arXiv:2603.10539v1 [math.LO] 11 Mar 2026

几乎库雷帕苏斯林树与猜测模型原理的可破坏性

CHRIS LAMBIE-HANSON 和 ŠÁRKA STEJSKALOV Á

ABSTRACT. 在 Krueger 和第二作者近期工作的基础上，我们证明了在 ω_2 存在几乎库雷帕苏斯林树的同时，猜测模型原理也相容。特别地，猜测模型原理成立但可被大小为 ω_1 的可数链条件强迫破坏，这也是相容的。我们还证明，弱库雷帕树的存在与库雷帕假设失效以及某种猜测模型原理相容；例如，该原理蕴含 ω_2 处的树性质。

CONTENTS

1. 引言 2 1.1. 记号与约定 4 2. 预备知识 5 2.1. 树与猜测模型性质 5 2.2. 保性引理 7 2.3. Mitchell 强迫 8 2.4. 树的自同构 9 3. 具有几乎库雷帕苏斯林树的猜测模型 12 3.1. Mitchell 变体 12 3.2. 技术引理 14 3.3. 导出树的稠密子集 17 3.4. 逼近与定理 A 的证明 18 4. 弱库雷帕树 25 4.1. 添加弱库雷帕树的强迫 25 4.2. wKH 与 ¬KH 及 $\mathrm{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$ 的一致性 27 5. 库雷帕假设与弱库雷帕假设的失败 36 6. 开放问题 38 附录 A. 39 参考文献 40

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E05, 03E35, 03E55.*Key words and phrases.* 库雷帕树、苏斯林树、猜测模型、Mitchell 强迫。两位作者均获捷克科学院（RVO 67985840）及 GAˇC R 项目 23-04683S 资助。

1. Introduction

紧致性原理在当代组合集合论中发挥着核心作用，尤其是在涉及大基数、强迫和规范内模型的问题中。基数 κ 处紧致性原理的一个典型例子是树性质 κ，记作 TP(κ)；它断言不存在κ-阿朗斯赞树。在不可达基数中，紧致性原理常被用来刻画大基数。例如，不可达基数κ 是弱紧致的，当且仅当 TP(κ) 成立。当紧致性原理在大基数处成立时，它们通常在强迫扩张下具有很强的稳健性。例如，如果 κ 是弱紧致的，并且 $\mathbb{P}$ 是某个对某个 $\mu < \kappa$ 满足 μ-cc 的强迫概念，那么在通过 $\mathbb{P}$ 得到的强迫扩张中，TP(κ) 仍然成立。

然而，用于刻画大基数的紧致性原理也可能相容地在可达基数处成立，例如 ω_2；而关于它们的稳健性问题则远不那么明朗。例如，根据 Mitchell 和 Silver 的结果（参见 [19]），树性质(ω_2) 与存在一个弱紧基数等相容。可是，关于在 ccc 强迫扩张下 树性质(ω_2 的（相容）可（不）破坏性，目前已知的确定结论寥寥无几。例如，尚不清楚是否相容于 树性质(ω_2) 成立且在所有 ccc 强迫扩张中保持不变；但同样也不清楚是否相容于树性质(ω_2) 成立，并且存在一个 ccc 强迫偏序集 $\mathbb{P}$，它强迫树性质(ω_2) 不成立。关于这些问题目前最好的部分结果，见 [24] 和 [9]。

在本文中，我们关注树性质的一个重要强化，即猜测模型性质 （记作 GMP(κ)）。正如 TP(κ) 在不可达基数中刻画弱紧基数，GMP(κ) 在不可达基数中刻画超紧基数。同样，正如弱紧基数处的 TP(κ) 在具有良好链条件的强迫下保持稳健，超紧基数处的 GMP(κ) κ 在用任意对某个 $\mu < \kappa$ 为 μ-cc 的强迫偏序集进行强迫之后仍然成立。这里我们证明，这种稳健性在 ω_2 处可以相容地失效；特别地，令简单 GMP 表示 GMP(ω_2)，我们证明以下情形是相容的：GMP 成立，但存在一个大小为 ω_1 的 ccc 强迫迫使 GMP 失效。

我们通过证明如下事实来完成这一任务：GMP与一个本身即值得关注的特定组合对象的存在相容：几乎库雷帕苏斯林树，即一棵苏斯林树 T 使得在用 T 强迫之后，它成为一棵库雷帕树（见第 2 节的精确定义）。由于 GMP 蕴涵不存在库雷帕树，因此在用 T 强迫之后它不能成立。

近库雷帕苏斯林树最早由 Jensen 构造；关于证明 $\diamondsuit^+$ 蕴含它们存在的概要，见 [6] 。后来，Bilaniuk [3] 在假设 $\diamondsuit$ 成立且存在库雷帕树的前提下，构造了一棵近库雷帕苏斯林树。在这两种构造中，所得的苏斯林树之所以是近库雷帕树，是因为树上至少存在 ω_2 个两两几乎不相交的自同构。将这些自同构作用于一条泛型添加的共尾分支，便可确保该树在自身的泛型扩张中至少有 ω_2 条共尾分支。在我们的定理证明中，苏斯林树具有近库雷帕性质，同样是由存在 ω_2 个两两几乎不相交的自同构所确保的。

定理 A. 假设存在一个超紧基数。那么存在一个强迫扩张，在其中

(1) 存在一棵几乎库雷帕苏斯林树；*(2)* GMP成立。

特别地，*GMP* 成立且仍可被势为 ω_1 的 *ccc* 强迫破坏，这与公理相容。

GMP 蕴含弱库雷帕假设不成立（即不存在弱库雷帕树，记作 ¬wKH）；因此，定理 A 给出了一个不存在弱库雷帕树、却存在几乎库雷帕苏斯林树的模型。然而，要实现 ¬wKH，不可达基数这一假设就足够了。以下是定理 A 证明的一个直接推论：

推论 1.1。假设存在一个不可达基数。那么存在一个强迫扩张，其中

（*1*）存在一棵几乎库雷帕苏斯林树；（*2*）¬弱基数海伍德性质成立。

特别地，以下情形是相容的：¬弱基数海伍德性质 成立，但仍可被一个势为 ω_1 的 *ccc* 强迫所破坏。

为将定理 A 置于相应的背景之中，我们提及文献中的若干结果。

- 在 [8], 中，Honzik 与作者证明 GMP 在添加任意多个科恩实数后始终不可破坏。这表明定理 A 在如下意义上是最优的：可数强迫偏序集永远不能破坏 GMP。

- 相对于一个超紧基数的一致性，GMP 成立且在所有势为ω_1的 ccc 强迫下不可破坏，是相容的。特别地，这在由经典米切尔强迫 $\mathbb{M}(\omega,\kappa)$ 所得的扩张中成立，其中 κ 在基模型中是超紧的。关于这一事实的论证，见 [24, 定理 2]；那里所证的定理是关于树性质而非 GMP 的，因而只需要弱紧基数而非超紧基数，但对这一更强事实的证明本质上是相同的。由于我们的证明方法，这一事实还与我们的主要结果相关：得出定理 A 的强迫扩张采用了经典米切尔强迫的一种变体，其中向 ω_1 添加 Cohen 子集的强迫迭代因子被替换为向一棵特定的自由苏斯林树添加自同构的迭代因子。这展示了 Mitchell 型强迫的灵活性，我们预期，通过适当地改变 Mitchell 型构造中的迭代因子，还可以建立若干进一步的一致性结果。

- 在 [13], Krueger 与第二作者证明，假设不可达基数的一致性，则以下情形与连续统假设相容：库雷帕假设不成立，但仍存在一棵几乎库雷帕苏斯林树；这一结果也回答了 Jin 和 Shelah [12] 以及 Moore[20]长期悬而未决的问题。由于GMP 蕴含弱库雷帕假设不成立，因而库雷帕假设也不成立，所以定理 A 和推论1.1可视为这一结果的加强版，但代价是必须放弃连续统假设，因为它与 ¬弱基数海伍德性质不相容。我们对定理 A 的证明，在很大程度上是将 [13] 中发展的技术改造后应用于 Mitchell 型强迫扩张的情形。

- 苏斯林树为几乎库雷帕的概念与阿朗斯赞树的非饱和性密切相关。根据 Moore 的一个观察，若 S

是一个几乎库雷帕苏斯林树，那么 $S \otimes S$ 就是一个非饱和的阿朗斯赞树；详情请见 [13]。因此，在定理 A 的扩张中，GMP 成立，并且存在一个非饱和的阿朗斯赞树。在 [14], 中，Krueger 与第二作者证明了一个相关结果：在存在超紧基数的假设下，存在一个强迫 $\mathbb{P}$ ，使得在由 $\mathbb{P}$生成的泛型扩张中，GMP成立，并且存在一个强非饱和的阿朗斯赞树。注意，在他们的模型中，该阿朗斯赞树是强 非饱和的[1], ，但强迫 $\mathbb{P}$ 旨在添加一个强非饱和的阿朗斯赞树，而不是一个几乎库雷帕苏斯林树；而且尚不清楚他们的模型中是否存在几乎库雷帕苏斯林树。另一方面，定理 A 中的几乎库雷帕苏斯林树与自身的积仅是非饱和的，而不是强非饱和的。

在本文的第二个主要定理中，我们在一种 GMP 的弱化形式（它仍足以推出 TP(ω_2)）成立的情况下，将弱库雷帕假设与库雷帕假设区分开来，从而改进了作者此前的结果[16]:

定理 B. 假设存在一个超紧基数 κ。那么存在一个强迫扩张，其中

(1) $2^\omega = \omega_2 = \kappa$; *(2)* $\mathrm{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$成立; *(3)* 不存在库雷帕树，但存在弱库雷帕树。

与定理 A 相比，该定理的证明使用了经典米切尔强迫，以及一种自然的强迫来添加一棵弱库雷帕树。

本文其余部分的结构如下。在第2节中，我们介绍有关树、猜测模型、Mitchell 强迫和自同构的一些相关背景信息。在第3节中，我们证明定理 A 和推论 1.1，并在第4节中证明定理 B。在第5节中，我们通过综述围绕（弱）库雷帕假设之失效的相容（不）可破坏性的已知结果，填补文献中的一些空白。我们在本节末给出一个直接证明，表明弱库雷帕假设的失效总是被 σ-中心强迫所保持。在第6节中，我们提出若干尚存的开放问题。最后，附录A 给出下文注记3.1 中所承诺的一个两˙ ˙步迭代 $\mathrm{Add}(\omega, 1) * \dot{\mathbb{Q}}$，使得 $\mathbb{Q}$被力迫为完全适当，但在 V 上用相关项强迫进行强迫会坍缩 ω_1。

1.1. **记号与约定**。 我们用 On 表示所有序数构成的类。给定$\delta \in$On，令 $\Sigma(\delta)$ 表示小于 δ 的后继序数集合。

若 $\vec{x}$ 是一个长度为 β 的序列，那么按照约定，除非另有明确说明，对于所有 $\alpha < \beta$， $\vec{x}$ 的第 α^{th} 个元素记为 x_α。

如果 κ 和 λ 是基数，且 κ 是正则无穷基数，那么 $\mathrm{Add}(\kappa, \lambda)$ 是向 κ中添加 λ个 Cohen 子集的强迫。具体而言，$\mathrm{Add}(\kappa, \lambda)$ 中的条件是从 λ 到 $^{<\kappa}2$、势小于 κ 的偏函数。如果 $p, q \in \mathrm{Add}(\kappa, \lambda)$，那么 $q \leq p$当且仅当 $\mathrm{dom}(q) \supseteq \mathrm{dom}(p)$，并且对于所有 $\gamma \in \mathrm{dom}(p)$， $q(\gamma) \supseteq p(\gamma)$。

[1]关于定义，参见 [14]。

2. Preliminaries

本节将回顾关于树、猜测模型、Mitchell 强迫和树自同构的一些背景信息。

2.1. 树与猜测模型性质。

定义 2.1. 一棵树 是一个偏序（$T, <_T$），使得对所有 $t \in T$，集合$\mathrm{pred}_T(t) = \{s \in T \mid s <_T t\}$ 在 $<_T$下是良序的。若 T是一棵树且 $t \in T$，则令$\mathrm{ht}_T(t)$表示$(\mathrm{pred}_T(t), <_T)$的序型。对所有 $\alpha \in \mathrm{On}$，令 T_α表示 $\{t \in T \mid \mathrm{ht}_T(t) = \alpha\}$。诸如 $T_{<\alpha}$ 或 $T_{\leq\alpha}$ 之类的表达式按显然的方式定义。令$\mathrm{ht}(T) = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid T_\alpha = \emptyset\}$。$\mathrm{ht}(T)$常被称为 T的高度 。

给定一个正则不可数基数 κ，若一棵树 T 满足 $\mathrm{ht}(T) = \kappa$ 且对所有 $\alpha < \kappa$ 都有 $|T_\alpha| < \kappa$，则称其为 κ- 树。若一棵 κ- 树 T 满足以下两个条件，则称其为正规：

- 对所有 $\alpha < \beta < \kappa$ 和所有 $t \in T_\alpha$，存在 $s \in T_\beta$ 使得 $t <_T s$；
- 对每个极限序数 $\alpha < \kappa$ 以及所有 s，$t \in T_\alpha$，若 $\mathrm{pred}_T(s) = \mathrm{pred}_T(t)$，则$s = t$。

若 T 是一棵树且 $t \in T$，则令 $\mathrm{succ}_T(t)$ 表示 T 中 t 的直接后继所构成的集合，即集合 $\{s \in T \mid t <_T s$，且 $\mathrm{ht}_T(s) = \mathrm{ht}_T(t) + 1\}$。若对所有 $t \in T$，$\mathrm{succ}_T(t)$ 都是无限集，则称 T 是无限分叉的。

树 T 的分支是一个子集 $b \subseteq T$，它是 $<_T$-向下闭合的，并且在 $<_T$ 下构成线性序。若对所有$\alpha < \mathrm{ht}(T)$，都有 $b \cap T_\alpha \neq \emptyset$，则称分支 $b \subseteq T$ 为共尾分支。若子集 $A \subseteq T$ 中的元素在 $<_T$ 下两两不可比较，则称其为反链。若对所有 $t \in T$，都存在满足 $t \leq_T s$的 $s \in E$，则称子集 $E \subset T$ 为稠密；若对所有 $t \in E$ 及所有满足 $t \leq_T s$的 $s \in T$，都有 $s \in E$，则称其为开。

本文主要关注 ω_1-树，因此下文大部分内容将处于 ω_1-树的具体语境中，不过显然，本质上所有内容都可以推广到其他正则不可数基数 κ上的 κ-树情形。给定 ω_1-树的有限序列 $\langle T(i) \mid i < n\rangle$，令 $T(0) \otimes T(1) \otimes \cdots \otimes T(n-1)$表示如下定义的树 T^*。T^*的底集为

$$\bigcup_{\alpha<\omega_1} \prod_{i<n} T(i)_\alpha.$$

若 $\vec{x}, \vec{y} \in T^*$，则我们规定 $\vec{x} \leq_{T^*} \vec{y}$当且仅当$x_i \leq_{T(i)} y_i$对所有 $i < n$成立。注意，对所有 $\alpha < \omega_1$，我们有 $T^*_\alpha = \prod_{i<n} T(i)_\alpha$。

若 T是一个 ω_1-树且 $x \in T$，则我们用 T_x 表示树 $\{y \in T \mid x \leq_T y\}$，其诱导序继承自 T。只要 T 是正规的，就可得出，对于所有 $x \in T$，T_x 都是一个ω_1-树。这里的记号略有滥用，因为按照我们的约定，T_α 表示树 T的 α^{th} 层；但在实际使用中绝不会造成混淆：我们总是用“x”这样的罗马字母表示树的元素，用“α”这样的希腊字母表示树的层。若 $\alpha < \omega_1$ 且 $\vec{x}$ 是 T_α 中的一个长度为 $n < \omega$的有限序列，则我们记

$$T_{\vec{x}} := T_{x_0} \otimes T_{x_1} \otimes \cdots \otimes T_{x_{n-1}}.$$

这样的树 $T_{\vec{x}}$称为的导出树。给定 $\vec{z} \in T_{\vec{x}}$，我们用 $\mathrm{ht}_T(\vec{z})$ 表示满足以下条件的唯一 $\beta < \omega_1$：对于所有 $i < n$，都有 $z_i \in T_\beta$。回想一下，苏斯林树是一个 ω_1-树 T，没有不可数分支，也没有不可数反链。它

容易证明，一个（无限）分裂的 ω_1-树 T 是苏斯林树，当且仅当对于每个稠密开子集 $E \subseteq T$，都存在 $\beta < \omega_1$ 使得 $T_\beta \subseteq E$。

我们称苏斯林树 T 为自由苏斯林树，如果对所有 $\alpha < \omega_1$ 以及所有取自 T_α的有限单射序列 $\vec{x}$，树 $T_{\vec{x}}$ 都是苏斯林的。库雷帕树是一棵 ω_1-树T，至少有 ω_2条共尾分支。我们称苏斯林树 T 为几乎*Kurepa*，如果在用 T强迫之后，T是一棵库雷帕树。弱库雷帕树是一棵高度与大小均为 ω_1 的树 T，至少有 ω_2条共尾分支。库雷帕假设（KH）断言存在一棵库雷帕树。弱库雷帕假设（wKH）断言存在一棵弱库雷帕树。

给定一个正则不可数基数 κ，我们说树性质成立于κ（记为TP（κ）），如果每一棵 κ-树都有一条共尾分支。树性质可用于刻画弱紧基数：一个不可达基数 κ 是弱紧致的，当且仅当TP（κ）成立；并且，由Mitchell与Silver的工作，[19], TP（ω_2）与存在一个弱紧基数等相容。从20世纪70年代Jech的工作开始 [10] 以及Magidor的工作 [17], ，并延续至2000年代Weiß的工作，[26], 树性质的双基数类比已被证明以类似方式刻画强紧基数与超紧基数。

设 κ 为正则不可数基数，且设 X 为满足 $|X| \geq \kappa$的集合。若对所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa X$都有 $d_x \subseteq x$，则称序列 $\langle d_x \mid x \in \mathscr{P}_\kappa X\rangle$ 为一个（κ，X）-列表。

定义 2.2。假设 $D = \langle d_x \mid x \in \mathscr{P}_\kappa X\rangle$ 为一个（κ，X）-列表。

（1）D 的宽度 是满足对所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa X$都有 $|d_x| < \lambda$ 的最小基数 λ。（2）如果存在一个闭无界集 $C \subseteq \mathscr{P}_\kappa X$，使得对每个 $y \in C$都有 $|\{d_x \cap y \mid y \subseteq x \in \mathscr{P}_\kappa X\}| < \kappa$，则称 D 为薄的。（3）设 $\mu \leq \kappa$ 为不可数基数。如果对所有充分大的 θ，都存在一个闭无界集 $C \subseteq \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$，使得对所有 $M \in C$和所有 $y \in M \cap \mathscr{P}_\mu X$，都有 $d_{M\cap X} \cap y \in M$，则称 D 为 μ-纤细的。

定义 2.3. 假设 $D = \langle d_x \mid x \in \mathscr{P}_\kappa X\rangle$ 是一个 (κ，X)-列表，并且 $d \subseteq X$。

(1) 若对所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa X$，都存在 $z_x \supseteq x$使得 $d \cap x = d_{z_x} \cap x$，则称 d 是 D 的共尾分支。(2) 若集合 $\{x \in \mathscr{P}_\kappa X \mid d \cap x = d_x\}$是驻定的，则称 d是 D 的不可言分支。

定义 2.4. 假设 $\mu \leq \kappa$ 是正则的。我们称

(1) (κ, X)-树性质成立，记作 TP(κ, X)，若每个薄的 (κ, X)-列表都有一个共尾分支。(2) (κ, X)-不可言树性质成立，记作 ITP(κ, X)，若每个薄的 (κ, X)-列表都有一个不可言分支。(3) (μ, κ, X)-细长树性质成立，记作 SP$^\mu(\kappa, X)$，若每个 μ-细长的 (κ, X)-列表都有一个共尾分支。(4) (μ, κ, X)-不可言喻细树性质成立，记作 ISP$^\mu(\kappa, X)$，若每个 μ-细长的 (κ, X)-列表都有一个不可言分支。

在本文中，我们只关注不可言喻细树性质；有关二基数树性质的更多内容，请参见 [26]。我们约定如下。我们将使用诸如 ISP$^\mu(\kappa)$ 这样的记号，以断言对于所有 $\lambda \geq \kappa$，ISP$^\mu(\kappa, \lambda)$ 都成立。我们令 ISP 表示 ISP$^{\omega_1}(\omega_2)$。

由 [17], 可知，不可达基数 κ 是超紧的当且仅当无缝细树性质$^{\omega_1}$（κ）成立。Weiß在 [26] 中证明，如果用以力迫的是标准的Mitchell

强迫 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$，其中 κ 是超紧的，则无缝细树性质在扩张中成立；类似地，Viale与Weiß在 [25]中证明，适当强迫公理（正常力迫公理）蕴含无缝细树性质。目前尚不清楚，类比于树性质，无缝细树性质是否蕴含超紧基数存在的一致性；该方向的一些部分结果可见于 [25]。

在 [25], Viale 和 Weiß 用称为猜测模型的组合对象的存在来重新表述不可言喻细树性质，我们现在回顾这一概念。

定义 2.5. 设 $\theta \geq \omega_2$ 为正则基数，且 $M \prec H(\theta)$为一个初等子模型。

(1) 给定集合 $x \in M$、子集 $d \subseteq x$ 和不可数基数 μ，称 (a) d是 (μ, M)-逼近的，若对于每个 $z \in M \cap \mathscr{P}_\mu(M)$，都有 $d \cap z \in M$；(b) 若存在 $e \in M$ 使得 $d \cap M = e \cap M$，则称 d是 M-猜测 的。(2) 若 x 的每个 (μ, M)-逼近子集都是M-猜测的，则称 M是 x的 μ-猜测模型 。(3) 若对每个 $x \in M$， M 都是 x的 μ-猜测模型，则称 M 是一个 μ-猜测模型 。

给定不可数基数 $\mu \leq \kappa \leq \theta$，其中 κ 与 θ 为正则，我们用 GMP$^\mu(\kappa, \theta)$ 表示如下断言：使得 M 是 μ-猜测模型的那些 $M \in \mathscr{P}_\kappa(H(\theta))$ 所成之集在 $\mathscr{P}_\kappa(H(\theta))$ 中是驻定的。此外，我们用 GMP$^\mu(\kappa)$ 表示如下断言：对每个正则基数 $\theta \geq \kappa$，GMP$^\mu(\kappa, \theta)$ 成立。我们用 GMP(κ) 表示 GMP$^{\omega_1}(\kappa)$，并用 GMP 表示 GMP(ω_2)。

Viale 与 Weiß 在 [25]中证明，不可言喻细树性质等价于猜测模型性质。更确切地说，他们证明了如下结论：

事实 2.6. 设 $\mu \leq \kappa$ 为正则不可数基数。则下列各项等价：

(1) 无缝细树性质$^\mu(\kappa)$；*(2)* GMP$^\mu(\kappa)$。

特别地，无缝细树性质 等价于 GMP

2.2. **保性引理**。 在这一简短小节中，我们回顾若干关于乘积强迫以及向树添加共尾分支的有用保性引理。下述事实归功于 Baumgartner（见 [2]）。

事实 2.7. 设 κ 是一个正则基数，并假设 $\mathbb{P}$ 是一个 κ-*Knaster* 强迫概念。若 T 是一棵高度为 κ 的树，则用 $\mathbb{P}$ 进行强迫不会向 T 添加新的共尾分支。

以下引理出现在 [7] 中。

事实 2.8. (Easton) 设 $\kappa > \omega$ 是一个正则基数，并假设 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{Q}$ 是强迫偏序，其中 $\mathbb{P}$ 满足 κ-*cc*，且 $\mathbb{Q}$ 是 κ-闭的。则下列结论成立：

(i) $\mathbb{P}$ 力迫 $\mathbb{Q}$ 是 κ-分配的。

(ii) $\mathbb{Q}$ 力迫 $\mathbb{P}$ 满足 κ-*cc*。

下述事实可见于 [5]。该论证归功于 Magidor。

事实 2.9。 设 $\kappa > \omega$ 为一个正则基数，并假设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是强迫概念，其中 $\mathbb{P}$ 是 κ-*Knaster* 的，且 $\mathbb{Q}$是 κ-*cc* 的。那么 $\mathbb{Q}$ 强迫 $\mathbb{P}$ 是 κ-*Knaster* 的。

以下事实归功于 Silver（更多详情请参见 [1] ）。

事实 2.10。 设 κ、 λ 是正则基数，且满足 $2^\kappa \geq \lambda$。假设 $\mathbb{P}$ 是一个 κ^+-闭强迫概念。如果 T 是一棵 λ-树，那么用 $\mathbb{P}$ 进行强迫不会向 T 添加新的共尾分支。

这些事实可以推广如下： [24]。

事实 2.11。 设 $\kappa < \lambda$ 是正则基数，且 $2^\kappa \geq \lambda$。假设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 是强迫概念，其中 $\mathbb{P}$ 满足 κ^+-*cc*， $\mathbb{Q}$ 是 κ^+-闭的。如果 T 是 $V[\mathbb{P}]$ 中的一棵 λ-树，那么在 $V[\mathbb{P}]$ 上使用 $\mathbb{Q}$ 进行强迫不会向 T 添加共尾分支。

在 [16], 中，我们针对更一般的树证明了前一个引理的一个类似结果，并由此得到以下事实作为推论：

事实 2.12. 设 ξ 是一个基数， $\mu < \kappa \leq \lambda$ 是正则基数，且满足 $2^\mu \geq \xi$和 $2^{<\mu} < \kappa$。设 $\mathbb{Q}$ 是一个 μ^+-闭强迫概念， $\mathbb{P}$ 是一个 μ^+-*cc* 强迫概念。若在 $V[\mathbb{P}]$中， T是宽度至多为 ξ 的 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$-树，那么在 $V[\mathbb{P}]$上用 $\mathbb{Q}$ 进行强迫不会添加穿过 T的共尾分支。

2.3. **Mitchell 强迫**。 设 κ 是一个序数，且 $\mathrm{cf}(\kappa) > \omega$。实际上， κ 通常会是（至少）一个不可达基数，但有时我们需要考虑形如 $j(\lambda)$ 的 κ ，其中 $j\colon V \to M$ 是一个临界点为 λ的初等嵌入；此时 κ 在 M 中是不可达的，但在 V中甚至可能不是基数。

