arXiv:2603.10550v1 [math.AP] 11 Mar 2026

球内分数阶纽曼特征函数的对称性

VLADIMIR BOBKOV 和 ENEA PARINI

摘要。我们研究分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^s$（其中 $s \in \in (0,1)$）在带有非局部纽曼边界条件的 N 维球中的首个非平凡特征函数的对称性。借助谱稳定性结果，我们证明，当 s 充分接近 1 时，与第一个非平凡特征值对应的特征空间由 N 个反对称特征函数生成，且这些特征函数在球内恰有两个节点域。

1. 引言

设 $s \in \in (0,1)$，且 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界利普希茨区域，$N \geq 2$。我们考虑特征值问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u &= \mu\, u & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{N}_s u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $(-\Delta)^s$ 是分数阶拉普拉斯算子，对足够光滑的函数，其逐点定义为

$$(-\Delta)^s u(x) = c_{N,s} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy,$$

其中 $c_{N,\ s}$ 是一个适当的归一化常数（例如参见 [12, 第 3]节），并且 e

$$(\mathcal{N}_s u)(x) := c_{N,s} \int_\Omega \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\, dy, \quad x \in \Omega^c := \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}. \tag{1.2}$$

关系 $\mathcal{N}_s u = 0 \text{in } \Omega^c$ 是经典 Neumann 边界条件的非局部对应形式。该概念最早于 [13], 中提出，并同时给出了其概率解释。这一概念的优势之一是存在通常分部积分公式的非局部类比形式，例如

$$\int_\Omega (-\Delta)^s u\, dx = -\int_{\Omega^c} \mathcal{N}_s u\, dx,$$

对于足够光滑的函数，该公式推广了著名的关系

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS,$$

其中，$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ 是 u的法向导数，而 ν 是外单位法向量。

2010 数学主题分类。 35P15, 35R11, 35B06, 47A75.关键词与短语。分数阶拉普拉斯算子；非局部 Neumann 条件；特征函数；对称性；稳定性。E.P. 获得了法国国家研究署项目“ANR STOIQUES——形状与拓扑优化：重要问题与新兴主题”（ANR-24-CE40-2216）的部分资助。

分部积分公式的有效性使这一框架特别适用于变分方法。作者们 [13]引入了希尔伯特空间 $H^s_{\Omega,\,0}$该空间由可测函数 $u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 组成，并赋予范数

$$u\mapsto\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{\frac12}+\left(\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy\right)^{\frac12},$$

并证明算子 $(-\Delta)^s$ 定义在$H^s_{\Omega,\,0}$ 满足谱定理的假设。特别地，（1.1）的所有特征值构成离散单调序列 $\{\mu_n^{(s)}\}_{n\in\mathbb{N}}$并发散至无穷：

$$0=\mu_0^{(s)}<\mu_1^{(s)}\le\cdots\le\mu_n^{(s)}\to+\infty,\quad n\to+\infty.$$

必要时，我们将通过使用展开记号 $\mu_n^{(s)}(\Omega)$ 来强调对区域的依赖性。为清晰起见，我们指出，我们采用记号 $\mathbb{N}:=\{0,1,2,\dots\}$ 以及 $\mathbb{N}^*:=\{1,2,3,\dots\}$。

第一个非平凡特征值 $\mu_1^{(s)}$ 具有如下变分刻画：

(1.3)
$$\mu_1^{(s)}=\inf\left\{\frac{c_{N,s}}{2}\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy\,\middle|\,u\in H^s_{\Omega,0},\ \int_\Omega u^2\,dx=1,\ \int_\Omega u\,dx=0\right\},$$

且任一相应的极小化子 u 是问题（1.1）在 $\mu=\mu_1^{(s)}$ 下的弱解，即

(1.4)
$$\frac{c_{N,s}}{2}\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2}\frac{(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy=\mu_1^{(s)}\int_\Omega uv\,dx\quad\text{for any } v\in H^s_{\Omega,0}.$$

此后，我们将形式上把情形 $s=1$ 称为局部 Neumann 拉普拉斯算子（在 Ω 中），并用 $\{\mu_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 表示相应的谱。$\{\mu_n^{(s)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 与$\{\mu_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 之间的确切联系将在第 3 节中建立。

本文旨在研究分数阶拉普拉斯算子在非局部纽曼边界条件下首个非平凡特征函数的对称性。具体而言，我们关注以下问题：

($\mathcal{Q}$) 设 Ω 是一个球 B。首个非平凡特征函数是否都关于经过 B 中心的某个超平面对称反对称?

