arXiv:2603.10531v1 [math.AP] 11 Mar 2026

具有壁面附着的连续搅拌釜式反应器中生物膜模型的分析

KATERINA NIK 和 CHRISTOPH WALKER

摘要。我们研究了一个描述具有壁面附着的连续搅拌釜式反应器中细菌种群的数学模型。该模型将一维生物膜中底物扩散的自由边值问题，与描述生物膜厚度、悬浮生物量和游离底物浓度的非线性常微分方程组耦合起来。我们证明了全局适定性，并分析了长期动力学。特别地，我们刻画了平凡（洗出）平衡解的局部稳定性和全局稳定性，证明了非平凡平衡态的存在性，并在附加结构假设下证明其唯一性，进而得出其局部稳定性的条件。

1. 引言

由于微生物群落在自然、医疗和工业过程中发挥着基础性作用，它们已成为跨学科研究的核心议题。在许多环境中，微生物并非以孤立的浮游细胞形式存在，而是形成具有空间结构的聚集体，通常称为生物膜。在水环境的浸没表面上，细胞可能附着于边界，转变为固着状态，并形成层状结构。

在许多工程系统中，例如连续搅拌釜式反应器（CSTR），悬浮态和表面附着的微生物种群共存。这些区室在动态上相互耦合：浮游细胞可能附着于已形成的生物膜，而固着细胞则可能脱离并重新进入主体相。尽管已知附着和脱离过程在微生物种群动态中发挥着关键作用，但其潜在机制仍未得到充分理解。

尽管已有大量实验研究和面向应用的建模工作，但对于如何系统推导并严格分析能够描述悬浮种群与附着种群耦合动力学的模型，关注仍相对较少。受.....启发 [9], ，我们研究一个描述连续搅拌釜式反应器中具有壁面附着的细菌种群的数学模型。该模型扩展了经典的 Freter模型 [1,2,7,13] ，纳入了额外的动力学特征。具体而言，固着种群由一维生物膜表示，其演化遵循已有的生物膜建模框架 [7,8,14,15]。假设反应器持续通入新鲜培养基。生物膜均匀覆盖可供定殖的表面，生长限制性底物扩散进入生物膜层，并因扩散和微生物消耗而形成空间梯度。

日期：2026年3月12日。2020数学学科分类37N25,92D25,34C11。关键词和短语生物膜、适定性、平衡态、稳定性。

更准确地说， [9]中提出的模型形式如下

$$\kappa\partial_z^2 c = r(c)\,, \qquad 0<z<h(t)\,, \quad t>0\,, \tag{1.1a}$$

$$\partial_z c(0) = 0\,, \quad c\big(h(t)\big) = S(t)\,, \qquad t>0\,, \tag{1.1b}$$

$$h' = \int_0^{h(t)} g\big(r(c(t,z))\big)\,\mathrm{d}z + \frac{\alpha}{\beta}Q(t) - d(h)h\,, \qquad t>0, \tag{1.1c}$$

$$S' = D(S^*-S) - k_1 Q(t)\nu(S) - \rho\partial_z c\big(t,h(t)\big)\,, \qquad t>0\,, \tag{1.1d}$$

$$Q' = \big(\nu(S(t)) - D - k_Q\big)Q + \beta d\big(h(t)\big)h(t) - \alpha Q\,, \quad t>0\,, \tag{1.1e}$$

服从非负初始条件

$$h(0) = h_0\,, \quad S(0) = S_0\,, \quad Q(0) = Q_0\,, \tag{1.1f}$$

针对厚度为 z 的生物膜中的未知底物浓度 $c = c(t,z)$、生物膜厚度 $h = h(t)$、主体相中的游离底物浓度 $S = S(t)$ 以及主体相中的悬浮生物量 $Q = Q(t)$。

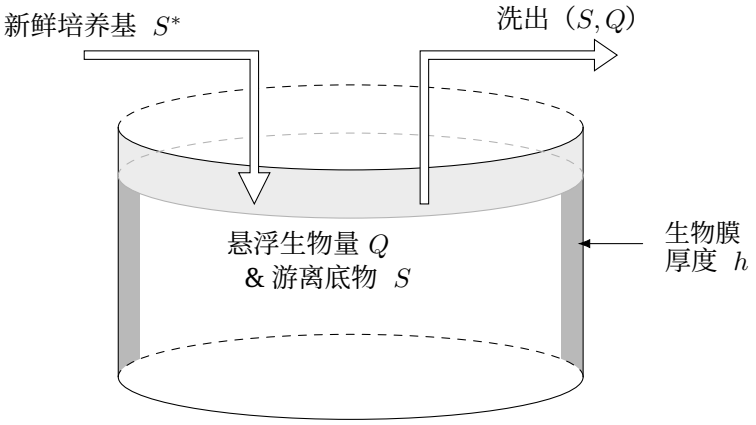


图 1. CSTR 示意图。

这些方程表明，新鲜培养基以进口底物浓度$S^* > 0$供给。底物和悬浮生物量的洗出由稀释率$D > 0$描述。常数 $k_Q > 0$ 表示悬浮细菌的死亡率，常数 $k_1 = 1/V\gamma > 0$ 涉及反应器体积 V 以及单位底物的生物量得率 γ。此外， $\alpha > 0$ 和 $d = d(h)$分别表示悬浮细胞附着到生物膜的附着率以及从壁面脱落的脱落速率。由底物消耗引起的生物量生长分别通过生物膜种群的底物依赖的生长函数$r = r(c)$和悬浮种群的 $\nu = \nu(S)$进行建模。术语$\rho\partial_z c(t,h(t))$ 表示从水相进入生物膜的底物通量，其中$\rho > 0$ 为生物膜内的生物量密度。常数 β 定义为 ρ 与可定殖表面积 $A > 0$的乘积。此外，

$$\int_0^{h(t)} g\big(r(c(t,z))\big)\,\mathrm{d}z$$

描述生物膜移动边界 $z = h(t)$ 处生物质受生长作用产生的速度。在 [9], 中，底物依赖的生长函数 $r = r(c)$ 和 $\nu = \nu(S)$

以如下形式的 Monod动力学给出： $r(c) = r_m c/(r_0 + c)$， $\nu(S)$ 也采用类似形式，而壁面脱落率 $d(h) = d_0 h$ 为线性，函数 g 取为 $g(r) = r - b$其中 $b > 0$ 表示生物膜细菌的死亡率。这里，我们允许采用更一般的函数形式。关于这一特定模型的更多细节，请参阅 [9, 12] ；关于扩展或相关模型，请参阅 [1, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 13] 及其中的参考文献。

在 [9], 适定性方面，文献证明了（1.1）式的适定性（所用数据的条件略微不那么一般），并推导出平凡（冲出）平衡的局部稳定（性）条件。此外，文中还给出了富有启发性的数值模拟，揭示了冲出平衡不稳定时非平凡平衡态的存在性，并表明解具有持久性。此外，还确定了模型参数与因变量之间的结构关系。

本文旨在对该模型的适定性和长期动力学进行更详细、严谨的数学分析。具体而言，我们给出了冲出平衡态全局稳定性的条件。我们还证明，在冲出平衡态不稳定的参数范围内，存在非平凡平衡态。此外，我们给出了保证非平凡平衡态唯一性及其局部稳定性的条件。对此平衡态进行唯一性和稳定性分析，需要仔细且不平凡的论证。值得指出的是，即便对于代数结构较为简单的Freter模型，非平凡平衡态的分析仍然颇具挑战性 [7, 13], ；据我们所知，只有在附加假设下才能证明其唯一性。我们的研究方法受到 [6], 的启发。该文研究了一种相关但更简单的一维生物膜模型，其中仅耦合了生物膜厚度 h 和底物浓度 c。

在第2节中，我们证明了（1.1）的适定性（见定理2.3），并推导出后续分析所需的解的其他定性性质。在第3节中，我们首先证明任意（非负）初值对应的 ω极限集非空（见命题3.2），然后研究平凡（洗出）平衡的局部（命题3.3）和全局（推论3.5）稳定性。最后，在第4节中，我们证明了非平凡平衡态的一般存在性结果（定理4.2）。迄今为止得到的结果主要取决于入口 S^*的大小；随后，我们对参数施加额外的结构性假设，并采用打靶论证证明非平凡平衡态的唯一性（定理4.4）。最后，我们推导出保证（唯一）非平凡平衡态局部稳定的条件（定理4.11）。部分稳定性分析推迟至附录B。附录A 中给出了一些基本的数值模拟。

在下文中，我们令

$$k_2 := D + k_Q > 0$$

并假设

$$g \in \mathrm{C}^{1-}(\mathbb{R})\,, \tag{1.2a}$$

其中，C^{1-} 表示局部 Lipschitz 连续性，且

$$r \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}) \ \text{ is nondecreasing with } sr(s) > 0 \text{ for } \ s \neq 0\,, \tag{1.2b}$$

以及

$$\nu, d \in \mathrm{C}^{1-}(\mathbb{R}) \ \text{ with } \ \nu(s), d(s) > 0 \ \text{ for } \ s > 0 \ \text{ and } \ \nu(0) = 0\,. \tag{1.2c}$$

事实上，只需函数在非负自变量上有定义即可。我们将在需要时提出进一步的假设。

2. 适定性

我们证明系统（1.1）的全局适定性，并推导解的其他性质，以供后续使用。关于（1.1）的适定性，我们暂时忽略时间依赖性，并引入无量纲变量

$$y = \frac{z}{h} \quad \text{and} \quad u(y) = c(yh), \tag{2.1}$$

因此，对于固定时刻，变化区域 $[0,h]$ 上的生物质基质问题（1.1a）-（1.1b） c等价于以下（固定的）边值问题 $[0,h]$ ，

$$\kappa \partial_y^2 u = h^2 r(u)\,, \quad 0 < y < 1\,, \tag{2.2a}$$

$$\partial_y u(0) = 0\,, \quad u(1) = S\,, \tag{2.2b}$$

我们先分析该问题：

命题 2.1。 假设 (1.2)。给定 h， $S \in \mathbb{R}$，存在唯一的解

$$u = u[h,S] \in \mathrm{C}^3([0,1])$$

边值问题 (2.2)。成立的是

$$u(y) = S - \frac{h^2}{\kappa} \int_y^1 \int_0^\eta r(u(\xi))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \quad y \in [0,1]\,, \tag{2.3}$$

and

$$\Big[(h,S) \mapsto u[h,S]\Big] \in \mathrm{C}^1\big(\mathbb{R}^2, \mathrm{C}^2([0,1])\big)\,.$$

此外，若 $S > 0$，则

$$0 < u(0) \le u(y) \le S\,, \quad y \in [0,1]\,, \tag{2.4a}$$

$$0 \le \partial_y u(y) \le \frac{h^2}{\kappa} r(u(y)) \le \frac{h^2}{\kappa} r(S)\,, \quad y \in [0,1]\,, \tag{2.4b}$$

$$0 \le \partial_y^2 u(y) \le \frac{h^2}{\kappa} r(S)\,, \quad y \in [0,1]\,. \tag{2.4c}$$

证明。 **(i)** 给定 h， $S \in \mathbb{R}$，我们定义

$$F(u)(y) := S - \frac{h^2}{\kappa} \int_y^1 \int_0^\eta r(u(\xi))\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,, \quad y \in [0,1]\,, \tag{2.5}$$

对于 $u \in \mathrm{C}([0,1])$。函数 F 显然满足

$$F : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$$

因为 r 是连续的。得益于

$$\partial_y F(u)(y) = \frac{h^2}{\kappa} \int_0^y r(u(\xi))\,\mathrm{d}\xi, \quad y \in [0,1], \tag{2.6}$$

