么以下条件等价。(a) $h(\omega_R) \leq 2$。(b) R 是戈伦斯坦环，或者存在一个 R 的 Gorenstein 子环 S，使得 $\ell_S(R/S) = 1$，且 $\mathrm{Q}(S) = \mathrm{Q}(R)$。(c) R 是戈伦斯坦环，或者存在一个一维戈伦斯坦局部环 $(S, \mathfrak{n})$，使得 $R \cong \mathrm{End}_S(\mathfrak{n})$。

注记 3.5. 若 $\dim R = 1$，则 $h(\omega_R) \neq 1$。事实上，若 $h(\omega_R) = 1$，则存在一个满射 $\omega_R \to \mathfrak{m}$。若 $\dim R = 1$，这是不可能的，见 [8, 定理 1.1]。

接下来，我们要给出具有 $h(\omega_R) = 2$ 的环的另一种刻画。首先我们需要一些预备结果和概念。

定义 3.6. ([4, 定义 2.1]) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环。则理想 I 称为 弱$\mathfrak{m}$-满 ， 如果 $(\mathfrak{m}I :_R \mathfrak{m}) = I$。

由中山引理，若 $I = R$ 与 R 都不是域，则 $(I\mathfrak{m} :_R \mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$ 。由于 $\mathfrak{m} \subseteq (\mathfrak{m}^2 :_R \mathfrak{m})$， $\mathfrak{m}$ 是弱 $\mathfrak{m}$-满，如果 R 不是域。F

or latt[用于使用, w] 我们还要回顾一下， R 的理想 I 被称为 $Burch$ ，如果 $\mathfrak{m}I \neq \mathfrak{m}(I :_R \mathfrak{m})$ ([5, 定义 2.1])·

命题 3.7。 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是一个诺特局部环，但不是域。设 I 是 R 的一个理想，使得 R/I是一个戈伦斯坦环。如果 I 不是弱 $\mathfrak{m}$-满的，且 $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$，那么 $\mathfrak{m}^2 = I\mathfrak{m}$ 和 $\mu_R(\mathfrak{m}) = 1 + \mu_R(I)$。

证明。 由于 I 不是弱 $\mathfrak{m}$-满的， $I \neq \mathfrak{m}$。由于 $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$， R/I 是一个极小重数的阿廷环。由于R/I 也是 Gorenstein 且非正则（因为 R/I 不是域），因此我们得到 R/I 是一个阿廷超曲面；所以， R/I 的极大理想是主理想。由此可知，对于每个满足$f \in \mathfrak{m} \setminus (\mathfrak{m}^2 + I)$的 $f \in R$，都有 $\mathfrak{m}/I = [(f) + I]/I$。根据假设 $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$， $\mathfrak{m}^2 + I = I$。由于 I不是弱 $\mathfrak{m}$-满的，因此我们可以取$g \in (\mathfrak{m}I :_R \mathfrak{m}) \setminus I$。于是， $\mathfrak{m} = (g) + I$。因此，根据 g的选取， $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}g + \mathfrak{m}I = \mathfrak{m}I$。由此可知，典范同态 $I/\mathfrak{m}I \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 是单射，因为 $\mathfrak{m}^2 \cap I = \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}I$。因此， $\mu_R(\mathfrak{m}) = 1 + \mu_R(I)$。■

我们回顾一下， R 称为近似 *Gorenstein*，如果 $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{tr}(\omega_R)$（[13, 定义 2。2]）。

命题 3.8. 设 维数 $R > 0$。则有以下结论。
(1) $h(\omega_R) \neq 1$。(2) 若 $h(\omega_R) = 2$，则 $\mathfrak{m} = \text{迹}_R(\omega_R)$，也就是说， R 是近似 *Gorenstein* 的，但不是 *Gorenstein* 的。

证明。 设 $\dim R > 0$。注意到 $0 \leq \ell_R(R/\mathrm{tr}_R(\omega_R)) \leq h(\omega_R)$。
(1)：设 $h(\omega_R) = 1$。 R 根据命题 3.1 不是 Gorenstein 的。由于 $R = \mathrm{tr}_R(\omega_R)$ 当且仅当 R 是 Gorenstein 的，因此得到 $\ell_R(R/\mathrm{tr}_R(\omega_R)) = h(\omega_R) = 1$ 根据上述不等式。这与命题3.1 (1) $\Leftrightarrow$ (3) 矛盾，因为 $\dim R > 0$。