对于局部 Neumann 拉普拉斯算子，众所周知，这个问题的答案是肯定的。一种可能的证明方法是注意到，所有相应的特征值恰好是函数的非负根

$$\Theta_l(r):=\frac{d}{dr}\left(r^{\frac{2-N}{2}}J_{\frac12(2l+N-2)}(r)\right),$$

其中 J_ν 是 ν 阶第一类贝塞尔函数，$l\in\mathbb{N}$，并且存在一个具有可分离几何的特征函数基。于是，只需比较 Θ_0 的第一个正零点（即首个正径向特征值）与 Θ_1 的第一个正零点（即首个正反对称特征值），并证明前者严格大于后者，参见 [15, 引理 2。6]然而，在非局部情形下，由于该问题（1.1）缺乏闭式解，因此难以应用相同的论证。

在局部情形下，回答问题（$\mathcal{Q}$）的另一种方法如下：假设某个首个非平凡特征函数 u 是径向的，那么有 $\mu_1^{(1)}(B)=\lambda_1^{(1)}(B_r)$，其中 $\lambda_1^{(1)}(B_r)$

是球内局部狄利克雷拉普拉斯算子的第一特征值 $B_r \subset B$，它是 u的一个节点域。另一方面，根据 [14] 以及区域单调性，分别可得

$$\mu_1^{(1)}(B) < \lambda_1^{(1)}(B) < \lambda_1^{(1)}(B_r),$$

这就导致了矛盾。在非局部情形中，若要沿用相同的思路，只需有不等式 $\lambda_1^{(s)}(B_r) \le \mu_1^{(s)}(B)$ 和 $\mu_1^{(s)}(B) \le \lambda_1^{(s)}(B)$，因为 $\lambda_1^{(s)}(B) < \lambda_1^{(s)}(B_r)$ 这种形式的严格区域单调性成立。然而，一般而言，这两个不等式是否成立并非显而易见。

在本文中，我们针对问题（$\mathcal{Q}$）给出了一些部分结果。首先，我们证明了以下关于与第一个非平凡特征值对应的特征空间的结构定理。

定理 1.1. 设 $B \subset \mathbb{R}^N$ 是一个以原点为中心的球。设 $s \in (0,1)$。则出现以下二分情形：

- 要么所有与 $\mu_{(s)}\ 1$ 相关的特征函数都是径向对称的，要么
- 存在 $k \in \mathbb{N}$，使得与 $\mu_{(s)}\ 1$ 相关的特征空间由 k 个径向特征函数和 N个特征函数 $v_1, \dots, v_N$ 张成，其中每个 v_i 都关于坐标超平面 $\{x_i = 0\}$ 反对称，并且在 B 中恰有两个节点域。

根据定理1.1，并利用分数阶诺伊曼拉普拉斯算子在 $s \to 1^-$ 处谱的稳定性（见下文定理 3.1 ），我们可以得出以下对称性结果。

定理 1.2。 设 $B \subset \mathbb{R}^N$ 为一个以原点为中心的球。那么存在 $s^* \in (0,1)$，使得对每个 $s \in (s^*,1)$ ，与 $\mu_1^{(s)}$ 相关的特征空间由 N 个特征函数$v_1, \dots, v_N$张成，其中每个 v_i都关于坐标超平面 $\{x_i = 0\}$反对称，并且在 B中恰有两个节点域。

定理1.2 的结果是否对每一个 $s \in (0,1)$都成立，仍是一个有趣的开放问题。

本文结构如下。在第2节，我们介绍函数空间框架的若干概念，并讨论特征值的变分刻画。在第3节，我们证明当$s \to 1^-$时，非局部诺伊曼特征值收敛到局部诺伊曼特征值。第4 节专门用于首个非平凡特征函数的对称性分析以及定理1.1与1.2的证明。

2. Notation and preliminary results

2.1. **函数空间设定**。 同上，设 $s \in (0,1)$， $N \ge 2$，且 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界利普希茨区域。回顾希尔伯特空间 $H^s_{\Omega,\ 0}$ 的定义，参见 [13]:

$$H^s_{\Omega,0} = \left\{ u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \,\middle|\, u \text{ measurable}, \ \|u\|_{L^2(\Omega)} + [u]_{H^s_{\Omega,0}} < +\infty \right\},$$

其中

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad [u]_{H^s_{\Omega,0}} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{2N} \setminus (\Omega^c)^2} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

注意到

$$[u]^2_{H^s_{\Omega,0}} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy + 2 \int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy. \tag{2.1}$$

我们还将 $H^s(\Omega)$记作标准分数阶 Sobolev 空间，其 Gagliardo 半范数$[\cdot]_{H^s(\Omega)}$ 定义为

$$[u]_{H^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

注 2.1。 由（2.1），任意属于 $H^s_{\Omega,\,0}$ 的函数在 Ω 上的限制都属于 $H^s(\Omega)$。特别地，由于 $H^s(\Omega)$ 紧嵌入 $L^2(\Omega)$（例如参见 [12, 定理 7.1]），因此属于 $H^s_{\Omega,\,0}$ 的函数的限制也具有相同性质。

注 2.1 中指出的 $H^s_{\Omega,\,0}$ 与 $H^s(\Omega)$ 之间的关系，可由以下一般性结果补充说明。

命题 2.2。 对于任意 $u \in H^s(\Omega)$，存在唯一函数 $\widetilde{u}\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，使得$\widetilde{u} \in H^s_{\Omega,\,0}$, $\widetilde{u} = u$ 在 Ω 中，并且

$$[\widetilde{u}]_{H^s_{\Omega,0}} \le [v]_{H^s_{\Omega,0}}$$

对于每个满足 $v = u$ 在 Ω 中的 $v \in H^s_{\Omega,\,0}$。此外， $\mathcal{N}_s \widetilde{u} = 0$ 在 Ω^c。