对于 $u \in \mathrm{C}([0,1])$，并且由于 r 在有界集上有界，Arzel`a-Ascoli 定理保证映射 $F\colon \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ 也是紧的。考虑满足 $u = \lambda F(u)$ 的 $\lambda \in [0,1]$ 和 $u \in \mathrm{C}([0,1])$。那么 $u \in \mathrm{C}^2([0,1])$ 满足

$$\kappa \partial_y^2 u = \lambda h^2 r(u)\,, \quad 0 < y < 1\,,$$

$$\partial_y u(0) = 0\,, \quad u(1) = \lambda S\,.$$

对于 $u_+ =$最大值$\{u,\ 0\}$以及 $u_- =$最小值$\{u,\ 0\}$由式（1.2b）可知 $u_\pm r\ (u)\ \geq 0$属于 $[0,1]$因此

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda h^2 \int_0^1 u_\pm(y) r(u(y))\,\mathrm{d}y &= -\kappa \int_0^1 |\partial_y u_\pm(y)|^2\,\mathrm{d}y + \kappa u_\pm(y)\partial_y u(y)\big|_{y=0}^{y=1} \\ &= -\kappa \int_0^1 |\partial_y u_\pm|^2\,\mathrm{d}y + \kappa u_\pm(1)\partial_y u(1)\,. \end{aligned}$$

若 $S \geq 0$，则 $u_-(1) = 0$，因此 $\|\partial_y u_-\|_2 = 0$，从而 $u_- \equiv 0$。因此 $u \geq 0$ 属于 $[0,1]$。既然此时 $r(u) \geq 0$属于 $[0,1]$，由 (1.2b) 可知，我们根据 $u = \lambda F(u)$ 和 (2.5) 推得 $0 \leq u \leq S$属于 $[0,1]$。类似地，若 $S < 0$，则 $u_+(1) = 0$，因此 $u_+ \equiv 0$；也就是说， $u \leq 0$属于 $[0,1]$。既然此时 $r(u) \leq 0$属于 $[0,1],$，我们便由 (2.5) 推得 $S \leq u \leq 0$属于 $[0,1]$。因此，该集合

$$\{u \in C([0,1]) \,|\, \text{there is } \lambda \in [0,1] \text{ with } u = \lambda F(u)\}$$

有界。因此，舍费尔不动点定理¨ [5, 定理 11。3] 蕴含存在 $u \in \mathrm{C}([0,1])$，使得 $u = F(u)$。事实上，我们还可得 $u \in \mathrm{C}^3([0,1])$（因为 r 是 C^1）满足 (2.2)。至于唯一性，取 (u_1 和 u_2 的两个解（2.2）。那么 $w :\ = u_1 - u_2$满足

$$\kappa \partial_y^2 w = h^2(r(u_1) - r(u_2)), \quad y \in [0,1],$$

and

$$\partial_y w(0) = 0, \quad w(1) = 0.$$

将第一个方程乘以 w 并分部积分，得到

$$0 \leq h^2 \int_0^1 \Big[r(u_1(y)) - r(u_2(y))\Big]\Big[u_1(y) - u_2(y)\Big]\,\mathrm{d}y = -\kappa \int_0^1 |\partial_y w(y)|^2\,\mathrm{d}y$$

利用边界条件以及 r的单调性。由此可得 $w \equiv 0$ 在 $[0,1]$上。

(ii) 为证明解 $u = u[h,S]$ 对(h,S)的连续依赖性，我们定义

$$G \in \mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^2 \times \mathrm{C}^2([0,1]), \mathrm{C}^2([0,1])\right)$$

by

$$G(h,S,v)(y) := S - \frac{h^2}{\kappa}\int_y^1 \int_0^\eta r(v(\rho))\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\eta - v(y)\,, \quad y \in [0,1]\,,$$

其中$(h,S)\ \in \mathbb{R}^2$ 且 $v \in \mathsf{C}^2([0,1])$。然后，当$(h,S)\ \in \mathbb{R}^2$ 固定时，

$$G\big(h,S,u[h,S]\big) = 0$$

且其对 v的Fr´echet导数由 $D_v G\big(h,S,u[h,S]\big) = -1 - K$给出，其中

$$(K\phi)(y) :\ = \frac{h^2}{\kappa}\int_y^1 \int_0^\eta r'\big(u[h,S](\xi)\big)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,, \quad y \in [0,1]\,,$$

对于 $\phi \in \mathsf{C}^2([0,1])$。由于

$$\partial_y(K\phi)(y) = -\frac{h^2}{\kappa}\int_0^y r'\big(u[h,S](\xi)\big)\phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad \partial_y^2(K\phi)(y) = -\frac{h^2}{\kappa} r'\big(u[h,S](y)\big)\phi(y)\,,$$

阿策拉-阿斯科利定理保证，如(i)所示， $K \in \mathcal{L}(\mathrm{C}^2([0,1]))$是一个紧算子，因此 $D_v G(h,S,u[h,S]) = -1 - K$是一个弗雷德holm算子。若 $\phi \in \ker(D_v G(h,S,u[h,S]))$，则 $\phi \in \mathrm{C}^2([0,1])$满足

$$\kappa \partial_y^2 \phi(y) = h^2 r'(u[h,S](y))\phi(y)\,, \quad y \in [0,1]\,,$$
$$\partial_y \phi(0) = 0, \quad \phi(1) = 0\,.$$

由于 $r'(u[h,S](y)) \geq 0$ 对 $y \in [0,1]$成立，因此按照唯一性证明可知， $\phi \equiv 0$在 $[0,1]$上成立。这意味着 $D_v G(h,\ u[h])$ 是 $\mathrm{C}^2([0,1])$ 上的一个自同构，对 $h,\ S \in \mathbb{R}^2$成立。由于 $G(h,\ S,\ u[h,S]) = 0$ 对 $h,\ S \in \mathbb{R}^2$ 成立，隐函数定理现在确保确实

$$[(h,S) \mapsto u[h,S]] \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathrm{C}^2([0,1]))\,,$$

(iii) 最后，我们已经注意到，如果 $S > 0$，那么 $0 \leq u \leq S$ 在 $[0,1]$中成立。这也意味着（2.4b）和（2.4c），因为 $r' \geq 0$。 □

为后文使用，注意：

推论2.2。 假设 (1.2) 并令 $(h,\ S) \in [0,\infty)^2$。

(a) 函数 $y \mapsto \partial_S u[h,S](y)$ 关于 $y \in [0,1]$ *an* 单调不减 d

$$0 < \partial_S u[h,S](0) \leq \partial_S u[h,S](y) \leq 1\,, \quad y \in [0,1]\,. \tag{2.7}$$

此外，有

$$\partial_S \partial_y u[h,S](y) = \partial_y \partial_S u[h,S](y) \geq 0\,, \quad y \in [0,1]\,.$$

(b) 有 $\partial_h u[h,S](y) \leq 0$，对于 $y \in [0,1]$。事实上， $\partial_h u[0,S](y) = 0$ 对于 $y \in [0,1]$，特别地， $\partial_h \partial_y u[0,S](y) = 0$ 对于 $y \in [0,1]$。

证明。令 $u = u[h,S]$。

(a) 令 $w(y) := \partial_S u[h,S](y)$ 对于 $y \in [0,1]$，由（2.2）可知 $w \in \mathrm{C}^2([0,1])$ 满足

$$\kappa \partial_y^2 w = h^2 r'(u(y))w\,, \quad 0 < y < 1\,,$$
$$\partial_y w(0) = 0\,, \quad w(1) = 1\,.$$

利用 w_- 并使用 $w_-(1) = 0$ 和 $r' \geq 0$，可得

$$0 \leq \frac{h^2}{\kappa} \int_0^1 \chi_{[w<0]} w^2(y) r'(u(y))\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 |\partial_y w_-(y)|^2\,\mathrm{d}y$$

因此 $w_- \equiv 0$。所以， $w \geq 0$ 在 $[0,1]$ 中，进而 $\partial_y^2 w \geq 0$，因为 $r'(u) \geq 0$。由于$\partial_y w(0) = 0$，我们推得 w 单调不减。假设 $w(0) = 0$，并以此导出矛盾，则有

$$\kappa \partial_y^2 w = h^2 r'(u)w\,, \quad 0 < y < 1\,,$$
$$w(0) = \partial_y w(0) = 0\,,$$

因此 $w \equiv 0$ 根据唯一性，这是不可能的。由此得到 (2.7)。接下来，只需注意由 (2.3) 可知

$$\partial_S \partial_y u[h,S](y) = \partial_y w(y) = \frac{h^2}{\kappa} \int_0^y r'(u(\xi))w(\xi)\,\mathrm{d}\xi \geq \frac{h^2}{\kappa} (\min_{[0,S]} r')w(0)y \geq 0$$

对于 $y \in [0,1]$，断言得证。

(b) 同样，令 $v(y) := \partial_h u[h,S](y)$，对于 $y \in [0,1]$，我们有 $v \in \mathrm{C}^2([0,1])$ 满足

$$\kappa \partial_y^2 v = 2h\, r(u(y)) + h^2 r'(u(y)) v\,, \quad 0 < y < 1\,, \tag{2.8a}$$

$$\partial_y v(0) = 0\,, \quad v(1) = 0\,. \tag{2.8b}$$

利用 $r(u)\ r'(u) \geq 0$，以及 $v_+(1) = 0$，可得

$$0 \leq \frac{2h}{\kappa} \int_0^1 v_+(y) r(u(y))\,\mathrm{d}y + \frac{h^2}{\kappa} \int_0^1 \chi_{[v>0]} v^2(y) r'(u(y))\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 |\partial_y v_+(y)|^2\,\mathrm{d}y$$

从而 $v_+ \equiv 0$。也就是说，$v \leq 0$ 在 $[0,1]$中。显然，若 $h = 0$，则 (2.8) 表明 $\partial_h u[0,S] = v \equiv 0$。□

使用前面的无量纲变量 (2.1)，并回顾 (2.3，注意到

$$\partial_z c(h) = \frac{1}{h} \partial_y u(1) = \frac{h}{\kappa} \int_0^1 r(u(y))\,\mathrm{d}y\,.$$

注意，右端的项对任意 $h \in \mathbb{R}$都有定义。因此，问题 (1.1) 等价于（当 $h > 0$时）

$$\kappa \partial_y^2 u = h(t)^2 r(u)\,, \quad 0 < y < 1\,, \qquad t > 0\,, \tag{2.9a}$$

$$\partial_y u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = S(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{2.9b}$$

$$h'(t) = h(t) \int_0^1 g(r(u(t,y)))\,\mathrm{d}y + \frac{\alpha}{\beta} Q(t) - d(h(t))h(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{2.9c}$$

$$S'(t) = D(S^* - S(t)) - k_1 Q(t) \nu(S(t)) - \frac{\rho h(t)}{\kappa} \int_0^1 r(u(t,y))\,\mathrm{d}y\,, \qquad t > 0\,, \tag{2.9d}$$

$$Q'(t) = (\nu(S(t)) - k_2) Q(t) + \beta d(h(t)) h(t) - \alpha Q(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{2.9e}$$