在本小节中，令 $\mathbb{P}$ 表示用于添加 ω的 κ-多个 Cohen 子集的强迫 $\mathrm{Add}(\omega,\kappa)$。对于 $\gamma < \kappa$，令 $\mathbb{P}_\gamma$ 表示子偏序 $\mathrm{Add}(\omega,\gamma)$。现在我们可以定义将要使用的 Mitchell 强迫版本 $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\omega,\kappa)$，如下所示。首先，令 A 为 κ 的某个无界子集，且 $\min(A) > \omega$。回顾一下，$\mathrm{acc}(A)$（即 A的聚点集合）定义为 $\{\alpha \in A \mid \sup(A \cap \alpha) = \alpha\}$，而 $\mathrm{nacc}(A) := A \setminus \mathrm{acc}(A)$。此外，$\mathrm{acc}^+(A) := \{\alpha < \sup(A) \mid \sup(A \cap \alpha) = \alpha\}$。虽然 $\mathbb{M}$ 的定义取决于所选的 A，但我们在记号中省略对 A 的提及；若需明确指定 A 的选取，我们会称之为“使用集合 A定义的 Mitchell 强迫 $\mathbb{M}(\omega,\kappa)$”。除非另有说明，我们始终令 A 为区间 (ω,κ) 内所有不可达基数构成的集合，不过 $\mathbb{M}$ 的定义及下文列出的性质适用于 A的任意选取。 $\mathbb{M}$ 中的条件均为满足以下条件的有序对 (p,q)：

- $p \in \mathbb{P}$；
- q 是一个函数，且 $\mathrm{dom}(q) \in [\mathrm{nacc}(A)]^{\leq\omega}$；
- 对于所有 $\alpha \in \mathrm{dom}(q)$， $p \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$“$q(\alpha) \in \mathrm{Add}(\omega_1, 1)^{V^{\mathbb{P}_\alpha}}$”。

若 (p_0, q_0)，$(p_1, q_1) \in \mathbb{M}$，则 $(p_1, q_1) \leq_{\mathbb{M}} (p_0, q_0)$ 当且仅当

- $p_1 \leq_{\mathbb{P}} p_0$；
- $\mathrm{dom}(q_1) \supseteq \mathrm{dom}(q_0)$；
- 对所有 $\alpha \in \mathrm{dom}(q_0)$， $p_1 \restriction \alpha \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$q_1(\alpha) \leq q_0(\alpha)$”。

对于 $\delta < \kappa$，我们用 $\mathbb{M}_\delta$ 表示由所有条件 (p, q) 构成的 $\mathbb{M}$ 的子偏序，其中 p 和 q 的定义域均包含于 δ。

注 2.13。 以下是 $\mathbb{M}$ 的一些关键性质（进一步的细节和证明参见 [1], [19] ）：

(1) 如果 κ 是不可达基数，那么 $\mathbb{M}$ 是 κ-Knaster。（2） $\mathbb{M}$具有 ω_1-覆盖性质和 ω_1-逼近性质。结合前一项，这意味着：如果 κ是不可达基数，那么用 $\mathbb{M}$进行强迫会保留 ω_1 以及所有大于或等于 κ的基数。

(3) 如果 κ 是不可达基数，那么 $\Vdash_{\mathbb{M}}$“$2^{\omega}=\kappa=\omega_2$”。（4）存在一个从形如 $\mathrm{Add}(\omega,\kappa)\times\mathbb{Q}$ 的强迫偏序到 $\mathbb{M}$ 的投影，其中$\mathbb{Q}$ 是 ω_1-闭的（这里的 $\mathbb{Q}$ 就是通常所说的与 $\mathbb{M}$关联的项强迫；它可以看作是 $\mathbb{M}$中所有形如（$\emptyset,q$）的有序对构成的集合，其序关系继承自 $\mathbb{M}$）。（5）对于所有满足 $\delta\in \mathrm{acc}^{+}(A)$的不可达基数，都存在一个从 $\mathbb{M}$到 $\mathbb{M}_\delta$ 的投影，并且在 $V^{\mathbb{M}_\delta}$中，商强迫 $\mathbb{M}/\mathbb{M}_\delta$ 具有 ω_1-逼近性质。（6）对于所有满足 $\delta\in \mathrm{acc}^{+}(A)$的不可达基数，令 $\delta^{\dagger}$ 表示 $\min(A\backslash\delta+1)$。那么在 $V^{\mathbb{M}_\delta}$中，商强迫 $\mathbb{M}/\mathbb{M}_\delta$ 的形式为 $\mathrm{Add}(\omega,\delta^{\dagger}-\delta)*\dot{\mathbb{M}}^{\delta}$；其中，在 $V^{\mathbb{M}*\mathrm{Add}(\omega,\delta^{\dagger}-\delta)}$中，存在一个从形如 $\mathrm{Add}(\omega,\kappa-\delta^{\dagger})\times\mathbb{Q}^{*}_{\delta}$ 的强迫偏序到 $\mathbb{M}^{\delta}$ 的投影，且 $\mathbb{Q}^{*}_{\delta}$ 是 ω_1-闭的。

2.4. **树的自同构**。 如果 T 是一棵树，那么 T 的一个自同构 是一个双射 $g:\ T\to T$，使得 g 和 g^{-1} 都保持序关系 $<_T$。注意，自同构必须保持层次，也就是说，对于所有 $\alpha<\mathrm{ht}(T)$，都有 $g[T_\alpha]=T_\alpha$。我们用 $\mathrm{Aut}(T)$ 表示 T的所有自同构构成的集合。

暂且固定一棵正规、无限分叉的 ω_1-树 T。如果 $\alpha<\beta<\omega_1$ 和 $x\in T_\beta$，那么 $x\restriction\alpha$ 表示 x 在 T_α中的唯一前驱。如果 $X\subseteq T_\beta$，那么 $X\restriction\alpha$表示 $\{x\restriction\alpha\mid x\in X\}$。我们称 X 具有到 α 的唯一下降，如果对于任意两个不同的 $x,\ y\in X$，都有 $x\restriction\alpha\neq y\restriction\alpha$。注意，如果 $\alpha<\omega_1$，那么 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\alpha})$ 中的一个元素由其在 T_α上的取值唯一确定。

利用 T的正规性，下述命题是显然的。

命题 2.14. 设 $\beta<\omega_1$ 是极限序数且 $g\in$ 自同构群$(T_{<\beta})$。则至多存在一个 $g'\in$ 自同构群$(T_{\leq\beta})$ 使得 $g'\supseteq g$，并且下列条件等价：

(1) 存在 $g'\in$ 自同构群$(T_{\leq\beta})$ 使得 $g'\supseteq g$；*(2)* 对所有 $x\in T_\beta$ 和 $j\in\{-1,1\}$，存在 $y\in T_\beta$ 使得对所有 $\alpha<\beta$，我们有 $g^{j}(x\restriction\alpha)=y\restriction\alpha$。

下述命题的直接证明留给读者，该命题表明我们对 T的初始段的自同构的扩张有一定的控制。

命题 2.15. 设 $\alpha<\omega_1$ 且 $g\in$ 自同构群$(T_{\leq\alpha})$。此外假设

- $X\subseteq T_{\alpha+1}$ 是有限的；
- 对于所有的 $x\in X$ 和 $j\in\{-1,1\}$，我们都给定了 $z^{j}_{x}\in T_{\alpha+1}$，使得$-$ $g^{j}(x\restriction\alpha)=z^{j}_{x}\restriction\alpha$；$-$若 x_0 和 x_1 是 X 和 $j\in\{-1,1\}$ 中的不同元素，则 $z^{j}_{x_0}\neq z^{j}_{x_1}$；$-$若 $x_0\in X$、$j\in\{-1,1\}$ 和 $z^{j}_{x_0}=x_1\in X$，则 $z^{1-j}_{x_1}=x_0$。

那么存在 $h\in$ 自同构群$(T_{\leq\alpha+1})$ 使得

- $h\supseteq g$; *and*
- *for all* $(x,j)\in X\times\{-1,1\}$, *we have* $h^{j}(x)=z^{j}_{x}$.

现在我们回顾 [13]中的一些概念和基本结果。为便于后文引用，部分定义和引理附有描述性名称；这些名称也取自 [13]。

定义 2.16（一致性）。假设 $\alpha < \alpha' \leq \beta < \omega_1$ 和 $g \in$ 属于 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\beta})$。此外，假设 $X \subseteq T_{\alpha'}$ 到 α 有唯一下降。若对于所有 $x,\ y \in X$，都有 $g(x) = y$ 当且仅当 $g(x \restriction \alpha) = g(y \restriction \alpha)$，则称 $X \restriction \alpha$ 和 X 是 g-相容的。类似地，若 $n < \omega$ 且 $\vec{x}$ 是来自 $T_{\alpha'}$ 的单射 n-元组，则称 $\vec{x} \restriction \alpha$ 和 $\vec{x}$ 是 g-相容的，如果对于所有 $i,\ j < n$，都有 $g(x_i) = x_j$ 当且仅当 $g(x_i \restriction \alpha) = x_j \restriction \alpha$。

命题 2.17。设 $\alpha < \omega_1$、$g \in$自同构群$(T_{\leq\alpha})$，$X \subseteq T_{\alpha+1}$ 是一个具有到 α 的唯一下降的有限集，而 $Y \subseteq T_{\alpha+1}$ 是一个与 X不相交的有限集。那么存在 $g' \in$自同构群$(T_{\leq\alpha+1})$ 使得

- $g' \supseteq g$;
- $X \restriction \alpha$ 和 X 是 g'-相容的;
- $g'[Y] \cap (X \cup Y) = \emptyset$。

证明。对于每个 $x \in T_\alpha$，令 $\langle x_n \mid n < \omega \rangle$ 为 $\mathrm{succ}_T(x)$ 的一个单射枚举。令 $X_0 := \{x \in T_\alpha \mid X \cap \mathrm{succ}_T(x)\} \neq \emptyset$。注意，由于 X 到 α 有唯一下降，对于每个 $x \in X_0$，存在唯一的 $n < \omega$ 使得 $x_n \in X$；将其记为 $n(x)$。类似地，令 $Y_0 = \{x \in T_\alpha \mid Y \cap \mathrm{succ}_T(x)\} \neq \emptyset$，并且对所有 $x \in Y_0$，令 $A_Y(x) = \{n < \omega \mid x_n \in Y\}$。于是，每个 $A_Y(x)$ 都是 ω 的有限子集；若 $n_X(x)$ 有定义，则该集合不包含它。若 $x \notin Y_0$，令 $A_Y(x) = \emptyset$。

现在，对每个 $x \in T_\alpha$，固定 ω 的一个置换 π_x，使其具有以下性质：

- 如果 $x,\ g(x) \in X_0$，那么 $\pi_x(n_X(x)) = n_X(g(x))$;
- 如果 $x \in Y_0$，那么 $\pi_x[A_Y(x)]$ 与 $A_Y(g(x))$ 不相交，并且不包含$n_X(g(x))$（若后者有定义）。

现在令 $g' \in \mathrm{Aut}(T_{\leq\alpha+1})$ 的定义如下：对所有 $(x,\ n) \in T_\alpha \times \omega$，令 $g'(x_n) = g(x)_{\pi_x(n)}$。容易验证，$g'$ 正是所需的。□

定义 2.18 (分离)。设 $\alpha \leq \beta < \omega_1$, $\mathcal{G} = \{g_\tau \mid \tau \in I\}$ 是来自 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\beta})$ 的一个加标族，$n < \omega$ 且 $\vec{x}$ 是来自 T_α的一个单射 n-元组。我们称 $\mathcal{G}$ 在 $\vec{x}$ 上分离的，若对所有 $m < n$，以下陈述均成立：

(1) 对所有 $\tau \in I$、$g_\tau(x_m),\ \neq x_m$；(2) 至多存在一个三元组（$k,\ j,\ \tau$），使得 $k < m$、$j \in \{-1, 1\}$、$\tau \in I$，并且 $g_\tau^j(x_m) = x_k$。

若 $X \subseteq T_\alpha$ 是有限的，则称 $\mathcal{G}$ 在 X 上是分离的，如果存在 X 的一个单射枚举 $\vec{x}$，使得 $\mathcal{G}$ 在 $\vec{x}$ 上是分离的。若对每个有限 $X \subseteq T_\beta$，$\mathcal{G}$ 在 X 上都是分离的，则称 $\mathcal{G}$ 是分离的。

接下来的五个技术性结果在 [13]中得以证明；证明请参见该文献。

命题 2.19（持久性）。[13, 引理 5。7] 设 $\alpha < \beta < \omega_1$, $\mathcal{G}$ 是来自 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\beta})$ 的一个加标族，且 $X \subseteq T_\beta$ 是一个有限集，其到 α 的下降唯一。若 $\mathcal{G}$ 在 $X \restriction \alpha$ 上是分离的，则 $\mathcal{G}$ 在 X 上是分离的。

引理 2.20（关键性质）。[13, 命题 5。11] 假设 $\alpha < \beta < \omega_1$,$n < \omega$, $\vec{x}$ 是来自 T_α 的一个单射 n-元组，并且 $\mathcal{G} = \{g_\tau \mid \tau \in I\}$ 是来自 自同构群$(T_{\leq\beta})$ 的一个在 $\vec{x}$ 上分离的有限加标集。令 $t \subseteq T_\beta$ 为有限集。那么存在一个来自 $T_\beta \setminus t$ 的 n-元组 $\vec{y}$，使得

- 对于所有 $i < n$，都有 $x_i <_T y_i$;
- 对所有 $\tau \in I$，$\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 都是 g_τ-相容的。

引理 2.21 (1-Key 性质)。 [13, 命题 5。12] 设 $\alpha < \beta < \omega_1$，$n < \omega$， $\vec{x}$ 是来自 n的一个单射 T_α元组，且 $\mathcal{G} = \{g_\tau \mid \tau \in I\}$ 是来自 自同构群($T_{\leq\beta}$) 在 $\vec{x}$上分离的有限加标集。令 $m < n$，并固定 $y^* \in T_\beta$ 使得 $x_m <_T y^*$。则存在一个来自 n元组 $\vec{y}$，使得

- $y_m = y^*$;
- 对于所有 $i < n$，我们都有 $x_i <_T y_i$;
- 对于所有 $\tau \in I$， $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 都是 g_τ-相容的。

引理 2.22 (扩张)。 [13, 命题 5。15] 假设 $\alpha < \beta < \omega_1$, $X \subseteq T_\beta$ 是一个具有到 α, $\{f_\tau \mid \tau \in I\}$ 唯一下降的有限集，是来自 自同构群($T_{\leq\alpha}$) 的可数加标集，并且 $A \subseteq I$ 是有限的。那么存在一个由 $\{g_\tau \mid \tau \in I\}$ 构成、来自 自同构群($T_{\leq\beta}$) 的集合，使得

- 对于所有 $\tau \in I$，都有 $f_\tau \subseteq g_\tau$;
- 对于所有 $\tau \in A$， $X \restriction \alpha$ 和 X 都是 g_τ-相容的;
- 如果 $\{f_\tau \mid \tau \in A\}$ 在 $X \restriction \alpha$ 上是分离的，那么 $\{g_\tau \mid \tau \in I\}$ 是分离的。

我们还需要下面这个对前述引理的轻微变体；它是 [13,引理 5.39],的一个特例，因此我们将证明留给读者。

引理 2.23。 设 $\alpha < \omega_1$、 X_0 和 X_1 是 $T_{\alpha+1}$ 的有限子集，它们分别唯一地下降到 α 和 $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ （尽管可能 $(X_0 \restriction \alpha) \cap (X_1 \restriction \alpha) \neq \emptyset$），且 $g \in$ 自同构群($T_{\leq\alpha}$)。那么存在 $g' \in$ 自同构群($T_{\leq\alpha+1}$) 使得 $g' \supseteq g$，并且对于每个 $i < 2$， $X_i \restriction \alpha$ 和 X_i 都是 g'-相容的。

现在我们回顾一种强迫偏序集，它旨在通过后继高度的初始段，为一个固定的 ω_1-树添加一个泛自同构。这个偏序集将作为下一节用于证明定理 A 的广义米切尔强迫的构件。

定义 2.24。 给定一个 ω_1-树 T，令 $\mathbb{A}(T)$ 为强迫偏序集，其底集为 $\bigcup\{$自同构群$(T_{\leq\alpha}) \mid \alpha < \omega_1\}$，并按逆包含排序。给定 $g \in \mathbb{A}(T)$，令 $\mathrm{top}(g)$ 为唯一的 $\alpha < \omega_1$，使得 $g \in$自同构群($T_{\leq\alpha}$)。我们有时将 $\mathrm{top}(g)$ 称为 g 的顶层 。

注记 2.25. 若 T 是一棵正规的、无限分叉的 ω_1-树，且 G 是在 V 上的一个 $\mathbb{A}(T)$-泛型滤子，那么根据引理 2.22 及标准的泛型性论证，$g^* := \bigcup G$ 是 T 的一个自同构。注意，一般而言，使用 $\mathbb{A}(T)$ 进行强迫可能会压缩 ω_1；但在对 T 的某些假设下，例如当 T 是一棵自由苏斯林树时， $\mathbb{A}(T)$ 将是完全适当的，因而会保持 ω_1 （参见 [13, 定理 5.34]）。

尽管 $\mathbb{A}(T)$ 可能保持 ω_1，但下一个命题表明，若连续统假设不成立，则它总会压缩连续统。

命题 2.26. 设 T 是一棵无限分叉的正规 ω_1-树。则

$$\Vdash_{\mathbb{A}(T)} \text{“}|(2^\omega)^V| = |\omega_1^V|\text{”}.$$

证明。在 V 中，对每个 $x \in T$ 固定一个 $\mathrm{succ}_T(x)$ 的枚举 $\langle x_n \mid n < \omega\rangle$。回想一下，$S_\infty$ 表示 ω 的置换群。若 h 是 T 的自同构，则 h 诱导一个映射 $\rho_h : T \to S_\infty$，定义如下：对每个 $x \in T$ 和每个 $n < \omega$，令 $\rho_h(x)(n)$ 为满足 $h(x_n) = h(x)_m$ 的唯一 $m < \omega$。标准的泛型性论证表明，若 G 是在 V 上的 $\mathbb{A}(T)$- 泛型，且 $g^* = \bigcup G$，则在 $V[G]$ 中，ρ_{g^*} 是从 T 到 $(S_\infty)^V$ 的满射。由于 $|T| = \omega_1^V$ 且 $|(S_\infty)^V| = |(2^\omega)^V|$，所需结论随即得证。□

3. Guessing models with an almost Kurepa Suslin tree

本节中，我们给出定理 A 的证明，构造一个满足 GMP 且存在几乎库雷帕苏斯林树的 ZFC 模型。为说明这一构造的动机，我们先回顾 [13] 中的构造：该构造得到一个存在几乎库雷帕苏斯林树、但不存在库雷帕树的模型。在那里，作者从一个带有不可达基数 κ 的 ZFC 模型出发。随后，他们用积 $\mathrm{Coll}(\omega_1,<\kappa)\times\mathbb{P}$ 进行强迫，其中 $\mathbb{P}$ 是由 κ 个 $\mathbb{A}(T)$ 副本组成的可数支撑积，而 T 是 V 中一个固定的自由苏斯林树。我们注意到，此处坍塌不可达基数是必要的：若 ZFC 模型 W 中没有库雷帕树，那么 $(\omega_2)^W$ 在 L 中是不可达的。注意，模型 $V[\mathrm{Coll}(\omega_1,<\kappa)\times\mathbb{P}]$ 满足连续统假设，因此包含弱库雷帕树。若要构造满足 GMP，甚至满足其推论 ¬wKH 的模型，那么在坍塌大基数 κ 的同时，我们必须提高连续统的值。这一要求自然促使我们考虑 Mitchell 强迫。由于我们还希望最终模型包含一棵几乎苏斯林的库雷帕树，因此我们将采用经典米切尔强迫的一种变体：用上一节末尾的强迫 $\mathbb{A}(T)$ 替代经典米切尔强迫中的 $\mathrm{Add}(\omega_1,1)$。

3.1. Mitchell 变体。

本节固定一个 ω_1-树 T 和一个基数 κ。令 $\mathbb{P}=\mathbb{P}_\kappa=\mathrm{Add}(\omega,\kappa)$；对于 $\gamma<\kappa$，令 $\mathbb{P}_\gamma=\mathrm{Add}(\omega,\gamma)$。定义强迫偏序集$\mathbb{M}=\mathbb{M}^T_\kappa$ 如下，回顾一下，$\Sigma(\kappa)$ 表示小于 κ 的后继序数集合：

- $\mathbb{M}$ 的条件是所有满足以下条件的有序对 (p,q)：– $p\in\mathbb{P}$；– q 是一个函数，其定义域是 $\Sigma(\kappa)$ 的可数子集；– 对于所有 $\alpha\in\mathrm{dom}(q)$，$q(\alpha)$ 是一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，表示 $\mathbb{A}(T)$ 的一个元素$^{V[\mathbb{P}_\alpha]}$。
- 给定 $(p_0,q_0),(p_1,q_1)\in\mathbb{M}$，我们定义 $(p_1,q_1)\leq_{\mathbb{M}}(p_0,q_0)$ 当且仅当– $p_1\leq_{\mathbb{P}}p_0$；– $\mathrm{dom}(q_1)\supseteq\mathrm{dom}(q_0)$；– 对于所有 $\alpha\in\mathrm{dom}(q_0)$，$p_1\restriction\alpha\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$“$q_1(\alpha)\leq_{\mathbb{A}(T)}q_0(\alpha)$”。

对于 $\delta<\kappa$，令 $\mathbb{M}_\delta$ 表示满足 $p\in\mathbb{P}_\delta$ 且 $\mathrm{dom}(q)\subseteq\delta$ 的 $(p,q)\in\mathbb{M}$ 集合。注意，$\mathbb{M}_\delta$ 是 $\mathbb{M}$ 的正则子序。给定 $(p,q)\in\mathbb{M}$，令 $(p,q)\restriction\delta$ 表示 $(p\restriction\delta,q\restriction\delta)\in\mathbb{M}_\delta$。容易验证，映射 $(p,q)\mapsto(p,q)\restriction\delta$ 是从 $\mathbb{M}$ 到 $\mathbb{M}_\delta$ 的投影。

令 $\mathbb{Q}$ 表示与 $\mathbb{M}$ 相关联的项强迫。更准确地说，$\mathbb{Q}$ 中的条件都是满足 $(1_{\mathbb{P}},q)\in\mathbb{M}$ 的函数 q。若 $q,q'\in\mathbb{Q}$，则当且仅当 $(1_{\mathbb{P}},q')\leq_{\mathbb{M}}(1_{\mathbb{P}},q)$ 时，令 $q'\leq_{\mathbb{Q}}q$。

注 3.1. 与经典米切尔强迫（回顾第 2.3 小节）一样，存在一个从 $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{M}$的自然投影。涉及 Mitchell 强迫的许多论证，包括下面第 4 节中的论证，都是通过考察这个积 $\mathbb{P}\times\mathbb{Q}$来进行的；由于在经典情形下 $\mathbb{Q}$ 是 ω_1-闭的，该积具有良好的性质。然而，在本节所讨论的情形中，$\mathbb{Q}$当然不是 ω_1-闭的；尽管我们将看到 $\mathbb{M}$ 具有良好的性质，但我们甚至不清楚在 V 上用$\mathbb{Q}$ 进行强迫是否保持 ω_1。（关于一个自然的两步迭代 $\mathrm{Add}(\omega,1)*\dot{\mathbb{Q}}$的例子，其中 $\mathbb{Q}$ 被强迫为 ω_1-分配的（甚至完全适当），但在 V 上用相应的项强迫进行强迫却会坍缩 ω_1，见下面的附录 A。）因此

本节中的论证不通过 Mitchell 型强迫所熟悉的乘积分析来进行。

引理 3.2. 令 $\mathbb{Q}' = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists \alpha < \omega_1 \forall \gamma \in \mathrm{dom}(q) \quad \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}\mathrm{top}(q(\gamma)) = \alpha\text{”}\}$。那么 $\mathbb{Q}'$ 在 $\mathbb{Q}$中稠密。

证明。 固定 $q_0 \in \mathbb{Q}$。对于每个 $\gamma \in \mathrm{dom}(q_0)$，令

$$\alpha_\gamma = \sup\{\beta < \omega_1 \mid \exists p \in \mathbb{P}_\gamma \ [p \Vdash \mathrm{top}(q_0(\gamma)) = \beta]\},$$

并令 $\alpha = \sup\{\alpha_\gamma \mid \gamma \in \mathrm{dom}(q_0)\}$。由于每个 $\mathbb{P}_\gamma$ 都满足可数链条件，且 $\mathrm{dom}(q_0)$ 是可数的，因此可得 $\alpha < \omega_1$，并且对于所有 $\gamma \in \mathrm{dom}(q_0)$，$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}$ “$\mathrm{top}(q_0(\gamma)) \leq \alpha$”。令 q 为一个函数，使得 $\mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(q_0)$，且对于所有 $\gamma \in \mathrm{dom}(q)$，$q(\gamma)$ 是一个$\mathbb{P}_\gamma$-名称，使得

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}q(\gamma) \leq q_0(\gamma) \text{ and } \mathrm{top}(q(\gamma)) = \alpha.\text{”}$$

（为看出可以找到这样的名称，反复应用引理2.22的各个实例。）然后 $q \in \mathbb{Q}'$ 与 $q \leq_{\mathbb{Q}} q_0$。 □

今后，我们通常会不加说明地假定，我们所考虑的 $\mathbb{Q}$ 中的条件来自 $\mathbb{Q}'$；并且，若 $q \in \mathbb{Q}'$，则令 $\mathrm{top}(q)$ 表示见证 $q \in \mathbb{Q}'$ 的那个唯一的 $\alpha < \omega_1$。类似地，我们通常会不加说明地假定，我们所考虑的所有条件 $(p, q) \in \mathbb{M}$ 都满足 $q \in \mathbb{Q}'$。

我们现在引入一些定义和引理，以便将这一修改后的 Mitchell 强迫与上一节末尾的某些概念和结果联系起来。

定义 3.3（Mitchell 化相容性）。 假设 $(p, q) \in \mathbb{M}$，$A \subseteq \mathrm{dom}(q)$ 是有限的，$\beta = \mathrm{top}(q)$，$\alpha < \alpha' \leq \beta$，并且 $X \subseteq T_{\alpha'}$ 对 α 具有唯一下降。我们称 $X \restriction \alpha$ 与 X 是 $((p, q)\ A)$-相容的，如果对所有 $\gamma \in A$，

$$p \restriction \gamma \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}X \restriction \alpha \text{ and } X \text{ are } q(\gamma)\text{-consistent”}.$$

我们只需称 $X \restriction \alpha$ 和 X 是（q，A）-相容的，当且仅当它们是（（$1_{\mathbb{P}}$，q） A）-相容的。

与定义 2.16类似，我们同样定义p，$q)$ A)-一致性的概念，其中$\vec{x} \restriction \alpha$ 和 $\vec{x}$，这里 $\vec{x}$ 是来自 $T_{\alpha'}$ 的一个单射元组，且其到 α具有唯一下降。