证明。B y [12, 定理 5.4], 任意 $u \in H^s(\Omega)$ 均存在一个延拓 $\hat{u} \in H^s(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + [\hat{u}]_{H^s(\mathbb{R}^N)} \le C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + [u]_{H^s(\Omega)}),$$

其中 $C > 0$ 是一个与 u无关的常数。注意到 $[\hat{u}]_{H^s_{\Omega,\,0}} \le [\hat{u}]_{H^s(\mathbb{R}^N)}$，我们得出 $\hat{u} \in H^s_{\Omega,\,0}$。考虑如下极小化问题

$$\inf \left\{ [v]^2_{H^s_{\Omega,0}} \,\middle|\, v \in H^s_{\Omega,0},\, v = u \text{ in } \Omega \right\}.$$

利用变分法的直接方法和注记 2.1，该问题存在一个极小化子 $\widetilde{u} \in H^s_{\Omega,\,0}$；由于泛函具有严格凸性，该极小化子是唯一的。因此， $\widetilde{u} = u$在 Ω 中，并且对于每个满足 $v = u$ 在 Ω 中的 $v \in H^s_{\Omega,\,0}$，都有 $[\widetilde{u}]^2_{H^s_{\Omega,\,0}} \le [v]^2_{H^s_{\Omega,\,0}}$。

现在证明 $\mathcal{N}_s \widetilde{u} = 0$ 在 Ω^c 中。令 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\varphi \in C_c(\Omega^c)$。由（2.1）不难看出 $\varphi \in H^s_{\Omega,\,0}$，并且显然有 $\widetilde{u} + t\varphi = u$ 在 Ω 中。根据 $\widetilde{u}$的极小性，

$$\frac{d}{dt} \left([\widetilde{u} + t\varphi]^2_{H^s_{\Omega,0}} \right)_{|t=0} = 0,$$

这相当于

$$\iint_{(\mathbb{R}^{2N}) \setminus (\Omega^c)^2} \frac{(\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy = 0. \tag{2.2}$$

注意到

$$\iint_{(\mathbb{R}^{2N}) \setminus (\Omega^c)^2} \frac{(\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y))(\varphi(x) - \varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy = 2 \int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{(\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y))\varphi(x)}{|x-y|^{N+2s}} \, dx \, dy.$$

回想一下 $\widetilde{u}, \varphi \in H^s_{\Omega,0}$，我们应用霍尔德不等式，得到 $\frac{(\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y))\varphi(x)}{|x-y|^{N+2s}} \in L^1(\Omega \times \Omega^c)$。因此，由 Fubini 定理、 $\mathcal{N}_s \widetilde{u}$ 的定义以及等式 (2.2) 可得

$$\int_{\Omega^c} (\mathcal{N}_s \widetilde{u}) \varphi \, dx = 0.$$

由于 φ 是任意的，我们得出 $\mathcal{N}_s \widetilde{u} = 0$ 在 Ω^c 中。 □

注 2.3。 一般而言，根据 的定义（1.2），对于任意满足 ω 的可测函数 : Ω，可以通过以下公式在 Ω 中定义唯一函数 : ，使其满足 在 Ω 中且 在 Ω。

$$\widetilde{u}(x) = \frac{\displaystyle\int_\Omega \frac{u(y)}{|x-y|^{N+2s}}\,dy}{\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{|x-y|^{N+2s}}\,dy},$$

参见 [13, 注释 312]。

对于给定的 $u \in H^s(\Omega)$，我们将称由命题 $\widetilde{u}$ 2.2 提供的函数 2.2 s-最小延拓 u。我们定义以下集合 $H^s_{\Omega,\ 0}$:

$$\widetilde{H}^s_{\Omega,0} := \left\{ u \in H^s_{\Omega,0} \,|\, \mathcal{N}_s u = 0 \text{ in } \Omega^c \right\}.$$

~**命题 2.4**。 $H^s_{\Omega,\ 0}$ 是$H^s_{\Omega,\ 0}$的闭子空间，因此是一个希尔伯特空间 $e.$

~证明。 由于映射 $u \mapsto \mathcal{N}_s u$ 是线性的，我们可知 $H^s_{\Omega,\ 0}$ 确实是 $H^s_{\Omega,\ 0}$的子空间。下面证明它是闭的。设 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ 是$H^s_{\Omega,\ 0}$ 中的一个序列，在 $H^s_{\Omega,\ 0}$ 中收敛于函数$u \in H^s_{\Omega,\ 0}$。特别地，对于任意 $\varphi \in C_c$(Ω^c)，应用 Hölder 不等式可得

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{(u_k(x)-u_k(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \to \iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{(u(x)-u(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy$$

如 $k \to +\infty$。与命题 2.2 的证明中一样，我们使用 Fubini 定理来得到 t

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{(u_k(x)-u_k(y))(\varphi(x)-\varphi(y))}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy = 2\int_{\Omega^c} (\mathcal{N}_s u_k)\varphi\,dx \tag{2.3}$$