满足初始条件

$$h(0) = h_0\,, \quad S(0) = S_0\,, \quad Q(0) = Q_0\,. \tag{2.9f}$$

给定 $h, S \in \mathbb{R}$ 令 $u[h,S] \in \mathrm{C}^2([0,1])$ 为命题 2.1 所给出的（2.2）的唯一解。记 $X := (h,S,Q) \in \mathbb{R}^3$ 并定义

$$f_1(X) := h \int_0^1 g(r(u[h,S](y)))\,\mathrm{d}y + \frac{\alpha}{\beta} Q - d(h)h\,, \tag{2.10a}$$

$$f_2(X) := D(S^* - S) - k_1 Q \nu(S) - \frac{\rho h}{\kappa} \int_0^1 r(u[h,S](y))\,\mathrm{d}y\,, \tag{2.10b}$$

$$f_3(X) := (\nu(S) - k_2) Q + \beta d(h) h - \alpha Q\,. \tag{2.10c}$$

令 $f(X) := (f_1(X)\ f_2(X)\ f_3(X))$，问题（2.9）等价于

$$X' = f(X)\,, \quad t > 0\,, \qquad X(0) = X_0\,, \tag{2.11}$$

该问题有唯一的全局解：

定理 2.3。假设 (1.2)。那么，给定 $(h_0, S_0, Q_0) \in [0,\infty)^3$, 存在唯一的全局解

$$(h,S,Q,u) \in \mathrm{C}^1([0,\infty), [0,\infty)^3 \times \mathrm{C}^2([0,1]))$$

至 (2.9)。此外，有

$$0 \le u(t,y) \le S(t) \le \max\{S^*, S_0\}$$

对于 $t \ge 0$ 和 $y \in [0,1]$。

证明。由命题 2.1 和假设 (1.2)， $f \in \mathsf{C}^{1-}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$，因此对每个 $X_0 \in [0,\infty)^3$，方程 (2.11) 都存在唯一的极大解 $X \in \mathsf{C}^1([0,T_m)\mathbb{R}^3)$。事实上，$T_m = \infty$ 如果对每个 $T > 0$，都存在 $M(T) > 0$，使得只要 $t \in [0,T_m) \cap [0,T]$，就有 $\|X(t)\|_{\mathbb{R}^3} \le M(T)$。令 $u(t,\cdot) := u[h(t)\ S(t)]$，其中 $t \in [0,T_m)$。由于

$$u[h,0] \equiv 0\,, \qquad r(0) = \nu(0) = 0\,, \qquad d(h) \ge 0\,,$$

对于 h， $S \ge 0$ 根据命题 2.1 和假设 (1.2)，可得对于 $i = 1,\ 2,\ 3$，有 $f_i(Y) \ge 0$ 对于 $Y \in [0,\infty)^3$ 且 $Y_i = 0$。因此，解 X 的每个分量均为非负。注意，由 (2.9d) 可知

$$S'(t) \le D\big(S^* - S(t)\big)\,, \quad t \in [0,T_m)\,, \qquad S(0) = S_0\,,$$

因此 $0 \le S(t) \le S_1 :=$ 最大值$\{S_0,\ S^*\}$ 对于 $t \in [0,T_m)$。因此， $0 \le r(u(t,\cdot)) \le r(S_1)$ 对于$t \in [0,T_m)$ 由（2.4a）和 $r' \ge 0$可知。因此，由（2.9）可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\beta h + Q + \frac{1}{k_1}S\right)(t) &= h(t)\int_0^1 \left[\beta g(r(u(t,y))) - \frac{\rho}{k_1\kappa} r(u(t,y))\right] \mathrm{d}y \\ &\quad + \frac{D}{k_1}(S^* - S(t)) - k_2 Q(t) \\ &\le \beta g_0 h(t) + \frac{DS^*}{k_1}\end{aligned} \tag{2.12}$$

对于 $t \in [0,T_m)$，根据命题2.1 并取

$$g_0 := \max_{s\in[0,r(S_1)]} |g(s)|\,,$$

其中我们可以假设 $g_0 > 0$。由此可立即得到

$$0 \le \beta h(t) + Q(t) + \frac{1}{k_1}S(t) \le \left(\beta h_0 + Q_0 + \frac{1}{k_1}S_0 + \frac{DS^*}{k_1 g_0}\right) e^{g_0 t}\,, \quad t \in [0,T_m)\,.$$

因此， $T_m = \infty$。 □

3. 长期动力学与平凡平衡

下文中，我们固定h_0， S_0， $Q_0) \in [0,\infty)^3$，并考察定理2.3给出的唯一全局非负解h, S， Q， u) 2.3的长期行为。

我们先对 S的动力学作一个简单的观察：

引理 3.1。 假设(1.2)。或者

$$S(t) \searrow S^* \quad as \quad t \to \infty \tag{3.1}$$

或者存在 $T_* \in [0,\infty)$ 使得

$$S(t) > S^* \quad for \quad 0 \le t < T_* \quad \text{and} \quad S(t) \le S^* \quad for \quad t \ge T_*\,. \tag{3.2}$$

证明。由于

$$S'(t) \le D\big(S^* - S(t)\big)\,, \quad t \ge 0\,,$$

易得 $S(t) \le \max\{S(T)\ S^*\}$ 对于 $t \ge T$，并且只要 $S(t) > S^*$， S就严格递减，且 $\limsup_{t\to\infty} S(t) \le S^*$。这就得出了所述结论。□

命题3.2。 假设 (1.2)并且

$$\lim_{z\to\infty} d(z) = \infty\,. \tag{3.3}$$

于是，轨道 $\{(h, S, Q)(t);\ t \ge 0\}$ 在 $\mathbb{R}^3_+$ 中有界。特别地，ω 极限集 $\omega(h_0, S_0, Q_0)$ 非空、不变、紧且连通。

证明。 我们采用与定理 2.3 的证明类似的方法。由引理 3.1 和（1.2）可知 $0 \le S(t) \le S_1$ 其中 $S_1 = \text{最大值}\{S_0,\ S^*\}$ 且 $0 \le r(u(t,\ \cdot)\ \le r(S_1)$ 对于 $t \ge 0$。由（2.9）可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\eta h + Q + \frac{1}{k_1}S\right)(t) = h(t)\int_0^1 \left[\eta g(r(u(t,y))) - \frac{\rho}{k_1\kappa} r(u(t,y))\right]\mathrm{d}y \\ - (\eta-\beta)d(h(t))h(t) + \frac{D}{k_1}(S^* - S(t)) \\ - \left(k_2 + \alpha\left(1 - \frac{\eta}{\beta}\right)\right)Q(t)\end{aligned}$$

因此，选择 $\eta \in \left(\beta, \frac{k_2+\alpha}{\alpha}\beta\right)$ 并设定

$$\eta_0 := k_2 + \alpha\left(1 - \frac{\eta}{\beta}\right) > 0\,, \qquad \eta_1 := \eta - \beta > 0\,, \qquad g_0 := \max_{s\in[0,r(S_1)]} |g(s)|\,,$$

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\eta h + Q + \frac{1}{k_1}S\right)(t) \le \big[\eta g_0 - \eta_1 d(h(t))\big]h(t) + \frac{D}{k_1}(S^* - S(t)) - \eta_0 Q(t)$$

对于 $t \ge 0$。现在，根据（3.3），我们可以选择 $h_1 > 0$ 使得

$$\eta g_0 - \eta_1 d(h) \le -\eta\,, \quad h \ge h_1\,.$$

由于

$$(\eta g_0 - \eta_1 d(h))h \le \eta(g_0+1)h_1 - \eta h\,, \quad 0 \le h \le h_1\,,$$

我们令 $\delta := \min\{1, D, \eta_0\}$ 并得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\eta h + Q + \frac{1}{k_1}S\right)(t) \le -\delta\left(\eta h + Q + \frac{1}{k_1}S\right)(t) + (g_0+1)\eta h_1 + \frac{DS^*}{k_1}$$

无论如何。因此，我们推得

$$\left(\eta h + Q + \frac{1}{k_1}S\right)(t) \le \max\left\{\eta h_0 + Q_0 + \frac{1}{k_1}S_0, \frac{1}{\delta}(g_0+1)\eta h_1 + \frac{DS^*}{\delta k_1}\right\}$$

对于 $t \ge 0$，因此轨道 $\{(h,\ S,\ Q)(t)\,;\ t \ge 0\}$ 在 $\mathbb{R}^3_+$ 中有界。 □

3.1. 冲洗平衡。 我们考察平凡平衡解的稳定性

$$h=0\,,\quad S=S^*\,,\quad Q=0\,,\quad u\equiv S^*\,.$$

为应用线性化稳定性原理，我们假设 $g\,(r)$ 和 ν 在 S^* 处可微，并且 d 在 0 处可微。使用第 2 节中的记号，并回顾命题 2.1 中的结论 $u[0,S^*]=S^*$，则 f 在该平衡解处的雅可比矩阵为

$$\partial f(0,S^*,0)=\begin{pmatrix} g(r(S^*))-d(0) & 0 & \alpha/\beta \\ -\frac{\rho}{\kappa}r(S^*) & -D & -k_1\nu(S^*) \\ \beta d(0) & 0 & \nu(S^*)-k_2-\alpha \end{pmatrix}.$$

$\partial f\,(0,\ S^*,\ 0)$处的特征值因此为

$$\lambda_0:=-D<0$$

and

$$\lambda_\pm:=\frac{1}{2}\left(p+q\pm\sqrt{(p-q)^2+4\alpha d(0)}\right)$$

with

$$p:=g(r(S^*))-d(0)\,,\qquad q:=\nu(S^*)-k_2-\alpha\,.$$

注意，$\lambda_\pm\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda_+\geq\lambda_-$。因此，平衡解 $(0,\ S^*,\ 0)$ 的局部稳定性完全由 λ_+ 的符号决定。事实上，我们有 $\lambda_+<0$，因此当

$$-pq+\alpha d(0)<0\quad\text{ and }\quad p+q<0\,,$$

而 $\lambda_+>0$，因此当

$$-pq+\alpha d(0)>0\quad\text{ or }\quad p+q>0\,.$$

因此，我们得到：

命题3.3。 假设 (1.2) 且 $g(r)$ 和 ν 在 S^* 处可微，且 d在 0 处可微。则，平凡平衡 $(h,\ S,Q)\ =(0,S^*,0)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 中局部渐近稳定，条件是

$$d(0)\Big(\nu(S^*)-k_2\Big)<g(r(S^*))\Big(\nu(S^*)-k_2-\alpha\Big)\tag{S1}$$

and

$$\nu(S^*)-k_2-\alpha<d(0)-g(r(S^*))\tag{S2}$$

而当满足以下条件时，它在 $\mathbb{R}^3$ 中不稳定

$$d(0)(\nu(S^*)-k_2)>g(r(S^*))(\nu(S^*)-k_2-\alpha)\quad or\quad \nu(S^*)-k_2-\alpha>d(0)-g(r(S^*))\,.$$

注*3.4.* 若 $d(0)=0$，则稳定性条件可以简化，因为 *(S1)* 与 *(S2)* 等价于 $\nu(S^*)-k_2-\alpha<0$ 且 $g(r(S^*))<0$。特别地，若 ν 和 $g\,(r)$ 均为非递减函数，则当 S^* 较小时，冲洗平衡 $(0,S^*,0)$ 稳定；当 S^*较大时则不稳定。

证明。 令 $d(0) = 0$。假设 (S1) 和 (S2) 成立。我们断言，此时 $g(r(S^*)) < 0$。反设 $g(r(S^*)) \geq 0$。一方面，(S1) 与 $d(0) = 0$ 蕴含

$$\nu(S^*) - k_2 - \alpha < -g(r(S^*)) \leq 0\,.$$

另一方面，(S_1) 与 $g(r(S^*)) \geq 0$ 蕴含 $0 < \nu(S^*) - k_2 - \alpha$ 以及一个矛盾。因此，我们确实有 $g(r(S^*)) < 0$。但随后 (S_1) 蕴含 $\nu(S^*) - k_2 - \alpha < 0$。