定义 3.4（Mitchell 化分离）。 假设 $(p,\ q) \in \mathbb{M}$, $A \subseteq \mathrm{dom}(q)$ 是有限的，$\alpha \leq \beta = \mathrm{top}(q)$，$0 < n < \omega$，且 $\vec{x}$ 是来自 T_α 的一个单射 n-元组。

- 我们称 p 决定 q 关于$(A,\ \vec{x})$，如果对于所有 $\gamma \in A$ 和 $m < n$，$p \restriction \gamma$ 决定 $q($$\gamma)(x_m)$ 和 $q(\gamma)^{-1}(x_m)$ 的值，记作 $g_\gamma(x_m)$ 和 $g_\gamma^{-1}(x_m)$。
- 我们称 (p, q) 在 $\vec{x}$ 上是 A-分离的，如果– p 在 $(A, \vec{x})$ 上决定 q，其中 g_γ (x_m) 和 $g_\gamma^{-1}(x_m)$ 满足上一点中的条件；– 对于所有 $\gamma \in A$ 和 $m < n$，$g_\gamma($$x_m) \neq x_m$；并且– 对于所有 $m < n$，至多存在一个三元组 (k, j, γ)，使得 $k < m$、$j \in \{-1, 1\}$、$\gamma \in A$，且 $g_\gamma^j(x_m) = x_k$。

- 我们称 q 在 $\vec{x}$ -分离的之下 p，如果对于所有 $p' \leq p$，若 p' 在 $(A, \vec{x})$ 上决定 q，则 (p', q) 在 $\vec{x}$ 上是 A- 分离的。简而言之，如果 q 在 $\vec{x}$ 上 - 分离的，即它在 $\vec{x}$ - 分离的之下 $1_{\mathbb{P}}$，我们就称 q 在 $\vec{x}$ 上是 A。

若 X 是 T_α 的有限子集，我们称 p 在 (A, X) 上决定 q，如果存在（等价地，对任意）X 的枚举 $\vec{x}$，使得 p 在 $(A, \vec{x})$ 上决定 q；我们称 (p, q) 在 X 上是 A-分离的，如果存在 X 的一个枚举 $\vec{x}$，使得 (p, q) 是 A-分离的

在 $\vec{x}$ 上。若对于所有 $p' \leq p$，只要 p' 在 (A, X) 上决定 q，那么 (p', q) 就在 X 上是 A-分离的，我们称 q 在 p 以下、 X 上是 A-分离的。

注意，若 $(p', q') \leq_{\mathbb{M}} (p, q)$，且对 A 与 $\vec{x}$ 的某个适当选取，(p, q) 在 $\vec{x}$ 上是 A-分离的，则 (p', q') 在 $\vec{x}$ 上也是 A-分离的。类似地，若 q 在 p 之下于 $\vec{x}$ 上是 A-分离的，则 q' 在 p' 之下于 $\vec{x}$ 上是 A- 分离的。下述命题是这些定义与命题 2.19 的直接推论。

命题 3.5（Mitchell 化持续性）**.** 假设

- $(p, q) \in \mathbb{M}$ 且具有$\mathrm{top}(q) = \beta$;
- $\alpha < \alpha' \leq \beta$;
- $A \in [\mathrm{dom}(q)]^{<\omega}$ 且 $X \in [T_{\alpha'}]^{<\omega}$ 对 α具有唯一下降。

如果 q 在 p之下的 $X \restriction \alpha$ 上是 A-分离的，那么 q 在 p之下的 X 上也是 A-分离的。 □

3.2. **技术引理**。 在本小节中，我们给出若干关于在 $\mathbb{M}$ 中构造具有某些所需性质的条件的技术引理。由于这些引理主要是为了最终用于定理 A 的证明，读者在初次阅读时不妨跳过本小节，待后续小节引用相关引理时再返回阅读。

引理 3.6. 假设

- $q \in \mathbb{Q}$，且 顶部$(q) = \alpha$;
- X 是 $T_{\alpha+1}$ 的一个有限子集，且对 α具有唯一下降;
- $A \in [\mathrm{dom}(q)]^{<\omega}$ 且 $\delta \in \kappa \setminus A$;
- q 在 $X \restriction \alpha$ 上是 A-分离的。

那么存在 $q' \leq_{\mathbb{Q}} q$ 使得

(1) $\mathrm{top}(q') = \alpha + 1$; *(2)* $\delta \in \mathrm{dom}(q')$;

(3) $X \restriction \alpha$ 和 X 是 (q', A)-相容的;

(4) q' 在 X 上是 $(A \cup \{\delta\})$-分离的。

证明。 首先注意，我们可以假设 $\delta \in \mathrm{dom}(q)$，否则我们先将 q 扩展为条件 $q^* \leq_{\mathbb{Q}} q$，其定义为令 $\mathrm{dom}(q^*) = \mathrm{dom}(q) \cup \{\delta\}$，并令 $\mathrm{dom}(q) = q$，再令 $q^*(\delta)$ 是 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\alpha})$ 中某个元素的任意 $\mathbb{P}_\delta$-名称。现在令 $q' \leq_{\mathbb{Q}} q$ 满足

- $\mathrm{dom}(q') = \mathrm{dom}(q)$;
- 对所有 $\gamma \in A$， $q'(\gamma)$ 是一个 $\mathbb{P}_\gamma$-名称，表示 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\alpha+1})$ 中一个延拓$q(\gamma)$ 的元素，使得$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}$ “$X \restriction \alpha$ 与 X 是 $q'(\gamma)$-相容的”（这可由引理 2.22 应用于 $V[\mathbb{P}_\gamma]$得到）；

- $q'(\delta)$ 是一个 $\mathbb{P}_\gamma$-名称，表示 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\alpha+1})$ 中一个延拓 $q(\delta)$ 的元素，使得对所有 $x \in X$，我们都有（这可由命题2.17得到）；
$$\Vdash_{\mathbb{P}_\delta} \text{“}q'(\delta)(x) \notin X\text{.”}$$

- 对于 $\gamma \in \mathrm{dom}(q) \setminus (A \cup \{\delta\})$， $q'(\gamma)$ 是一个任意的 $\mathbb{P}_\gamma$-名称，表示 $\mathrm{Aut}(T_{\leq\alpha+1})$ 中一个延拓 $q(\gamma)$ 的元素。

然后 q' 如所需，条件 (4) 由命题3.5 与对 $q'(\delta)$ 的选择共同推出。□

引理 3.7（Mitchell 化关键性质）。设

- $(p,\ q) \in \mathbb{M}$ 其顶点为 $\mathrm{top}(q) = \alpha$;
- $0 < n < \omega$ 且 $\vec{x}$ 是来自 T_α 的一个单射 n-元组;
- $A \in [\mathrm{dom}(q)]^{<\omega}$;
- (p, q) 在 $\vec{x}$ 上是 A-分离的;
- $(p', q') \leq (p, q)$ 且 $\mathrm{top}(q') = \beta$;
- $t \in [T_\beta]^{<\omega}$。

那么存在 $p'' \leq_{\mathbb{P}} p'$，以及一个来自 $T_\beta \setminus t$ 的 n-元组 $\vec{y}$，使得 $\vec{y} \in T_{\vec{x}}$，并且满足 $\vec{x}$，且 $\vec{y}$ 是$((p'', q')\ A)$-相容的。

证明。若 $\beta = \alpha$，则无事可证，因此假设 $\beta > \alpha$。令 G 为在 V 上关于 $p' \in G$ 的 $\mathbb{P}$-泛型。对于所有 $\gamma \in A$，令 g_γ 为 $q'(\gamma)$ 在 $V[G]$ 中的赋值。那么 $\mathcal{G} = \{g_\gamma \mid \gamma \in A\}$ 是 $T_{\leq\beta+1}$ 的一个有限加标自同构集，并且 $\mathcal{G}$ 在 $\vec{x}$ 上是分离的。根据引理 2.20，我们可以找到一个来自 $T_\beta \setminus t$ 的 n-元组 $\vec{y}$，使得 $\vec{y} \in T_{\vec{x}}$，并且对于所有 $\gamma \in A$，$\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 是 g_γ-相容的。于是我们可以找到 $p'' \in G$，使得 $p'' \leq_{\mathbb{P}} p'$，并且对于所有 $\gamma \in A$，

$$p'' \restriction \gamma \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}\vec{x} \text{ and } \vec{y} \text{ are } q'(\gamma)\text{-consistent”}.$$

现在，p'' 和 $\vec{y}$ 正如所需。 □

引理 3.8（Mitchell 化的 1-Key 性质）。假设

- $(p,\ q) \in \mathbb{M}$ 具有 $\mathrm{top}(q) = \alpha$;
- $0 < n < \omega$ 且 $\vec{x}$ 是来自 T_α 的单射 n-元组;
- $A \in [\mathrm{dom}(q)]^{<\omega}$;
- $(p,\ q)$ 在 $\vec{x}$ 上是 A-分离的;
- $(p',\ q') \leq (p,\ q)$ 具有 $\mathrm{top}(q') = \beta$;
- $m < n$、$y^* \in T_\beta$和 $x_m <_T y^*$。

那么存在 $p'' \leq_{\mathbb{P}} p'$ 以及来自 T_β 的一个 n元组 $\vec{y}$，使得 $y_m = y^*$ 且 $\vec{y} \in T_{\vec{x}}$，并且 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 是$((p'', q')\ A)$相容的。

证明。这可完全按照引理 3.7 的方法证明，使用引理 2.21 替代引理 2.20。 □

引理 3.9。假设

- $\delta < \kappa$ 和 $\alpha < \omega_1$;
- $(p_0,\ q_0)$，$(p_1,\ q_1) \in \mathbb{M}$ 满足 – $\mathrm{top}(q_0) = \mathrm{top}(q_1) = \alpha$; – $\mathrm{dom}(q_0) = \mathrm{dom}(q_1)$; –$(p_0,\ q_0) \restriction \delta = (p_1,\ q_1) \restriction \delta$;
- $X \in [T_{\alpha+1}]^{<\omega}$ 和 $y \in T_{\alpha+1}$ 满足 $X \cup \{y\}$ 到 α具有唯一下降;
- $A \in [\mathrm{dom}(q_0)]^{<\omega}$，并且 (p_0, q_0) 和 (p_1, q_1) 在 $X \restriction \alpha$上都是 A-分离的。

那么存在 $(\hat{}p_0, \hat{}q_0)$,$(\hat{}p_1, \hat{}q_1) \in \mathbb{M}$ 和 $Y \in [T_{\alpha+1}]^{<\omega}$，使得

- $X \cup \{y\} \subseteq Y$;
- 对于每个 $i < 2$，我们有 – $(\hat{}p_i, \hat{}q_i) \leq (p_i, q_i)$; – $\mathrm{top}(\hat{}q_i) = \alpha + 1$; – $\mathrm{dom}(\hat{}q_i) = \mathrm{dom}(q_i)$; – $(\hat{}p_i, \hat{}q_i)$ 在 Y 上是 A-分离的; – $X \restriction \alpha$ 和 X 是$((\hat{}p_i, \hat{}q_i)\ A)$-相容的;

$$- \text{ for all } \gamma \in A,\ x \in X \cup \{y\},\ \text{and } j \in \{-1,1\},$$
$$\hat{p}_i \restriction \gamma \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}\hat{q}_i(\gamma)^j(x) \in Y\text{”};$$

- $(\hat{p}_0, \hat{q}_0) \restriction \delta = (\hat{p}_1, \hat{q}_1) \restriction \delta$.

证明。如有必要，可以扩展 p_0 （并相应地扩展 $p_1 \restriction \delta$，以保持 $p_0 \restriction \delta = p_1 \restriction \delta$这一事实），从而可以假设 p_0 在 $(A,\ \{y \restriction \alpha\})$ 上决定 q_0。类似地，可以假设 p_1 在 $(A,\ \{y \restriction \alpha\})$ 上决定 q_1。对于每个 $i < 2$、$\gamma \in A$、$x \in X \cup \{y\}$ 和 $j \in \{-1,1\}$，令 $z^j_{i,\gamma,x} \in T_\alpha$ 满足

$$p_i \restriction \gamma \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}q_i(\gamma)^j(x \restriction \alpha) = z^j_{i,\gamma,x}\text{”}.$$

注意，如果 $\gamma \in A \cap \delta$、$x \in X \cup \{y\}$ 和 $j \in \{-1,1\}$，那么 $z^j_{0,\gamma,x} = z^j_{1,\gamma,x}$。令$W_0$为所有满足 $z^j_{i,\gamma,x} \in X \restriction \alpha$ 的 $(i,\ \gamma,\ x,\ j) \in 2 \times A \times X \times \{-1,1\}$ 的集合，并令 $W_1 = (2 \times A \times (X \cup \{y\}) \times \{-1,1\}) \setminus W_0$。对于每个 $(i,\ \gamma,\ x,\ j) \in W_1$，选择 $\hat{}z^j_{i,\gamma,x} \in T_{\alpha+1}$，使得

- $\hat{}z^j_{i,\gamma,x} \restriction \alpha = z^j_{i,\gamma,x}$;
- $\hat{}z^j_{i,\gamma,x} \notin X \cup \{y\}$;
- 若 $(0,\ \gamma,\ x,\ j) \in W_1$ 且 $\gamma < \delta$，则 $\hat{}z^j_{0,\gamma,x} = \hat{}z^j_{1,\gamma,x}$（注意，该假设也蕴含 $(1,\ \gamma,\ x,\ j) \in W_1$）；
- 若 $(i,\ \gamma,\ x,\ j)$ 和 $(i',\ \gamma',\ x',\ j')$ 是 W_1 中的不同元素，且满足 $(\gamma,\ x,\ j) \neq (\gamma',\ x',\ j')$ 或 $\gamma \geq \delta$（即，这一对不属于前一条项目的适用范围），则 $\hat{}z^j_{i,\gamma,x} \neq \hat{}z^{j'}_{i',\gamma',x'}$。

令 $Y = X \cup \{y\} \cup \{\hat{}z^j_{i,\gamma,x} \mid (i,\ \gamma,\ x,\ j) \in W_1\}$。对于每个 $\gamma \in A$ 和 $i < 2$，令 $\hat{}q_i(\gamma)$ 为一个 $\mathbb{P}_\gamma$-名称，表示 $\mathrm{Aut}(T_{\leq \alpha+1})$ 的一个元素；$p_i \restriction \gamma$ 力迫该元素具有以下性质，并附加要求：若 $\gamma \in A \cap \delta$，则 $\hat{}q_0(\gamma) = \hat{}q_1(\gamma)$：

- $\hat{}q_i(\gamma) \supseteq q_i(\gamma)$;
- $X \restriction \alpha$ 且 X 是 $\hat{}q_i(\gamma)$-相容的;
- 对于所有满足 $(i,\ \gamma,\ x,\ j) \in W_1$ 的 $(x,\ j) \in (X \cup \{y\}) \times \{-1,1\}$，我们有$-\ \hat{}q_i(\gamma)^j(x) = \hat{}z^j_{i,\gamma,x}$；$-\ \hat{}q_i(\gamma)^j(\hat{}z^j_{i,\gamma,x}) \notin Y$；
- 对于所有满足 $(i',\ \gamma') \neq (i,\ \gamma)$ 且不成立的 $(i',\ \gamma',\ x',\ j') \in W_1$（即 $\hat{}z^{j'}_{i',\gamma',x'}$ 不在前一个要点的适用范围内），并且对于所有 $j \in \{-1,1\}$，我们有 $\hat{}q_i(\gamma)^j(\hat{}z^{j'}_{i',\gamma',x'}) \notin Y$。

根据命题 2.15，可以找到这样的 $\hat{}q_i(\gamma)$。对于所有 $i < 2$ 和 $\gamma \in \mathrm{dom}(q_i) \setminus A$，令 $\hat{}q_i(\gamma)$ 为一个任意的 $\mathbb{P}_\gamma$-名称，它表示一个将 $q_i(\gamma)$ 扩展到 $\mathrm{Aut}(T_{\leq \alpha+1})$ 中某个元素的自同构，并再次要求对所有 $\gamma \in \mathrm{dom}(q_i) \cap \delta$，$\hat{}q_0(\gamma) = \hat{}q_1(\gamma)$。最后，对每个 $i < 2$，找出 $\hat{}p_i \leq_{\mathbb{P}} p_i$，使得

- $\hat{}p_i$ 决定 $\hat{}q_i$ 在 (A, Y) 上;
- $\hat{}p_0 \restriction \delta = \hat{}p_1 \restriction \delta$。

那么，$(\hat{}p_0,\ \hat{}q_0)$、$(\hat{}p_1,\ \hat{}q_1)$ 和 Y 都符合要求。例如，要证明 $(\hat{}p_0,\ \hat{}q_0)$ 在 Y 上是 A-分离的，首先令 $\vec{x}$ 为 X 的一个单射枚举，使得 $\vec{x} \restriction \alpha$ 见证了 $(p_0,\ q_0)$ 在 $X \restriction \alpha$ 上是 A-分离的；令 $\vec{z}$ 为 $Y \setminus (X \cup \{y\})$ 的任意一个单射枚举，并令 $\vec{y} = \vec{x} \frown \langle y \rangle \frown \vec{z}$。随后，构造和对 $\vec{x}$ 的选择便可轻易推出结论：$(\hat{}p_0,\ \hat{}q_0)$ 在 $\vec{y}$ 上是 A-分离的。□

3.3. **导出树的稠密子集**。 本小节包含两个关键引理，它们证明 T 的某些导出树子集是稠密的。第一个引理在最终证明 $\mathbb{M}$ 及其商具有 ω_1-逼近性质时发挥关键作用，而这将进一步导出如下结论：若 κ 是超紧的，则 GMP 在 $V[\mathbb{M}]$ 中成立。第二个引理在证明以下结论时发挥类似作用：若 T 是自由苏斯林树，则它在 $V[\mathbb{M}]$ 中仍是苏斯林树。

引理 3.10。假设

- $(p,\ q)\in\mathbb{M}$ 和 $\alpha=\mathrm{top}(q)$;
- $\delta<\kappa$;
- A 是$\mathrm{dom}(q)$的有限子集，$\vec{x}$ 是取自 T_α的有限序列，并且(p,q) 在 $\vec{x}$上是A-分离的；.
- λ 是一个基数，b 是 λ 的一个 $\mathbb{M}$-名称，且满足 $\Vdash_{\mathbb{M}} b\notin V[\mathbb{M}_\delta]$。

令 D 为所有满足以下条件的 $\vec{z}\in T_{\vec{x}}$ 所组成的集合：存在(p_0,q_0)、$(p_1,q_1)\in\mathbb{M}$ 和 $\varepsilon<\lambda$，使得

对于 $i<2$，• 满足：$-(p_i,q_i)\le(p,q)$；$-$ $\mathrm{top}(q_i)=\mathrm{ht}_T(\vec{z})$；$-$ $\vec{x}$和 $\vec{z}$是$((p_i,q_i)\ A)$-相容的；

- $(p_0,\ q_0)\restriction\delta=(p_1,\ q_1)\restriction\delta$; .
- $(p_0,q_0)\Vdash$“$\varepsilon\notin b$”和 $(p_1,q_1)\Vdash$“$\varepsilon\in b$”。

那么 D 是 $T_{\vec{x}}$的稠密开子集。

证明。 显然，D 是开集，这直接由其定义可知。为证明 D是稠密的，任取 $\vec{y}\in T_{\vec{x}}$，并令 $\alpha'=\mathrm{ht}_T(\vec{y})$。我们将找到 $\vec{z}\in D\cap T_{\vec{y}}$。反复应用扩张（引理 2.22），可找到 q' 使得

- $(p,q')\le_{\mathbb{M}}(p,q)$;
- 顶端$(q')=\alpha'$;
- $\vec{x}$ 且 $\vec{y}$是$((p,\ q')\ A)$-相容的。

由于 $\Vdash_{\mathbb{M}}$“$b\notin V[\mathbb{M}_\delta]$”，我们可以找到$(p_0',\ q_0')$，$(p_1',\ q_1')\le_{\mathbb{M}}(p,\ q')$以及 $\varepsilon<\lambda$ 使得

(1) $(p_0',\ q_0')\restriction\delta=(p_1',\ q_1')\restriction\delta$;

(2) $(p_0',\ q_0')\Vdash_{\mathbb{M}}$“$\varepsilon\notin b$”; (3) $(p_1',\ q_1')\Vdash_{\mathbb{M}}$“$\varepsilon\in b$”。

如有必要，通过延拓这些条件，我们可以假定存在一个可数序数 $\beta>\alpha'$，使得 $\mathrm{top}(q_0')=\mathrm{top}(q_1')=\beta$。如有必要，通过延拓 p_0'（并相应地延拓 $p_1'\restriction\delta$，以确保上述第 (1) 项），并应用 Mitchell 化关键性质（引理 3.7），我们可以取定 $\vec{y}_0\in T_{\vec{y}}$，使得 $\mathrm{ht}_T(\vec{y}_0)=\beta$，并且使得 $\vec{y}$ 与 $\vec{y}_0$ 是 $((p_0',q_0')\ A)$-相容的。令 $\vec{y}_{00}=\vec{y}_0\restriction(\alpha'+1)$。如有必要，通过延拓 p_1'（以及 $p_0'\restriction\delta$），并应用 Mitchell 化关键性质，我们可以取定 $\vec{y}_{10}\in T_{\vec{y}}$，使得

- $\mathrm{ht}_T(\vec{y}_{10})=\alpha'+1$;
- $\vec{y}_{00}$ 和 $\vec{y}_{10}$ 没有共同的元素;
- $\vec{y}$和 $\vec{y}_{10}$是 $((p_1',\ q_1')\ A)$-相容的。

由与上文相同的推理，我们可以固定 $\vec{y}_1\in T_{\vec{y}_{10}}$，使得 $\mathrm{ht}_T(\vec{y}_1)=\beta$，并且使 $\vec{y}_{10}$ 和 $\vec{y}_1$ 是 $((p_1',\ q_1')\ A)$- 相容的。

现在反复应用引理 2.23，随后应用扩张（引理 2.22），以找到 $(p_2',\ q_2')\le_{\mathbb{M}}(p,\ q')$，使得

- $\mathrm{ht}(q_2') = \beta$;
- $(p_2', \ q_2') \restriction \delta = (p_0', \ q_0') \restriction \delta$;
- 对每个 $i < 2$, $\vec{y}$ 和 $\vec{y}_i$ 都是 $((p_2', q_2') \ A)$-相容的。

现在寻找 $(p_2, q_2) \leq_{\mathbb{M}} (p_2', q_2')$ 来判定“$\varepsilon \in b$”的真值。为明确起见，假设 $(p_2, q_2) \Vdash_{\mathbb{M}}$“$\varepsilon \in b$”；另一种情形是对称的，在下述论证中由 (p_1', q_1') 扮演 (p_0', q_0') 的角色。令 $\beta^* = \mathrm{top}(q_2)$。应用 Mitchell 化关键性质，并在必要时扩张 p_2，我们可以固定 $\vec{z} \in T_{\vec{y}_0}$，使得 $\mathrm{ht}_T(\vec{z}) = \beta^*$，且 $\vec{y}_0$ 和 $\vec{z}$ 是 $((p_2, q_2) \ A)$-相容的。最后，反复应用扩张，找到 $(p_0, q_0) \leq_{\mathbb{M}} (p_0', q_0')$，使得

- 顶端$(q_0) = \beta^*$;
- $(p_0, \ q_0) \restriction \delta = (p_2, \ q_2) \restriction \delta$;
- $\vec{y}_0$ 和 $\vec{z}$ 是 $((p_0, \ q_0) \ A)$-相容的。

那么 $\vec{z} \in D$，其见证为 $(p_0, \ q_0)$、$(p_2, \ q_2)$ 和 ε。 □

引理 3.11。假设

- $(p, \ q) \in \mathbb{M}$ 和 $\alpha = \mathrm{top}(q)$;
- A 是$\mathrm{dom}(q)$的有限子集，$\vec{x}$ 是来自 T_α 的某个$0 < n < \omega$的单射 n-元组，并且$(p$、$q)$ 在 $\vec{x}$上是 A-分离的；.
- $m < n$，且 E 是 T的一个稠密开子集的 $\mathbb{M}$-名称。

设 D 为所有满足下述条件的 $\vec{z} \in T_{\vec{x}}$ 所构成的集合：存在$(p^*$、$q^*) \leq_{\mathbb{M}} (p$、$q)$ 使得

- $\mathrm{top}(q^*) =$ 高度$_T(\vec{z})$；.
- $(p^*, \ q^*) \Vdash_{\mathbb{M}}$“$z_m \in E$”;
- $\vec{x}$和 $\vec{z}$是$((p^*$、$q^*) \ A)$-相容的。

那么 D 是 $T_{\vec{x}}$的一个稠密开子集。

证明。由定义可知，D 是开集。为证明D 是稠密的，固定 $\vec{y} \in T_{\vec{x}}$，并令 $\alpha' = \mathrm{ht}_T(\vec{y})$。完全按照引理 3.10 的证明固定 q'。找到 $p' \leq_{\mathbb{P}} p$，使得 p' 在$(A, \vec{y})$上决定 q'。注意，由于(p, q)在 $\vec{x}$上是 A-分离的，根据 Mitchell 化持续性（命题 3.5），(p', q')在 $\vec{y}$上也是 A-分离的。现在找到$(p'', q'') \leq_{\mathbb{M}} (p', q')$和 $t \in T$，使得. $y_m \leq_T t$，且$(p'', q'') \Vdash_{\mathbb{M}}$“$t \in E$”。如有必要，可加强 q''，从而假设满足 $\mathrm{top}(q'') \geq \mathrm{ht}(t)$。又由于 E 被力迫为开集，我们可以延伸 t，假设实际上有 $\mathrm{top}(q'') = \mathrm{ht}(t)$；记此高度为 β。现在应用 Mitchell 化的 1-Key 性质（引理 3.8），找到 $p^* \leq_{\mathbb{P}} p''$ 和一个来自T_β 的 n-元组 $\vec{z}$，使得 $z_m = t$ 和 $\vec{z} \in T_{\vec{y}}$成立，并且 $\vec{y}$ 和 $\vec{z}$ 是 $((p^*, q'') \ A)$-相容的。于是 $\vec{z} \in D$，其见证为(p^*, q'')。□

3.4. 逼近与定理 A 的证明。本小节终于给出定理 A 的证明。我们先回顾强迫偏序集满足 μ-逼近性质的含义。

定义 3.12。设 μ 是一个不可数基数，且 $V \subseteq W$ 是两个 ZFC 模型。我们称 (V, W) 具有 μ-逼近性质，如果每当 $x \in W$ 是一个序数集，且对于所有 $z \in ([\mathrm{On}]^{<\mu})^V$ 都有 $x \cap z \in V$ 时，便可推出 $x \in V$。在 ZFC 模型 V 中工作时，我们称强迫偏序集 $\mathbb{R}$ 具有 μ-逼近性质，如果 $1_{\mathbb{R}}$ 强迫 $(V, V[\mathbb{R}])$ 具有 μ-逼近性质。

我们首先给出以下预备结果，以确立由 $\mathbb{M}$ 得到的强迫扩张的关键性质。下文中，我们令 G 为泛型滤子的典范 $\mathbb{M}$-名称

。对于所有 $\delta < \kappa$，令 G_δ 为由 G 诱导的 $\mathbb{M}_\delta$ 上泛型滤子的典范名称。令 $\mathbb{M}_{\delta,\kappa}$ 为商强迫 $\mathbb{M}/G_\delta$ 的典范 $\mathbb{M}_\delta$-名称。

定理 3.13. 假设 T 是 V中的一棵自由苏斯林树。则

(1) 对所有极限序数 $\delta < \kappa$ （包括 $\delta = 0$），

$$\Vdash_{\mathbb{M}_\delta} \text{“}\mathbb{M}_{\delta,\kappa} \text{ 具有 } \omega_1\text{-逼近性质”};$$

(2) $\Vdash_{\mathbb{M}}$“T 是苏斯林的”。

证明。 我们将着手同时证明这两个陈述。固定一个条件 $p, q \in \mathbb{M}$，一个极限序数 $\delta < \kappa$，一个基数 λ，以及一个 $\mathbb{M}$-名称 b，使得

$$(p, q) \Vdash_{\mathbb{M}} \text{“}\dot{b} \subseteq \lambda \wedge \dot{b} \notin V[\dot{G}_\delta]\text{”},$$

以及一个 $\mathbb{M}$-名称 E，使得

$$(p, q) \Vdash_{\mathbb{M}} \text{“}\dot{E} \text{ is a dense open subset of } T\text{”}.$$

为简化记号，不失一般性地假设 $p = 1_{\mathbb{P}}$ （一般情形下，只需在 $\mathbb{P}$ 中的 p 以下进行讨论）。固定一个充分大的正则基数 θ、 $H(\theta)$的一个良序 $\lhd$，以及一个包含所有相关对象（包括 q、 b 和 E）的可数初等子模型 $N \prec (H(\theta) \in, \lhd)$ 。令 $\beta = N \cap \omega_1$。我们将找到 $q^* \leq_{\mathbb{Q}} q$，使得

- $(1_{\mathbb{P}}, q^*) \Vdash_{\mathbb{M}} \text{“}\dot{b} \cap N \notin V[\dot{G}_\delta]\text{”}$;
- $(1_{\mathbb{P}}, q^*) \Vdash_{\mathbb{M}} \text{“}T_\beta \subseteq \dot{E}\text{”}$.