(2)： R 根据命题 3.1 不是 Gorenstein 的。理由同上，可得 $0 < \ell_R(R/\mathrm{tr}_R(\omega_R)) < h(\omega_R) \leq 2$。由此可得 $\mathfrak{m} = \mathrm{tr}_R(\omega_R)$。
■

最后，我们还需要几乎戈伦斯坦环的概念及其与近似 Gorenstein 环的联系。

定义 3.9. ([10, 定理 3.11]) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为一维 Cohen-Macaulay 局部环，具有典范模 ω_R。假设存在一个理想，使得 $I \cong \omega_R$ 及其极小约化 $(b) \subseteq I$（例如， R 一般地 Gorenstein，且剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 是无限的）。则 R 称为几乎戈伦斯坦，如果$\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}b$。

事实 3.10. ([13, 定理 6.6]) 设 $(R, \mathfrak{m})$ 为一维 Cohen-Macaulay 局部环，具有典范模 ω_R。假设剩余域是无限的。考虑下列条件。
(1) R 是近似 Gorenstein 的。(2) R 是几乎戈伦斯坦的。则 (2) $\Rightarrow$(1) 成立。(1)$\Rightarrow$(2) 成立，如果 R 具有极小重数。

事实 3.11。 （参见 [6, 引理 5.2]）设（R， $\mathfrak{m}$）是一维 Cohen-Macaulay 局部环。那么， R 具有极小重数，当且仅当 $\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}$。

现在我们可以陈述并证明具有 $h(\omega_R) = 2$ 的环的刻画。

定理 3.12。 设 （R、 $\mathfrak{m}$） 是一个维数为1 且具有典范模 ω_R的 *Cohen-Macaulay* 局部环。考虑以下条件：

（1） h（ω_R） $= 2$。（2） R 不是超曲面，存在一个 R 的理想 I，使得 $I \cong \omega_R$ 且 $\mathfrak{m}^2 \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$。（3） R 不是超曲面，存在一个 R 的理想 I，使得 $I \cong \omega_R$ 且 $\mathfrak{m}^2 = I\mathfrak{m}$。（4）$\mathrm{tr}_R$（$\omega_R$） $= \mathfrak{m}$ 且 μ_R（$\mathfrak{m}$） $= 1 + \mathrm{r}$（R）。

那么，(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 均成立。此外，若 R 具有极小重数且剩余域 $R/\mathfrak{m}$是无限域，则这四个条件彼此等价。

证明。 对于任意一个蕴含关系，我们都可以假设 R 不是正则的。
(1) $\Rightarrow$(2)：由命题 3.3， R 一般地 Gorenstein。我们可以选取一个理想 J，使得 $J \cong \omega_R$ 由命题 3.3 得到[3, 18]。令 I 为 J 的一个部分迹理想。由引理 2.12， $I \cong J \cong \omega_R$。由此可得 R/I是 Artin Gorenstein 命题 3.3。另一方面，由于 $\ell_R(R/I) = h(J) = h(\omega_R) = 2$， $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$。因此，$\mathfrak{m}^2 \subseteq I \subseteq \mathfrak{m}$，因为 $\ell_R(R/I) = 2$。显然， R 不是超曲面，因为 R 不是 Gorenstein。

(2) $\Rightarrow$(3)：注意， R/I 由 [3, 命题 3.3 可知是一个戈伦斯坦环。18]。若能证明命题 3.7 中的 I 不是弱 $\mathfrak{m}$-满的，那么结论即得。反设 I 是弱 $\mathfrak{m}$-满的。
由于 I 是 $\mathfrak{m}$-准素的，因此 I 根据引理 4， R 在 [6, 中是 Burch。3]于是，根据 [6, 引理 37]（以及其后的讨论），存在一个 R-正则（因而也是 I-正则）元素 $a \in \mathfrak{m}$，使得 $R/\mathfrak{m}$ 是 I/aI的直和项。但 $I/aI \cong \omega_R/a\omega_R$ 在 R/aR上的内射维数有限，因此 $R/\mathfrak{m}$ 在 R上的内射维数也有限，这与 R 是非正则的矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (1)：注意，由于 $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$， R/I 具有极小重数。另一方面，由于 R/I 是 Gorenstein 环（[3, 命题 3.3.18]）， R/I 是 Artin 超曲面。因此， $\mathfrak{m}/I$ 是R/I的主理想。于是，由于 $\mathfrak{m}^2 \subseteq I$，我们得到 $\ell_R(R/I) = \ell_R((R/I)/(\mathfrak{m}/I)) + \ell_R(\mathfrak{m}/I) = 1 + \mu_R(\mathfrak{m}/I) = 2$。