反之， $\nu(S^*) - k_2 - \alpha < 0$ 与 $g(r(S^*)) < 0$ 必然蕴含 (S1) 与 (S2) . □

我们接下来证明，平凡平衡在 $[0,\infty)^3$ 中是全局渐近稳定的。为此，我们假设 (S1) 且

$$g \text{ is nondecreasing} \tag{3.4a}$$

并将 (S2) 加强为

$$\nu \text{ is nondecreasing with } \nu(S^*) < k_2\,. \tag{3.4b}$$

在这些稍强的假设下，平凡平衡是全局渐近稳定的（因此不存在其他平衡解）：

推论3.5. 假设 (1.2)、(S1)、(3.4)以及 $d(x) \geq d(0)$ 对 $x \geq 0$成立。则 $(0, S^*, 0)$ 在 $[0,\infty)^3$ 中全局渐近稳定。

证明。 由连续性以及假设（S1）和（3.4b），存在某个 $\delta > 0$ 使得

$$d(0)(\nu(S^*+\delta) - k_2) < g(r(S^*+\delta))(\nu(S^*+\delta) - k_2 - \alpha) \tag{3.5}$$

and

$$\nu(S^*+\delta) < k_2\,. \tag{3.6}$$

由于（3.5）等价于

$$0 \leq \alpha d(0) < (d(0) - g(r(S^*+\delta)))(\alpha + k_2 - \nu(S^*+\delta)) \tag{3.7}$$

我们首先推得 $d(0) - g(r(S^*+\delta)) > 0$ 这是由（3.6）得出的，因此

$$\frac{\beta d(0)}{d(0) - g(r(S^*+\delta))} < \frac{\beta(\alpha + k_2 - \nu(S^*+\delta))}{\alpha}\,.$$

注意到由（3.6）还可知

$$\beta < \frac{\beta(\alpha + k_2 - \nu(S^*+\delta))}{\alpha}\,,$$

于是我们可以选取 η 使得

$$\max\left\{\beta, \frac{\beta d(0)}{d(0) - g(r(S^*+\delta))}\right\} < \eta < \frac{\beta(\alpha + k_2 - \nu(S^*+\delta))}{\alpha}\,. \tag{3.8}$$

由引理3.1 可知，存在 $T_\delta > 0$ 使得 $S(t) \leq S^* + \delta$ 对于 $t \geq T_\delta$。因此，由（3.4a）可推得

$$g(r(u(t,y))) \leq g(r(S(t))) \leq g(r(S^*+\delta)) \qquad \text{and} \qquad \nu(S(t)) \leq \nu(S^*+\delta)$$

对于 $t \geq T_\delta$ 与 $y \in [0,1]$。于是由（2.9）可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\eta h + Q)(t) = h(t)\eta \int_0^1 g(r(u(t,y)))\,\mathrm{d}y - (\eta - \beta)d(h(t))h(t)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\nu(S(t))-k_2-\alpha+\frac{\alpha\eta}{\beta}\right)Q(t)\\
&\le\Big(\eta g(r(S^*+\delta))-(\eta-\beta)d(0)\Big)h(t)\\
&+\left(\nu(S^*+\delta)-k_2-\alpha+\frac{\alpha\eta}{\beta}\right)Q(t)\\
&\le -m(\eta h+Q)(t)
\end{aligned}
$$

对于 $t\ge T_\delta$，其中

$$
m:=\min\left\{(1-\frac{\beta}{\eta})d(0)-g(r(S^*+\delta)),\alpha-\frac{\alpha\eta}{\beta}+k_2-\nu(S^*+\delta)\right\}>0\,.
$$

因此，

$$
\lim_{t\to\infty}h(t)=0\,,\qquad \lim_{t\to\infty}Q(t)=0\,.
$$

特别是，给定 $\varepsilon>0$，存在 $T_\varepsilon>0$ 使得

$$
0\le k_1Q(t)\nu(S(t))+\frac{\rho h(t)}{\kappa}\int_0^1 r\big(u(t,y)\big)\,\mathrm{d}y\le D\varepsilon\,,\qquad t\ge T_\varepsilon\,,
$$

从而（2.9d）意味着

$$
S'(t)\ge D\big(S^*-S(t)\big)-D\varepsilon\,,\qquad t\ge T_\varepsilon\,.
$$

对该不等式积分可得

$$
\liminf_{t\to\infty}S(t)\ge S^*-\varepsilon
$$

并且由于 $\varepsilon>0$ 是任意的，且 $\limsup_{t\to\infty}S(t)\le S^*$ 根据引理3.1，我们推得 $\lim_{t\to\infty}S(t)=S^*$。□

本节结果的图示请参见附录A 。

4. 非平凡平衡态

本节研究方程（2.9）的非平凡平衡态的存在性、唯一性和稳定性。非平凡平衡态是一个三元组 $(h,\ S,\ Q)\in(0,\ \infty)^3$，它与命题 $u=u[h,S]\in C^2([0,1])$ 中相应的2.1一起满足以下方程组

$$
\begin{aligned}
\kappa\partial_y^2u&=h^2r(u)\,,\qquad 0<y<1\,, &\text{(4.1a)}\\
\partial_yu(0)&=0,\quad u(1)=S\,, &\text{(4.1b)}\\
0&=h\int_0^1 g(r(u(y)))\,\mathrm{d}y+\frac{\alpha}{\beta}Q-d(h)h\,, &\text{(4.1c)}\\
0&=D(S^*-S)-k_1Q\nu(S)-\frac{\rho h}{\kappa}\int_0^1 r\big(u(y)\big)\,\mathrm{d}y\,, &\text{(4.1d)}\\
0&=(\nu(S)-k_2)Q+\beta d(h)h-\alpha Q\,. &\text{(4.1e)}
\end{aligned}
$$

首先，我们注意到，可以直接推导出非平凡平衡态存在的若干必要条件：

引理4.1. 设$(h,S,Q)\in(0,\infty)^3$是一个非平凡平衡态。那么必然有 $S<S^*$和

$$\alpha+k_2-\nu(S)>0 \tag{4.2}$$

with

$$Q=\frac{\beta d(h)h}{\alpha+k_2-\nu(S)} \tag{4.3}$$

and

$$\int_0^1 g(r(u(y)))\,\mathrm{d}y=\frac{(k_2-\nu(S))d(h)}{\alpha+k_2-\nu(S)}\,. \tag{4.4}$$

此外，若 g、 ν 和 d 均为非递减函数，则必有

$$g(r(S^*))(\alpha+k_2-\nu(S^*))\geq d(0)(k_2-\nu(S^*))\quad or\quad \nu(S^*)\geq k_2\,. \tag{4.5}$$

证明。 由（4.1d）可直接得出 $S<S^*$ 而（4.1e）给出（4.3）。后者推出（4.2），并结合（4.1c），可得（4.4）成立。最后，若 g、 ν 和 d 均为非递减函数，则推论3.5蕴含：若

$$g(r(S^*))(\alpha+k_2-\nu(S^*))<d(0)(k_2-\nu(S^*))\quad \text{and}\quad \nu(S^*)<k_2\,.$$

这就得到（4.5）。 □

4.1. **一般存在性结果**。 现在证明，当命题3.3中的稳定性条件（S1 ）不成立时，至少存在一个非平凡平衡态:

定理4.2。 假设 （1.2） 满足 $g(0)<0$。设 $\nu\in\mathrm{C}^1([0,S^*])$ 为递增函数，并设$d\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+)$满足 $\lim_{h\to\infty}d$ （ h ） $h=\infty$。此外，假设

$$\alpha+k_2>\nu(S^*) \tag{4.6}$$

并且

$$g(r(S^*))(\alpha+k_2-\nu(S^*))>d(0)(k_2-\nu(S^*))\,. \tag{4.7}$$

那么，至少存在一个非平凡平衡态

$$(h_\star,S_\star,Q_\star)\in(0,\infty)\times(0,S^*)\times(0,\infty)\,,\qquad u_\star=u[h_\star,S_\star]\in\mathrm{C}^2([0,1]))$$

至 (2.9)。

证明。 首先注意到（4.6）以及 ν 的单调性可推出

$$\alpha+k_2-\nu(S)>0\,,\quad S\in[0,S^*]\,, \tag{4.8}$$

并回顾命题2.1可知

$$\Big[(h,S)\mapsto u[h,S]\Big]\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathrm{C}^2([0,1]))\,,$$

其中 $u[h,S]$ 是（4.1a）-（4.1b）的解。接下来，由于（4.3），我们可以消去 Q，并由（4.4）得到恒等式

$$G(h,S):=\int_0^1 g(r(u[h,S](y)))\,\mathrm{d}y-d(h)\left(1-\frac{\alpha}{\alpha+k_2-\nu(S)}\right)\overset{!}{=}0 \tag{4.9a}$$

当4.1d) 成立时

$$E(h,S):=DS+\frac{\rho h}{\kappa}\int_0^1 r(u[h,S](y))\,\mathrm{d}y+\frac{k_1\beta\nu(S)d(h)h}{\alpha+k_2-\nu(S)}\overset{!}{=}DS^*\,. \tag{4.9b}$$

也就是说，(4.1) 等价于求解 (4.9)，求得 $(h、\ S)$，然后根据 (4.3) 定义 Q 。

为求解（4.9），先固定 $h \geq 0$ 。利用 $u[h,0] \equiv 0,\ \nu(0) = 0,\ r(0) = 0$以及正性，可立即推出

$$E(h,0) = 0\,, \qquad E(h,S^*) \geq DS^*\,. \tag{4.10}$$

由于

$$\partial_S E(h,S) = D + \frac{\rho h}{\kappa}\int_0^1 r'(u[h,S](y))\partial_S u[h,S](y)\,\mathrm{d}y + \frac{k_1\beta\nu'(S)d(h)h(\alpha+k_2)}{(\alpha+k_2-\nu(S))^2}\,,$$

根据推论 2.2 (a)以及 r 和 ν 的单调性可知，$E(h,\ S)$ 关于 S严格递增。因此，利用（4.10），对每个 $h \geq 0$，都存在唯一的$S(h) \in (0,\ S^*]$ 使得

$$E(h,S(h)) = DS^*\,, \quad h \geq 0\,, \tag{4.11}$$

满足 $S(0) = S^*$。事实上，隐函数定理表明 $S \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+)$。因此，令 $\mathsf{G}(h) := G(h,\ S(h))$，其中 $h \geq 0$，可得 $\mathsf{G} \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+)$。由于 $S(0) = S^*$ 且$u[0,S^*] = S^*$，由假设（4.7）可知

$$\mathsf{G}(0) = g\big(r(S^*)\big) - d(0)\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+k_2-\nu(S^*)}\right) > 0\,. \tag{4.12}$$

接下来，由 r 和 ν 的正性可得

$$DS^* = E(h,S(h)) \geq \frac{k_1\beta\nu(S(h))d(h)h}{\alpha+k_2}$$

并且由于 $\lim_{h\to\infty} d(h)h = \infty$，我们推得

$$\lim_{h\to\infty} S(h) = 0\,. \tag{4.13}$$

由于

$$0 \leq u[h,S(h)](y) \leq S(h) \to 0$$

当 $y \in [0,1]$ 时 $h \to \infty$ 根据命题 2.1，我们得出

$$\lim_{h\to\infty} u[h,S(h)](y) = 0 \ \text{ uniformly with respect to } y \in [0,1]\,. \tag{4.14}$$