这显然足以证明该定理。

令 $\mathbb{P}_N$ 表示 $\mathbb{P} \cap N$。令 $\langle x_n \mid n < \omega \rangle$ 枚举 T_β，令 $\langle \gamma_n \mid n < \omega \rangle$ 枚举$\kappa \cap N$，令 $\langle \beta_n \mid n < \omega \rangle$ 为一个在 β 中共尾的递增序数序列，并令$\langle p_n \mid n < \omega \rangle$ 枚举 $\mathbb{P}_N$，使得 $\mathbb{P}_N$ 的每个元素都对无穷多个 $n < \omega$等于 p_n。对于所有 $n < \omega$，令 $A_n = \{\gamma_m \mid m \leq n\}$。

我们现在将递归构造对象 $\langle q_n, \hat{}p_{n,0}, \hat{}p_{n,1}, X_n, \varepsilon_n \mid n < \omega \rangle$，使其满足以下要求：

(1) $\langle q_n \mid n < \omega \rangle$ 是来自 $\mathbb{Q} \cap N$ 的 $\leq_{\mathbb{Q}}$-递减条件序列，且带有$q_0 \leq_{\mathbb{Q}} q$；(2) 对所有 $n < \omega$，我们有 $A_n \subseteq \mathsf{dom}(q_n)$以及$\mathsf{top}(q_n) \geq \beta_n$；(3) 对所有 $n < \omega$，$\hat{}p_{n,0}$ 与$\hat{}p_{n,1}$ 是 $\mathbb{P}_N$ 的元素，使得$\hat{}p_{n,0}, \hat{}p_{n,1} \leq_{\mathbb{P}} p_n$且$\hat{}p_{n,0} \restriction \delta = \hat{}p_{n,1} \restriction \delta$；(4) 对所有 $m < n < \omega$ 与 $i < 2$,

$$(\hat{p}_{n,i}, q_n) \Vdash_{\mathbb{M}} \text{“}x_m \restriction \mathsf{top}(q_n) \in \dot{E}\text{”};$$

(5) 对所有 $n < \omega$， ε_n 是 $N \cap \lambda$ 的一个元素，使得$(\hat{}p_{n,0}, q_n) \Vdash_{\mathbb{M}}$“$\varepsilon_n \notin b$”且$(\hat{}p_{n,1}, q_n) \Vdash_{\mathbb{M}}$“$\varepsilon_n \in b$”;

(6) 对所有 $n < \omega$， X_n 都是 T_β 的有限子集，使得

(a) $\{x_m \mid m \leq n\} \subseteq X_n \subseteq X_{n+1}$; (b) X_n 到 $\mathsf{top}(q_n)$有唯一下降；(c) 对每个 $i < 2$，$\hat{}p_{n,i}$ 在 $(A_n, X_n \restriction \mathsf{top}(q_n))$ 上决定 q_n；(d) 对每个 $i < 2$、$\gamma \in A_n$、 $m \leq n$和 $j \in \{-1, 1\}$，都存在 $y \in X_n$ 使得

$$\hat{p}_{n,i} \Vdash_{\mathbb{P}} \text{“}q_n(\gamma)^j(x_m \restriction \mathsf{top}(q_n)) = y \restriction \mathsf{top}(q_n)\text{”};$$

(7) 对所有 $n<\omega$， q_n 在 $X_n\restriction \mathrm{top}(q_n)$ 上是 A_n-分离的；( ) f

8 或对所有 $n<\omega, X_n\restriction$ 拓扑 (q_n) 以及 $X_n\restriction$拓扑 (q_{n+1}) are $(q_{n+}{}^{1,\ A_n})$-相容。

为方便记号，令 $q_{-1}=q$ 且 $X_{-1}=\emptyset$。固定 $-1\leq n<\omega$ 并假设我们已经构造了 q_n 和 X_n。首先，在 N 中应用引理3.6 以找到$q^*_{n+1}\leq_{\mathbb{Q}} q_n$ 使得

- $q^*_{n+1}\in N$;
- $\mathrm{top}(q^*_{n+1})=\mathrm{top}(q_n)+1$;
- $A_{n+1}\subseteq\mathrm{dom}(q^*_{n+1})$;
- q^*_{n+1} 在 $X_n\restriction\mathrm{top}(q^*_{n+1})$ 上是 A_{n+1}-分离的;
- 对所有 $\gamma\in A_n$， $X_n\restriction\mathrm{top}(q_n)$ 和 $X_n\restriction\mathrm{top}(q^*_{n+1})$ 都是（q^*_{n+1}， A_n）-相容的。

取 $p^*_{n+1}\leq_{\mathbb{P}} p_{n+1}$，使得 $p^*_{n+1}\in N$，并取 X_n 的一个单射枚举 $x^{\vec{n}}$，满足 (p^*_{n+1}, q^*_{n+1}) 在 $x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(q^*_{n+1})$ 上是 A_{n+1}-分离的。

断言 *3.14*。取 $0\leq m\leq n$ 和 $(\bar{p},\bar{q})\leq_{\mathbb{M}}(p^*_{n+1},q^*_{n+1})$，使得 $(\bar{p},\bar{q})\in N$, $\bar{p}$ 在 $(A_{n+1}, x^{\vec{n}}\restriction \mathit{top}(\bar{q}))$ 上决定 $\bar{q}$，并且 $x^{\vec{n}}\restriction \mathit{top}(q^*_{n+1})$ 和 $x^{\vec{n}}\restriction \mathit{top}(\bar{q})$ 是 $((\bar{p},\bar{q})\ A_{n+1})$-相容的。那么存在 $(\bar{p},\bar{q})\leq_{\mathbb{M}}(\bar{p},\bar{q})$，使得

- $(\bar{p},\ \bar{q})\in N$; .
- $(\bar{p},\bar{q})\Vdash_{\mathbb{M}}$“$x_m\restriction$顶端$(\bar{q})\in E$”;
- $\vec{x}\restriction\mathrm{top}(\bar{q})$ 且 $\vec{x}\restriction\mathrm{top}(\bar{q})$ 是$((\bar{p},\bar{q})\ A_{n+1})$-相容的。

证明。固定 $m^*<\omega$ 使得 $x_m=x^n_{m^*}$。令 D 为所有 $\vec{z}\in T_{x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(\bar{q})}$ 的集合，其中存在 $(\bar{p},\ \bar{q})\leq_{\mathbb{M}}(\bar{p},\ \bar{q})$ 使得

- 顶端$(\bar{q})=$高度$_T(\vec{z})$;.
- $(\bar{p},\bar{q})\Vdash_{\mathbb{M}}$“$z_{m^*}\in E$”;
- $\vec{x}\restriction\mathrm{top}(\bar{q})$ 和 $\vec{z}$ 是 $((\bar{p},\ \bar{q})\ A_{n+1})$-相容的。

由引理 3.11， D 是 $T_{x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{ht}(\bar{q})}$ 的一个稠密开子集。由于 T 是一棵自由苏斯林树，存在 $\eta<\omega_1$，使得每个高度至少为 η 的 $\vec{z}\in T_{x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{ht}(\bar{q})}$ 都属于 D。由于$D\in N$，最小的此类 η 属于 N，因此小于 β。特别地，存在某个 $\eta^*\in[\mathrm{top}(\bar{q})\ \beta)$，使得 $x^{\vec{n}}\restriction\eta^*\in D$。那么，任何条件 $(\bar{p},\ \bar{q})\in N$ 若能证明 $x^{\vec{n}}\restriction\eta^*\in D$，就能证明该断言的结论。□

反复应用命题 3.14，取一个条件（$\bar{p}_{n+1}$， $\bar{q}_{n+1}$）$\leq_{\mathbb{M}}$（p^*_{n+1}， q^*_{n+1}），使得

- （$\bar{p}_{n+1}$， $\bar{q}_{n+1}$）$\in N$;
- $\bar{p}_{n+1}$ 在（A_{n+1}， $x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1})$上决定 $\bar{q}_{n+1}$；
- $x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(q^*_{n+1})$ 和 $x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1})$ 是（（$\bar{p}_{n+1}$， $\bar{q}_{n+1}$） A_{n+1}）-相容的; .
- 对于所有 $m\leq n$，我们有（$\bar{p}_{n+1}$， $\bar{q}_{n+1}$）$\Vdash_{\mathbb{M}}$“$x_m\restriction\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1})\in E$”。

现在令 D' 为所有 $\vec{z}\in T_{x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1})}$ 的集合，其中存在 $(\bar{p}_{n+1,0},\bar{q}_{n+1,0})$ 和 $(\bar{p}_{n+1,1},\bar{q}_{n+1,1})$ 属于 $\mathbb{M}$ 和 $\varepsilon<\lambda$，使得

- 对每个 $i<2$，都有 $(\bar{p}_{n+1,i},\bar{q}_{n+1,i})\leq_{\mathbb{M}}(\bar{p}_{n+1},\bar{q}_{n+1})$;
- $\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1,\ 0})=\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1,\ 1})=\mathrm{ht}_T(\vec{z})$;
- $(\bar{p}_{n+1,\ 0},\ \bar{q}_{n+1,\ 0})\restriction\delta=(\bar{p}_{n+1,\ 1},\ \bar{q}_{n+1,\ 1})\restriction\delta$;
- 对于每个 $i<2, x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1})$ 和 $\vec{z}$ 都是 $((\bar{p}_{n+1,\ i},\ \bar{q}_{n+1,\ i})\ A_{n+1})$-相容的; .
- $(\bar{p}_{n+1,\ 0},\ \bar{q}_{n+1,\ 0})\Vdash_{\mathbb{M}}$“$\varepsilon\notin b$”以及 $(\bar{p}_{n+1,\ 1},\ \bar{q}_{n+1,\ 1})\Vdash_{\mathbb{M}}$“$\varepsilon\in b$”。

由引理 3.10， D' 是 $T_{x^{\vec{n}}\restriction\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1})}$ 的一个稠密开子集，且 $D'\in N$。因此，如同断言 3.14 的证明中那样，我们可以找到 $\alpha_{n+1}<\beta$ 使得

- $\alpha_{n+1}\geq\max\{\beta_{n+1},\mathrm{top}(\bar{q}_{n+1})\}$;

- $X_n \cup \{x_{n+1}\}$ 到 α_{n+1}具有唯一下降;
- $x^{\vec{n}} \restriction \alpha_{n+1} \in D'$。

由于 D' 和 $x^{\vec{n}} \restriction \alpha_{n+1}$ 都在 N中，我们可以固定（$\bar{p}_{n+1,\ 0}$，$\bar{q}_{n+1,\ 0}$）、（$\bar{p}_{n+1,\ 1}$，$\bar{q}_{n+1,\ 1}$）以及ε_{n+1}，使其在 N 中见证 $x^{\vec{n}} \restriction \alpha_{n+1}$ 属于 D'。如有必要，通过延长条件，我们可以假设

- dom($\bar{q}_{n+1,\ 0}$) =dom($\bar{q}_{n+1,\ 1}$);
- $\delta \in$ dom($\bar{p}_{n+1,\ 0}$) ∩dom($\bar{p}_{n+1,\ 1}$) 和 $\bar{p}_{n+1,\ 0}(\delta) \perp \bar{p}_{n+1,\ 1}(\delta)$;
- 对于每个 $i < 2$, $\bar{p}_{n+1,i}$ 决定 $\bar{q}_{n+1,i}$ 在 $(A_{n+1}, X_n \cup \{x_{n+1}\})$ 上。

根据引理 3.9 应用于 N，我们可以找到 $(\hat{}p_{n+1,0}, \hat{}q_{n+1,0}), (\hat{}p_{n+1,1}, \hat{}q_{n+1,1}) \in \mathbb{M}$ 以及一个有限集 Y，它们都属于 N，使得令 $\alpha^*_{n+1} = \alpha_{n+1} + 1$ 后，以下条件成立:

- 对于每个 $i < 2$，都有 dom($\hat{}q_{n+1,i}$) = dom($\bar{q}_{n+1,i}$)，并且 $(\hat{}p_{n+1,i}, \hat{}q_{n+1,i}) \leq_{\mathbb{M}} (\bar{p}_{n+1,i}, \bar{q}_{n+1,i})$;
- 对于每个 $i < 2$，我们有 top($\hat{}q_{n+1,\ i}$) $= \alpha^*_{n+1}$;
- $(\hat{}p_{n+1,\ 0}, \hat{}q_{n+1,\ 0}) \restriction \delta = (\hat{}p_{n+1,\ 1}, \hat{}q_{n+1,\ 1}) \restriction \delta$;
- $(X_n \cup \{x_{n+1}\}) \restriction \alpha^*_{n+1} \subseteq Y \subseteq T_{\alpha^*_{n+1}}$;
- 对于每个 $i < 2$，$(\hat{}p_{n+1,\ i}, \hat{}q_{n+1,\ i})$ 在 Y 上是 A_{n+1}-分离的;
- 对于每个 $i < 2$，$X_n \restriction \alpha_{n+1}$ 和 $X_n \restriction \alpha^*_{n+1}$ 在 A_{n+1}上是 $(\hat{}p_{n+1,\ i}, \hat{}q_{n+1,\ i})$-相容的;
- 对于所有 $i < 2$、$\gamma \in A_{n+1}$、$m \leq n+1$ 和 $j \in \{-1, 1\}$，存在 $y \in Y$ 使得 $\hat{}p_{n+1,\ i} \restriction \gamma \Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}$ “$\hat{}q_{n+1,\ i}(\gamma)^j(x_m \restriction \alpha^*_{n+1}) = y$”。

对每个 $y \in Y \setminus \big((X_n \cup \{x_{n+1}\}) \restriction \alpha^*_{n+1}\big)$，选取一个 $z_y \in T_\beta$ 使得 $z_y \restriction \alpha^*_{n+1} = y$，并令

$$X_{n+1} = X_n \cup \{x_{n+1}\} \cup \left\{ z_y \;\middle|\; y \in Y \setminus \big((X_n \cup \{x_{n+1}\}) \restriction \alpha^*_{n+1}\big) \right\}.$$

接下来，在 N 中，固定 $r \in \mathbb{Q}$，使得 top(r) $= \alpha^*_{n+1}$，且 dom(r) = dom($\hat{}q_{n+1}$,0)，并满足 $r \leq_{\mathbb{Q}} q^*_{n+1}$, r 在 $X_{n+1} \restriction \alpha^*_{n+1}$上是 A_{n+1}-分离的，且 $X_n \restriction$top(q^*_{n+1}) 与 $X_n \restriction \alpha^*_{n+1}$ 是 (r, A_n)-相容的。为说明这样的 r 可以找到，先反复应用命题 2.17，找出 $r_0 \leq_{\mathbb{Q}} q^*_{n+1}$，使得 top($r_0$) $= \alpha_{n+1}$，dom(r_0) = dom($\hat{}q_{n+1}$,0)，且 $X_n \restriction$ top(q^*_{n+1}) 与 $X_n \restriction \alpha_{n+1}$ 是 (r_0, A_{n+1})-相容的。然后再次应用命题 2.17，找出 $r \leq_{\mathbb{Q}} r_0$，使得 top(r) $= \alpha^*_{n+1}$，dom(r) = dom(r_0)，并且对所有 $\gamma \in A_{n+1}$，都有:

- $\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}$ “$X_n \restriction \alpha_{n+1}$ 和 $X_n \restriction \alpha^*_{n+1}$ 是 $r(\gamma)$-相容的”;
- 对于所有 $y \in (X_{n+1} \setminus X_n) \restriction \alpha^*_{n+1}$ 以及所有 $j \in \{-1, 1\}$，我们都有 $\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}$ “$r(\gamma)^j(y) \notin X_{n+1} \restriction \alpha^*_{n+1}$。

那么，回想一下，q^*_{n+1}被选为在 $X_n \restriction$top(q^*_{n+1}) 上是 A_{n+1}-分离的，很容易看出这个 r 正是所需的。

最后，定义 $q_{n+1} \in \mathbb{Q}$，使得 top(q_{n+1}) 为 $= \alpha^*_{n+1}$，且 dom(q_{n+1}) 为 =dom($\hat{}q_{n+1,\ 0}$): 对于所有 $\gamma \in$dom($\hat{}q_{n+1,\ 0}$)，令 $q_{n+1}(\gamma)$ 为一个满足以下条件的 $\mathbb{P}_\gamma$-名称

- $\hat{}p_{n+1,\ 0} \restriction \gamma \Vdash$ “$q_{n+1}(\gamma) = \hat{}q_{n+1,\ 0}(\gamma)$”;
- $\hat{}p_{n+1,1} \restriction \gamma \Vdash$ “$q_{n+1}(\gamma) = \hat{}q_{n+1,1}(\gamma)$（注意，这与前一点并不矛盾，因为如果 $\hat{}q_{n+1,0}(\gamma) \neq \hat{}q_{n+1,1}(\gamma)$，那么 $\gamma > \delta$，因此 $\hat{}p_{n+1,0} \restriction \gamma \perp \hat{}p_{n+1,1} \restriction \gamma$）;
- 若 $p^* \in \mathbb{P}_\gamma$ 与 $\hat{}p_{n+1,0} \restriction \gamma$ 和 $\hat{}p_{n+1,1} \restriction \gamma$均不相容，则$p^* \Vdash$ “$q_{n+1}(\gamma) = r(\gamma)$”。

很容易验证，q_{n+1}、$\hat{}p_{n+1,\ 0}$、$\hat{}p_{n+1,\ 1}$、X_{n+1}和 ε_{n+1} 满足该构造的要求。

断言 3.15。 $\langle q_n \mid n<\omega\rangle$ 在 $\mathbb{Q}$ 中有一个下界。

证明。回顾，对于所有 $n<\omega$，都有 $\alpha^*_n = \mathrm{top}(q_n)$，且 $\langle \alpha^*_n \mid n<\omega\rangle$ 在β中是共尾的。另请注意，$\bigcup\{\mathrm{dom}(q_n) \mid n<\omega\} = N\cap\kappa$。对于每个 $\gamma\in N\cap\kappa$，令 n_γ 为满足 $\gamma\in\mathrm{dom}(q_n)$ 的最小 $n<\omega$。对于每个 $\gamma\in N\cap\kappa$，令 $q^-(\gamma)$ 为一个被力迫等于 $\bigcup\{q_n(\gamma)\mid n_\gamma\le n<\omega\}$ 的 $\mathbb{P}_\gamma$-名称。特别地，$q^-(\gamma)$ 被力迫成为 $T_{<\beta}$的一个自同构。

子断言 3.16。 对于每个 $\gamma\in N\cap\kappa$、每个 $x\in T_\beta$ 以及每个 $j\in\{-1,1\}$，

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}\exists y\in T_\beta\forall\alpha<\beta\ [q^-(\gamma)^j(x\restriction\alpha)=y\restriction\alpha]\text{”}.$$

证明。为导出矛盾，假设存在 $\gamma\in N\cap\kappa$、$n^*<\omega$、$j\in\{-1,1\}$ 和 $p^*\in\mathbb{P}_\gamma$，使得

$$p^*\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}\neg(\exists y\in T_\beta\forall\alpha<\beta\ [q^-(\gamma)^j(x_{n^*}\restriction\alpha)=y\restriction\alpha])\text{”}.$$

找到 $n<\omega$，使得 $p^*\cap N = p_n$、$n\ge n^*$ 和 $\gamma\in A_n$。那么请回想，存在 $y\in X_n$，使得 $\hat{}p_{n,\,0}\restriction\gamma\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma}$ “$q_n(\gamma)^j(x_{n^*}\restriction\alpha^*_n)=y\restriction\alpha^*_n$”。此外，对于所有$n'>n$，我们有

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}X_n\restriction\alpha^*_n \text{ and } X_n\restriction\alpha^*_{n'} \text{ are } q_{n'}(\gamma)\text{-consistent”}.$$

由此可得，对于所有 $n'>n$，我们有

$$\hat{p}_{n,0}\restriction\gamma\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}q_{n'}(\gamma)^j(x_{n^*}\restriction\alpha^*_{n'})=y\restriction\alpha^*_{n'}\text{”},$$

因此

$$\hat{p}_{n,0}\restriction\gamma\Vdash_{\mathbb{P}_\gamma} \text{“}\forall\alpha<\beta\ [q^-(\gamma)^j(x_{n^*}\restriction\alpha)=y\restriction\alpha]\text{”}.$$

但是 $\hat{}p_{n,\,0}\restriction\gamma\in N$ 且 $\hat{}p_{n,\,0}\restriction\gamma\le p^*\cap N$。因此，$\hat{}p_{n,\,0}\restriction\gamma$ 和 p^* 在$\mathbb{P}_\gamma$中相容，这与它们力迫出相互矛盾的陈述这一事实相矛盾。□

现在定义一个下界 q^*，对于 $\langle q_n\mid n<\omega\rangle$，使得 $\mathrm{顶端}(q^*)=\beta$ 且 $\mathrm{dom}(q^*)=N\cap\kappa$，方法是对每个 $\gamma\in N\cap\kappa$，$q^*(\gamma)$ 取一个 $\mathbb{P}_\gamma$-名称，它表示 $\mathrm{Aut}(T_{\le\beta}$中唯一一个延拓 $q^-(\gamma)$ 的元素。根据推论 3.16 和命题 2.14，这样的名称必定存在。不难验证，按此定义的 q^* 确实是 $\langle q_n\mid n<\omega\rangle$的一个下界。□

在 $\mathbb{Q}$ 中固定 $\langle q_n\mid n<\omega\rangle$ 的一个下界 q^*。我们先验证 $(1_{\mathbb{P}},q^*)\Vdash_{\mathbb{M}}$ “$\dot{b}\cap N\notin V[G_\delta]$”。为此，取 $w=N\cap\lambda$，并反设存在 $(p^{**},q^{**})\le_{\mathbb{M}}(1_{\mathbb{P}},q^*)$ 以及一个 $\mathbb{M}_\delta$-名称 $\dot{c}$，使得 $(p^{**},q^{**})\Vdash_{\mathbb{M}}$ “$\dot{b}\cap w=\dot{c}$”。取满足 $p^{**}\cap N=p_n$ 的 $n<\omega$。注意，$\hat{}p_{n,0}$ 和 $\hat{}p_{n,1}$ 均与 p^{**} 相容，并回想 $\hat{}p_{n,0}\restriction\delta=\hat{}p_{n,1}\restriction\delta$。令 r_0 表示 $(p^{**}\wedge\hat{}p_{n,0})\restriction\delta$，也就是说，$r_0$ 是 $\mathbb{P}_\delta$ 中 $p^{**}\restriction\delta$ 与 $\hat{}p_{n,0}\restriction\delta$ 的最大公共下界。找出 $(r_1,s_1)\le_{\mathbb{M}_\delta}(r_0,q^{**}\restriction\delta)$，使其判定陈述“$\varepsilon_n\in\dot{c}$”的真值。不失一般性，假设 $(r_1,s_1)\Vdash_{\mathbb{M}_\delta}$ “$\varepsilon_n\in\dot{c}$”（另一种情况对称）。定义 $(\hat{}p,\hat{}q)\in\mathbb{M}$，令

- $(\hat{}p,\hat{}q)\restriction\delta=(r_1,s_1)$；
- $(\hat{}p,\hat{}q)\restriction[\delta,\kappa)=(p^{**}\wedge\hat{}p_{n,0},q^{**})\restriction[\delta,\kappa)$.