对每个 u_k 均成立，同样的论证也表明等式（2.3）对 u 也成立。因此，由于 $u_k \in_{\sim} H^s_{\Omega,\ 0}$，根据收敛性可推得

$$\int_{\Omega^c} (\mathcal{N}_s u)\varphi\,dx = 0.$$

~由于 $\varphi \in C_c$(Ω^c) 的任意性，我们得到 $u \in H^s_{\Omega,\ 0}$。 □

注 2.5。 对于固定的 $s \in$ (0，1)，命题 2.2 允许将 H^s(Ω)~ ~ 中的函数与其（唯一的） s-最小延拓相对应，该延拓属于 $H^s_{\Omega,\ 0}$；反过来，$H^s_{\Omega,\ 0}$ 中的每个函数都可唯一对应于其在 Ω 上的限制，而该限制属于 H^s(Ω)。换言之，~空间 H^s(Ω) 和 $H^s_{\Omega,\ 0}$ 可等价地刻画为

$$H^s(\Omega) = \left\{ u|_\Omega \,\middle|\, u \in \widetilde{H}^s_{\Omega,0} \right\} \quad \text{and} \quad \widetilde{H}^s_{\Omega,0} = \left\{ \widetilde{u} \,|\, u \in H^s(\Omega) \right\}.$$

在不会产生歧义时，我们有时会在这两种观点之间切换。

L下面引入 L^2(Ω) 的一个子空间，其中的函数在 Ω 上具有零均值 :

$$L^2_0(\Omega) := \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega u\,dx = 0 \right\}.$$

下文中，例如，我们记作 $\widetilde{H}^s_{\Omega,0} \cap L^2_0$(Ω)，这表示任意属于 $\widetilde{H}^s_{\Omega,0}$的函数在 Ω 上的限制都属于 L^2_0(Ω)。根据 [13, 引理 3。10] 和命题 2.4, $H^s_{\Omega,0} \cap L^2_0$(Ω) 和 $\widetilde{H}^s_{\Omega,0} \cap L^2_0$(Ω) 是 $H^s_{\Omega,0}$的闭子空间，因此它们各自都是希尔伯特空间。

2.2. **诺伊曼特征值问题**。回顾一下，根据 [13, 定理 3。11], 存在一个离散单调序列 $\{\mu_n^{(s)}\}_{n\in\mathbb{N}}$，其元素是在Ω 中的分数阶诺伊曼拉普拉斯算子的特征值，且满足

$$0 = \mu_0^{(s)} < \mu_1^{(s)} \le \cdots \le \mu_n^{(s)} \to +\infty, \quad n \to +\infty,$$

以及相应特征函数的一个序列 $\{u_n^{(s)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^s_{\Omega,0}$，它们在 $L^2(\Omega)$ 中相互正交。不难看出，非零常数函数是对应于 $\mu_0^{(s)} = 0$ 的特征函数。这意味着任一更高阶特征函数 $u_n^{(s)}$在 Ω 中具有零均值。此外，每个$u_n^{(s)}$也满足 $\mathcal{N}_s u_n^{(s)} = 0$ 于 Ω^c，从而 $u_n^{(s)} \in \widetilde{H}^s_{\Omega,0} \cap L^2_0(\Omega)$，参见 [17, 定理 2.8]。

特征函数 $u_n^{(s)}$具有一些额外的正则性。由 [17, 命题 3.4], 可知，它们在 $\mathbb{R}^N$ 中有界。因此，[1, 定理 1.1] 表明，对某个$\alpha \in (0,1)$，每个 $u_n^{(s)} \in C^\alpha(\Omega)$。于是 [13, 命题 5.2] 的结果给出 $u_n^{(s)} \in C(\mathbb{R}^N)$。

根据标准谱理论和注释 2.1，分数阶 Neumann 拉普拉斯算子在Ω 中的所有非平凡特征值都可以通过以下关系刻画

$$\mu_n^{(s)} = \min_{A\in M_n} \max_{u\in A\setminus\{0\}} \frac{\frac{c_{N,s}}{2}[u]^2_{H^s_{\Omega,0}}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}, \quad n \ge 1,$$

其中 M_n 是H^s_Ω的 n维子空间的集合. $_0 \cap L^2_0(\Omega)$。类似地，Ω 中局部诺伊曼拉普拉斯算子的所有非平凡特征值可由下式刻画:

$$\mu_n^{(1)} = \min_{A\in Y_n} \max_{u\in A\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}, \quad n \ge 1,$$

其中 Y_n 是 $H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$的 n维子空间的集合。

下面的命题表明，可以将特征值刻画为希尔伯特空间 $\widetilde{H}^s_{\Omega,\ 0} \cap L^2_0(\Omega)$上的临界值。

命题 2.6。对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，令

$$\tilde{\mu}_n^{(s)} := \min_{A\in \widetilde{M}_n} \max_{u\in A} \frac{\frac{c_{N,s}}{2}[u]^2_{H^s_{\Omega,0}}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

$_{M}{}^{\sim}$其中 $_n$ 是$\widetilde{H}^s_{\Omega,0} \cap L^2_0(\Omega)$中所有 n维子空间的集合。于是 $\tilde{\mu}_n^{(s)} = \mu_n^{(s)}$.