因此，由（4.14）、（1.2）以及假设 $g(0) < 0$ 可知，存在 $h_0 > 0$使得 $g(r(u[h_0,S(h_0)](y))) < 0$对于 $y \in [0,1]$成立。此外，由于（4.13）和 $\nu(0) = 0$，我们可以假设

$$1 - \frac{\alpha}{\alpha+k_2-\nu(S(h_0))} > 0\,.$$

因此，我们得到

$$\mathsf{G}(h_0) \leq \int_0^1 g(r(u[h_0,S(h_0)](y)))\,\mathrm{d}y < 0\,. \tag{4.15}$$

因此，由 (4.12)、(4.15) 及中值定理可知，存在某个$h_\star \in (0,h_0)$，使得 $\mathsf{G}(h_\star) = 0$。令 $S_\star := S(h_\star) \in (0,S^*)$，并分别由 (4.3) 和命题 2.1 定义 $Q_\star > 0$与$u_\star \in \mathrm{C}^2([0,1])$，我们便确立了 (2.9) 的非平凡平衡态的存在性。□

注 4.3. 遗憾的是，上述证明并未确立该非平凡平衡态的唯一性。事实上，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\mathsf{G}(h) = \int_0^1 (g\circ r)'(u[h,S(h)](y))\left\{\partial_h u[h,S(h)](y) + \partial_S u[h,S(h)](y)S'(h)\right\}\,\mathrm{d}y$$
$$- d'(h)\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha + k_2 - \nu(S(h))}\right) + d(h)\frac{\alpha\nu'(S(h))S'(h)}{(\alpha + k_2 - \nu(S(h)))^2}$$

并不一定具有确定的（负）符号，即使 g 和 d 是非减的，因为 S' 不必具有确定的符号。对 (4.11)求导并不能确定 S' 的符号（由命题 *2.1* 可知 $\partial_h u[h,S] \le 0$，而 $\partial_S u[h,S] \ge 0$）。

4.2. **基于打靶论证的唯一性。** 定理4.2 确立了非平凡平衡态的存在性。在更强的假设下，我们现在将借助如 [6]中的打靶论证来推导非平凡平衡态的唯一性。更确切地说，我们假设 g 具有如下特殊形式

$$g(s) := a(s-b)\,, \quad s \ge 0\,, \tag{4.16}$$

对某些 a，$b > 0$，正如 [9]中的情形。在此设定下，对于（1.1）的平衡解，我们由（1.1a）和（1.1b）可得

$$\int_0^h g(r(c(z)))\,\mathrm{d}z = a\int_0^h r(c(z))\,\mathrm{d}z - abh = a\kappa\partial_z c(h) - abh\,. \tag{4.17}$$

将（4.17）与（1.1c）结合，我们在平衡解处得到如下问题

$$\kappa\partial_z^2 c \overset{!}{=} r(c)\,, \quad 0 < z < h, \tag{4.18a}$$

$$\partial_z c(0) \overset{!}{=} 0\,, \quad c(h) \overset{!}{=} S\,, \quad a\kappa\partial_z c(h) \overset{!}{=} d(h)h + abh - \frac{\alpha}{\beta}Q \tag{4.18b}$$

对于 c 和 h，其中 Q 和 S 分别由以下条件推导得出

$$(\alpha + k_2 - \nu(S))Q \overset{!}{=} \beta d(h)h \tag{4.18c}$$

分别

$$DS + k_1 Q\nu(S) + \rho\partial_z c(h) \overset{!}{=} DS^*\,. \tag{4.18d}$$

显然，(4.18c)意味着 Q由下式给出

$$Q = \frac{\beta d(h)h}{\alpha + k_2 - \nu(S)} \tag{4.19}$$

因此仅取决于 h 和 S。将其代入 (4.18d)（利用 (4.18b)），还可得到一个仅依赖于 h 和 S的关系：

$$DS + \frac{\rho bh}{\kappa} + \frac{d(h)h}{\alpha + k_2 - \nu(S)}\left[\left(k_1\beta - \frac{\rho}{a\kappa}\right)\nu(S) + \frac{\rho k_2}{a\kappa}\right] \overset{!}{=} DS^*\,. \tag{4.20}$$

因此，方程（1.1）存在唯一非平凡平衡态，等价于方程组（4.18a）-（4.18b）和（4.19）-（4.20）存在唯一非平凡解。为此，我们首先证明，对任意给定的 h，方程（ $S = S(h)$ 存在唯一解。结合（4.20），我们可以将（4.19）与（4.18a）–（4.18b）合并，将问题化简为仅关于未知量 h 和c 的方程组，然后通过打靶论证求解。

为完成技术细节的推导，我们规定

$$\nu \in \mathrm{C}^1([0,S^*]) \text{ is nondecreasing}\,, \quad d \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+) \text{ is strictly increasing}\,, \tag{4.21a}$$

并且

$$k_2 > \nu(S^*) \quad \text{and} \quad g(r(S^*))(\alpha + k_2 - \nu(S^*)) > d(0)(k_2 - \nu(S^*))\,. \tag{4.21b}$$

注意到（4.21a）-（4.21b）特别意味着，根据命题 3.3冲洗平衡的不稳定性，并且

$$\alpha + k_2 - \nu(S) \geq \alpha + k_2 - \nu(S^*) > 0\,, \quad 0 \leq S \leq S^*\,.$$

我们进一步假设

$$\frac{\alpha}{a(\alpha + k_2)} \leq \frac{\beta k_1 \kappa}{\rho} \tag{4.21c}$$

or

$$S \mapsto \frac{\nu'(S)}{(\alpha + k_2 - \nu(S))^2} \text{ is strictly monotone on } [0,S^*]\,. \tag{4.21d}$$

在这些假设下 hese assumptions we can prove the existence of a 唯一的 非平凡平衡态:

定理 4.4。 假设 (1.2)、(4.16)和(4.21)。那么，方程组（*1.1*）存在唯一的非平凡平衡解

$$(h_\star, S_\star, Q_\star) \in (0,\infty) \times (0,S^*) \times (0,\infty)\,, \qquad c_\star \in \mathrm{C}^2([0,h_\star]))$$

到 (1.1)。

注意，条件（4.21c）和（4.21d）均为结构性假设，与入口浓度的大小无关 S^*，且平凡平衡的不稳定性并不需要这些条件（它们将在下文命题 4.6的证明中用到）。对此，值得注意的是:

注 *4.5*。在 *[9]*，中，函数 ν 具有 $\nu(S) = AS/(B+S)$ 的形式，其中 A、$B > 0$ 为已知量。显然，只要 $\alpha + k_2 \neq A$，这样的函数就满足假设（*4.21d*）。此外，*[9]* 中的函数 r、d 和 g 满足（*1.2*）、（*4.16*）和（*4.21a*）。因此，对于 *[9]*，中考虑的特定情形，我们在此证明，仅在假设（*4.21b*）和 $\alpha + k_2 \neq A$ 下，唯一非平凡平衡解的存在性即可得到保证。

定理 4.4的证明分为几个步骤。首先聚焦于（4.20），我们将 S 表示为 h的函数。为此，我们设

$$F(h,S) := DS + \frac{\rho b h}{\kappa} + \frac{d(h)h}{\alpha + k_2 - \nu(S)} \left[\left(k_1 \beta - \frac{\rho}{a\kappa} \right) \nu(S) + \frac{\rho k_2}{a\kappa} \right]$$

对于 $h \geq 0$ 和 $S \in [0,S^*]$。

命题 4.6. 假设 (1.2)，(4.16)，以及 (4.21)。存在唯一的 $h_* > 0$ 以及唯一的严格递减函数 $S \in \mathrm{C}^1([0,h_*],[0,S^*])$ 满足 $S(0) = S^*$ 且 $S(h_*) = 0$，使得

$$F(h,S(h)) = DS^*\,, \quad h \in [0,h_*]\,.$$

证明。 由于 $\nu(0)=0$，我们有

$$F(h,0)=\frac{\rho h}{a\kappa}\left(ab+\frac{k_2 d(h)}{\alpha+k_2}\right),\quad h>0\,.$$

因此，存在唯一的 $h_*>0$，使得

$$F(h,0)<DS^*,\quad 0\le h<h_*,\qquad F(h_*,0)=DS^*\,. \tag{4.22}$$

接下来，由（4.21a）和（4.21b）可推得

$$F(h,S^*)=DS^*+\frac{k_1\beta\nu(S^*)d(h)h}{\alpha+k_2-\nu(S^*)}+\frac{\rho h}{a\kappa}\left(ab+\frac{k_2-\nu(S^*)}{\alpha+k_2-\nu(S^*)}d(h)\right)>DS^* \tag{4.23}$$

对于 $0<h\le h_*$ 和 $F(0,S^*)=DS^*$。由于

$$\partial_S F(h,S)=D+\frac{\nu'(S)d(h)h}{(\alpha+k_2-\nu(S))^2}\left[k_1\beta(\alpha+k_2)-\frac{\rho\alpha}{a\kappa}\right], \tag{4.24}$$

另一种情况 (4.21c) 表明，$\partial_S F(h,S)>0$；而另一种情况 (4.21d) 表明，$\partial_S F(h,S)$ 关于 S 严格单调（因此 $F(h,\cdot)$ 严格凸或严格凹）。无论如何，对每个 $h\in[0,h_*]$，函数 $S\mapsto\partial_S F(h,S)$ 至多有一个零点。因此，由于如上所述，对于 $h\in(0,h_*]$，$F(h,0)<DS^*<F(h,S^*)$，可知对每个 $h\in[0,h_*]$，存在唯一的 $S(h)\in[0,S^*]$，使得 $F(h,S(h))=DS^*$。此外，按构造可得 $S(0)=S^*$，且 $S(h_*)=0$。另外，由于如刚才所证，$\partial_S F(h,S)>0$ 或 $F(h,\cdot)$ 严格凸或严格凹，因此必有

$$\partial_S F(h,S(h))>0\,,\quad h\in(0,h_*)\,. \tag{4.25}$$

隐函数定理和（4.25）进而推出 $S\in C^1([0,h_*])$。还需证明 $S'\le 0$。为此，注意到

$$\begin{aligned}\partial_h F(h,S)=&\frac{d'(h)h}{\alpha+k_2-\nu(S)}\left[k_1\beta\nu(S)+\frac{\rho}{a\kappa}(k_2-\nu(S))\right]\\&+\frac{k_1\beta\nu(S)d(h)}{\alpha+k_2-\nu(S)}+\frac{\rho}{a\kappa}\left(ab+\frac{k_2-\nu(S)}{\alpha+k_2-\nu(S)}d(h)\right).\end{aligned}$$

由（4.21b）以及 d 的单调性可推知 $\partial_h F(h,S(h))>0$ 对 $h\in[0,h_*]$成立。对 $F(h,S(h))=DS^*$求导，得到

$$\partial_h F(h,S(h))+S'(h)\partial_S F(h,S(h))=0$$

对于 $h\in(0,h_*)$，因此 $S'(h)<0$ 对 $h\in[0,h_*]$ 成立，这是由（4.25）得出的。这证明了命题 4.6。□

还需考虑（4.18a）-（4.18b），其中 $S=S(h)$ 由命题 4.6给出，而 $Q=Q(h)$ 如（4.19）所示；也就是说，要找到唯一的 $h\in(0,h_*)$ 以及唯一的函数$c\in C^2([0,h])$，使得

$$\kappa\partial_z^2 c\overset{!}{=}r(c)\,,\quad 0<z<h\,, \tag{4.26a}$$

$$\partial_z c(0)\overset{!}{=}0\,,\quad c(h)\overset{!}{=}S(h)\,,\quad a\kappa\partial_z c(h)\overset{!}{=}abh+\frac{(k_2-\nu(S(h)))d(h)h}{\alpha+k_2-\nu(S(h))}\,. \tag{4.26b}$$

为此，我们采用打靶论证。以下结果显然成立，参见 [6, 引理 3。7]:

引理 4.7。 对于每个 $\mu \in [0, S^*]$，存在唯一的函数 $\mathrm{c}(\cdot\ \mu) \in \mathrm{C}^2([0,\infty))$满足

$$\kappa \partial_z^2 \mathrm{c} = r(\mathrm{c})\,, \quad z > 0\,, \tag{4.27a}$$
$$\mathrm{c}(0) = \mu\,, \quad \partial_z \mathrm{c}(0) = 0\,. \tag{4.27b}$$

函数 $z \mapsto \mathrm{c}(z,\mu)$ 和 $z \mapsto \partial_z \mathrm{c}(z,\mu)$ 均为递增函数。此外，

$$[\mu \mapsto c(\cdot,\mu)] \in \mathrm{C}^1([0,S^*], \mathrm{C}^2([0,R]))$$

对每个 $R > 0$。此外， $w(z,\mu) := \partial_\mu \mathrm{c}(z,\mu)$ 满足

$$\kappa \partial_z^2 w(z,\mu) = r'(\mathrm{c}(z,\mu)) w(z,\mu)\,, \quad z > 0\,, \tag{4.28a}$$
$$w(0,\mu) = 1\,, \quad \partial_z w(0,\mu) = 0\,, \tag{4.28b}$$

其中 $w(z,\mu) \geq 1$ 和 $\partial_z w(z,\mu) \geq 0$ 对于 $z \geq 0$ 和 $\mu \in [0, S^*]$。

现在，目标是证明存在唯一的 $\mu \in [0, S^*]$ 使得 $\mathrm{c}(\cdot\ \mu)$ 对唯一的 4.26) $h(\mu) > 0$.