于是 $(\hat{}p,\hat{}q)\Vdash_{\mathbb{M}}$ “$\varepsilon_n\in\dot{c}$”，因为 (r_1,s_1) 力迫同样的结论。我们还有 $(\hat{}p,\hat{}q)\le_{\mathbb{M}}(p^{**},q^{**})$，故 $(\hat{}p,\hat{}q)\Vdash_{\mathbb{M}}$ “$\dot{b}\cap w=\dot{c}$”，从而 $(\hat{}p,\hat{}q)\Vdash_{\mathbb{M}}$ “$\varepsilon_n\in\dot{b}$”。另一方面，我们有 $(\hat{}p,\hat{}q)\le_{\mathbb{M}}(\hat{}p_{n,0},q_n)$，从而 $(\hat{}p,\hat{}q)\Vdash_{\mathbb{M}}$ “$\varepsilon_n\notin\dot{b}$”。这是一个矛盾，从而完成 $(1_{\mathbb{P}},q^*)\Vdash_{\mathbb{M}}$ “$\dot{b}\cap N\notin V[G_\delta]$”的验证。

我们最终验证了导出矛盾，存在 $(p^{**},q^{**})\le_{\mathbb{M}}(1_{\mathbb{P}},q^*)$，以及 $m<\omega$，使得 $(p^{**},q^{**})\Vdash_{\mathbb{M}}$

“$x_m \notin E$”。固定一个 $n < \omega$，使得 $m < n$ 且 $p^{**} \cap N = p_n$。根据构造，我们知道 $(\hat{}p_{n,\,0},\ q_n) \Vdash_{\mathbb{M}}$“$x_m \restriction \mathrm{ht}(q_n) \in E$”，因此 $(\hat{}p_{n,\,0},\ q_n) \Vdash_{\mathbb{M}}$“$x_m \in E$”。令 $r = \hat{}p_{n,\,0} \wedge p^{**}$。那么 $(r,\ q^{**})$ 同时力迫“$x_m \in E$”和“$x_m \notin E$”。这个矛盾完成了该定理的证明。□

定理 3.17。假设 T 是一个自由苏斯林树，且 κ是超紧的。那么，在 $V[\mathbb{M}]$中，以下陈述成立：

(1) $\kappa = \omega_2$；*(2)* T 是一个几乎库雷帕苏斯林树；*(3)* GMP。

证明。根据本节前面的结果，这三项断言的证明均遵循标准思路；为完整起见，我们给出详细证明。

设 G 是 V 上的 $\mathbb{M}$-泛型。根据不可达基数 κ 的标准计数论证，$\mathbb{M}$ 在 V 中满足 κ-链条件，因此 κ 在 $V[G]$ 中仍是基数。此外，根据定理 3.13，$\mathbb{M}$ 在 V 中具有 ω_1-逼近性质，因此 $(\omega_1)^V = (\omega_1)^{V[G]}$。所以，要证明 (1)，只需证明对所有不可数的 $\gamma < \kappa$，$V[G] \models$“$|\gamma| = \omega_1$”。

为此，固定一个不可数的 $\gamma < \kappa$。必要时增大它，假设 $\gamma \in \Sigma(\kappa)$。容易证明，将 $\pi_\gamma \colon \mathbb{M} \to \mathbb{P}_\gamma * \mathbb{A}(T)$ 定义为对所有 $(p, q) \in \mathbb{M}$，令 $\pi_\gamma(p, q) = (p \restriction \gamma, q(\gamma))$，所得映射是一个投影。因此，$G$ 诱导出一个 $\mathbb{P}_\gamma * \mathbb{A}(T)$-泛型滤子 $G_{0,\gamma} * G_{1,\gamma}$，它位于 V 上。在 $V[G_{0,\gamma}]$ 中，我们有 $2^\omega \geq |\gamma|$。因此，在 $V[G_{0,\gamma}]$ 中应用命题 2.26，可得 $|\gamma| = \omega_1$ 属于 $V[G_{0,\gamma} * G_{1,\gamma}]$，因而也属于 $V[G]$。

为证明 (2)，首先应用定理 3.13，得出 T 在 $V[G]$中仍是苏斯林树。对于每个 $(p, q) \in G$ 以及 $\gamma \in \mathrm{dom}(q)$，令 $q(\gamma)_G$ 表示 $q(\gamma)$ 在 $V[G]$ 中的解释。对于每个 $\gamma \in \Sigma(\kappa)$，令 $g_\gamma = \bigcup\{q(\gamma)_G \mid (p, q) \in G \text{ 以及 } \gamma \in \mathrm{dom}(q)\}$。于是 g_γ 是 T的一个自同构。此外，利用一个常规的稠密性论证可知，自同构序列 $\langle g_\gamma \mid \gamma \in \Sigma(\kappa)\rangle$ 是两两几乎不相交的，即对于所有不同的 γ、$\delta \in \Sigma(\kappa)$ 以及所有 $t \in T$，存在 $t' \in T_t$ 使得 $g_\gamma(t') \neq g_\delta(t')$。

现在，如果我们在 $V[G]$上用 T进行力迫，就会添加一条穿过 T的泛型共尾分支 b。在 $V[G][b]$中，对于所有 $\gamma \in \Sigma(\kappa)$，令 $b_\gamma = \{g_\gamma(t) \mid t \in b\}$。于是每个 b_γ 都是穿过 T 的共尾分支，并且根据 $\langle g_\gamma \mid \gamma \in \Sigma(\kappa)\rangle$ 是两两几乎不相交的这一事实，再利用一个常规的稠密性论证，我们得到对于所有不同的 $\gamma, \delta \in \Sigma(\kappa)$都有 $b_\gamma \neq b_\delta$。由于 T在 $V[G]$中满足可数链条件，因而 $\kappa = \omega_2^{V[G][b]}$，所以 T在 $V[G][b]$ 中是库雷帕树，从而在 $V[G]$中是几乎库雷帕苏斯林树。

尚需验证 GMP 在 $V[G]$ 中成立。为此，在 $V[G]$ 中进行，固定一个正则不可数基数 $\theta \geq \kappa$ 以及 $\mathscr{P}_\kappa H(\theta)$ 中的一个闭无界集 C。我们必须在 C 中找到一个ω_1-猜测模型。回想一下，给定一个函数 $f \colon [H(\theta)]^2 \to \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$，我们令 C_f 表示该集合

$$\{X \in \mathscr{P}_\kappa H(\theta) \mid \forall u \in [X]^2\ f(u) \subseteq X\}.$$

利用 Menas 对双基数闭无界滤子的刻画 [18],，我们可以固定一个函数$f \colon [H(\theta)]^2 \to \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$，使得 $C_f \subseteq C$。

回到 V，固定一个初等嵌入 $j \colon V \to M$，它见证了 κ 是 $|H(\theta)|$-超紧的。注意，在 M 中，$j(\mathbb{M})$ 的定义方式与 $\mathbb{M}$ 在 V 中的定义方式相同，但长度为 $j(\kappa)$，并且 $j(\mathbb{M})_\kappa = \mathbb{M}$。此外，$j \restriction \mathbb{M}$ 是恒等映射

[2]这里我们采用如下约定：若 $\gamma \notin \mathrm{dom}(q)$，则 $q(\gamma) = 1_{\dot{\mathbb{A}}(T)}$。

并且，根据定理 3.13，在 $M[G]$ 中， $j(\mathbb{M})/G = j(\mathbb{M})_{\kappa,\, j(\kappa)}$ 具有 ω_1-逼近性质。令 H 为在 $V[G]$ 上泛型的 $j(\mathbb{M})/G$。于是，在 $V[G*H]$ 中，我们可以将 j 提升为 $j\colon V[G]\to M[G*H]$。注意，在 $M[G*H]$ 中， $j(C)$ 是 $\mathscr{P}_{j(\kappa)}H(j(\theta))$ 中的闭无界集，并且 $C_{j(f)} = j(C_f) \subseteq j(C)$。

设 $N = j\text{“}H(\theta)^{V[G]}$。由 M 的闭包以及 N 可由 $j\text{“}H(\theta)^V$ 与 $G*H$ 定义这一事实，可得 $N\in M[G*H]$。此外， $M[G*H]\models N\in \mathscr{P}_{j(\kappa)}H(j(\theta))$。我们断言 $N\in C_{j(f)}$。为此，固定 $u\in[N]^2$，并找到 a、$b\in H(\theta)^{V[G]}$ 使得 $u = j(\{a,b\})$。于是 $j(f)(u) = j(f(\{a,b\}))$。由于 $f(\{a,b\})\in \mathscr{P}_\kappa H(\theta)^V[G]$ 且 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$，我们有 $j(f(\{a,b\})) = j\text{“}f(\{a,b\})\subseteq N$。因此 $N\in C_{j(f)}$，从而 $N\in j(C)$。

接下来我们论证，在 $M[G*H]$ 中， N 是一个 ω_1-猜测模型。为此，在 $M[G*H]$ 中固定一个 $z\in N$ 和一个 $d\subseteq z$，使得对每个 $x\in\mathscr{P}_{\omega_1}z\cap N$，都有 $d\cap x\in N$。令 $z'\in H(\theta)^{V[G]}$ 满足 $j(z') = z$，并令 $e' = \{a\in H(\theta)^{V[G]}\mid j(a)\in d\}$。于是 $e'\subseteq z'$，且 $e'\in M[G*H]$。

断言 3.18. 对于所有 $x'\in(\mathscr{P}_{\omega_1}z')^{V[G]}$，都有 $e'\cap x'\in M[G]$。

证明. 固定 $x'\in(\mathscr{P}_{\omega_1}z')^{V[G]}$。令 $x = j(x') = j\text{“}x'\in N$。根据 d 的选取，我们知道 $x\cap d\in N$。因此，我们可以找到 $y'\in H(\theta)^{V[G]}$，使得 $x\cap d = j(y') = j\text{“}y'$。但接下来，展开这些定义可得 $e'\cap x' = y'\in V[G]$。由于 $H(\theta)^{M[G]} = H(\theta)^{V[G]}$，所需结论即得。□

由于 $j(\mathbb{M})/G$ 在 $M[G]$中具有 ω_1逼近性质，因此可知 $e'\in M[G]$；特别地，$e'\in H(\theta)^{V[G]}$。令 $e = j(e')$。则 $e\in N$且 $e\cap N = j\text{“}e' = d\cap N$。因此，$N\in j(C)$ 确实是 $M[G*H]$中的一个 ω_1-猜测模型。由元素性，在 $V[G]$ 中存在一个 C中的 ω_1-猜测模型，因而在 $V[G]$中 GMP 成立。□

下面的推论将完成定理 A 的证明。

推论 3.19。 假设 Con(ZFC +存在一个超紧基数)。则相容于 GMP 成立，但可被一个势为 ω_1 的 *ccc* 强迫破坏。

证明。 从一个模型开始 V，它是 ZFC且包含一个超紧基数 κ。由于例如从 $\diamondsuit$ 构造苏斯林树的经典构造会产生一棵自由苏斯林树，因此我们可以假设存在一棵自由苏斯林树 T，位于 V中。于是，根据定理3.17，在 $V[\mathbb{M}]$中，GMP 成立，且 T 是一棵几乎库雷帕苏斯林树。特别地，T 是一个势为 ω_1 的 ccc 强迫，使得在用 T强迫后存在一棵库雷帕树。由于 GMP 蕴含库雷帕假设失败，因此 $\Vdash_T$ ¬GMP成立。 □

我们以概述推论 1.1 的证明来结束本节。

推论 *1.1* 的证明概述。 假设 κ 是一个不可达基数。与推论 3.19的证明一样，我们可以在 V中固定一棵自由苏斯林树 T，并令 $\mathbb{M} = \mathbb{M}^T_\kappa$。我们论证 $V[\mathbb{M}]$ 满足该推论的结论。鉴于上文定理 A 的证明，只需证明 ¬弱基数海伍德性质 在 $V[\mathbb{M}]$中成立。为此，令 G是 $\mathbb{M}$上的 V-泛型，并令 $S\in V[G]$ 是一棵高度和大小均为 ω_1 的树。我们必须证明，在 $V[G]$中， S 至多有 ω_1个共尾分支。

由于 κ 是不可达的，我们知道 $\mathbb{M}$ 在 V中具有 κ-链条件，且 $\kappa = \omega_2$ 在 $V[G]$中。因此我们可以找到一个极限序数 $\delta<\kappa$，使得 $S\in V[G_\delta]$。回想一下，给定一棵树 R， $[R]$ 表示通过 R的共尾分支的集合。由于$(2^{\omega_1})^{V[G_\delta]}<\kappa$,

我们有 $([S])^{V[G_\delta]} < \kappa$。由定理3.13，$\mathbb{M}_{\delta,\kappa}$ 在 $V[G_\delta]$中具有 ω_1-逼近性质，从而 $[S]^{V[G]} = [S]^{V[G_\delta]}$。由于 $\kappa = \omega_2$ 在 $V[G]$中，故 S 在 $V[G]$中至多有 ω_1条共尾分支，如所欲证。□

4. Weak Kurepa trees

在 [4], Cox 和 Krueger 中，他们证明 GMP 蕴含在 ω_1 处不存在弱库雷帕树。与他们的结果相反，我们在 [16] 证明，$\mathrm{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$ 并不蕴含在 ω_1 处不存在弱库雷帕树。事实上，我们构造了一个模型，其中 $\mathrm{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$ 成立，而且在 ω_1 处不仅存在一棵弱库雷帕树，甚至还存在一棵库雷帕树。在本节中，我们进一步完善这一结果，并证明在 ω_1 处存在弱库雷帕树与 ¬基数海伍德性质 KH 和 $\mathrm{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$ 相容，从而证明定理 B。

4.1. 添加弱库雷帕树的强迫。 我们首先介绍一种用于添加弱库雷帕树的强迫概念，这是对 Stewart [21]提出的标准添加库雷帕树强迫的一种变体。

定义 4.1。 设 λ 是一个不可数序数。[3] 我们定义一个偏序集 $\mathbb{K}_\lambda$，它添加一棵大小和高度为 ω_1 且有 $|\lambda|$个共尾分支的树。条件$q \in \mathbb{K}_\lambda$ 是形如（T_q，f_q）的有序对，使得

- 存在 $\eta_q < \omega_1$ 使得 T_q 是$^{<\eta_q+1}\omega_1$ 的正规无限分裂子树，大小至多为 ω_1；
- f_q 是从 λ 到 $T_q \cap {}^{\eta_q}\omega_1$的可数偏函数。

若 q_0，$q_1 \in \mathbb{K}_\lambda$，则 $q_1 \leq q_0$ 当且仅当

- $\eta_{q_1} \geq \eta_{q_0}$；
- $T_{q_1} \cap {}^{<\eta_{q_0}+1}\omega_1 = T_{q_0}$；
- $\mathrm{dom}(f_{q_1}) \supseteq \mathrm{dom}(f_{q_0})$；
- 对所有 $\alpha \in \mathrm{dom}(f_{q_0})$，$f_{q_1}(\alpha) \supseteq f_{q_0}(\alpha)$。

我们还将序对 $(\emptyset,\emptyset)$ 作为 $1_{\mathbb{K}_\lambda}$ 纳入 $\mathbb{K}_\lambda$。

容易验证 $\mathbb{K}_\lambda$ 是可分离的，并且下面引理4.8 的证明将表明，它添加了一棵高度和大小为 ω_1、具有 $|\lambda|$条分支的树。注意$\mathbb{K}_\lambda$ 不是 ω_2-cc：事实上，它将 2^{ω_1} 坍缩为 ω_1，因为我们可以把 ω_1 在基模型中的子集编码到由 $\mathbb{K}_\lambda$所添加的泛型树的各层中。因此，若 $\lambda \leq 2^{\omega_1}$，则由 $\mathbb{K}_\lambda$ 所添加的泛型树将不是弱库雷帕树。

引理 4.2. 设 λ 为一个不可数序数，且 μ 为一个正则基数，使得$\mu > 2^{\omega_1}$，并对所有 $\gamma < \mu$ 有 $\mu > \gamma^\omega$。则 $\mathbb{K}_\lambda$ 是 μ-*Knaster* 的。特别地，$\mathbb{K}_\lambda$ 是$(2^{\omega_1})^+$-*Knaster* 的。

证明。设给定一组条件 $\{q_\alpha = (T_\alpha, f_\alpha) \in \mathbb{K}_\lambda \mid \alpha < \mu\}$。由于$\mu > 2^{\omega_1}$ 是正则的，并且 T_α只有 2^{ω_1} 种可能，因此存在一棵 $T \subseteq {}^{<\eta+1}\omega_1$，它具有可数高度，且 $I \subseteq \mu$ 的大小为 μ，使得对所有 $\alpha \in I$，都有 $T_\alpha = T$。

由于对所有 $\gamma < \mu$ 都有 $\gamma^\omega < \mu$，因此存在一个大小为 μ 的 $I' \subseteq I$，使得集合 $\{\mathrm{dom}(f_\alpha) \mid \alpha \in I'\}$ 构成一个以 $a \subseteq \lambda$ 为根的 Δ-系。由于 a 至多可数，从 a 到 T_η 的函数至多有 $2^\omega < \mu$ 个，因此存在一个

[3]在实际应用中，λ 通常是一个基数，但有时我们也需要考虑形如 $j(\kappa)$ 的 λ，其中 $j : V \to M$ 是一个临界点为 κ 的初等嵌入；在这种情况下，λ 是 M 中的基数，但在 V中可能不是基数。

从 a 到 T_η 的可数 f，以及一个大小为 μ 的 $J \subseteq I'$，使得对所有 $\alpha \neq \beta \in J$ 都有 $f = f_\alpha \cap f_\beta$。于是，$\{q_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 中的所有条件都相容。□

引理 4.3. 设 λ 是一个不可数序数。那么 $\mathbb{K}_\lambda$ 是 ω_1-闭的。

证明。设 $\langle q_n \mid n < \omega\rangle$ 是 $\mathbb{K}_\lambda$ 中的一个递减序列。为避免平凡情形，假设序列 $\langle \eta_{q_n} \mid n < \omega\rangle$ 严格递增。令 $\eta := \sup\{\eta_{q_n} \mid n < \omega\}$。我们将构造一个下界 q，使得对于 $\langle q_n \mid n < \omega\rangle$ 有 $\eta_q = \eta$。令 $T = \bigcup_{n<\omega} T_{q_n}$。注意，$T$ 是一棵高度为 η 的正规树。为定义 T_q，首先注意到，由于函数 $\{f_{q_n} \mid n < \omega\}$，我们必须延伸经过 T 的可数多个分支。具体而言，令 $a = \bigcup_{n<\omega} \mathrm{dom}(f_{q_n})$，并且对每个 $\alpha \in a$，令

$$b_\alpha := \bigcup\{f_{q_n}(\alpha) \mid n < \omega \wedge \alpha \in \mathrm{dom}(f_{q_n})\}.$$

那么，每个 b_α 都是穿过 T 的共尾分支，因此我们必须将 b_α 放入 T_q。

那么，我们需要确保 T_q 是 ${}^{<\eta+1}\omega_1$ 的正规无限分裂子树；也就是说，对于 T 中的每个节点，都需要在其上方的 η 层添加一个节点。对于每个 $t \in T$，令 C_t 为 T 中满足 $t \in C_t$ 的一条共尾分支。注意，这样的共尾分支存在，因为 T 是一棵具有可数高度的正规树。令 $c_t = \bigcup C_t$，则 $c_t \in {}^\eta\omega_1$ 并延伸了 t。

最后，令 $T_q := T \cup \{b_\alpha \mid \alpha \in a\} \cup \{c_t \mid t \in T\}$。令 f_q 满足 $\mathrm{dom}(f_q) = a$，且对所有 $\alpha \in a$，$f_q(a) = b_\alpha$。□

引理 4.4。令 $\lambda < \kappa$ 为不可数序数。那么存在一个从 $\mathbb{K}_\kappa$ 到 $\mathbb{K}_\lambda$ 的投影。

证明. 我们通过令对所有 $q \in \mathbb{K}_\kappa$ 有 $\pi(T_q, f_q) = (T_q, f_q \restriction \lambda)$，将 π 定义为从 $\mathbb{K}_\kappa$ 到 $\mathbb{K}_\lambda$ 的映射。容易验证 π 是保序的，并且 $\pi(1_{\mathbb{K}_\kappa}) = 1_{\mathbb{K}_\lambda}$。

设 $q \in \mathbb{K}_\kappa$ 与 $r \in \mathbb{K}_\lambda$ 满足 $r \leq \pi(q) = (T_q, f_q \restriction \lambda)$。首先令$T_{r'} = T_r$ 来定义 $r' \leq q$（注意 T_r 是 T_q的端延拓）。令$\mathrm{dom}(f_{r'})$ =$\mathrm{dom}(f_q) \cup \mathrm{dom}(f_r)$，并定义

– 对每一个 $\alpha \in \mathrm{dom}(f_r)$，有 $f_{r'}(\alpha) = f_r(\alpha)$，并且 – 对每一个 $\alpha \in \mathrm{dom}(f_q) \setminus \mathrm{dom}(f_r)$，有 $f_{r'}(\alpha) = \tau$，其中 $\tau \in (T_{r'})_{\eta_r}$ 且满足 $\tau \supseteq f_q(\alpha)$。

容易验证 $\pi(r') = r$。因此 π 是一个投影。□

设 $\lambda < \kappa$ 为不可数序数。令 H 为一个 $\mathbb{K}_\lambda$-泛型滤子，$T_H = \bigcup\{T_q \mid q \in H\}$，并令 $\mathbb{K}_\kappa/H = \{r \in \mathbb{K}_\kappa \mid \pi(r) \in H\}$ 为由 H 和投影 π给出的商。那么 $\mathbb{K}_\kappa$ 与两步迭代 $\mathbb{K}_\lambda * \mathbb{K}_\kappa/H$力迫等价。容易看出，在 $V[H]$中，$\mathbb{K}_\kappa/H$ 与强迫概念 $\mathbb{K}_{\lambda,\,\kappa}$力迫等价，其中 $\mathbb{K}_{\lambda,\,\kappa}$ 中的条件是形如 $r = (\eta_r, f_r)$ 的序对，满足 f_r 是从 $\kappa \setminus \lambda$ 到 $(T_H)_{\eta_r}$ 的可数偏函数，并且 $r \leq q$ 当且仅当 $\eta_r \geq \eta_q$，$\mathrm{dom}(f_q) \subseteq \mathrm{dom}(f_r)$，且对于所有 $\alpha \in \mathrm{dom}(f_q)$，都有 $f_q(\alpha) \subseteq f_r(\alpha)$。

引理 4.5。设 $\lambda < \kappa$ 为不可数序数，μ 为一个正则基数，满足 $\mu > 2^{\omega_1}$，且对所有 $\gamma < \mu$ 都有 $\mu > \gamma^\omega$。令 H 为一个 $\mathbb{K}_\lambda$-泛型滤子。那么在 $V[H]$中，$\mathbb{K}_\kappa/H$是 μ-*Knaster* 的。

证明。由于 $\mu > 2^{\omega_1}$ 是正则的，且对于所有 $\gamma < \mu$都有 $\mu > \gamma^\omega$，因此 $\mathbb{K}_\lambda$ 是 μ-Knaster 的，所以 μ 在 $V[H]$中仍是正则基数。此外，由于 $\mathbb{K}_\lambda$ 是 ω_1-闭的，$\mu > \gamma^\omega$对 $V[H]$中的所有 $\gamma < \mu$ 仍然成立。

在 $V[H]$中进行，其中 $\mathbb{K}_\kappa/H$ 与上文孤立讨论的强迫概念 $\mathbb{K}_{\lambda,\kappa}$力迫等价。给定条件集 $\{q_\alpha=(\eta_\alpha,f_\alpha)\in\mathbb{K}_{\lambda,\kappa}\mid\alpha<\mu\}$。由于 $\mu>2^{\omega_1}$ 属于 V， $\mu>\omega_1$ 属于 $V[H]$，且 η_α只有 ω_1种可能，因此存在一个 η 和一个大小为 μ 的 $I\subseteq\mu$，使得对所有 $\alpha\in I$都有 $\eta_\alpha=\eta$。

由于 $\gamma^\omega<\mu$ 对所有 $\gamma<\mu$均成立，存在一个大小为 μ的 $I'\subseteq I$，使得集合$\{\mathrm{dom}(f_\alpha)\mid\alpha\in I'\}$构成一个根为 $a\subseteq\lambda$的 Δ-系统。由于 a至多可数，从 a 到 T_η 至多有 $\omega_1^\omega<\mu$ 多个函数，因此存在一个从 a 到 T_η 的可数 f，以及一个大小为 μ 的 $J\subseteq I'$，使得对于所有 $\alpha\neq\beta\in J$，均有 $f=f_\alpha\cap f_\beta$。于是， $\{q_\alpha\mid\alpha\in J\}$ 中的所有条件都相容。□

引理 4.6。令 $\lambda<\kappa$ 为不可数序数， H 为一个 $\mathbb{K}_\lambda$-泛型滤子。则 $\mathbb{K}_\kappa/H$ 在 $V[H]$ 中是 ω_1-分配的。

证明。强迫 $\mathbb{K}_\kappa$ 力迫等价于两步迭代 $\mathbb{K}_\lambda*\mathbb{K}_\kappa/H$。由于 $\mathbb{K}_\kappa$ 是 ω_1-闭的，由引理 4.3， $\mathbb{K}_\kappa/H$ 不能在 $V[H]$上添加新的可数序数序列，因此它在 ω_1中是 $V[H]$-分配的。□

我们固定以下记号：对于 $r\in\mathbb{K}_\kappa$ 和 $\lambda<\kappa$，令 $r\restriction\lambda$ 表示（T_r， $f_r\restriction\lambda$），即 $r\restriction\lambda=\pi(r)$ 是引理 4.4中定义的投影。

引理 4.7。设 $\lambda<\kappa$ 为不可数序数，且 H 是泛型滤子对应的典范 $\mathbb{K}_\lambda$-名称。设 $q\in\mathbb{K}_\lambda$ 和 $r\in\mathbb{K}_\kappa$。则以下各项等价。

(i) $q\Vdash r\in\dot{\mathbb{K}}_\kappa/\dot{H}$;

(ii) $q\leq r\restriction\lambda$.