证明。由于 $\widetilde{M}_n \subset M_n$，显然有 $\mu_n^{(s)} \le \tilde{\mu}_n^{(s)}$。设 $\widetilde{A} = \{u_1^{(s)}, \dots, u_n^{(s)}\}$。由于每个$u_n^{(s)}$都属于 $\widetilde{H}^s_{\Omega,0} \cap L^2_0(\Omega)$，且所有特征函数在 $L^2(\Omega)$中两两正交，因此有$\sim \ \sim A \in M_n$。因此，

$$\tilde{\mu}_n^{(s)} \le \max_{u\in\widetilde{A}} \frac{\frac{c_{N,s}}{2}[u]^2_{H^s_{\Omega,0}}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = \mu_n^{(s)},$$

由此得出 $\tilde{\mu}_n^{(s)} = \mu_n^{(s)}$。 □

作为命题 2.6的推论，并结合注 2.5，我们得到以下等价刻画。

推论 2.7。 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，均有

$$\mu_n^{(s)} = \min_{A \in \widetilde{M}_n^*} \max_{u \in A} \frac{\frac{c_{N,s}}{2}[\widetilde{u}]^2_{H^s_{\Omega,0}}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

其中， $\widetilde{M}_n^*$ 是由 $H^s(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$中的 n维子空间构成的集合。

3. Spectral stability for $s \to 1^-$

以下令 $s \in (0,1)$， $N \geq 2$， $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界利普希茨区域，且 ω_k 为 k维单位球的体积。

本节旨在证明以下稳定性结果。

定理 3.1. 设 $n \in \mathbb{N}$。则

$$\lim_{s \to 1^-} \mu_n^{(s)} = \mu_n^{(1)}.$$

此外，若 $u_n^{(s)}$是对应于 $\mu_n^{(s)}$的特征函数，且满足 $\|u_n^{(s)}\|_{L^2(\Omega)} = 1$，则存在递增序列 $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (0,\ 1)$，使得 $s_k \to 1^-$ 满足

$$\|u_n^{(s_k)} - u_n^{(1)}\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad as\ k \to +\infty,$$

其中 $u_n^{(1)}$是对应于 $\mu_n^{(1)}$的局部诺伊曼拉普拉斯算子的特征函数。

定理的证明利用了 Γ-收敛的概念（例如参见 [6, 10]），我们将结合本文设定简要回顾之。设(X,d) 为一个度量空间，并设$\{\mathcal{F}_s\}_{s \in (0,1)}$ 为泛函族 $\mathcal{F}_s :\ X \to [0,+\infty]$。类似地，设 $\mathcal{F}_1 :\ X \to [0,+\infty]$ 为一个泛函。我们称这些泛函 $\mathcal{F}_s$ Γ-收敛于 $\mathcal{F}_1$，当 $s \to 1^-$ 时，如果满足以下条件:

(i) 下极限不等式：对每一个递增序列 $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (0,1)$，且当$k \to +\infty$时 $s_k \to 1^-$，对每一个 $u \in X$，以及对每一个当 $k \to +\infty$时在 X中收敛于 u 的序列 $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset X$，成立

$$\mathcal{F}_1(u) \leq \liminf_{k \to +\infty} \mathcal{F}_{s_k}(u_k). \tag{3.1}$$

(ii) 上极限不等式：对于每个递增序列 $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (0,1)$，满足 $s_k \to 1^-$ as$k \to +\infty$，以及每个 $u \in X$，都存在一个序列 $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset X$，它在 X 中收敛到 u，当 $k \to +\infty$ 时，使得

$$\mathcal{F}_1(u) \geq \limsup_{k \to +\infty} \mathcal{F}_{s_k}(u_k). \tag{3.2}$$

根据 [6, 命题 1，44], 为了证明(i)和 (ii)，从而证明Γ-收敛，当 $s \to 1^-$时，只需证明（3.1）和（3.2）对给定指标序列的某个子序列成立。

定义 Γ-收敛的一种等价方式如下。记

$$\left(\Gamma - \liminf_{s \to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u) := \inf\left\{\liminf_{k \to +\infty} \mathcal{F}_{s_k}(u_k) \,\middle|\, \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (0,1),\ s_k \nearrow 1,\ u_k \to u \text{ as } k \to +\infty\right\},$$

$$\left(\Gamma - \limsup_{s \to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u) := \inf\left\{\limsup_{k \to +\infty} \mathcal{F}_{s_k}(u_k) \,\middle|\, \{s_k\}_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (0,1),\ s_k \nearrow 1,\ u_k \to u \text{ as } k \to +\infty\right\}.$$

那么下极限不等式 (i)等价于

$$\mathcal{F}_1(u) \le \left(\Gamma\text{-}\liminf_{s\to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u) \quad \text{for every } u \in X, \tag{3.3}$$

且上极限不等式（ii）等价于

$$\mathcal{F}_1(u) \ge \left(\Gamma\text{-}\limsup_{s\to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u) \quad \text{for every } u \in X. \tag{3.4}$$