我们首先在 $z = h$ 处满足（4.26b）中的狄利克雷边界条件:

命题 *4.8.* 假设 *(1.2)*、*(4.16)* 和 *(4.21)*。设 $c(\cdot\ \mu) \in C^2([0,\infty))$ 为射击问题 *(4.27)* 的唯一解。则存在唯一的严格递减函数 $h \in C^1([0,S^*])$，满足 $h(0) = h_*$ 且 $h(S^*) = 0$，使得

$$\mathrm{c}(h(\mu),\mu) = S(h(\mu))\,, \quad \mu \in [0, S^*]\,. \tag{4.29}$$

证明。定义

$$A(z,\mu) := \mathrm{c}(z,\mu) - S(z)\,, \qquad z \in [0,h_*]\,, \quad \mu \in [0,S^*]\,.$$

于是，对固定的 $\mu \in [0, S^*)$,

$$A(0,\mu) = \mathrm{c}(0,\mu) - S(0) = \mu - S^* < 0\,, \qquad A(h_*,\mu) = \mathrm{c}(h_*,\mu) - S(h_*) = \mathrm{c}(h_*,\mu) > 0$$

由命题4.6。此外,

$$\partial_z A(z,\mu) = \partial_z \mathrm{c}(z,\mu) - S'(z) > 0\,, \quad z \in (0,h_*]\,,$$

由于 $z \mapsto \mathrm{c}(z,\mu)$ 依引理 4.7 是递增的，且 $S'(z) < 0$ 由命题 4.6。因此，对每个 $\mu \in [0,S^*]$ 存在唯一的 $h(\mu) \in [0,h_*]$，使得 $A(h(\mu)\ \mu) = 0$（其中 $h(0) = h_*$且 $h(S^*) = 0$），并且隐函数定理表明 $h \in \mathrm{C}^1([0,S^*])$。注意到

$$0 = \partial_z A(h(\mu),\mu) h'(\mu) + \partial_\mu A(h(\mu),\mu) = \partial_z A(h(\mu),\mu) h'(\mu) + \partial_\mu \mathrm{c}(h(\mu),\mu)$$

结合 $\partial_z A(h(\mu)\ \mu) > 0$ 和 $\partial_\mu \mathrm{c}(h(\mu)\ \mu) \geq 1$，我们推导出 $h'(\mu) < 0$，其中 $\mu \in [0, S^*)$。□

为了满足 $z = h$ 处的诺伊曼条件，我们需要以下辅助结果:

Lemma 4.9. 假设 (1.2)，(4.16) 和 (4.21)。设 $w(z,\mu) := \partial_\mu \mathrm{c}(z,\mu)$ 并定义 e

$$M(z,\mu) := -a\big[r(\mathrm{c}(z,\mu)) - b\big] w(z,\mu) + a\kappa(\partial_z \mathrm{c}(z,\mu) - S'(h(\mu)))\partial_z w(z,\mu)$$
$$+ \frac{k_2 - \nu(S(h(\mu)))}{\alpha + k_2 - \nu(S(h(\mu)))} d(h(\mu))$$

对于 $(z,\mu)\in[0,h_*]\times[0,S^*]$。然后，对于固定的 $\mu\in[0,S^*]$，该函数

$$M(\cdot,\mu):[0,h_*]\to\mathbb{R}$$

单调递增。此外，$M(0,\cdot):\ [0,S^*]\to\mathbb{R}$ 其中

$$M(0,\mu)=-a\big(r(\mu)-b\big)+\frac{k_2-\nu\big(S(h(\mu))\big)}{\alpha+k_2-\nu\big(S(h(\mu))\big)}d(h(\mu))\,,\quad \mu\in[0,S^*]\,,$$

严格递减，并且存在（唯一的）$\mu\in(0,\ S^*)$ 使得 $M(0,\ \mu)=0$。特别地，

$$M(z,\mu)\geq M(0,\mu)>0\,,\qquad z\in[0,h_*]\,,\quad \mu\in[0,\underline{\mu})\,. \tag{4.30}$$

证明。由引理4.7可直接得出

$$\partial_z M(z,\mu)=ab\partial_z w(z,\mu)-aS'(h(\mu))r'(\mathrm{c}(z,\mu))w(z,\mu)\geq 0$$

对于$(z,\ \mu)\in[0,h_*]\times[0,S^*]$，这里用到了 w、r和 S的单调性（见(1.2)、命题4.6和引理4.7）。这保证了 $M(\cdot\ \mu):\ [0,h_*]\to\mathbb{R}$ 单调递增。

接下来，回想一下 $w(0,\ \mu)=1$ 和 $\partial_z w(0,\ \mu)=0$，我们有

$$M(0,\mu)=-a\big(r(\mu)-b\big)+\frac{k_2-\nu\big(S(h(\mu))\big)}{\alpha+k_2-\nu\big(S(h(\mu))\big)}d(h(\mu))\,,\quad \mu\in[0,S^*]\,.$$

由于 $r(0)=0$ 由（1.2）可得，$\nu(0)=0$ 由（4.21a）可得，$S(h_*)=0$ 以及 $h(0)=h_*$ 分别由命题 4.6和命题4.8可知，我们得到

$$M(0,0)=ab+\frac{k_2}{\alpha+k_2}d(h_*)>0$$

并且，回忆 $h(S^*)=0$ 以及 $S(0)=S^*$ 并利用（4.16）和（4.21b），可得

$$M(0,S^*)=-a\big(r(S^*)-b\big)+\frac{k_2-\nu(S^*)}{\alpha+k_2-\nu(S^*)}d(0)<0\,.$$

因此，$M(0,\cdot)$ 的连续性意味着存在 $\mu\in(0,\ S^*)$，使得 $M(0,\ \mu)=0$。事实上，由于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}M(0,\mu)=&-ar'(\mu)-\alpha\frac{d(h(\mu))}{\big(\alpha+k_2-\nu(S(h(\mu)))\big)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\nu(S(h(\mu)))\\&+\frac{k_2-\nu(S(h(\mu)))}{\alpha+k_2-\nu(S(h(\mu)))}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}d(h(\mu))\end{aligned}$$

并且由于 r 和 ν 单调不减，d 严格递增，而 S 和 h 严格递减，因此由假设（4.21b）可推得 $M(0,\ \cdot)$ 在 $[0,S_*]$上严格递减。这便证明了所述结论。□

受（4.26b）启发，我们现在引入

$$B(\mu):=a\kappa\partial_z\mathrm{c}(h(\mu),\mu)-abh(\mu)-\frac{k_2-\nu\big(S(h(\mu))\big)}{\alpha+k_2-\nu\big(S(h(\mu))\big)}d(h(\mu))h(\mu)\,,\quad \mu\in[0,S^*]\,.$$

根据构造，B 的零点代表了方程 (1.1) 的所有平稳解。事实上，除了对应于 $\mu=S^*$的平凡平衡外，恰好还存在另一个平衡解，即对应于某个 $\mu_*\in(0,\underline{\mu}]$的非平凡平衡态：

命题 4.10。 假设 (1.2)、(4.16) 和 (4.21)。那么，存在 $\mu_* \in (0, \mu]$ 使得$\mu = S^*$ 和 $\underline{\mu} = \mu_*$ 是函数 B 的唯一零点： $[0, S^*] \to \mathbb{R}$。

证明。 由 $h(0) = h_*$, $S(h_*) = 0$, $\nu(0) = 0$ 以及 $\partial_z \mathrm{c}(\cdot, 0) \equiv 0$ 可得

$$B(0) = -abh_* - \frac{k_2}{\alpha + k_2} d(h_*) h_* < 0$$

而 $h(S^*) = 0$ 且 $\partial_z \mathrm{c}(0, \cdot) \equiv 0$ 推出 $B(S^*) = 0$。接下来，由引理 4.7可知，$\mathrm{c}(z, \mu) \geq \mathrm{c}(0, \mu) = \mu$对 $z \geq 0$和 $\mu \in [0, S^*]$成立，因此，由 r的单调性，

$$\kappa \partial_z \mathrm{c}(h(\mu), \mu) = \int_0^{h(\mu)} r(\mathrm{c}(z, \mu))\, \mathrm{d}z \geq r(\mu) h(\mu)$$

对于 $\mu \in [0, S^*]$。因此，

$$B(\mu) \geq -h(\mu) M(0, \mu) > 0\,, \quad \mu \in (\underline{\mu}, S^*)\,,$$

根据引理 4.9。最后，我们证明 B 在 $[0, \mu)$ 上严格递增。为此，我们首先对 (4.29) 关于 μ 求导，并利用引理4.7 推导得

$$[\partial_z \mathrm{c}(h(\mu), \mu) - S'(h(\mu))] h'(\mu) = -\partial_\mu \mathrm{c}(h(\mu), \mu) = -w(h(\mu), \mu) \leq -1 \tag{4.31}$$

对于 $\mu \in [0, S^*]$，利用恒等式（4.31）和（4.27a，可得

$$\begin{aligned}
&[\partial_z \mathrm{c}(h(\mu), \mu) - S'(h(\mu))] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} B(\mu) \\
&\quad = -a[r(\mathrm{c}(h(\mu), \mu)) - b] w(h(\mu), \mu) \\
&\qquad + a\kappa [\partial_z \mathrm{c}(h(\mu), \mu) - S'(h(\mu))] \partial_z w(h(\mu), \mu) \\
&\qquad + \frac{k_2 - \nu(S(h(\mu)))}{\alpha + k_2 - \nu(S(h(\mu)))} [d'(h(\mu)) h(\mu) + d(h(\mu))] w(h(\mu), \mu) \\
&\qquad - \alpha \frac{\nu'(S(h(\mu))) S'(h(\mu))}{(\alpha + k_2 - \nu(S(h(\mu))))^2} d(h(\mu)) h(\mu) w(h(\mu), \mu) \\
&\quad \geq -a[r(\mathrm{c}(h(\mu), \mu)) - b] w(h(\mu), \mu) \\
&\qquad + a\kappa [\partial_z \mathrm{c}(h(\mu), \mu) - S'(h(\mu))] \partial_z w(h(\mu), \mu) \\
&\qquad + \frac{k_2 - \nu(S(h(\mu)))}{\alpha + k_2 - \nu(S(h(\mu)))} d(h(\mu)) \\
&\quad = M(h(\mu), \mu)\,,
\end{aligned}$$