证明。为证明 (i) 蕴含 (ii)，注意若 $q\not\leq r\restriction\lambda$，则由 $\mathbb{K}_\lambda$ 的分离性可知，存在与 $r\restriction\lambda$不相容的 $q'\leq q$，因此 q 不会力迫 $\dot{r}$属于 $\mathbb{K}_\kappa/H$。反向蕴含显然，因为 $q\leq r\restriction\lambda$ 意味着 $q\leq\pi(r)$。□

引理 4.8。假设广义连续统假设 成立，并设 $\lambda>\omega_2$ 是一个基数。设 H 是 V上的 $\mathbb{K}_\lambda$-泛型滤子。则泛型树 $T_H=\bigcup\{T_q\mid q\in H\}$ 是弱库雷帕树，且有λ个共尾分支。

证明。由于 $\mathbb{K}_\lambda$ 是 ω_1-闭的， ω_1 在 $\mathbb{K}_\lambda$ 下得以保留，因此泛型树 $T_H=\bigcup\{T_q\mid q\in H\}$ 是高度和大小为 ω_1的树。通过标准的稠密性论证， T_H 在 $V[H]$中有 λ 多个共尾分支。由于广义连续统假设在基模型中成立，根据引理 4.2， $\mathbb{K}_\lambda$ 是 ω_3-Knaster 的，因此所有大于 ω_2 的基数都得以保留（回想一下， 2^{ω_1} 总是会被压塌）；特别地， λ 得以保留。由于$\lambda>\omega_2$ 在基模型中， $\lambda>\omega_1$ 在 $V[H]$中；因此，泛型树 T_H 是 $V[H]$中的一棵弱库雷帕树。□

4.2. **弱基数海伍德性质** wKH **与** ¬基数海伍德性质 **和** $\mathsf{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$。在证明本节的主要定理之前，我们先说明，在 Mitchell 强迫（如第2.3小节所定义）与添加一棵弱库雷帕树的强迫之积所得到的泛型扩张中，不存在库雷帕树。

定理 4.9. 假设 κ 是一个不可达基数。那么，在由 $\mathbb{M}(\omega,\kappa)\times\mathbb{K}_\kappa$得到的泛型扩张中，不存在库雷帕树。

证明。设 κ 为不可达基数，并假设广义连续统假设成立。

首先注意到，只需证明在由 $\mathrm{Add}(\omega,\kappa)\times\mathbb{Q}\times\mathbb{K}_\kappa$生成的泛型扩张中不存在库雷帕树，其中 $\mathbb{Q}$ 是 Mitchell 强迫$\mathbb{M}(\omega,\kappa)$ 的项强迫（详见注 2.13 ；形式上， $\mathbb{Q}$ 是所有条件的集合

$(\emptyset, q) \in \mathbb{M}(\omega, \kappa)$，其序关系继承自 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$）。为说明这一点，首先注意到，根据注 2.13(4)，$\mathrm{Add}(\omega, \kappa) \times \mathbb{Q} \times \mathbb{K}_\kappa$ 与某个商强迫 $\mathbb{S}$ 的 $(\mathbb{M}(\omega, \kappa) * \mathbb{S}) \times \mathbb{K}_\kappa$ 力迫等价。后者又与 $(\mathbb{M}(\omega, \kappa) \times \mathbb{K}_\kappa) * \mathbb{S}$力迫等价。此外，$\mathbb{S}$ 在 $V[\mathbb{M}(\omega, \kappa) \times \mathbb{K}_\kappa]$上不会坍缩任何基数，因为容易验证两个扩张中的基数相同；也就是说，ω_1 以及大于或等于 κ 的所有基数在两个扩张中都得到保留，而介于 ω_1和 κ之间的基数在两个扩张中都被坍缩。因此，$V[\mathbb{M}(\omega, \kappa) \times \mathbb{K}_\kappa]$中的任何库雷帕树在 $V[\mathrm{Add}(\omega, \kappa) \times \mathbb{Q} \times \mathbb{K}_\kappa]$中仍然是库雷帕树。

设 $F \times G \times H$ 为 V 上的 $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{K}_\kappa$-泛型，其中 $\mathbb{P}$ 表示 $\mathrm{Add}(\omega, \kappa)$。假设 S 是 $V[F][G][H]$ 中的一棵 ω_1-树。由于 S 的大小为 ω_1，且 $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{K}_\kappa$ 是 κ-Knaster 的，故存在一个大小小于 κ、关于 S 的良好 $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{K}_\kappa$-名称 $\dot{S}$。由于 $\dot{S}$ 的大小小于 κ，S 是某个正则基数 $\theta < \kappa$ 的 $\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{Q}_\theta \times \mathbb{K}_\theta$-名称，其中$\mathbb{P}_\theta = \mathrm{Add}(\omega, \theta)$ 且 $\mathbb{Q}_\theta = \{(\emptyset, q \restriction \theta) \mid (\emptyset, q) \in \mathbb{Q}\}$。设 F_θ 表示由 F 确定的、V 上的 $\mathbb{P}_\theta$-泛型；即 $F_\theta = \{p \restriction \theta \mid p \in F\}$，$G_\theta$ 表示由 G 确定的、$V[F_\theta]$ 上的 $\mathbb{Q}_\theta$-泛型；即 $G_\theta = \{(\emptyset, q \restriction \theta) \mid (\emptyset, q) \in G\}$，并设 H_θ 表示由 H 与 π 确定的、$V[F_\theta][G_\theta]$ 上的$\mathbb{K}_\theta$-泛型滤子，其中 π 是引理 4.4 中从 $\mathbb{K}_\kappa$ 到 $\mathbb{K}_\theta$ 的投影。ω_1-树 S 是 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta]$的一个元素，并且在此处至多有 $(2^{\omega_1})^{V[F_\theta][G_\theta][H_\theta]}$条共尾分支，其数目小于$\kappa$，因为 κ 在 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta]$中仍然不可达。我们证明商强迫$\mathbb{P}^\theta \times \mathbb{Q}^\theta \times \mathbb{K}_\kappa / H_\theta$ 不能在 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta]$上为 S 添加一条共尾分支。此处 $\mathbb{P}^\theta$ 表示 $\mathrm{Add}(\omega, [\theta, \kappa))$，$\mathbb{Q}^\theta$ 表示商强迫 $\mathbb{Q}/G_\theta$。由此可得，S 在 $V[F][G][H]$中有 $< \kappa = \omega_2$ 条共尾分支，即它不是库雷帕树。由于 S 是任意一棵 ω_1-树，这就完成了定理 4.9 的证明。关于 $V[F][G][H]$ 中不存在库雷帕树的证明相对较长；为便于阅读，将其分为若干断言（断言 4.11 至 4.14）。

首先我们注意到，可以将泛型扩张 $V[F][G][H]$ 表示为由 $(\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{Q}_\theta \times \mathbb{K}_\theta) * (\mathbb{K}_\kappa / \dot{H}_\theta \times \mathbb{Q}^\theta \times \mathbb{P}^\theta)$ 产生的强迫扩张：由于 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{P}^\theta$ 力迫等价，我们可以将 F 看作一个滤子 $F_\theta \times f$，它在 V 上是 $\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{P}^\theta$-泛型的。同理，由于 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}_\theta * \dot{\mathbb{Q}}^\theta$ 力迫等价，我们可以将 G 看作一个滤子$G_\theta * g$，它在 $V[F_\theta][f]$ 上是泛型的。最后，由于 $\mathbb{K}_\kappa$ 与$\mathbb{K}_\theta * \mathbb{K}_\kappa / H_\theta$ 力迫等价，我们可以将 H 看作一个滤子 $H_\theta * h$，它在 $V[F_\theta][f][G_\theta][g]$ 上是泛型的。因此，$V[F][G][H]$ 等于泛型扩张 $V[F_\theta][f][G_\theta][g][H_\theta][h]$.

此外，由于 $\mathbb{P}^\theta$ 和 $\mathbb{Q}_\theta * \mathbb{Q}^\theta$ 都在 $V[F_\theta]$ 中，且 $G_\theta * g$ 在$V[F_\theta][f]$上是泛型的，因此我们有 $V[F_\theta][f][G_\theta][g][H_\theta][h] = V[F_\theta][G_\theta][g][f][H_\theta][h]$。类似地，由于 $\mathbb{Q}^\theta \times \mathbb{P}^\theta$ 和 $\mathbb{K}_\theta * \mathbb{K}_\kappa / H_\theta$ 都在 $V[F_\theta][G_\theta]$中，且 $H_\theta * h$ 在 $V[F_\theta][H_\theta][g][f]$上是泛型的，我们可以交换 $g \times f$ 和 $H_\theta * h$。由此可得

$$V[F_\theta][G_\theta][g][f][H_\theta][h] = V[F_\theta][G_\theta][H_\theta][h][g][f].$$

由于 $\mathbb{P}^\theta = \mathrm{Add}(\omega, [\theta, \kappa))$，它是 ω_1中的 Knaster 性质，因此 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta][h][g]$，所以它不能给一个 ω_1-树添加新的共尾分支，依据事实 2.7。因此，经过 S 的任何共尾分支都已经在 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta][h][g]$中。

现在，注意 $\mathbb{Q}^\theta$ 在 $V[G_\theta]$ 中是 ω_1-闭的，并且由于$\mathbb{Q}_\theta$ 和 $\mathbb{K}_\kappa$ 在 V中都是 ω_1-闭的，$\mathbb{K}_\kappa$ 在 $V[G_\theta]$ 中也是 ω_1-闭的；因此 $\mathbb{Q}^\theta$ 在 $V[G_\theta][H_\theta][h]$中是 ω_1-闭的。强迫 $\mathbb{P}_\theta$ 在 $V[G_\theta][H_\theta][h]$ 中满足可数链条件，因为它只是用于添加ω的子集的Cohen强迫。因此，我们可以对 $V[G_\theta][H_\theta][h]$ 上的 $\mathbb{P}_\theta$ 和 $\mathbb{Q}^\theta$ 应用事实2.11，以表明$\mathbb{Q}^\theta$ 不能向 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta][h]$ 上的一棵 ω_1-树添加新的共尾分支，从而穿过 S 的任何共尾分支都已经在 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta][h]$中

为了证明 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$ 不能向 $V[F_\theta][G_\theta][H_\theta]$上的 S 添加一条共尾分支，我们将在 $V[G_\theta]$中进行讨论。注意 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$ 在 $V[G_\theta][H_\theta]$中仅仅是 ω_1-分配的，因此我们不能使用事实2.11。相反，我们将证明：如果存在一个. . $\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/H_\theta)$-名称 b 以及一个条件$(p^*, q^*, r^*) \in \mathbb{P}_\theta \times \mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/H_\theta)$，它 力迫使 b 是一条穿过 S 且不在 $V[G_\theta][F_\theta][H_\theta]$中的共尾分支，那么存在一个条件 $q \le q^*$，使得(p^*, q)力迫使 S 具有一个不可数层。这是一个矛盾，因为我们可以假设(p^*, q^*, r^*)在 $F_\theta \times H_\theta * h$ 中，并且(p^*, q^*)力迫使 S 是一棵 ω_1-树。

证明与以下论证类似：在可数链条件强迫上进行的 ω_1-闭强迫不会给 ω_1-树添加共尾分支。我们将构造一个由条件组成的树 $\mathcal{T}$，它们位于$\mathbb{K}_\kappa$ 中，由 ${}^{<\omega}2$ 标记；并将对 $\mathbb{P}_\theta$中的反链进行对角化。但由于我们处理的是商 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$，且工作在 $V[G_\theta]$ 中而非 $V[G_\theta][H_\theta]$中，因此我们将用$\mathbb{K}_\theta$中的一个长度为 ω 的条件递减序列来引导这一构造，从而将 $\mathcal{T}$中的条件力迫进商 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$。

我们作一个自然的识别，并将 $(S, <_{\dot S})$ 看作一个以底集 $\omega_1 \times \omega$为底的树的名称，并假设对每个 $\delta < \omega_1$， $\dot S$的 δ^{th} 层都被力迫等于 $\{\delta\} \times \omega$。因此，该树的定义域存在于 $V[G_\theta]$中，而强迫决定了树上的序关系 $<_{\dot S}$。接下来，对于 $\delta < \omega_1$，我们令 S_δ 表示$\{\delta\} \times \omega$。

在 $V[G_\theta]$中工作。假设 b 是一个 $\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/H_\theta)$-名称，并且 $(p^*, q^*, \dot r^*)$ $\in \mathbb{P}_\theta \times$ . . . $\mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/H_\theta)$ 力迫：b 是穿过 S 的一条不属于 $V[G_\theta][F_\theta][H_\theta]$的共尾分支。根据我们关于 S的假设，我们可以将 b 视为 ${}^{\omega_1}\omega$中某个元素的名称。我们还可以假设存在 $r^* \in \mathbb{K}_\kappa$ 使得 $q^* \Vdash \dot r^* = r^*$。我们将通过对 ω 归纳来构造以下对象：

- 一列条件的递减序列 $\langle q_n \mid n < \omega\rangle$，其中这些条件属于 $\mathbb{K}_\theta$，且满足 $q_0 \le q^*$；
- 一个由条件构成的标记树 $\mathcal{T} = \{r_s \mid s \in {}^{<\omega}2\}$，属于 $\mathbb{K}_\kappa$，其中对所有$s \in {}^{<\omega}2$都有 $r_s \le r^*$；
- 一个极大反链 A_s，位于 $\mathbb{P}_\theta$ 中且低于 p^*，对所有 $s \in {}^{<\omega}2$；
- 一个由序数组成的严格递增序列 $\langle \gamma_n \mid n < \omega\rangle$，且这些序数都小于 ω_1；

使得对所有 n 以及所有长度为 n的 $s \in {}^{<\omega}2$，以下条件成立：

(a) $q_n = r_s \restriction \theta$；特别是 $q_n \Vdash r_s \in \mathbb{K}_\kappa/H_\theta$；(b) 对所有 $p \in A_s$，条件 $(p, q_{n+1}, r_{s^\frown 0})$ 和 $(p, q_{n+1}, r_{s^\frown 0})$ 对 b 的决定在 之前相差 γ_{n+1}；也就是说，存在 $\delta \le \gamma_{n+1}$ 和 $\tau_{s^\frown 0} \neq \tau_{s^\frown 1}$，属于 S_δ，使得 $(p, q_n, r_{s^\frown 0}) \Vdash b(\delta) = \tau_{s^\frown 0}$，且 $(p, q_n, r_{s^\frown 1}) \Vdash b(\delta) = \tau_{s^\frown 1}$；(c) 对所有属于 ${}^{<\omega}2$ 的 $s \subseteq t$，$(q_{|t|}, r_t) \le (q_{|s|}, r_s)$。

定义 4.10。我们将满足条件 (a)–(c) 的上述系统称为关于 b 的 标记系统。如果上下文清楚表明 b，我们就简称为标记系统。

下面将利用断言 4.11、4.12 和 4.13 构造一个标记系统。

断言 *4.11*。对于 $\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/\dot H_\theta)$ 中的每个 (p, q, r^0)、$(p, q, r^1) \le (p^*, q^*, r^*)$，并且 $\gamma' < \omega_1$，存在 $\gamma' < \gamma < \omega_1$、$(p', q', u^0) \le (p, q, r^0)$ 以及 $(p', q', u^1) \le (p, q, r^1)$，使得 (p', q', u^0) 和 (p', q', u^1) 以不同方式判定 $\dot b(\gamma)$，且条件 q' 延伸 $u^0 \restriction \theta$ 和 $u^1 \restriction \theta$。此外，我们可以确保 $T_{q'} = T_{u^0} = T_{u^1}$。

证明。令 $(p, q, r^0), (p, q, r^1) \le (p^*, q^*, r^*)$ 和 $\gamma' < \omega_1$ 为给定对象。暂时固定一个在 $V[G_\theta]$ 上的 $\mathbb{P}_\theta \times \mathbb{K}_\theta$- 泛型 $G_P \times G_K$，使得 $(p, q) \in G_P \times G_K$，并在 $V[G_\theta][G_P \times G_K]$ 中工作。由于 (p^*, q^*, r^*) 力迫 b 是一条新的共尾

穿过 $\dot{S}$ 的分支，并且 $(p^*, q^*) \in G_P \times G_K$，因此存在 $\tilde{r}^0 \leq r^0$、$\tilde{r}^1 \leq r^1$ 和 $\gamma > \gamma'$，使得 $\tilde{r}^0$ 与 $\tilde{r}^1$ 对 $\dot{b}(\gamma)$ 作出不同的决定；也就是说，存在 $\tau^0 \neq \tau^1$ 属于 $\dot{S}_\gamma$，使得 $\tilde{r}^0 \Vdash \dot{b}(\gamma) = \tau^0$，而 $\tilde{r}^1 \Vdash \dot{b}(\gamma) = \tau^1$。

由于 $\tilde{r}^0$ 和 $\tilde{r}^1$ 属于 $\mathbb{K}_\kappa/G_K$，$\tilde{r}^0 \restriction \theta$ 和 $\tilde{r}^1 \restriction \theta$ 属于 G_K，因此它们相容。令 q' 为 $\tilde{r}^0 \restriction \theta$、$\tilde{r}^1 \restriction \theta$ 和 q 的一个共同扩展，使得对于每个 $i < 2$，都有 $(q', \tilde{r}^i) \Vdash \dot{b}(\gamma) = \tau^i$ 属于 $V[G_\theta][G_P]$。由于 G_P 是 $V[G_\theta]$ 上的 $\mathbb{P}_\theta$-泛型，存在一个条件 $p' \in G_P$ 力迫这一点，因此 $(p', q', \tilde{r}^0)$ 和 $(p', q', \tilde{r}^1)$ 在 $V[G_\theta]$ 上对 $\dot{b}(\gamma)$ 作出不同的决定。由于我们假设 $p \in G_P$，可以取 p' 使其扩张 p。

由于 q' 同时扩张 $\tilde{r}^0 \restriction \theta$ 与 $\tilde{r}^1 \restriction \theta$，$T_{q'}$ 是 $T_{\tilde{r}^0}$ 与$T_{\tilde{r}^1}$二者的端延拓。我们如下定义 $u^i = (T_{u^i}, f_{u^i}) \leq (T_{\tilde{r}^i}, f_{\tilde{r}^i}) = \tilde{r}^i$（针对 $i < 2$）：令 $T_{u^i} = T_{q'}$且 $\mathrm{dom}(f_{u^i}) = \mathrm{dom}(f_{q'}) \cup \mathrm{dom}(f_{\tilde{r}^i})$，并定义

– 对每个 $\delta \in \mathrm{dom}(f_{q'})$，$f_{u^i}(\delta) = f_{q'}(\delta)$，以及 – $f_{u^i}(\delta) = \tau$，其中对每个 $\delta \in \mathrm{dom}(f_{\tilde{r}^i}) \setminus \mathrm{dom}(f_{q'})$，$\tau \in (T_{q'})^{\eta_{q'}}$ 且 $\tau \supseteq f_{\tilde{r}^i}(\delta)$。

容易看出，q' 对 $i < 2$ 仍扩张 $u^i \restriction \theta$，因此它力迫 u^i进入 $\mathbb{K}_\kappa/\dot{H}_\theta$。此外，由 u^i 对 $i < 2$的定义，(q', u^i)扩张$(q', \tilde{r}^i)$，因此(p', q', u^0)与(p', q', u^1)对 $\dot{b}(\gamma)$作出不同的判定。□

命题 *4.12.* 对每一个 (q, r^0)、$(q, r^1) \leq (q^*, r^*) \in \mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/\dot{H}_\theta)$ 以及 $\gamma' < \omega_1$，存在 $\gamma' < \gamma < \omega_1$、$\mathbb{P}_\theta$ 中位于 p^* 之下的极大反链 A、$(q', \bar{r}^0) \leq (q, r^0)$，以及 $(q', \bar{r}^1) \leq (q, r^1)$，使得对每一个 $p \in A$，$(p, q', \bar{r}^0)$ 与 $(p, q', \bar{r}^1)$ 对 $\dot{b}$ 直至 γ 作出不同的判定，并且条件 q' 同时延拓 $\bar{r}^0 \restriction \theta$ 与 $\bar{r}^1 \restriction \theta$。

证明。设给定 (q, r^0)、$(q, r^1) \leq (q^*, r^*) \in \mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/\dot{H}_\theta)$ 以及 $\gamma' < \omega_1$。我们对某个小于 ω_1、将在构造过程中确定的 α，进行长度为 α 的归纳，并构造 q'、$\bar{r}^0$ 与 $\bar{r}^1$，使得 $(q', \bar{r}^0)$ 是递减序列 $\langle (q'_\beta, r^0_\beta) \leq (q, r^0) \mid \beta < \alpha \rangle$ 的一个下界，且 $(q', \bar{r}^1)$ 是递减序列 $\langle (q'_\beta, r^1_\beta) \leq (q, r^1) \mid \beta < \alpha \rangle$ 的一个下界。在此过程中，我们还在 $\mathbb{P}_\theta$ 中构造一个极大反链 $A = \{p_\beta \mid \beta < \alpha\}$，并且 γ 将是序数的递增序列 $\langle \gamma_\beta < \omega_1 \mid \beta < \alpha \rangle$ 的上确界。

首先，设 p 是 p^* 以下的任意条件。根据断言 4.11，存在 $p_0 \leq p$、$q'_0 \leq q$、$r^0_0 \leq r^0$、$r^1_0 \leq r^1$ 和 $\gamma_0 > \gamma'$，使得 (p_0, q'_0, r^0_0) 与 (p_0, q'_0, r^1_0) 对 $\dot{b}(\gamma_0)$ 作出不同的判定，q'_0 扩展了条件 $r^0_0 \restriction \theta$ 和 $r^1_0 \restriction \theta$，并且还有 $T_{q'_0} = T_{r^0_0} = T_{r^1_0}$。

设 $\alpha < \omega_1$，并假设对于所有 $\beta < \alpha$，我们都已构造出 p_β、γ_β、q'_β、r^0_β 和 r^1_β。如果存在一个在 p^* 以下、且与 $\{p_\beta \mid \beta < \alpha\}$ 中所有条件均不相容的条件 p，我们就固定这样一个 p，并按如下方式继续。

如果 $\alpha = \beta + 1$，根据断言 4.11，存在 $p_\alpha \leq p$、$q'_\alpha \leq q'_\beta$、$r^0_\alpha \leq r^0_\beta$、$r^1_\alpha \leq r^1_\beta$ 和 $\gamma_\alpha > \gamma_\beta$，使得 $(p_\alpha, q'_\alpha, r^0_\alpha)$ 与 $(p_\alpha, q'_\alpha, r^1_\alpha)$ 对 $\dot{b}(\gamma_\alpha)$ 作出不同的判定，q'_α 扩展了条件 $r^0_\alpha \restriction \theta$ 和 $r^1_\alpha \restriction \theta$，并且还有 $T_{q'_\alpha} = T_{r^0_\alpha} = T_{r^1_\alpha}$。

若 α 是极限，我们首先构造 $\langle (q'_\beta, r^0_\beta) \leq (q, r^0) \mid \beta < \alpha \rangle$ 和 $\langle (q'_\beta, r^1_\beta) \leq (q, r^1) \mid \beta < \alpha \rangle$ 的适当下界，使这些下界具有相同的第一坐标。[4] 令 $q'_\beta = (T_\beta, f_\beta)$、$r^0_\beta = (S^0_\beta, g^0_\beta)$ 和 $r^1_\beta = (S^1_\beta, g^1_\beta)$

[4]注意到 $\mathbb{K}_\theta * (\mathbb{K}_\kappa/\dot{H}_\theta)$ 是 ω_1-闭的，因此 $\langle (q'_\beta, r^0_\beta) \leq (q, r^0) \mid \beta < \alpha \rangle$和 $\langle (q'_\beta, r^1_\beta) \leq (q, r^1) \mid \beta < \alpha \rangle$ 的下界总是存在；然而，为了进行我们的构造，我们需要确保这些下界具有相同的第一坐标。

对所有 $\beta<\alpha$ 都成立。注意，在构造的每一步 $\beta<\alpha$ 中，我们都确保了 $T_\beta=S^0_\beta=S^1_\beta$，因此 $T=\bigcup_{\beta<\alpha}T_\beta=\bigcup_{\beta<\alpha}S^0_\beta=\bigcup_{\beta<\alpha}S^1_\beta$

若 $\mathrm{ht}(T)$ 是极限序数 $\eta<\omega_1$，我们定义 T' 为 T 的一层末端扩张。为定义 T'，首先注意到，穿过 T 的分支有可数多个，由于函数 $\{f_\beta\mid\beta<\alpha\}$、$\{g^0_\beta\mid\beta<\alpha\}$ 和 $\{g^1_\beta\mid\beta<\alpha\}$，我们必须扩张这些分支。具体而言，令 $a=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{dom}(f_\beta)$，并对每个 $\delta\in a$，令

$$b_\delta:=\bigcup\{f_\beta(\delta)\mid\beta<\alpha\wedge\delta\in\mathrm{dom}(f_\beta)\}.$$

那么，每个 b_δ 都是穿过 T 的共尾分支，而我们必须将 b_δ 放入 T'。

对于函数 $\{g^i_\beta\mid\beta<\alpha\}$ 也类似：对 $i<2$，令 $c_i=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{dom}(g^i_\beta)$，并对每个 $\delta\in c_i$，令

$$d^i_\delta:=\bigcup\{g^i_\beta(\delta)\mid\beta<\alpha\wedge\delta\in\mathrm{dom}(g^i_\beta)\}.$$

那么，每个 d^i_δ 都是穿过 T的一条共尾分支，因此我们必须将 d^i_δ 置于 T'中。

如引理 4.3的证明中那样，对于每个 $t\in T$，令 E_t 为 T中包含 t的一条共尾分支，并令 $e_t=\bigcup E_t$。于是定义

$$T'=T\cup\{b_\delta\mid\delta\in a\}\cup\{d^0_\delta\mid\delta\in c_0\}\cup\{d^1_\delta\mid\delta\in c_1\}\cup\{e_t\mid t\in T\}.$$

现在我们如下定义 $\bar q=(T_{\bar q},f_{\bar q})$：$T_{\bar q}=T'$，$\mathrm{dom}(f_{\bar q})=a$ 且对于所有$\delta\in a$，$f_{\bar q}(\delta)=b_\delta$。类似地，对 $i<2$，如下定义 $u^i=(T_{u^i},f_{u^i})$：$T_{u^i}=T'$，$\mathrm{dom}(f_{u^i})=c^i$ 且对于所有 $\delta\in c^i$，$f_{u^i}(\delta)=d^i_\delta$。

如果 $\mathrm{ht}(T)$ 是后继序数 $\eta+1<\omega_1$，那么存在 $\beta^*<\alpha$，使得对于 β^* 与 α之间的所有 β，$T_\beta=T_{\beta^*}=T$，从而对于β^* 与 α之间的所有 β，$S^0_\beta=S^1_\beta=T_{\beta^*}=T$。现在，$T$ 是一棵正规树，我们可以利用 T轻易地定义下界。如下定义 $\bar q=(T_{\bar q},f_{\bar q})$：$T_{\bar q}=T$，$\mathrm{dom}(f_{\bar q})=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{dom}(f_\beta)$，并且对于所有属于$\mathrm{dom}(f_{\bar q})$的$\delta\in$，$f_{\bar q}(\delta)=f_\beta(\delta)$，其中 $\beta\geq\beta^*$ 满足 $\delta\in\mathrm{dom}(f_\beta)$。类似地，对 $i<2$，如下定义 $u^i=(T_{u^i},f_{u^i})$：$T_{u^i}=T$，$\mathrm{dom}(f_{u^i})=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{dom}(g^i_\beta)$，并且对于所有属于$\mathrm{dom}(f_{u^i})$的 $\delta\in$，$f_{u^i}(\delta)=g^i_\beta(\delta)$，其中 $\beta\geq\beta^*$ 满足 $\delta\in\mathrm{dom}(g^i_\beta)$。