当且仅当对于每个 $u \in X$，泛函 $\mathcal{F}_s$ Γ 在 $s \to 1^-$ 时 $\mathcal{F}_1$ 收敛

$$\mathcal{F}_1(u) = \left(\Gamma\text{-}\liminf_{s\to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u) = \left(\Gamma\text{-}\limsup_{s\to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u),$$

见 [6, 第 1 节。6]。在这种情况下，我们记作

$$\mathcal{F}_1(u) = \left(\Gamma\text{-}\lim_{s\to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u) \quad \text{for every } u \in X.$$

在证明定理3.1之前，我们先建立三个辅助结果。

引理 3.2。设 $s_0 \in (0, 1)$，并设 $\{u_s\}_{s\in(s_0,1)}$ 为一族函数，使得对于任意 $s \in (s_0, 1)$，都有 $u_s \in H^s(\Omega)\cap L^2_0(\Omega)$。设 $\widetilde{u}_s \in H^s_{\Omega,\,0}$ 为 u_s 的 s-最小扩张。假设存在 $C > 0$ 使得

$$(1-s)\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{|\widetilde{u}_s(x)-\widetilde{u}_s(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \le C \quad \textit{for every } s \in (s_0,1).$$

于是存在一个递增序列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset (s_0,1)$，使得当 $k \to +\infty$ 时 $s_k \to 1$，并存在一个函数 $u \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$，使得当 $k \to +\infty$ 时，$u_{s_k} \to u$ 在 $L^2(\Omega)$ 中成立。

证明。由 [18, 定理 1.1] 给出的 Poincaré-Wirtinger不等式可知，对于每个$\varepsilon_0 > 0$，都存在一个常数 $C = C(\Omega\ \varepsilon_0) > 0$，使得对于每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，

$$\int_\Omega u^2\,dx \le C\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^2}\rho_\varepsilon(|x-y|)\,dx\,dy \quad \text{for every } u \in L^2_0(\Omega), \tag{3.5}$$

其中

$$\rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{N\omega_N|t|^{N-\varepsilon}} & \text{for } |t| < 1,\\ 0 & \text{for } |t| \ge 1. \end{cases}$$

取 $\varepsilon_0 = 2(1-s_0)$ 和 $\varepsilon = 2(1-s)$，不等式 (3.5) 化为

$$\int_\Omega u^2\,dx \le C\,\frac{2(1-s)}{N\omega_N}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \tag{3.6}$$

对于任意 $u \in L^2_0(\Omega)$ 和 $s \in (s_0,1)$。将 (3.6) 应用于陈述中给出的族 $\{u_s\}_{s\in(s_0,1)}$，可推出该族在 $L^2(\Omega)$ 中有界。进一步应用 [18, 定理 1.2], 可得$\{u_s\}_{s\in(s_0,1)}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中相对紧。也就是说，存在一个递增序列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，使得 $s_k \to 1^-$，且 $\{u_{s_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到某个 $u \in L^2(\Omega)$，当 $k \to +\infty$ 时成立。显然，我们还有 $\int_\Omega u\,dx = 0$，即 $u \in L^2_0(\Omega)$。此外，[18, 定理 1.2] 给出 $u \in H^1(\Omega)$。证明完毕。□

引理 3.3。设 $u \in C^\delta(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\Omega)$，其中 $\delta \in (1/2, 1)$。则 $u \in H^s_{\Omega,0}$ 对任意 $s \in (\delta, 1)$ 和

$$\lim_{s\to 1^-}(1-s)\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy = \frac{\omega_{N-1}}{2N}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

证明。该结果已在 [13, 命题 5 中得到。1] （更准确地说，见 [13, 公式（5.3）]）对于$u \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$，其依据是 [5] 和 [12]的结果。下面给出证明概要，它放宽了对 u 的假设，并修正了推导 [13,公式（5.5）]时的一处不严谨之处。

对于任意 $u \in C^\delta(\mathbb{R}^N)$（$\delta \in (1/2,\ 1)$）以及任意 $s \in (\delta,\ 1)$，我们有

$$\int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \le \|u\|^2_{C^\delta(\mathbb{R}^N)} \int_\Omega \int_{\Omega^c} \frac{1}{|x-y|^{N+2(s-\delta)}}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\|u\|^2_{C^\delta(\mathbb{R}^N)} P_{2(s-\delta)}(\Omega),$$

其中，$P_{2(s-\delta)}(\Omega)$ 是 Ω 的分数阶 $2(s-\delta)$-周长，参见 [7, 第 4] 节。我们固定 $\varepsilon \in (0,\ 1-\delta)$，并注意到，对于任意 $s \in (\delta+\varepsilon,\ 1)$，$2(s-\delta) \in (\varepsilon,\ 2(1-\delta)) \Subset (0,\ 1)$。现在应用 [7, 推论 4.4]可得

$$P_{2(s-\delta)}(\Omega) \le \frac{2^{1-2(s-\delta)} N\omega_N}{(1-2(s-\delta))\cdot 2(s-\delta)} |\partial\Omega|^{2(s-\delta)} |\Omega|^{1-2(s-\delta)} < C < +\infty,$$