由此可得 $h(\omega_R) \leq \ell(R/I) = 2$。根据命题 3.8(1)，我们得到 $h(\omega_R) = 0$ 或 $h(\omega_R) = 2$。如果$h(\omega_R) = 0$，那么 R 是 Gorenstein。于是， $I \cong \omega_R \cong R$ 以及 (3) 的假设蕴含 $\mathfrak{m}^2 = I\mathfrak{m} \cong \mathfrak{m}$，因此根据事实 3.11，$R$本身具有极小重数。因此， R 成为一个超曲面，这与 (3) 的假设矛盾。故 $h(\omega_R) = 2$。

因此，我们证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)。假设 (1)-(3)。$\mathrm{tr}_R(\omega_R) = \mathfrak{m}$ 由命题 3.8(2) 得出。注意到 I 根据 (2) 的证明并非弱 $\mathfrak{m}$-满的 $\Rightarrow$ (3)， $\mu_R(\mathfrak{m}) = 1 + \mathrm{r}(R)$ 由命题 3.7 以及 $\mathrm{r}(R) = \mu(\omega_R) = \mu(I)$ 这一事实得出。

(4) $\Rightarrow$(1)：假设 R 具有极小重数，且剩余域 $R/\mathfrak{m}$ 是无限域。由事实 3.10 可知， R 几乎是 Gorenstein 的。取一个 $\mathfrak{m}$-初等理想 J，使得 $J \cong \omega_R$。由于 $R/\mathfrak{m}$ 是无限域，我们可以取 J 的一个极小约化 (b)。于是，由定义 3.9 可得 $\mathfrak{m}J = \mathfrak{m}b$ 。令 (a) 为 $\mathfrak{m}$ 的一个极小约化，并令 $I := ab^{-1}J$。那么， I 是 R 的一个理想，因为 $I \subseteq \mathfrak{m}b^{-1}J = b^{-1}\mathfrak{m}b = \mathfrak{m}$。因此

$$(a) \subseteq I \subseteq \mathfrak{m} = \overline{(a)} \tag{3.12.1}$$

由于（a）是 $\mathfrak{m}$ 的约化，且事实 2.13。另一方面，我们有 ℓ_R（$\mathfrak{m}$/（a））$= \ell_R$（R/（a））$-1 =$ e（R）$-1 =$r（R），其中最后一个等式例如由 [14, 事实 2.6] 得出。进一步有

$$\ell_R(I/(a)) = \mu_R(I/(a)) = \mu_R(I) - 1 = \mu_R(\omega_R) - 1 = r(R) - 1,$$

其中第一个等式由 $\mathfrak{m}^2 = a\mathfrak{m} \subseteq$ （a）得出，第二个等式由以下事实得出：（a）是 I 的极小约化（见（3.12.1））。因此，我们得到 ℓ_R（$\mathfrak{m}/I$）$= \ell_R$（$\mathfrak{m}$/（a））$- \ell_R$（I/（a））$= 1$。因此，

$$h(\omega_R) = h(I) \leq \ell_R(R/I) = \ell_R(\mathfrak{m}/I) + 1 = 2.$$

由于 R 不是 Gorenstein，命题（1）由命题 3.8 得出。 ■

根据事实 3.4，自然可以探究 h（ω_R）的一个上界。为此，我们回顾双有理 Gorenstein 余长的概念。

定义 3.13。 ([18, 定义 1。3])：令 R 为一维 Cohen-Macaulay 局部环。则，不变量

$$bg(R) := \inf\{\ell_S(R/S) \mid S \subseteq R \text{ is a module finite, } \mathrm{Q}(S) = \mathrm{Q}(R), \text{ and } S \text{ is Gorenstein}\}$$