其中，在不等式中，我们利用了 ν 和 d递增、 S 递减这一事实，并结合（2.9d）舍去最后一项及倒数第二项的一部分。因此，由（4.31）以及 h的单调性可知，对于 $\mu \in [0, S^*]$， $\partial_z \mathrm{c}(h(\mu), \mu) - S'(h(\mu)) > 0$，故由（4.30）可得，对于$\mu \in [0, \mu$， $B'(\mu) > 0$。

因此，函数 B 在 $[0, \mu)$ 上严格递增，满足 $B(0) < 0$ ，而$B(\underline{\mu}) > 0$对于 $\mu \in (\mu$， $S^*)$成立。由此可知，存在 $\mu_* \in (0$， $\mu]$，使得 μ_*是区间 $[0, S^*)$ 内 B 的唯一零点，正如所述。□

定理 m 4.4 是命题 4.10 及前述论证的推论。

4.3. 非平凡平衡态的稳定性。 最后，我们给出确保唯一非平凡平衡的局部渐近稳定性的条件

$$(h_\star, S_\star, Q_\star) \in (0,\infty)\times(0,S^*)\times(0,\infty)\,, \qquad c_\star \in \mathrm{C}^2([0,h_\star]))$$

在前一小节4.2中建立的1.1。为此，我们采用相同的假设，但将条件（4.21c）加强为

$$\max\left\{\frac{1}{2a}, \frac{b}{\alpha+k_2}, \frac{\alpha}{a(\alpha+k_2)}\right\} \le \frac{\beta k_1 \kappa}{\rho} \le \frac{2\alpha}{a\nu(S^*)}\,. \tag{4.32}$$

再次指出，条件（4.32）构成了一项结构性假设，它在很大程度上独立于入口浓度 S^*的大小。下面给出局部稳定性结果：

定理4.11。假设（1.2）、（4.16）、（4.21a）、（4.21b）以及（4.32）。那么，由定理*4.4*给出的非平凡平衡解

$$(h_\star, S_\star, Q_\star) \in (0,\infty)\times(0,S^*)\times(0,\infty)$$

在（1.1）下，且 $c_\star \in \mathrm{C}^2([0,h_\star])$ ）所对应的*4.4* 在 $\mathbb{R}^3$中局部渐近稳定。

证明。注意到（4.32）蕴含（4.21c），定理4.4 保证非平凡平衡解的存在性和唯一性。由（4.21a）和（4.21b）可知

$$\Delta := \alpha + k_2 - \nu(S_\star) > \alpha + k_2 - \nu(S^*) > \alpha > 0\,. \tag{4.33}$$

与第2节一样，我们使用无量纲变量（见 (2.1)），并记 $u(y) = c(yh)$，特别是 $u_\star(y) = c_\star(yh_\star)$。事实上，由命题 2.1 可知，$[h,S] \mapsto u[h,S]$属于 C^1 类且 $u_\star = u_\star[h_\star, S_\star]$。按照 (2.10)，定义 f 为常微分方程组 (2.9c)-(2.9e) 右端组成的函数。在假设 (4.16) 下，我们于是计算得到雅可比矩阵 $A{:=}\partial f(h_\star, S_\star, Q_\star)$，即 f 在平衡解 $(h_\star, S_\star, Q_\star)$ 处的雅可比矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} ah_\star H - \frac{\alpha d(h_\star)}{\Delta} - d'(h_\star)h_\star & ah_\star G & \frac{\alpha}{\beta} \\ -\frac{\rho(\Delta-\alpha)d(h_\star)}{a\kappa\Delta} - \frac{b\rho}{\kappa} - \frac{\rho h_\star}{\kappa}H & -D - \frac{k_1\nu'(S_\star)\beta d(h_\star)h_\star}{\Delta} - \frac{\rho h_\star}{\kappa}G & -k_1\nu(S_\star) \\ \beta d(h_\star) + \beta d'(h_\star)h_\star & \frac{\beta d(h_\star)h_\star\nu'(S_\star)}{\Delta} & -\Delta \end{pmatrix}, \tag{4.34}$$

其中

$$H := \int_0^1 r'(u_\star(y))\partial_h u_\star(y)\,\mathrm{d}y \le 0\,, \qquad G := \int_0^1 r'(u_\star(y))\partial_S u_\star(y)\,\mathrm{d}y > 0 \tag{4.35}$$

根据推论 2.2。为了证明在假设 (4.21a)、(4.21b) 和 (4.32) 下，A 的所有特征值均具有负实部，可以应用劳斯-赫尔维茨判据。繁琐的细节留待附录B中给出。因此，我们得出结论，非平凡平衡态 $(h_\star,\ S_\star,\ Q_\star)$ 确实是局部渐近稳定的。□

可以预期，非平凡平衡态全局渐近稳定于 $\mathbb{R}^3$（至少在与定理 4.11 相容的参数范围内）。图 4 （另见 [9]）所示的数值模拟支持这一猜想，并且与命题 3.2 一致。

附录 A. 数值模拟

我们给出系统（2.9）的一些基本数值模拟，以说明第 3 节和第 4 节的分析结果。模拟使用 Mathematica 完成。

全文采用 Monod动力学、线性净生长（$a = 1$ 见（4.16））以及线性脱附：

$$r(c) = \frac{\mu_r\, c}{K_r + c}\,, \qquad \nu(S) = \frac{\mu_\nu\, S}{K_\nu + S}\,, \qquad g(r) = r - b\,, \qquad d(h) = d_0 h\,.$$

这些选择满足结构假设（1.2）和（4.16）。我们仅为说明分析结果而采用表1 中的参数。生物学校准值请参阅 [9] 。

符号	描述	数值
μ_r	生物膜最大比生长速率	4
K_r	生物膜半饱和常数	1
μ_ν	浮游态最大比生长速率	2
K_ν	浮游态半饱和常数	1
b	$g(r)$ 中的生物膜死亡率 $= r - b$	2
d_0	$d(h)$ 中的脱附系数 $= d_0 h$	1
κ	扩散系数	1
D	稀释率	1
k_1	底物消耗参数	1
k_Q	浮游态死亡率	1
α	附着率	1
ρ	生物量密度参数	1
β	转换因子	1
k_2	$= D + k_Q$ （推导得出）	2

表1. 数值模拟中使用的模型参数。

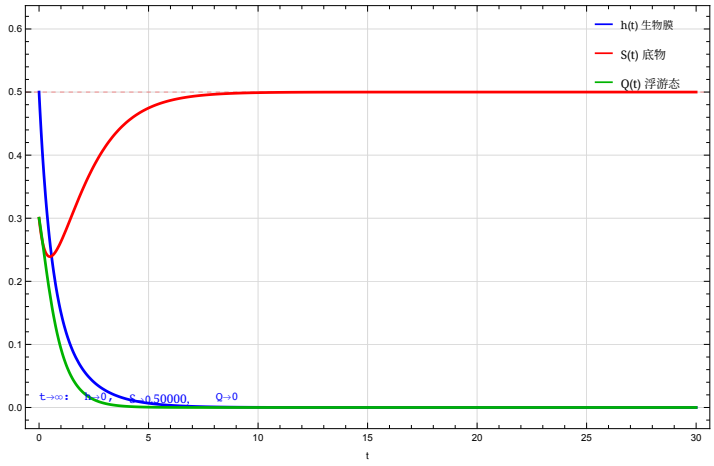


图2. 收敛到冲出平衡态 (0, S^*, 0) =(0, 0.5, 0)。推论3.5的条件得到满足，其中 $d(0) = 0$,$g(r(S^*)) = -2/3 < 0$，且 $\nu(S^*) = 2/3 < k_2 = 2$。初始条件：(h_0, S_0, Q_0) =(0.5, 0.3, 0.3)。

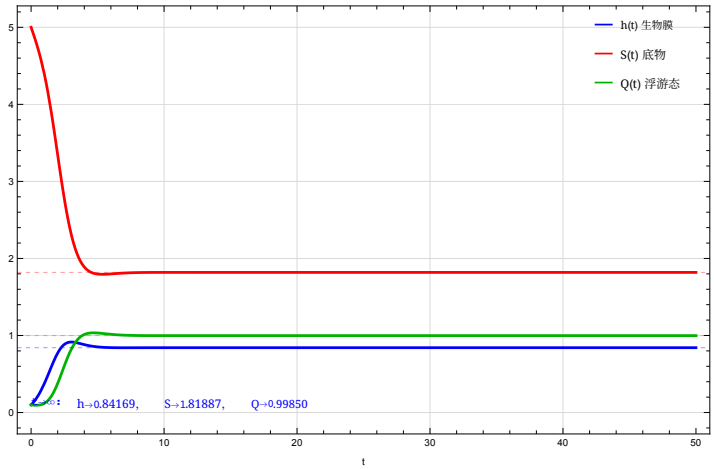


图3. 对于 $S^* = 5$，收敛至唯一非平凡平衡。由于 $g(r(S^*)) = 4/3 > 0$，洗出平衡态不稳定（参见备注 3.4，其中 $d(0) = 0$）。存在性和唯一性由定理 4.4 得出，其中 $\alpha + k_2 = 3 > \nu(S^*) = 5/3$。初始条件：$(h_0, S_0, Q_0)$ =(0.1, 5.0, 0.1)。虚线表示数值确定的平衡解 $(h_\star, S_\star, Q_\star) \approx$(0.923, 2.118, 0.518)。

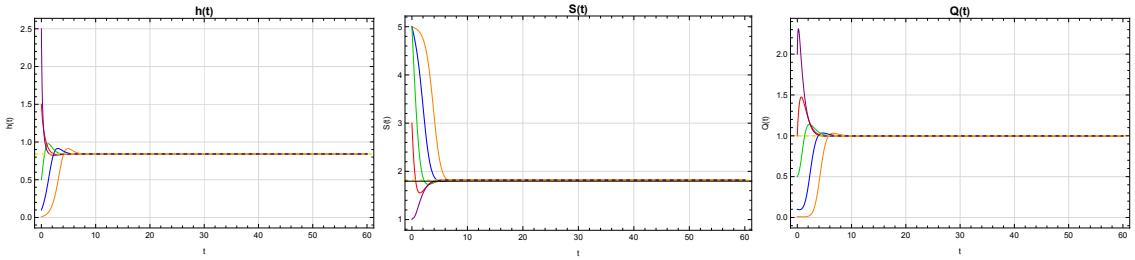


图4. 五条从相距甚远的初始条件出发的轨线，在 $(0,\infty)^3$ 中均收敛至唯一非平凡平衡态 $(h_\star, S_\star, Q_\star)$（金色虚线）。这与命题 3.2 中轨道有界的结论一致，并为定理 4.11中的局部稳定平衡点实际上是全局吸引的提供了数值证据。参数和非平凡平衡态与图 3 相同，其中 $S^* = 5$。

附录 B. 定理 4.11 的证明

为完成定理 4.11 的证明，还需验证矩阵 3×3（ $A=$）a_{ij}的所有特征值$_{1\le i,\ j\le 3}$在 (4.34) 中具有负实部。根据 Routh–Hurwitz 判据，只要满足以下条件即可

$$m_0 > 0\,, \quad m_1 > 0\,, \quad m_2 > 0\,, \quad m_1 m_2 - m_0 > 0\,, \tag{A.1}$$