其中，$C = C(\Omega,\ \delta,\ \varepsilon) > 0$ 不依赖于 $s \in (\delta+\varepsilon,\ 1)$。因此，利用分解（2.1）和嵌入 $H^1(\Omega) \subset H^s(\Omega)$（参见 [12, 命题 2.2]），我们得到 $u \in H^s_{\Omega,\ 0}$，对于任意$s \in (\delta,\ 1)$。此外，利用来自 [5], 的收敛结果，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 1^-} (1-s) \iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \\ &\quad = \lim_{s\to 1^-} (1-s) \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy = C(N) \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.\end{aligned}$$

显式常数 $C(N) = \frac{\omega_{N-1}}{2N}$ 的推导与~~—~~[12]中的结果相同，参照 [13, 命题 5.1] 的证明。□

~~回顾一下，对于 $s \in (0,1)$ 和 $u \in H^s(\Omega)$，我们用 $\widetilde{u} \in H^s_{\Omega,0}$ 表示 s-最小扩张u (见命题 2.2)。对于 $s \in (0,1)$，我们定义泛函族 $\mathcal{F}_s\colon L^2_0(\Omega) \to [0,+\infty]$如下

$$\mathcal{F}_s(u) = \begin{cases} (1-s) \iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{|\widetilde{u}(x)-\widetilde{u}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy, & u \in H^s(\Omega), \\ +\infty, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

以及泛函 $\mathcal{F}_1\colon L^2_0(\Omega) \to [0,+\infty]$ 如下

$$\mathcal{F}_1(u) = \begin{cases} \frac{\omega_{N-1}}{2N} \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx, & u \in H^1(\Omega), \\ +\infty, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

命题 3.4。结论成立

$$\mathcal{F}_1(u) = \left(\Gamma - \lim_{s\to 1^-} \mathcal{F}_s\right)(u)$$

对每个 $u \in L^2_0(\Omega)$均成立。

证明。为了证明 Γ-收敛性，即 $\mathcal{F}_s$ 在 $s \to 1^-$时收敛到 $\mathcal{F}_1$，我们需要证明下极限不等式（3.3）和上极限不等式（3.4）。

下极限不等式。设 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset (0,1)$ 递增并收敛于 1，设 $u \in L^2_0(\Omega)$，且设 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset L^2_0(\Omega)$ 是一个在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到 u 的序列。注意，若

$$\liminf_{k\to+\infty} \mathcal{F}_{s_k}(u_k) = +\infty,$$

则无须证明。因此，假设

$$\liminf_{k\to+\infty} \mathcal{F}_{s_k}(u_k) < +\infty.$$

根据 $\mathcal{F}_s$ 的定义，这意味着存在一个常数 $C > 0$ 以及$\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ 的一个子序列（仍用相同的下标表示），使得 $u_k \in H^{s_k}(\Omega)$ 且

$$(1-s_k)\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2} \frac{|\widetilde{u}_k(x)-\widetilde{u}_k(y)|^2}{|x-y|^{N+2s_k}}\,dx\,dy \le C$$

对任意 $k \in \mathbb{N}^*$。因此，引理 3.2 推出 $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到某个$u^* \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ 当 $k \to +\infty$时，因此 $u^* \equiv u$。也就是说， $u \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$。

现在，我们可以完全照搬 [8, 命题 311] 的证明，并结合 $p = 2$ 得到以下不等式链

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{N-1}}{2N}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx &\le (1+\varepsilon)\liminf_{k\to+\infty}\sum_{i\in I}(1-s_k)[u_k]^2_{H^{s_k}(C_i)}\\ &\le (1+\varepsilon)\liminf_{k\to+\infty}(1-s_k)[u_k]^2_{H^{s_k}(\Omega)}\\ &\le (1+\varepsilon)\liminf_{k\to+\infty}(1-s_k)\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2}\frac{|\widetilde{u}_k(x)-\widetilde{u}_k(y)|^2}{|x-y|^{N+2s_k}}\,dx\,dy,\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是任意的，而 $\{C_i\}_{i\in I}$ 是一个适当的互不相交立方体族，使得每个$C_i \subset\Omega$。

由此得到子序列的 Γ–下极限 不等式（3.1），该子序列取自任意一个收敛到 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ 的序列 1^-。正如我们在（3.2）之后指出的，这一事实足以推出（3.3）。

上极限不等式。显然，如果 $u \notin H^1(\Omega)$，则无需证明。假设$u \in H^1(\Omega)$。由于 Ω 是 Lipschitz 的，存在一个序列 $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}^*} \subset C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$，使得 $v_j \to u$属于 $H^1(\Omega)$。考虑函数

$$u_j = \left(v_j - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v_j\,dx\right)\cdot f, \quad j \in \mathbb{N}^*,$$

其中 $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ 满足 $f = 1$ 在 Ω 的一个邻域内。我们推得，对于任意 $j \in \mathbb{N}^*$， $u_j \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N) \cap L^2_0(\Omega)$，且当 $j \to +\infty$ 时， $u_j \to u$ 属于 $H^1(\Omega)$。