称为 双有理 *Gorenstein* 余长 的 R。

使用这一记号，事实 3.4 (2)(a) $\Leftrightarrow$ (b) 的结果可改述为 $h(\omega_R) \leq 2 \Leftrightarrow bg(R) \leq 1$。基于这一观察，以下结果给出了该结果一个方向的推广。

定理 3.14。 令 $(R, \mathfrak{m})$ 为具有典范模 ω_R 的一维 *Cohen-Macaulay* 局部环。若R 一般地 *Gorenstein*， 则 $h(\omega_R) \leq 2bg(R)$。

证明。我们可以假设 $bg(R) < \infty$。因此，存在 R 的 Gorenstein 子环 S，使得 $Q(S) = Q(R)$ 且 $\ell_S(R/S) = bg(R) < \infty$。因此，$\dim S = \dim R = 1$。注意，由于 $\mathfrak{m} \cap S$ 是 S 的唯一极大理想， S 是局部的。因此，$\omega_R \cong$ 同态模$_S(R, S) \cong (S : R)$，见 [3, 定理 3.3.7(b)]。由于 $(S : R)$ 是 R 的一个理想，我们得到

$$h(\omega_R) \leq \ell_R(R/(S : R)) = \frac{\ell_S(R/(S : R))}{\ell_S(R/\mathfrak{m})}, \tag{3.14.1}$$

最后一个等号成立，是因为我们有一个模有限扩张 $S/(\mathfrak{m} \cap S) \subseteq R/\mathfrak{m}$。另一方面，将 S-典范对偶同态模 $\mathrm{Hom}_S(-, S)$ 应用于正合列 $0 \to S \to R \to R/S \to 0$，可得 $S/(S : R) \cong \mathrm{Ext}^1_S(R/S, S)$。由 [3, 引理 3.1.16 和命题 3.2.12], 可知， $\ell_S(S/(S : R)) = \ell_S(R/S)$。因此，我们得到 $\ell_S(R/(S : R)) = \ell_S(S/(S : R)) + \ell_S(R/S)$ $= 2\ell_S(S/(S : R)) = 2bg(R)$。将此等式与不等式 (3.14.1) 结合，即完成证明。■

4. THREE-GENERATED NUMERICAL SEMIGROUP RINGS

本节中，我们给出 $h(\omega_R)$ 的一个公式，适用于 R 是由 3 个元素生成的数值半群环的情形。首先，按照数值半群的术语约定，我们先固定记号。

设定 4.1. 令 $\ell > 0$，并令 $0 < a_1, a_2, \dots, a_\ell \in \mathbb{Z}$ 为正整数，使得 $\mathrm{GCD}(a_1, a_2, \dots, a_\ell) = 1$。我们定义

$$H = \langle a_1, a_2, \dots, a_\ell \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} c_i a_i \;\middle|\; 0 \le c_i \in \mathbb{Z} \text{ for all } 1 \le i \le \ell \right\}$$

并称其为由.....生成的数值 半群 。令 $k[t]$ 为域 k上的多项式环。我们 set

$$R = k[H] = k[t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_\ell}]$$

在 $k[t]$ 中，并称其为 H 上的数值半群环 。环 R 是一维 Cohen-Macaulay 分次整环，满足 $R = k[t]$ 和 $\mathfrak{m} = (t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_\ell})$。我们称

$$\begin{aligned} \mathrm{PF}(H) =& \{\alpha \in \mathbb{N} \setminus H \mid \alpha + h \in H \text{ for all } h \in H \setminus \{0\}\} \\ =& \{\alpha \in \mathbb{N} \setminus H \mid \mathfrak{m} t^\alpha \subseteq R\} \end{aligned}$$

H的伪弗罗贝尼乌斯数集合。

令 $P = k[X_1, \dots, X_\ell]$ 为 k 上的多项式环。我们将 P 视为一个 $\mathbb{Z}$-分次环，使得 $P_0 = k$，且对所有 $1 \le i \le \ell$，$\deg X_i = a_i$ 。令 $\varphi : P \to R$ 表示由 $\varphi(X_i) = t^{a_i}$ 定义的分次 k-代数同态，其中每个 $1 \le i \le \ell$ 均如此。