其中

$$m_0 := -\det(A)\,, \quad m_1 := -\mathrm{trace}(A)\,,$$
$$m_2 := \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\,.$$

我们利用以下事实，检查式 (A.1) 中每一项的正性

$$H \le 0\,, \quad G > 0\,, \quad \nu(S^*) \ge \nu(S_\star)\,, \quad \nu'(S_\star) \ge 0\,, \quad d'(h_\star) \ge 0 \tag{A.2}$$

由于（4.35）以及对 ν 和 h的单调性假设。

(i)至于 m_0 可计算得

$$\begin{aligned} m_0 =& \Big(-a\Delta H + [\Delta - \alpha] d'(h_\star) \Big) h_\star D - \frac{[a\beta k_1 \kappa(\alpha + k_2) - \alpha\rho]}{\Delta\kappa} h_\star^2 \nu'(S_\star) d(h_\star) H \\ &+ \left(\frac{(\rho[\Delta - \alpha] + a\beta k_1 \kappa \nu(S_\star))\,(d(h_\star) + h_\star d'(h_\star))}{\kappa} + \frac{ab\rho\Delta}{\kappa} \right) h_\star G \\ &+ \frac{\rho[\Delta - \alpha] + a\beta k_1 \kappa \nu(S_\star)}{\Delta^2 \kappa a} \alpha h_\star \nu'(S_\star) d(h_\star)^2 + \frac{k_2}{\Delta} \beta k_1 h_\star^2 \nu'(S_\star) d'(h_\star) d(h_\star) \\ &+ \frac{\nu'(S_\star)\alpha\rho b h_\star}{\Delta\kappa} d(h_\star) \end{aligned}$$

因此 $m_0 > 0$因为根据（A.2）以及对方括号中的各项使用（4.33）和（4.32），每一项都是非负的。

(ii)对于 m_1 可计算得

$$m_1 = -ah_\star H + \frac{\alpha d(h_\star)}{\Delta} + d'(h_\star)h_\star + D + \frac{\beta k_1 \nu'(S_\star) d(h_\star) h_\star}{\Delta} + \frac{\rho h_\star}{\kappa} G + \Delta$$

因此 $m_1 > 0$ 由（A.2）和（4.33）。

(iii) 对于 m_2 可计算得

$$\begin{aligned} m_2 = &\left(-ah_\star H + \frac{\alpha d(h_\star)}{\Delta} + d'(h_\star)h_\star + \Delta\right) D + \left(\frac{d(h_\star) + h_\star d'(h_\star) + ab + \Delta}{\kappa}\right) \rho h_\star G \\ &- \left(\frac{\beta k_1 h_\star \nu'(S_\star) d(h_\star)}{\Delta} + \Delta\right) a h_\star H + \frac{\alpha \beta k_1 h_\star \nu'(S_\star) d(h_\star)^2}{\Delta^2} \\ &+ \frac{\beta k_1 \nu'(S_\star) h_\star^2 d(h_\star) d'(h_\star)}{\Delta} + \frac{(\alpha + k_2)\beta k_1 \nu'(S_\star) h_\star d(h_\star)}{\Delta} + [\Delta - \alpha] h_\star d'(h_\star) \end{aligned}$$

因此 $m_2 > 0$ 由于根据（A.2）和（4.33），每一项均为非负。

(iv) 最后，对于 $m_3 := m_1 m_2 - m_0$，计算得

$$\begin{aligned} m_3 = &\left(-ah_\star H + \frac{\alpha d(h_\star)}{\Delta} + d'(h_\star)h_\star + \Delta\right) D^2 \\ &+ \left(-ah_\star H + \frac{(\Delta + \alpha) d(h_\star)}{\Delta} + 2h_\star d'(h_\star) + ab + 2\Delta\right) \frac{\rho D h_\star}{\kappa} G \\ &+ a^2 D h_\star^2 H^2 - 2a \left(\left(\beta h_\star k_1 \nu'(S_\star) + \alpha\right) \frac{d(h_\star)}{\Delta} + h_\star d'(h_\star) + \Delta\right) h_\star D H \\ &+ \left(2\beta h_\star k_1 \nu'(S_\star) + \alpha\right) \frac{\alpha D d(h_\star)^2}{\Delta^2} \\ &+ \left(2\left(\beta h_\star k_1 \nu'(S_\star) + \alpha\right) \frac{d'(h_\star)}{\Delta} + \frac{(2\Delta + \nu(S_\star))\beta k_1 \nu'(S_\star)}{\Delta}\right) h_\star d(h_\star) D + 2\alpha d(h_\star) D \\ &+ D d'(h_\star)^2 h_\star^2 + 2D\Delta h_\star d'(h_\star) + D\Delta^2 + \left(d(h_\star) + h_\star d'(h_\star) + ab + \Delta\right) \frac{\rho^2 h_\star^2}{\kappa^2} G^2 \\ &- \left(\left(\frac{\beta k_1 h_\star \nu'(S_\star)}{\Delta} + 1\right) d(h_\star) + h_\star d'(h_\star) + ab + 2\Delta\right) \frac{a\, h_\star^2 \rho}{\kappa} G H \\ &+ \left(\frac{\beta k_1 h_\star (\Delta + \alpha) \nu'(S_\star)}{\Delta} + \alpha\right) \frac{h_\star \rho d(h_\star)^2}{\Delta \kappa} G \\ &+ \left(2\beta k_1 h_\star \nu'(S_\star) + \Delta + \alpha\right) \frac{\rho h_\star^2 d'(h_\star) d(h_\star)}{\Delta \kappa} G \\ &+ \left(2\Delta + ab + \nu(S_\star)\right) \frac{\rho \beta k_1 h_\star^2 \nu'(S_\star) d(h_\star)}{\Delta \kappa} G \\ &+ \left(\left[2\alpha\rho - a\beta k_1 \kappa \nu(S_\star)\right] \Delta + \alpha \rho a b\right) \frac{h_\star d(h_\star)}{\Delta \kappa} G + \frac{\rho h_\star^3 d'(h_\star)^2}{\kappa} G \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(\big[2\Delta\rho - a\beta k_1\kappa\nu(S_\star)\big] + ab\rho\Big)\frac{h_\star^2 d'(h_\star)}{\kappa}G + \frac{\rho h_\star\Delta^2}{\kappa}G\\
&+\left(\frac{\beta k_1 h_\star\nu'(S_\star)d(h_\star)}{\Delta} + \Delta\right)a^2h_\star^2H^2\\
&-\Big(\beta k_1 h_\star\nu'(S_\star) + 2\alpha\Big)\frac{\beta k_1 a h_\star^2\nu'(S_\star)d(h_\star)^2}{\Delta^2}H\\
&-\Big(2(h_\star d'(h_\star) + \Delta)a\beta k_1\kappa + \alpha\rho\Big)\frac{h_\star^2\nu'(S_\star)d(h_\star)}{\Delta\kappa}H\\
&-\Big(\big[2\Delta - \alpha\big]h_\star d'(h_\star) + \Delta^2 + \alpha d(h_\star)\Big)\,ah_\star H\\
&+(\beta k_1 h_\star\nu'(S_\star) + \alpha)\frac{\alpha\beta k_1 h_\star\nu'(S_\star)d(h_\star)^3}{\Delta^3}\\
&+(\beta k_1 h_\star\nu'(S_\star) + 2\alpha)\frac{\beta k_1 h_\star^2\nu'(S_\star)}{\Delta^2}d'(h_\star)d(h_\star)^2 + (\Delta + \nu(S_\star))\frac{\beta^2k_1^2h_\star^2\nu'(S_\star)^2}{\Delta^2}d(h_\star)^2\\
&+\Big(\big[2a\beta k_1\kappa - \rho\big]\Delta + \alpha\rho\Big)\frac{\alpha h_\star\nu'(S_\star)}{\Delta^2\kappa a}d(h_\star)^2 + \frac{\beta k_1 h_\star^3\nu'(S_\star)d'(h_\star)^2}{\Delta}d(h_\star)\\
&+\left(2\beta k_1\nu'(S_\star)\,h_\star^2 + \big[\Delta - \alpha\big]\frac{\alpha h_\star}{\Delta}\right)d'(h_\star)d(h_\star)\\
&+\Big[\Delta\beta k_1\kappa(\alpha + k_2) - \alpha b\rho\Big]\frac{h_\star\nu'(S_\star)d(h_\star)}{\Delta\kappa} + \big[\Delta - \alpha\big]\Big(h_\star^2d'(h_\star)^2 + \Delta h_\star d'(h_\star)\Big)
\end{aligned}
$$

因此 $m_1m_2 - m_0 > 0$ 由于每一项均为非负，其中我们对方括号中的各项使用（A.2）和（4.32）以及（4.33）。

参考文献

[1] M. Ballyk、D. Jones 和 H. L. Smith，*Freter*生物膜模型：综述，载于《生物学与流行病学中的结构化种群模型》，数学讲义第1936卷，Springer，柏林，2008年，第265–302页。[2] R. Freter、H. Brickner、M. V. J. Fekete 和 K. Carey，大肠杆菌在肠道中的存活与定植，《感染与免疫》，39（1983），第686–703页。[3] H. J. Gaebler、J. M. Hughes 和 H. J. Eberl，悬浮细菌生物膜反应器中的热力学抑制，《数学生物学通报》，83（2021），论文编号10，共35页。[4] ，悬浮细菌生物膜反应器中的热力学抑制，《数学生物学通报》，83（2021），论文编号10，共35页。[5] D. Gilbarg 和 N. S. Trudinger，二阶椭圆型偏微分方程，《数学经典》，Springer-Verlag，柏林，2001年。重印1998年版。[6] P. Guidotti 和 C. Walker，一维生物膜模型分析，《应用数学季刊》，（即将刊出，2025年预印本）。[7] D. Jones、H. V. Kojouharov、D. Le 和 H. Smith，*Freter*模型：一种简单的生物膜形成模型，《数学生物学杂志》，47（2003），第137–152页。[8] I. Klapper 和 J. Dockery，微生物生物膜的数学描述，《SIAM综述》，52（2010），第221–265页。[9] A. Mašić 和 H. J. Eberl，悬浮絮体和附着于壁面的生物膜条件下单物种连续搅拌槽反应器模型的持久性，《数学生物学通报》，74（2012），第1001–1026页。[10] ,生物膜反应器中悬浮微生物种群在硝化过程中的作用：建模与模拟研究，《数学生物学通报》，76（2014），第27–58页。[11] ,附着于壁面和悬浮细菌生物反应器中的底物去除优化，《数学生物学与工程》，11（2014），第1139–1166页。

[12] ———,具有壁面附着的恒化器模型：生物膜脱落率对预测反应器性能的影响，载于《推进现代科学与工程的数学和计算方法》，Springer，[尚], 2016, 第267–276页。[13] E. Stemmons 和 H. Smith，具有壁面附着的恒化器中的竞争，《SIAM应用数学杂志》，61（2000），第567–595页。[14] O. Wanner、H. Eberl、E. Morgenroth、D. Noguera、C. Picioreanu、B. Rittmann 和 M. van Loosdrecht，生物膜数学建模，科学技术报告：第18号。伦敦：国际水协会，2006年。阿卜杜拉国王科技大学（KAUST），CEMSE学部，图瓦勒 23955-6900，沙特阿拉伯电子邮箱： katerina.nik@kaust.edu.sa莱布尼茨汉诺威大学，应用数学研究所，韦尔芬花园1号，30167汉诺威，德国电子邮箱： walker@ifam.uni-hannover.de