至此，适当的下界 $(\bar q,u^i)$ 的 $\langle(q'_\beta,r^i_\beta)\leq(q,r^i)\mid\beta<\alpha\rangle$ for $i<2$ 的构造便完成了。现在令 γ 为 $\{\gamma_\beta\mid\beta<\alpha\}$ 的上确界。根据断言 4.11，存在 $p_\alpha\leq p$, $q'_\alpha\leq\bar q$, $r^0_\alpha\leq u^0$, $r^1_\alpha\leq u^1$ 和 $\gamma_\alpha>\gamma$，使得 $(p_0,q'_\alpha,r^0_\alpha)$ 与 $(p_0,q'_\alpha,r^1_\alpha)$ 对 $\dot b(\gamma_\alpha)$ 作出不同的判定，并且 q'_α 同时延伸 $r^0_\alpha\restriction\theta$ 和 $r^1_\alpha\restriction\theta$，此外还有 $T_{q'_\alpha}=T_{r^0_\alpha}=T_{r^1_\alpha}$。

如果不存在一个低于 p^* 且与 $\{p_\beta\mid\beta<\alpha\}$ 中所有条件都不相容的 p，我们就停止构造，令 $A=\{p_\beta\mid\beta<\alpha\}$，并令 γ 为$\langle\gamma_\beta\mid\beta<\alpha\rangle$的上确界。如果对于某个 $\beta<\omega$ 有 $\alpha=\beta+1$，我们就令 $q'=q'_\beta$，并为 $i<2$ 令 $\bar r^i=r^i_\beta$。如果 α 是极限，我们就在归纳的极限情形下构造 q' 和 $\bar r^i$（对应 $i<2$），以及 $\bar q$ 和 u^i（对应 $i<2$）。容易验证，如此构造的对象满足该断言的结论。□

现在我们可以构造标记系统了。该构造通过对 ω 进行归纳来完成。

设 γ_0 是小于 ω_1 的任意序数，并令 $(q_0,r_\emptyset)$ 为 (q^*,r^*)。由引理4.7，$q^*\leq r^*\restriction\theta$ 由于 q^* 力迫 r^* 进入 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$ 且 $\mathbb{K}_\theta$ 是可分离的。若 $q^*\neq r^*\restriction\theta$，我们可以适当地扩展 r^* 以确保条件 (a)；更多细节请参见构造的后继步骤中下文的断言4.13 。

现在固定 $n<\omega$，并假设对于所有 $s\in {}^{n}2$，我们已构造出 γ_n、q_n 和 r_s。令 $\langle s_i \mid i<2^n\rangle$ 枚举 ${}^{n}2$。下面说明如何为 $s\in {}^{n+1}2$ 构造 γ_{n+1}、q_{n+1}、$A_{s\restriction n}$ 和 r_s。

我们对 $2^n=m$ 进行归纳。先从 s_0 开始。由命题 4.12，存在 $q^0\leq q_n$、$r'_{s_0{}^\frown 0}$、$r'_{s_0{}^\frown 1}\leq r_{s_0}$、$\mathbb{P}_\theta$ 中的一个极大反链 A_{s_0}，以及 $\gamma^0\geq\gamma_n$，使得对所有 $p\in A_{s_0}$，$(p,q^0,r'_{s_0{}^\frown 0})$ 与 $(p,q^0,r'_{s_0{}^\frown 1})$ 对 $\dot b$ 直至 γ^0 的判定不同，且 q^0 同时延拓 $r'_{s_0{}^\frown 0}\restriction\theta$ 与 $r'_{s_0{}^\frown 1}\restriction\theta$。

现固定 $1\leq i<m$，并假设 γ^{i-1} 与 q^{i-1} 已经构造完成。由命题 4.12，存在 $q^i\leq q^{i-1}$、$r'_{s_i{}^\frown 0}$、$r'_{s_i{}^\frown 1}\leq r'_{s_i}$、$\mathbb{P}_\theta$ 中的一个极大反链 A_{s_i}，以及 $\gamma^i\geq\gamma^{i-1}$，使得对所有 $p\in A_{s_i}$，$(p,q^i,r'_{s_i{}^\frown 0})$、$(p,q^i,r'_{s_i{}^\frown 1})$ 对 $\dot b$ 直至 γ^i 的判定不同，且 q^i 同时延拓 $r'_{s_i{}^\frown 0}\restriction\theta$ 与 $r'_{s_i{}^\frown 1}\restriction\theta$。

令 q_{n+1} 为 q^{m-1}，并令 γ_{n+1} 为 γ^{m-1}。由构造可知，对于 $j<2$，所有 $s\in {}^{n}2$ 都满足所需的条件 (b) 和 (c)：对象 q_{n+1}、γ_{n+1}、$r'_{s^\frown j}$。

然而，我们只确保了对于 $s\in {}^{n+1}2$，q_{n+1} 扩张 $r'_s\restriction\theta$，但并未确保它们相等，而条件 (a) 要求它们相等。为满足条件 (a)，我们为所有 $s\in {}^{n+1}2$定义 r'_s 的适当扩张。

断言 4.13。上述构造的对象可以扩张，以满足定义 *4.10*中的标记系统的条件 *(a)–(c)*。

证明。由于对于所有 $s\in {}^{n+1}2$，q_{n+1} 都扩张 $r'_s\restriction\theta$，因此对于所有 $s\in {}^{n+1}2$，$T_{q_{n+1}}$ 都是 $T_{r'_s}$的端延拓。令 $\eta+1$ 为 $T_{q_{n+1}}$的高度。

现在，我们定义 r'_s 对 $s\in {}^{n+1}2$ 的扩张。对于 $s\in {}^{n+1}2$，设 f_s 是一个函数，使得 dom$(f_s)=\mathrm{dom}(f_{r'_s})\cap[\theta,\kappa)$，并且对于每个 $\alpha\in\mathrm{dom}(f_s)$，令 $f_s(\alpha)\supseteq f_{r'_s}(\alpha)$ 为 $T_{q_{n+1}}$ 在层 η 上的某个节点。对于 $s\in {}^{n+1}2$，令 $r_s=(T_{q_{n+1}},\ f_{q_{n+1}}\cup f_s)$。显然，对于所有满足 q_{n+1} 等于 $r_s\restriction\theta$ 的 $s\in {}^{n+1}2$，r_s 都是 $\mathbb{K}_\kappa$ 中的条件，因此条件 (a) 成立。由于对于所有 $s\in {}^{n+1}2$，r_s 都扩张了 r'_s，所以对于 q_{n+1}、γ_{n+1}、A_s 和 ${}^{r}s^\frown j$，条件 (b) 和 (c) 仍然成立；这对 $j<2$ 以及所有 $s\in {}^{n}2$ 也成立。□

至此，我们完成了标记系统的构造。令 γ 为$\langle\gamma_n\mid n<\omega\rangle$的上确界。为了完成定理 4.9 的证明，我们希望找到序列 $\langle q_n\mid n<\omega\rangle$ 的一个下界 q，以及对于所有满足 q 将 r_x 力迫进商 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$（对每个 $x\in {}^{\omega}2$）的 $x\in {}^{\omega}2$，找到序列 $\langle r_{x\restriction n}\mid n<\omega\rangle$ 的一个下界 r_x，从而确保每个 (q,r_x) 都是 $\mathbb{K}_\theta*(\mathbb{K}_\kappa/H_\theta)$ 中的条件。若如此，那么如下面所述，(p^*,q) 将在 $V[G_\theta]$ 上力迫 S 的层 γ 大小为 2^ω。

现在我们来构造所需的条件。首先令 $T^*=\bigcup_{n<\omega}T_{q_n}$ and$a=\bigcup_{n<\omega}\mathrm{dom}(f_{q_n})$。设 T^* 是一棵具有极限高度的正规树。如果 T^* 的高度是后继序数，那么适当下界的构造类似但更简单，我们将其留作练习，供读者完成。令 $\eta<\omega_1$ 表示 T^* 的高度。根据条件 (a)，对于所有 $x\in {}^{\omega}2$，$T^*=\bigcup_{n<\omega}T_{r_{x\restriction n}}$ and$a=\bigcup_{n<\omega}\mathrm{dom}(f_{r_{x\restriction n}})\cap\theta$。

注意，如果我们希望确保 $\langle q_n\mid n<\omega\rangle$ 力迫某个 $x\in {}^{\omega}2$ 的下界进入商中的 $\langle r_{x\restriction n}\mid n<\omega\rangle$ 的下界，那么我们不仅必须延拓所有穿过 T^*、由函数 $\{f_{q_n}\mid n<\omega\}$ 给出的共尾分支（回想一下 $\mathbb{K}_\kappa$ 是 ω_1-闭的证明），还必须延拓所有由 $\{f_{r_{x\restriction n}}\mid n<\omega\}$ 给出的共尾分支；否则，下界可能会变得不相容。因此，如果我们希望确保 $\langle q_n\mid n<\omega\rangle$ 力迫 $\langle r_{x\restriction n}\mid n<\omega\rangle$ 的下界对于 $x\in {}^{\omega}2$ 进入商中，那么我们必须

延拓 T^* 的不可数多个共尾分支。这是可以做到的，因为条件中的树可能很宽。

为了构造合适的下界，我们将采用与引理的证明中类似的方法 4.3。首先应用引理中的构造 4.3 以找到 q'，它是 $\langle q_n \mid n<\omega\rangle$ 的一个下界，并且满足 $T_{q'}$ 的高度为 $\eta+1$，且 $\mathrm{dom}(f_{q'})=a_\circ$

对于每个 $x\in {}^\omega 2$，令 $a_x=\bigcup_{n<\omega}\mathrm{dom}(f_{r_x\restriction n})\setminus\theta$。为了确保 q 与 $\langle r_{x\restriction n}\mid n<\omega\rangle$ 的一个下界相容，我们必须扩展 $\{r_{x\restriction n}\mid n<\omega\}$给出的共尾分支。对于 $\alpha\in a_x$，令

$$d^x_\alpha:=\bigcup\{f_{r_{x\restriction n}}(\alpha)\mid n<\omega\wedge\alpha\in\mathrm{dom}(f_{r_{x\restriction n}})\} \tag{1}$$

并令 $D_x=\{d^x_\alpha\mid\alpha\in a_x\}$。此外，我们定义 f_x 为一个定义域为a_x 的函数，使得对每个 $\alpha\in a_x$，$f_x(\alpha)=d^x_\alpha$。

在构造结束时，令 $T_q=T_{q'}\cup\bigcup_{x\in\omega 2}D_x$ 和 $f_q=f_{q'}$。对每个 $x\in{}^\omega 2$，令 $T_{r_x}=T_q$ 和 $f_{r_x}=f_{q'}\cup f_x$。

断言 4.14. 以下结论成立：

(i) q 是 $\mathbb{K}_\theta$中的一个条件；*(ii)* 对所有 $x\in{}^\omega 2$，r_x 是 $\mathbb{K}_\kappa$ 中的一个条件；*(iii)* 对所有 $x\in{}^\omega 2$，q 力迫 r_x 进入商 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$。

证明. 注意，T_q是正规树，因为 $T_{q'}$是正规的且 $T_q=T_{q'}\cup\bigcup_{x\in\omega 2}D_x$，因此 q 是 $\mathbb{K}_\theta$ 中的一个条件，并且对所有 $x\in{}^\omega 2$，r_x 也是 $\mathbb{K}_\kappa$ 中的条件。

根据 r_x的定义，$r_x\restriction\theta=q$，因此 q 力迫 r_x 进入商 $\mathbb{K}_\kappa/H_\theta$对每个 $x\in{}^\omega 2$。□

现在很容易验证，(p^*,q) 在 $V[G_\theta]$ 上力迫：$\dot\gamma$ 层 S 的大小为 2^ω。令 $G_P\times G_K$ 为一个包含 (p^*,q) 的、在 $V[G_\theta]$ 上的 $\mathbb{P}_\theta\times\mathbb{K}_\theta$-泛型。由于对于所有 $x\in{}^\omega 2$，q 都力迫 r_x 属于商 $\mathbb{K}/H_\theta$，因此 r_x 属于 $\mathbb{K}/G_K$。对于所有 $x\in{}^\omega 2$，取一个决定 $b(\gamma)$ 的 $r'_x\le r_x$，即对于某个 $\tau_x\in S_\gamma$，有 $r'_x\Vdash b(\gamma)=\tau_x$。现在只需证明对于所有 $x\neq y\in{}^\omega 2$，$\tau_x\neq\tau_y$。然而，这可由我们的标记系统的构造推出。给定 $x\neq y\in{}^\omega 2$，令 $s=x\cap y$，不失一般性，假设 x 延伸 $s^\frown 0$，且 y 延伸 $s^\frown 1$。现在，由于 p^* 属于 G_P，并且 A_s 是 p^* 下方的极大反链，存在一个属于 G_P 的 $p\in A_s$。由于 $(p,q_{n+1},r_{s^\frown 0})$ 和 $(p,q_{n+1},r_{s^\frown 1})$ 对 b 的决定在 $\gamma_{n+1}<\dot\gamma$ 处不同，存在 $\delta<\gamma$，以及 S_δ 中的 $\tau_0\neq\tau_1$，使得 $(p,q_{n+1},r_{s^\frown 0})\Vdash b(\delta)=\tau_0$，并且 $(p,q_{n+1},r_{s^\frown 1})\Vdash b(\delta)=\tau_1$。由于 $q\le q_{n+1}$，且 q 属于 G_K，所以 (p,q_{n+1}) 属于 $G_P\times G_K$，因此 $r_{s^\frown 0}\Vdash b(\delta)=\tau_0$，并且 $r_{s^\frown 1}\Vdash b(\delta)=\tau_1$ 在 $V[G_\theta][G_P][G_K]$ 上成立。由于 $r'_x\le r_x\le r_{s^\frown 0}$ 且 $r'_x\Vdash b(\gamma)=\tau_x$，故 $\tau_0<_S\tau_x$。类似地，我们可以证明 $\tau_1<_S\tau_x$。由于 $\tau_0\neq\tau_1$，可得 $\tau_x\neq\tau_y$。因此，(p^*,q) 在 $V[G_\theta]$ 上力迫 $\dot\gamma$ 层 S 的大小为 2^ω；于是 (p^*,q) 力迫 S 不是一棵 ω_1-树，这就产生了矛盾。定理 4.9 的证明至此完成。□

下面的定理将证明定理 B。

定理 4.15. 假设存在一个超紧基数 κ。那么存在一个强迫扩张，其中

(1) $2^\omega=\omega_2=\kappa$；*(2)* $\mathsf{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$ 成立；*(3)* 不存在库雷帕树，但存在一棵弱库雷帕树。

证明。为简单起见，假设广义连续统假设在 V 中成立。该泛型扩张是通过对 Mitchell 强迫（定义见第 2.3 小节）与添加一棵具有 κ 个分支的弱库雷帕树的强迫取积而得到的：$\mathbb{M}(\omega,\kappa) \times \mathbb{K}_\kappa$，为简便起见记作 $\mathbb{M} \times \mathbb{K}$。回忆第 2.3 小节，为定义 $\mathbb{M}(\omega,\kappa)$ 而使用的集合 A 是小于 κ 的不可达基数集合。设 $G \times H$ 是在 V 上的 $\mathbb{M} \times \mathbb{K}$-泛型。Mitchell 强迫保持 ω_1 以及所有大于或等于 κ 的基数，并力迫 $2^\omega = \kappa = \omega_2$。由于 $\mathbb{K}$ 在 V 中是 κ-Knaster 的，根据事实 2.9，$\mathbb{K}$ 在 $V[G]$ 中仍是 κ-Knaster 的，因此它保持所有大于或等于 κ 的基数。它也保持 $V[G]$ 上的 ω_1，因为它在 V 中是 ω_1-闭的，因此根据 Mitchell 强迫的标准乘积分析，它在 $V[G]$ 中是 ω_1-分配的 $\mathbb{M}$。至此，(1) 的证明完成。

根据 $\mathbb{K}$ 的定义，在 $V[H]$ 中存在一棵弱库雷帕树 T，它有 κ 个共尾分支。由于 $\mathbb{K} \times \mathbb{M}$ 保持 ω_1，因此在 $V[H][G] = V[G][H]$ 中，T 仍是一棵 ω_1 树，且有 $\kappa = \omega_2$ 个共尾分支。

现在我们证明 $\mathrm{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$。注意，根据事实 2.6，$\mathrm{GMP}^{\omega_2}(\omega_2)$ 等价于 无缝细树性质$^{\omega_2}(\omega_2)$。为证明 无缝细树性质$^{\omega_2}(\omega_2)$ 在 $V[G][H]$ 中成立，我们将采用提升论证，并像 [5] 中那样分析商。固定一个基数 $\lambda > \kappa$；如有必要，将其增大，并假设 $\lambda^{<\lambda} = \lambda$。我们将在 无缝细树性质$^{\omega_2}(\omega_2,\ \lambda)$ 在 $V[G][H]$ 中成立。首先，令

$$j : V \to M \tag{2}$$

是一个临界点为 κ 、由 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$ 上的正规超滤 U 给出的超紧初等嵌入；即 $M \cong \mathrm{Ult}(V,U)$。我们分两步提升初等嵌入 j。注意，$j(\mathbb{M}(\omega,\kappa)) = \mathbb{M}(\omega, j(\kappa))$，并回忆一下，存在一个从 $\mathbb{M}(\omega, j(\kappa))$ 到 $\mathbb{M}(\omega,\kappa)$ 的投影。我们将商 $\mathbb{M}(\omega, j(\kappa))/G$ 记作 $Q_\mathbb{M}$，并令 g 是 $V[G][H]$ 上的 $Q_\mathbb{M}$-泛型。于是我们可以在 $V[G][g]$ 中将嵌入提升为 $j : V[G] \to M[G][g]$。现在，$j(\mathbb{K}_\kappa) = \mathbb{K}_{j(\kappa)}$，并且根据引理 4.4，存在一个从 $\mathbb{K}_{j(\kappa)}$ 到 $\mathbb{K}_\kappa$ 的投影。我们将商 $\mathbb{K}_{j(\kappa)}/H$ 记作 $Q_\mathbb{K}$，并令 h 是 $V[G][H][g]$ 上的 $Q_\mathbb{K}$- 泛型。我们可以在 $V[G][H][g][h]$ 中进一步提升嵌入至

$$j : V[G][H] \to M[G][H][g][h]. \tag{3}$$

设 $D = \langle d_x \mid x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)^{V[G][H]} \rangle$ 是 $V[G][H]$ 中的一个 κ-纤细列表。我们要证明在 $V[G][H]$ 中存在一个经过 D 的不可言分支 b。考虑 D 在 j 下的像：

$$j(\langle d_x \mid x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda)^{V[G][H]} \rangle) = \langle d'_y \mid y \in \mathscr{P}_{j(\kappa)}(j(\lambda))^{M[G][H][g][h]} \rangle.$$

集合 $j\text{“}\lambda$ 是 $j(\lambda)$ 的一个大小为 $< j(\kappa)$ 的子集。我们如下定义不可言分支 b：$\lambda \to 2$ 在 $V[G][H][g][h]$ 中：[5]

$$\text{for } \alpha < \lambda,\ b(\alpha) = d'_{j''\lambda}(j(\alpha)). \tag{4}$$

在证明以下断言之前，我们先陈述提升嵌入 j的一些简单性质。由于我们假设 $\lambda^{<\lambda} = \lambda$，$|H(\lambda)| = \lambda$，而这在 $V[G][H]$中仍然成立，即 $|H(\lambda)^{V[G][H]}| = \lambda$。在（3）中，我们提升了由定义在 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)$上的正规超滤 U 所生成的嵌入，因此对于 $\mathscr{P}_\kappa(\lambda)^{V[G][H]}$中的每个闭无界集 C，$j\text{“}\lambda$ 都是 $j(C)$的一个元素；由于 λ 与 $H(\lambda)^{V[G][H]}$之间存在双射，因此

[5]我们将 λ 和 $j''\lambda$ 的子集与其示性函数等同，以使其在形式上严谨。

$\mathscr{P}_\kappa\lambda^{V[G][H]}$ 与 $\mathscr{P}_\kappa H(\lambda)^{V[G][H]}$之间存在对应关系，特别地，对于 $\mathscr{P}_\kappa H(\lambda)^{V[G][H]}$ 中的每个闭无界集 $C \in V[G][H]$，都有

$$j``H(\lambda)^{V[G][H]} \in j(C). \tag{5}$$

命题 4.16。对每个 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda^{V[G][H]}$，$b \restriction x \in M[G][H]$。

证明：由 D 的纤细性，我们可以固定一个闭无界集 C，使得对于每个 $N \in C$、$N \prec H(\lambda)^{V[G][H]}$，以及每个大小为 ω_1 的 $x \in N$，都有 $d_{N\cap\lambda} \cap x \in N$。

令 $x \in \mathscr{P}_\kappa\lambda^{V[G][H]}$ 任意。由整个强迫的 κ-cc 性质可知，

$$x \in H(\lambda)^{V[G][H]} = H(\lambda)^{M[G][H]}$$

因此 $j``x = j(x) \in j``H(\lambda)^{M[G][H]}$。我们将 $H(\lambda)^{M[G][H]}$ 记作 N。注意，根据一般的模型论论证，或者调用 (5)，$j``N$ 是 $j(H(\lambda)^{V[G][H]})$ 的初等子模型。由于 $j``H(\lambda)^{M[G][H]} \in j(C)$，我们有$d'_{(j``N)\cap j(\lambda)} \restriction j``x = d'_{j``\lambda} \restriction j``x \in j``N$。由此可知，存在一个属于$N \subseteq M[G][H]$ 的函数 f，其定义域为 x，使得对每个 $\alpha \in x$，

$$f(\alpha) = d'_{j``\lambda}(j(\alpha)).$$

根据 b、$f = b \restriction x$ 的定义，证明即告完成。 □

命题 4.17. b 属于 $M[G][H]$。

证明。我们证明 b——它在 $M[G][H]$ 关于 $\mathscr{P}_\kappa\lambda^{V[G][H]} = \mathscr{P}_\kappa\lambda^{M[G][H]}$ 由命题 4.16 逼近，因此不能通过 $Q_{\mathbb{K}} \times Q_{\mathbb{M}}$ 在 $M[G][H]$ 上添加，所以它已经属于 $M[G][H]$。

我们首先论证，$Q_{\mathbb{K}}$在 $M[G][H]$上是 ω_1-分配的，且具有 ω_2-Knaster 性质。在 M中，$j(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K} * Q_{\mathbb{K}}$ 是 ω_1-闭的，因此根据 $\mathbb{M}$的乘积分析，它在 $M[G]$中是 ω_1-分配的，进而 $Q_{\mathbb{K}}$在 $M[G][H]$ 中是 ω_1-分配的。关于ω_2-Knaster 性质，首先注意到，根据引理 4.5，$Q_{\mathbb{K}}$ 在 $M[H]$ 中具有 κ-Knaster 性质。由于$\mathbb{M}$ 在 M 中具有 κ-Knaster 性质，根据事实 2.9，它在 $M[H]$ 中仍具有 κ-Knaster 性质，因此根据事实 2.9，$Q_{\mathbb{K}}$ 在 $M[H][G] = M[G][H]$中具有κ-Knaster 性质。由于 $Q_{\mathbb{K}}$在 $M[G][H]$中具有 κ-Knaster 性质，它具有 $\kappa = \omega_2$-逼近性质，且不能在 $M[G][H]$上添加 b。

现在，我们将证明，在 $M[G][H][h]$上，$Q_{\mathbb{M}}$ 也无法添加 b。在 $M[G][H][h]$ 中，$\kappa = \omega_2 = 2^\omega$ 和 $Q_{\mathbb{M}}$ 力迫等价于 $\mathrm{Add}(\omega, \kappa^\dagger) * \mathbb{M}^\kappa$，其中 $\kappa^\dagger$ 是高于 κ 的第一个不可达基数。由于该强迫是 ω_1-Knaster，$\mathrm{Add}(\omega, \kappa^\dagger)$ 无法添加分支 b。

在 $M[G][H][h][\mathrm{Add}(\omega, \kappa^\dagger)]$ 中，$2^\omega = \kappa^\dagger > (\omega_2)^{V[G][H]}$ 和 D 是一个宽度至多为 $((2^{\omega_1})^+)^{V[G][H]} = (\omega_3)^{V[G][H]}$ 的列表。通过标准的乘积分析（参见第 2.3 节），$\mathbb{M}^\kappa$ 是一个形如 $\mathrm{Add}(\omega, j(\kappa)) \times \mathbb{Q}^*_\kappa$ 的积的投影，其中 $\mathbb{Q}^*_\kappa$ 是 ω_1-闭的。同样，由于该强迫是 ω_1-Knaster，$\mathrm{Add}(\omega, j(\kappa))$ 无法添加分支 b。由于在 $M[G][H][h][\mathrm{Add}(\omega, \kappa^\dagger)]$，中，$D$ 的宽度为 $(\omega_3)^{V[G][H]} < 2^\omega$，我们可以将事实 2.12 应用于 $\mathrm{Add}(\omega, j(\kappa))$，把 P 和 $\mathbb{Q}^*_\kappa$ 视为模型 $M[G][H][h][\mathrm{Add}(\omega, \kappa^\dagger)]$ 上的 Q。因此，强迫 $\mathbb{Q}^*_\kappa$ 无法在模型上添加 b

$$M[G][H][h][\mathrm{Add}(\omega, \kappa^\dagger)][\mathrm{Add}(\omega, j(\kappa))],$$

因此，共尾分支 b无法通过 $\mathbb{M}^\kappa$ 在 $M[G][H][h][\mathrm{Add}(\omega, \kappa^\dagger)]$上添加。 □

断言 4.18. 函数 b 是穿过 D的不可言分支。

证明. 我们需要证明集合 $S = \{x \in \mathscr{P}_\kappa(\lambda) \mid b \restriction x = d_x\}$ 是驻定的，因此只需证明 j“λ 属于 $j(S) = \{y \in \mathscr{P}_{j(\kappa)}(j(\lambda)) \mid j(b) \restriction y = d'_y\}$。然而，这可由 b的定义推出： $j(b) \restriction j$“$\lambda = j$“$b = d'_{j\text{“}\lambda}$。□

这就完成了（2）的证明。根据定理 4.9，泛型扩张 $V[G][H]$ 中不存在库雷帕树，因此我们得到（3），从而完成定理4.15的证明。□

注 4.19。 如果从弱于超紧的大基数出发，可以得到定理 4.15 的变体，其中第（2）项有所弱化。例如，对定理4.15 的证明作直接改编可知，若 κ是弱紧基数，且 $G \times H$是 $\mathbb{M}(\omega, \kappa) \times \mathbb{K}_\kappa$-强迫相对于 V是泛型的，那么 $V[G][H]$满足 树性质(ω_2) + 弱基数海伍德性质 + ¬基数海伍德性质。