本节中，我们着重讨论 $\ell = 3$ 的情形。为简便起见，分别用 X，Y，Z 代替 X_1、X_2、X_3。于是有如下结论。

事实 4.2。 ([12]) 假设 R 不是 Gorenstein 环。那么，

$$\operatorname{Ker} \varphi = I_2 \begin{pmatrix} X^\alpha & Y^\beta & Z^\gamma \\ Y^{\beta'} & Z^{\gamma'} & X^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

对某个 $0 < \alpha,\ \beta, \gamma,\ \alpha',\ \beta',\ \gamma' \in \mathbb{Z}$，其中 $I_2(\mathbb{M})$ 是由矩阵 $\mathbb{M}$ 的 2×2 阶子式生成的理想 .

下文中，我们假设 $\ell = 3$ 且 R 不是 Gorenstein 环。令

$$\Delta_1 = Z^{\gamma+\gamma'} - X^{\alpha'} Y^\beta,\ \Delta_2 = X^{\alpha+\alpha'} - Y^{\beta'} Z^\gamma,\ \text{and } \Delta_3 = Y^{\beta+\beta'} - X^\alpha Z^{\gamma'}.$$

根据希尔伯特–伯奇定理， R 的分次最小 P-自由分解为

$$0 \longrightarrow \begin{matrix} P(-m) \\ \oplus \\ P(-n) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} X^\alpha & Y^{\beta'} \\ Y^\beta & Z^{\gamma'} \\ Z^\gamma & X^{\alpha'} \end{bmatrix}} \begin{matrix} P(-d_1) \\ \oplus \\ P(-d_2) \\ \oplus \\ P(-d_3) \end{matrix} \xrightarrow{[\Delta_1\ -\Delta_2\ \Delta_3]} P \xrightarrow{\varphi} R \longrightarrow 0, \tag{4.2.1}$$

其中 $d_1 = \deg \Delta_1 = a_3(\gamma + \gamma')$， $d_2 = \deg \Delta_2 = a_1(\alpha + \alpha')$， $d_3 = \deg \Delta_3 = a_2(\beta + \beta')$， $m = a_1\alpha + d_1 = a_2\beta + d_2 = a_3\gamma + d_3$，且 $n = a_1\alpha' + d_3 = a_2\beta' + d_1 = a_3\gamma' + d_2$。

令 $\omega_P = P(-d)$ 为 P 的分次典范模，其中 d是 P 的 a-不变量。应用函子同态模$_P(-, \omega_P)$ 于正合列 (4.2.1)，可得

$$\begin{matrix} P(d_1 - d) \\ \oplus \\ P(d_2 - d) \\ \oplus \\ P(d_3 - d) \end{matrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} X^\alpha & Y^\beta & Z^\gamma \\ Y^{\beta'} & Z^{\gamma'} & X^{\alpha'} \end{bmatrix}} \begin{matrix} P(m - d) \\ \oplus \\ P(n - d) \end{matrix} \longrightarrow \omega_R \longrightarrow 0 \tag{4.2.2}$$

因为 $\omega_R \cong \mathrm{Ext}^2_P(R,\ \omega_P)$（[3, 命题 3.6。12]）。另一方面，众所周知

$$\omega_R \cong \sum_{f \in \mathrm{PF}(H)} R t^f$$

由 [11, 例（2.1.9）]。注意，$\mathrm{PF}(H)=\{f_1,f_2\}$ 对于某些正整数 $f_1<f_2$ 根据事实 4.2。因此，通过考察（4.2.2）中的次数，我们得到

$$f_2-f_1=|n-m|=\begin{cases}|a_1\alpha-a_2\beta'|\\|a_2\beta-a_3\gamma'|\\|a_3\gamma-a_1\alpha'|\end{cases}.$$

由此可知，遗忘移位后有 $\omega_R\cong(\mathbf{1},t^{f_2-f_1})$。因此，我们得到以下（非分次）同构：

命题 4.3. $\omega_R\cong(t^{a_1\alpha},t^{a_2\beta'})\cong(t^{a_2\beta},t^{a_3\gamma'})\cong(t^{a_3\gamma},t^{a_1\alpha'})$。

重新排列 a_1,a_2,a_3 并调整矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}X^{\alpha}&Y^{\beta}&Z^{\gamma}\\Y^{\beta'}&Z^{\gamma'}&X^{\alpha'}\end{smallmatrix}\right)$ 的形式后，我们可以假设 $a_1\alpha$ 是 $a_1\alpha$、$a_2\beta$、$a_3\gamma$、$a_2\beta'$、$a_3\gamma'$ 和 $a_1\alpha'$ 中最小的整数。采用这些记号，我们得到 $h(\omega_R)$ 的计算如下。

定理 4.4. 假设 $a_1\alpha$ 是 $a_1\alpha$、$a_2\beta$、$a_3\gamma$、$a_2\beta'$、$a_3\gamma'$ 和 $a_1\alpha'$ 中最小的整数。那么，$h(\omega_R)=\alpha\beta'(\gamma+\gamma')$。

证明。由 [13, 命题 6.3], $\mathrm{tr}_R(\omega_R)=(t^{a_1\alpha},t^{a_2\beta'},t^{a_2\beta},t^{a_3\gamma'},t^{a_3\gamma},t^{a_1\alpha'})$。由此可知，$(t^{a_1\alpha},t^{a_2\beta'})$ 是 $\mathrm{tr}_R(\omega_R)$ 的约化，因为 $a_1\alpha$ 是 $\mathrm{tr}_R(\omega_R)$ 中元素取值的最小整数。因此，由定理 2.14 和命题 4.3，典范理想 $(t^{a_1\alpha},t^{a_2\beta'})$ 是 ω_R 的部分迹理想。于是，我们得到

$$\begin{aligned}h(\omega_R)=&\ell_R(R/(t^{a_1\alpha},t^{a_2\beta'}))=\ell_P\left(P/[I_2\left(\begin{smallmatrix}X^{\alpha}&Y^{\beta}&Z^{\gamma}\\Y^{\beta'}&Z^{\gamma'}&X^{\alpha'}\end{smallmatrix}\right)+(X^{\alpha},Y^{\beta'})]\right)\\=&\ell_P(k[X,Y,Z]/(X^{\alpha},Y^{\beta'},Z^{\gamma+\gamma'}-X^{\alpha'}Y^{\beta}))\\=&\ell_P(k[X,Y,Z]/(X^{\alpha},Y^{\beta'},Z^{\gamma+\gamma'})),\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 $a_1\alpha$ 的极小性得出（回忆 $a_1\alpha\le a_1\alpha'$）。因此，我们有 $h(\omega_R)=\alpha\beta'(\gamma+\gamma')$。■

例 4.5。 设 $n\ge1$，且设 $R=k[t^{2n+1},t^{2n+2},t^{2n+3}]$ 是域 k 上的一个数值半群环。那么，$h(\omega_R)=n+1$。

证明。显然可验证 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 包含 $J:=I_2\left(\begin{smallmatrix}X&Y&Z^n\\Y&Z&X^{n+1}\end{smallmatrix}\right)$。于是得到正合列$0\to\mathrm{Ker}\,\varphi/J\to k[X,Y,Z]/J\to R\to0$。由于 $\varphi(X)=t^{a_1}$ 是 R的非零因子，我们得到

$$0\to\mathrm{Ker}\,\varphi/(J+X\cdot\mathrm{Ker}\,\varphi)\to k[X,Y,Z]/(J+(X))\to R/(t^{a_1})\to0.$$

注意到 $\ell(k[X,Y,Z]/(J+(X)))=\ell(R/(t^{a_1}))=a_1$，我们得到 $\mathrm{Ker}\,\varphi/(J+X\,\mathrm{Ker}\,\varphi)=0$。由（分次）中山引理，$\mathrm{Ker}\,\varphi=J$。因此，由定理 4.4，我们得到 $h(\omega_R)=n+1$。■

References

[1] Ananthnarayan H.; Avramov Luchezar L.; Moore W. Frank *J. Reine Angew. Math.* **667** 2012 149 176