5. Failure of Kurepa hypothesis and weak Kurepa hypothesis

本节综述关于 ¬基数海伍德性质和 ¬弱基数海伍德性质的（不可）破坏性的已知结果，并直接证明 ¬弱基数海伍德性质总能在 σ-中心强迫下保持。首先注意，由于每棵库雷帕树都是弱库雷帕树，¬弱基数海伍德性质蕴含 ¬基数海伍德性质。与会导致连续统假设失效的 ¬弱基数海伍德性质不同， ¬基数海伍德性质与连续统假设相容。这两个原理的一致性均可由不可达基数的一致性推出。 ¬基数海伍德性质的经典模型是列维坍缩 Coll($\omega_1, < \kappa$) 所生成的扩张，其中 κ 在基模型中是不可达基数； ¬弱基数海伍德性质的经典模型是由 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$ 生成的扩张，其中 κ 在基模型中是不可达基数。

现假设 κ 是一个不可达基数。托多尔切维奇[23] 的一个论证表明，在由 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$得到的扩张中， ¬弱基数海伍德性质在所有势为 ω_1的 ccc 强迫下都不可摧毁。对于列维坍缩 Coll($\omega_1, < \kappa$)所得扩张中的 ¬基数海伍德性质，类似的结果成立。

然而，根据 Jensen 的一个结果， $\square_{\omega_1}$ 蕴含存在一个添加库雷帕树的 ccc 强迫（参见 [11]）。因此，若 κ是一个并非马洛的不可达基数，则存在一个 ccc 强迫，它在由 Coll($\omega_1, < \kappa$) 与 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$ 得到的两个泛型扩张中都会添加一棵库雷帕树。由上一段可知，这个 ccc 强迫的势必须大于 ω_1。

就 ¬基数海伍德性质而言，根据 Jensen 与 Schlechta [11]的一个结果， $\square_{\omega_1}$ 这一假设是必要的。他们证明，若 κ 是马洛的，则在由 Coll($\omega_1, < \kappa$) 得到的扩张中， ¬基数海伍德性质在所有 ccc 强迫下都不可摧毁。对于 Mitchell 强迫 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$ 与 ¬弱基数海伍德性质，类似结果仍然是开的，其中 κ 是基模型中的一个马洛基数。

回到大小为 ω_1 的 ccc 强迫：在 [13], 中，Krueger 与第二作者证明，仅假设一个不可达基数的一致性，便与连续统假设 相容：库雷帕假设不成立，但仍存在一棵几乎库雷帕苏斯林树。特别地，存在一个大小为 ω_1 的 ccc 强迫，它添加一棵库雷帕树。如推论 1.1 所示，假设一个不可达基数的一致性，则 ¬弱基数海伍德性质 成立，同时存在一棵几乎库雷帕苏斯林树。

特别地，在其经典模型中， ¬基数海伍德性质与 ¬弱基数海伍德性质在所有大小为 ω_1 的 ccc 强迫下都是不可破坏的，但对二者而言，都存在模型，使得它们可被大小为 ω_1 的 ccc 强迫破坏。

到目前为止，我们只考虑了ccc强迫。对于满足更强性质的强迫，我们了解些什么？在 [8], 中，Honzik与作者证明了GMP蕴含

即 ¬弱基数海伍德性质被任意 σ-中心强迫所保持。也就是说，若 V 是满足GMP的传递模型， $\mathbb{P} \in V$ 是 σ-中心的，且 G 是 V上的 $\mathbb{P}$-泛型，则 $V[G]$满足 ¬弱基数海伍德性质。特别地，在GMP的模型上，通过添加任意多个科恩实数， ¬弱基数海伍德性质得以保持。由于该论证仅需要针对小集合的猜测模型性质，而这等价于 ¬弱基数海伍德性质，因此 ¬弱基数海伍德性质总是被 σ-中心强迫所保持。

下面，我们给出一个直接证明，说明 ¬wKH 在任意 σ-中心化强迫下都保持成立，而无需引用猜测模型性质。首先，回顾 σ-中心化强迫的定义。

定义 5.1. 设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫。若 $\mathbb{P}$ 可以写成某个族 $\{\mathbb{P}_n \subseteq \mathbb{P} \mid n < \omega\}$ 的并，且对于每个 $n < \omega$ 都有 $\mathbb{P}$，则称 $\mathbb{P}$ 是 σ-中心化 的:

$$\text{for every } p, q \in \mathbb{P}_n \text{ there exists } r \in \mathbb{P}_n \text{ with } r \leq p, q. \tag{6}$$

因此，只要将每个 $\mathbb{P}_n$ 向上闭包， $\mathbb{P}$ 就可以写成 ω 个滤子的并。

某些 σ-中心性的定义只要求这些条件彼此相容，而不要求见证必然属于 $\mathbb{P}_n$。在这种情况下，条件（6）表述如下:

(7) 对每个 $k < \omega$ 以及每个序列 $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ of conditions in $\mathbb{P}_n$ there exists $r \in \mathbb{P}$ with $r \leq p_i$ for every $0 \leq i < k$.

条件（6）和（7）通常并不等价（参见 Kunen [15], , 习题 III.3.27 之前），但这种区别对我们并不十分重要，因为 Cohen 强迫和普里克里强迫等常见强迫都满足更强意义上的（6）中心性。另请注意，对于布尔代数，这些条件是等价的: 定义（7）意味着每个 $\mathbb{P}_n$ 都是一个具有有限交性质（FIP）的系统，因此可以扩充为一个滤子。

定理 5.2。 弱库雷帕假设的失败在任意 σ-中心强迫下都得以保持。也就是说，若 V 是满足 ¬弱基数海伍德性质的传递模型， $\mathbb{P} \in V$ 是σ-中心的，且 G 是 $\mathbb{P}$在 V上的泛型，则 $V[G]$ 满足 ¬弱基数海伍德性质。

证明。 固定一个强迫概念 $\mathbb{P} = \bigcup_{n<\omega} \mathbb{P}_n$，其中每个 $\mathbb{P}_n$ 都如 σ-中心强迫的定义所述；也就是说，对于每个 $n < \omega$ 以及每个 p， $q \in \mathbb{P}_n$，都存在 $r \in \mathbb{P}_n$，使得 $r \leq p$， q。设 G 是 V上的 $\mathbb{P}$-泛型。假设 T是一个 $\mathbb{P}$-名称，它表示一棵弱库雷帕树 T，并为简便起见，假设 $1_{\mathbb{P}}$ 力迫此事。我们还假设 T 的底集是 ω_1。

我们将在基模型中定义一棵弱库雷帕树 S，从而完成定理的证明。 S 的底集将为 $\omega \times \omega_1$；我们按如下方式定义序关系 $<_S$：对于 (n, α)，$(m, \beta) \in S$，当且仅当 $n = m$ 且存在某个 $p \in \mathbb{P}_n$ 力迫 $\alpha <_{\dot{T}} \beta$时，令 $(n, \alpha) <_S (m, \beta)$。注意， $<_S$ 是一个严格偏序：反对称性源于 $\mathbb{P}_n$ 中的任意两个条件都相容，而传递性则利用了这样一个事实： $\mathbb{P}_n$中条件的相容性可由 $\mathbb{P}_n$中的一个条件见证。

现在，我们证明 S 确实是一棵弱库雷帕树。显然， S 的大小为 ω_1。为证明 S 的高度为 ω_1，我们先证明它的高度不可能大于 ω_1。否则，对于某个 $(n, \gamma) \in S$，存在 (n, γ) 属于 S_{ω_1}；这意味着 $\mathrm{pred}_S((n, \gamma)) = \{(n, \alpha) <_S (n, \gamma) \mid (n, \alpha) \in S\}$ 的序型为 ω_1。令 $I = \{\alpha < \omega_1 \mid (n, \alpha) \in \mathrm{pred}_S((n, \gamma))\}$。根据 $<_S$ 的定义可知，对于每个 $\alpha \in I$，都存在 $p_\alpha \in \mathbb{P}_n$ 力迫 $\alpha <_{\dot{T}} \gamma$。由于 $\mathbb{P}$ 满足可数链条件，因此存在 $\alpha \in I$

，使得 $p_\alpha \Vdash \{\beta \in I \mid p_\beta \in G\}$ 的大小为 ω_1，其中 G 是关于 $\mathbb{P}$上的泛型滤子的一个名称。于是我们可以看到， p_α 力迫 γ 有 ω_1 个前驱，因此在 T 中的高度至少为 ω_1 ，这与事实矛盾，因为 $1_\mathbb{P}$ 力迫 T 是一棵高度为 ω_1 的树。

为证明一个的高度不是可数的，设 b 被力迫为一个共尾分支。由于 b 被力迫为一个共尾分支，特别是不可数的，因此存在 n，使得集合 $I = \{\alpha < \omega_1 \mid \exists p \in \mathbb{P}_n (p \Vdash \alpha \in b)\}$ 是不可数的。容易看出，对于任意 α， $\beta \in I$，$(n,\ \alpha)$ 与 $(n,\ \beta)$ 在 S 中可比较；因此，$d = \{(n,\ \alpha) \mid \alpha \in I\}$ 是经过 S 的一条不可数链。因此， S的高度不可能是可数的。结合上一段可知， S 的高度恰为 ω_1。

此外，我们可以证明，上一段中的 d 是一个共尾分支；也就是说，我们证明 d 是一条极大链。设 (n,γ) 是 S 的一个节点，并且它与所有 (n,α)（其中 (n,α) 属于 d）都可比较。由于 S 的高度为 ω_1，(n,γ) 不可能高于 d 中的所有节点；因此，存在 $(n,\alpha) \in d$，使得 $(n,\gamma) <_S (n,\alpha)$。根据 $<_S$ 的定义，存在 $p \in \mathbb{P}_n$ 力迫 $\gamma <_{\dot{T}} \alpha$；根据 d 的定义，存在 $q \in \mathbb{P}_n$ 力迫 $\alpha \in b$。由于 p 和 q 都属于 $\mathbb{P}_n$，因此存在 $r \in \mathbb{P}_n$，它低于 p 和 q，故 r 力迫 $\gamma \in b$。由于 $r \in \mathbb{P}_n$，$(n,\gamma) \in d$。

类似的论证表明， S 至少有 ω_2 个共尾分支。令 $\langle b_\alpha \mid \alpha < \omega_2\rangle$ 为一列 $\mathbb{P}$-名称，它们表示穿过 T 的共尾分支，并且对所有 $\alpha < \beta < \omega_2$，都有 $1_\mathbb{P} \Vdash b_\alpha \neq b_\beta$。对每个 $\alpha < \omega_2$，选取一个不可数子集$I_\alpha \subseteq \omega_1$，并按前几段所述选取 $n_\alpha < \omega$。那么， $d_\alpha = \{(n_\alpha,\ \gamma) \mid \gamma \in I_\alpha\}$是穿过 S 的一个共尾分支。由于这样的分支有 ω_2个，存在一个大小为 ω_2 的$J \subseteq \omega_2$ 以及某个 $n < \omega$，使得对所有 $\alpha \in J$，都有 $n_\alpha = n$。

为完成证明，我们证明共尾分支 $\{d_\alpha \mid \alpha \in J\}$ 两两不同。令 $\alpha \neq \beta \in J$，并假设 $d_\alpha = d_\beta$，从而导出矛盾。这尤其意味着每个 $\gamma \in I_\alpha$ 都属于 I_β；因此，对每个 $\gamma \in I_\alpha$，存在$p_\gamma \in \mathbb{P}_n$，它力迫 $\gamma \in b_\beta$。同样，由于 $\mathbb{P}$ 满足可数链条件，存在 $\gamma \in I_\alpha$，使得 $p_\gamma \Vdash \{\delta \in I_\alpha \mid p_\delta \in G\}$ 的大小为 ω_1，其中 G 是一个名称，表示在 $\mathbb{P}$上的泛型滤子。若 $p_\gamma \in G$，那么在 $V[G]$中，有 $b_\alpha = b_\beta$。这与假设 $1_\mathbb{P} \Vdash b_\alpha \neq b_\beta$矛盾。□

需要指出的是，关于 $\neg$基数海伍德性质的相应问题仍未解决，即使考虑添加单个科恩实数的强迫也是如此。请参见下一节中的开放问题。

6. 开放问题

我们在定理 A 中证明，GMP 与可数链条件强迫相容地可被破坏，甚至可以由大小为 ω_1 的强迫破坏。关于 树性质(ω_2) 的相应问题，早在 [24] 和 [9], 中就已提出，但仍未解决。我们在此重述这一问题。

问题 6.1。 是否相容于树性质(ω_2)成立且在可数链条件强迫下不可破坏？反过来，是否相容于树性质(ω_2) 成立，并且存在一种可数链条件强迫添加一棵 ω_2阿朗斯赞树?

回答问题的一个自然起点是考察6.1 中定理 A 的模型$V[\mathbb{M}]$ 。请注意，在该模型中GMP 在用几乎库雷帕苏斯林树进行强迫后所得的扩张中失效 T，这仅仅是因为 T 变成了一棵库雷帕树，而GMP 蕴含不存在库雷帕树。对于树性质(ω_2)或

GMP$^{\omega_2}(\omega_2)$。根据 Cummings [5], 的一项结果，从一个弱紧基数出发，相容于树性质与基数海伍德性质同时成立；而根据作者 [16], 的一项结果，从一个超紧基数出发，相容于 GMP$^{\omega_2}(\omega_2)$与基数海伍德性质同时成立。

问题 6.2。 假设 T 是一个自由苏斯林树，且 κ 是一个超紧基数。令 $V[\mathbb{M}]$ 为第 3节中定理 A 的模型。 TP(ω_2)，甚至GMP$^{\omega_2}(\omega_2)$，是否在 $V[\mathbb{M}][T]$中成立？

如上所述， [8] 中证明了， GMP 在添加任意数量的科恩实数后总是保持不变，这为我们的定理 A 的一个方向上的尖锐性提供了证明。根据定理 5.2，对于 ¬wKH也同样如此，这是 GMP的一个推论。然而，关于 ¬基数海伍德性质 和 TP(ω_2)（GMP的另外两个推论）的相应问题，其状态仍然是开放的，即使对于添加单个科恩实数的强迫也是如此。

问题 6.3。 是否相容，使得 ¬基数海伍德性质 成立，但在添加单个科恩实数后是可破坏的？是否相容，使得 TP(ω_2)成立，但在添加单个科恩实数后是可破坏的？

Appendix 附录 A。

在本附录中，我们兑现备注3.1中的承诺，给出一个 形如 Add$(\omega, 1) * \mathbb{Q}$ 的两步迭代示例，使得 $\mathbb{Q}$ 被强迫为完全适当，因此是 ω_1-分配的，然而在 $\mathbb{Q}$ 上 V 使用相关的项强迫会使 ω_1坍缩。

令 T 为一个由取值于 ω的有限对一函数构成的正规相干 Aronszajn树。更准确地说：

- $T \subseteq {}^{<\omega_1}\omega$ 是 $\subseteq$-向下闭的，并且 $(T, \subseteq)$ 是一棵正规 Aronszajn树；
- 中的每个元素都是有限对一函数；
- 对所有 $\alpha < \omega_1$ 及所有 $s, t \in T_\alpha$，都有 $s =^* t$，也就是说，集合 $\{\eta < \alpha \mid s(\alpha) \neq t(\alpha)\}$ 是有限的。

在ZFC中构造这样的Aronszajn树是直截了当的。给定一个实数 $r \in {}^{\omega}\omega$，令 T^r 为通过设定 $T^r = \{r \circ t \mid t \in T\}$所定义的 ${}^{<\omega_1}\omega$的子树；注意，该定义对于仅存在于 V的外模型中的实数 r 仍然有意义。下述事实是众所周知的（例如，参见 [22]的末尾）。

定理 A.1. 假设 $r \in {}^{\omega}\omega$ 相对于 V 是科恩泛型的。则在 $V[r]$中， T^r是一棵苏斯林树。

令 $\mathbb{P} =$ Add$(\omega, 1)$为添加单个科恩实数的强迫。在本节中，我们将 $\mathbb{P}$ 的底集视为 ${}^{<\omega}\omega$，并按逆包含排序。令 $\dot{G}$为泛型滤子的典范 $\mathbb{P}$-名称，并令 $\dot{r}$ 为 $\bigcup G$的一个 $\mathbb{P}$-名称。由定理 A.1，我们有 $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$T^{\dot{r}}$ 是苏斯林的”。特别地，将 $T^{\dot{r}}$ 视为一个强迫概念的 $\mathbb{P}$-名称（回顾：树的强迫序与树序相反），我们有 $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$T^{\dot{r}}$ 满足可数链条件且完全适当”。特别地，两步迭代 $\mathbb{P} * T^{\dot{r}}$ 满足可数链条件。令 $\mathbb{Q}$ 表示与该两步迭代相关联的项强迫。特别地， $\mathbb{Q}$ 中的条件是所有被 $1_{\mathbb{P}}$ 强迫成为 $T^{\dot{r}}$之元素的 $\mathbb{P}$-名称；并且，给定 $\dot{s}$、 $\dot{t} \in \mathbb{Q}$，我们规定 $\dot{t} \leq_{\mathbb{Q}} \dot{s}$ 当且仅当 $1_{\mathbb{P}}$ 强迫 $\dot{t}$ 作为强迫条件延拓 $\dot{s}$ ，即当且仅当 $1_{\mathbb{P}} \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot{s} \leq_{T^{\dot{r}}} \dot{t}$”。

命题 A.2. 在 V 上用 $\mathbb{Q}$ 进行强迫会坍缩 ω_1。

证明。 设 H 是在 V 上的 $\mathbb{Q}$-泛型，并反设 $(\omega_1)^V$ 在 $V[H]$中仍不可数。特别是，由于 T 是一棵由有限对一函数组成的相干阿伦斯佐恩

树， T 在 $V[H]$ 中仍是阿朗斯赞树。在 V 中，对每个 $\alpha < \omega_1$，令 D_α 为满足 $\Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\mathrm{ht}_{T^{\dot r}}(\dot t) \geq \alpha$”的 $\dot t \in \mathbb{Q}$ 所成的集合。利用 T 的正规性和极大原理，可以直接证明每个 D_α 都是 $\mathbb{Q}$ 的稠密开子集；因此，在 $V[H]$ 中，对每个 $\alpha < \omega_1$，我们都可以选定一个 $\dot t_\alpha \in H \cap D_\alpha$。对每个 $\alpha < \omega_1$，选定一个 $p_\alpha \in \mathbb{P}$、一个 $\beta_\alpha \in [\alpha, \omega_1)$ 和一个 $s_\alpha \in T_{\beta_\alpha}$，使得在 V 中有 $p_\alpha \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot t_\alpha = \dot r \circ s_\alpha$”。由于 ω_1 在 $V[H]$ 中得到保留，我们可以在 $V[H]$ 中选定一个统一的 $p \in \mathbb{P}$ 和一个驻定的 $A \subseteq \omega_1$，使得

- 对所有 $\alpha \in A$，我们有 $p_\alpha = p$；
- 对所有 $\alpha < \alpha'$，它们都属于 A，我们有 $\beta_\alpha < \alpha'$。

特别地，由此可知，对所有 $\alpha < \alpha'$，它们都属于 A，我们在 V 中有 $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot r \circ s_\alpha \subseteq \dot r \circ s_{\alpha'}$”。令 $k = \mathrm{dom}(p)$，并且对每个 $\alpha \in A$，令 $B_\alpha = \{\eta < \beta_\alpha \mid s_\alpha(\eta) < k\}$；注意到 $B_\alpha \in [\beta_\alpha]^{<\omega}$。

命题 A.3. 对所有 $\alpha < \alpha'$，它们都属于 A，我们有 $B_\alpha \subseteq B_{\alpha'}$。

证明。为导出矛盾，假设 $\alpha < \alpha'$ 同时属于 A 和 $\eta \in B_\alpha \setminus B_{\alpha'}$。令 $j' = s_{\alpha'}(\eta)$ 和 $j = s_\alpha(\eta)$，注意到 $j < k \leq j'$。取 $p' \leq_{\mathbb{P}} p$ 使得 $p'(j') \neq p(j)$。于是 $p' \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$(\dot r \circ s_\alpha)(\eta) \neq (\dot r \circ s_{\alpha'})(\eta)$”，这与 $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot r \circ s_\alpha \subseteq \dot r \circ s_{\alpha'}$”这一事实矛盾。□

由于对每个 $\alpha \in A$，B_α 都是有限的，并且 $\langle B_\alpha \mid \alpha \in A\rangle$ 是 $\subseteq$-递增的，因此如有必要，去掉 A 的一个初始段后，我们可以假设存在 $B \in [\omega_1]^{<\omega}$，使得对所有 $\alpha \in A$都有 $B_\alpha = B$。现在取一个不可数的 $A^* \subseteq A$ 以及一个固定函数$f\colon B \to \omega$，使得对所有 $\alpha \in A^*$都有 $s_\alpha \restriction B = f$。

断言 A.4. 对于所有 $\alpha < \alpha'$，在 A^* 中均有 $s_\alpha = s_{\alpha'} \restriction \beta_\alpha$。

证明。取定 $\alpha < \alpha' \in A^*$ 和 $\eta < \beta_\alpha$。若 $\eta \in B$，则 $s_\alpha(\eta) = f(\eta) = s_{\alpha'}(\eta)$。若 $\eta \notin B$，则有 $s_\alpha(\eta)\ s_{\alpha'}(\eta) \geq k$。为导出矛盾，假设 $s_\alpha(\eta) = j \neq j' = s_{\alpha'}(\eta)$。取 $p' \leq_{\mathbb{P}} p$，使得 $p'(j) \neq p'(j')$。于是 $p' \Vdash_{\mathbb{P}}$“$(\dot r \circ s_\alpha)(\eta) \neq (\dot r \circ s_{\alpha'})(\eta)$”，这与事实 $p \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot r \circ s_\alpha \subseteq \dot r \circ s_{\alpha'}$”矛盾。□

现在，该断言意味着 $\{s_\alpha \mid \alpha \in A^*\}$ 的向下闭包是 $V[H]$中穿过 T 的一条共尾分支，这与 T 在 $V[H]$中仍为Aronszajn树这一事实相矛盾。□

References

[1] Uri Abraham。 $\aleph_2$ 和 $\aleph_3$上的阿朗斯赞树。 *Ann. Pure Appl. Logic*，24(3):213–230，1983。[2] James E. Baumgartner。迭代力迫。载于 A. R. D. Mathias 编， *Surveys in Set Theory*，第 1–59 页。剑桥大学出版社，1983。伦敦数学会讲义系列 87。[3] Stefan Bilaniuk。 *Some results on Souslin trees*。博士论文，达特茅斯学院，汉诺威，1989。[4] Sean Cox 和 John Krueger。不可破坏的猜测模型与连续统。 *Fund. Math.*，239 3 221( ): –258，2017。[5] James Cummings。阿朗斯赞树与库雷帕树。 *Arch. Math. Logic*，57(1-2):83–90，2018。[6] Keith J. Devlin 和 H ° ° *The Souslin problem* 405 *Lecture* avard *Notes in Mathematics* 1974 Johnsbraten。，第 Vol. 卷，出自 。施普林格出版社，柏林-纽约，。[7] William B. Easton。正则基数的幂。 *Ann. Math. Logic*，1:139–178，1970。[8] Radek Honzik、Chris Lambie-Hanson 和 ˇS ´arka Stejskalov ´a。PFA 模型上一些紧致性原理的不可破坏性。 *Ann. Pure Appl. Logic*，175(1, part A):论文编号 103359，17，2024。[9] Radek Honzik 和 ˇS ´arka Stejskalov ´a。树性质的不可破坏性。 *J. Symb. Log.*，85 1 467 485，2020 ( ): – 。

[10] Thomas J. Jech。关于不可数基数的一些组合问题。

Ann. Math. , : –

Logic 5 165 198, 1972 73

/ 。[11] R. B. Jensen 和 K. Schlechta。关于泛型库雷帕猜想的结果。 *Arch. Math. Logic*, 30 1 13( ): – 27, 1990。[12] Renling Jin 和 Saharon Shelah。小强迫能否产生库雷帕树?

Ann. Pure Appl. , ( ):

Logic 85 1 47 68, 1997

– 。[13] John Krueger 和 ˇS´arka Stejskalov´a。自由苏斯林树上的强迫。2024。arXiv 预印本, arXiv:2402.00226。[14] John Krueger 和 ˇS´arka Stejskalov´a。一棵具有强非饱和性的阿朗斯赞树, 且没有弱库雷帕树。2025。arXiv 预印本, arXiv:2506.06878。[15] Kenneth Kunen。

Set theory (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations)。College Publications, 2011。[16] Chris Lambie-Hanson 和 ˇS´arka Stejskalov´a。强树性质、库雷帕树与猜测模型。

Monatsh. Math., 203(1):111–148, 2024。[17] Menachem Magidor。超紧基数的组合刻画。

Proc. Amer. , : –

Math. Soc. 42 279 285, 1974

。[18] Telis K. Menas。论强紧致性与超紧致性。 *Ann. Math. Logic*, 7 359, 1974 327 75 : – / 。[19] William J. Mitchell。阿朗斯赞树与传递性质的独立性。5(1):21–46, 1972。[20] Justin Tatch Moore。阿朗斯赞树的结构分析。载于 *Logic Colloquium 2005*, 第 28 卷, 收录于 *Lect. Notes Log.*, 第 85–106 页。符号逻辑协会, 伊利诺伊州厄巴纳, 2008。[21] D. H. Stewart。

The consistency of the Kurepa hypothesis with the axioms of set theory。硕士论文, Example大学, 1966。[22] Stevo Todor ˇcevi

´ 159 3 4 261 294, c。

1987

对可数序数对进行划分。 *Acta Math.*, (-): – 。[23] Stevo B. Todor ˇcevi

´ + ¬ 12 2 187 202, c。

1981

马丁公理与弱基数海伍德性质的一些推论。 *Topology Appl.*, ( ): – 。[24] Spencer Unger。树性质的脆弱性与不可破坏性。 *Arch. Math. Logic*, 51(5-6):635–645, 2012。[25] Matteo Viale 和 Christoph Weiß。关于适当强迫公理的一致性强度。*Adv. Math.*, 228(5):2672–2687, 2011。[26] Christoph Weiß。超紧致性的组合本质。 *Ann. Pure Appl. Logic*, 163 11 1710 1717, 2012 ( ): – 。

(Lambie-Hanson) Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, Prague 1, 115 67, Czech Republic*Email address*: lambiehanson@math.cas.cz*URL*: https://clambiehanson.github.io(Stejskalov´a) Charles University, Department of Logic, Celetná 20, Prague 1, 116 42,Czech Republic*Email address*: sarka.stejskalova@ff.cuni.cz *URL*: logika.ff.cuni.cz/sarkaInstitute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25, Prague 1, 115 67,Czech Republic