, , . Gorenstein 局部环的连通和。 ( ), – . [2] Bass, Hyman. 关于 Gorenstein 环的普遍性。 *Math. Z.* **82** (1963 年), 8–28. [3] Bruns, Winfried; Herzog, Jürgen. Cohen-Macaulay 环。 Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **39**. 剑桥大学出版社，剑桥，1993年。 xii+403 页。[4] Celikbas, Olgur; Goto, Shiro; Takahashi, Ryo; Taniguchi, Naoki. 关于 Huneke 和 Wiegand 猜想的理想情形。 *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2) **62** (2019年), 第 3 期， 847–859. [5] H. Dao, T. Kobayashi, R. Takahashi, Burch 理想与 Burch 环， 《代数与数论》14 (8) (2020年) 2121–2150. [6] Dey, Souvik; Kobayashi, Toshinori. Burch 子模及相关子模的（上）同调消失。 *Illinois J. Math.* **67** (2023年), 第 1 期， 101–151. [7] Ding, Songqing. 关于 Cohen-Macaulay 局部环指标的一则短札。 *Comm. Algebra* **21** (1993年), 第 1 期， 53–71. [8] Gasanova, Oleksandra; Herzog, Jürgen; Hibi, Takayuki; Moradi, Somayeh. Teter 型环。 *Nagoya Math. J.* **248** (2022年), 1005–1033. [9] Goto, Shiro; Isobe, Ryotaro; Kumashiro, Shinya. 迹理想与双有理扩张之间的对应及其在分析环的 Gorenstein 性质中的应用。 *J. Pure Appl. Algebra* **224** (2020年), 第 2 期， 747–767.

[10] Goto, Shiro; Matsuoka, Naoyuki; Phuong, Tran Thi. 几乎戈伦斯坦环。 *J. Algebra* **379** (2013年), 355–381. [11] Goto, Shiro; Watanabe, Keiichi. 关于分次环。I. *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978年), 第 2 期，179–213. [12] Herzog, Jürgen. 阿贝尔半群与半群环的生成元和关系。 *Manuscripta Math.* **3** (1970年), 175–193. [13] Herzog, Jürgen; Hibi, Takayuki; Stamate, Dumitru I. 典范模的迹。 *Israel J. Math.* **233** (2019年), 第 1 期，133–165.[14] Herzog, Jürgen; Kumashiro, Shinya; Stamate, Dumitru I. 一维 Cohen-Macaulay 环中典范模的微小迹理想。 *J. Algebra* **619** (2023年), 626–642. [15] Herzog, Jürgen; Kunz, Ernst. Cohen-Macaulay 环的典范模。数学讲义，238。Springer 出版社，柏林–纽约，1971年。vi+106 页。[16] Huneke, Craig; Swanson, Irena. 理想、环与模的整闭包。伦敦数学会讲义丛书，336。剑桥大学出版社，剑桥，2006年。xiv+431 页。[17] Huneke, Craig; Vraciu, Adela. 几乎 Gorenstein 的环。 *Pacific J. Math.* **225**(2006年), 第 1 期，85–102. [18] Kobayashi, Toshinori. 具有自对偶极大理想的局部环。 *Illinois J. Math.* **64** (2020年), 第 3 期，349–373. [19] Lindo, Haydee. 交换环上模的迹理想与自同态环的中心。 *J. Algebra* **482** (2017年), 102–130.[20] Maitra, Sarasij. 部分迹理想与 Berger 猜想。 *J. Algebra* **598** (2022年), 1–23. [21] Maitra, Sarasij. 部分迹理想、挠与典范模。 *J. Algebra* **652** (2024年), 1–19. [22] Matsumura, Hideyuki. 交换环论。由 M. Reid 从日文译出。Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8。剑桥大学出版社，剑桥，1986年。xiv+320 页。[23] Vasconcelos,

Wolmer V 1991 3, . 仿

633 638

射整环整闭包的计算。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **113** ( ), 第 – 期。

Souvik Dey: Department of Mathematical Sciences, University of Arkansas,

850 West Dickson Street Fayet-teville, Arkansas 72701 United States*Email address*: souvikd@uark.edu

Shinya Kumashiro: Department of Mathematics, Osaka Institute of Technology, 5-16-1 Omiya, asahi-ku, Osaka, 535-8585, Japan*Email address*: shinya.kumashiro@oit.ac.jp