设 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset (0,1)$ 为一个递增且收敛于 1的序列。对于每个固定的 u_j，引理 3.3给出

$$\lim_{k\to+\infty}(1-s_k)\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2}\frac{|u_j(x)-u_j(y)|^2}{|x-y|^{N+2s_k}}\,dx\,dy = \frac{\omega_{N-1}}{2N}\int_\Omega |\nabla u_j|^2\,dx.$$

对于每个 $k \in \mathbb{N}^*$，我们记 $\widetilde{u}_{j,\,k}$ 为 s_k-极小扩张 u_j。利用命题 2.2，我们得到

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty}\mathcal{F}_{s_k}(u_j) &= \limsup_{k\to+\infty}(1-s_k)\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2}\frac{|\widetilde{u}_{j,k}(x)-\widetilde{u}_{j,k}(y)|^2}{|x-y|^{N+2s_k}}\,dx\,dy\\ &\le \limsup_{k\to+\infty}(1-s_k)\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(\Omega^c)^2}\frac{|u_j(x)-u_j(y)|^2}{|x-y|^{N+2s_k}}\,dx\,dy\\ &= \frac{\omega_{N-1}}{2N}\int_\Omega|\nabla u_j|^2\,dx = \mathcal{F}_1(u_j).\end{aligned}$$

因此，我们证明了对于每个 $\Gamma-$，上极限 不等式（3.2）成立。现在注意到 u_j，当 $u_j \to u$ 在 $H^1(\Omega)$ 中趋于 $j \to +\infty$时；又由于 Γ-上极限是下半连续的（例如参见 [6, 命题 1.28]），我们得到

$$\left(\Gamma-\limsup_{s\to 1^-}\mathcal{F}_s\right)(u) \le \liminf_{j\to+\infty}\left(\Gamma-\limsup_{s\to 1^-}\mathcal{F}_s\right)(u_j) \le \liminf_{j\to+\infty}\mathcal{F}_1(u_j) = \mathcal{F}_1(u).$$

也就是说， $\Gamma-$上极限不等式（3.4）成立。 □

现在我们可以证明定理3.1了。

定理*3.1*的证明。根据命题3.4，我们知道泛函 $\mathcal{F}_s$ Γ-收敛于 $\mathcal{F}_1$ ，当$s \to 1^-$ 在 $L^2_0(\Omega)$中时。通过利用 $\mathcal{F}_s$ ，当 $\mathcal{F}_1$ 趋于 $s \to 1^-$ 时， [8, 第 4 节.1], 以及 [11, 推论 4.4][1]，可仿照上述方法推出临界值的收敛性。7, [11, 推论 3.3] 表明，这些临界值与特征值相同，只差适当的乘数。回顾一下，对于任意对应于 $\mu_n^{(s)}$并满足 $\|u_n^{(s)}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ 的特征函数 $u_n^{(s)} \in \widetilde{H}^s_{\Omega,\,0} \cap L^2_0$，都有

$$\mu_n^{(s)} = \frac{c_{N,s}}{2}[u_n^{(s)}]^2_{H^s_{\Omega,0}} = \frac{c_{N,s}}{2(1-s)}\mathcal{F}_s(u_n^{(s)}) \tag{3.7}$$

（其中第二个等号由注2.5得出），并且

$$\frac{c_{N,s}}{2} \sim \frac{2N}{\omega_{N-1}}(1-s) \quad \text{as } s \to 1^- \tag{3.8}$$

（例如，参见 [12, 推论 4。2]），我们推得

$$\lim_{s\to 1^-}\mu_n^{(s)} = \mu_n^{(1)} \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

我们来证明 $L^2(\Omega)$中特征函数的收敛。我们采用 [8,第 4 节。2]中的方法。根据（3.7）、（3.8）和（3.9），可知存在 $s_0 \in (0,1)$ 使得

$$\sup_{s\in(s_0,1)}(1-s)[u_n^{(s)}]^2_{H^s_{\Omega,0}} < +\infty.$$

根据引理 3.2，存在一个趋于 1 的 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset (s_0,1)$，使得 $\{u^{(s_k)n}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$在 $L^2(\Omega)$ 中收敛到某个 $u_n \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$，当 $k \to +\infty$ 时。特别地，我们还有$\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$。

我们来证明 u_n 是 Ω 中局部诺伊曼拉普拉斯算子的一个特征函数。注意，每个 $u^{(s_k)n}$ 都是严格凸泛函 $\mathcal{G}_{s_k}\colon L^2_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ 的唯一极小化子，其定义为

$$\mathcal{G}_{s_k}(v) := \frac{1}{2}\mathcal{F}_{s_k}(v) - \frac{2(1-s_k)\mu_n^{(s)}}{c_{N,s}}\int_\Omega u_n^{(s_k)} v\,dx.$$

由于 (3.8)、(3.9)，以及 $\{u^{(s_k)n}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中强收敛到 u_n ，利用三角不等式不难发现，该泛函

$$v \in L^2_0(\Omega) \mapsto -\frac{2(1-s_k)\mu_n^{(s)}}{c_{N,s}}\int_\Omega u_n^{(s_k)} v\,dx$$

[1]这项工作 [11] 实际上研究的是通过*Krasnosel'skii* 属定义的非线性算子的谱。然而，在线性情形下 $p = 2$，这一概念与经典 Courant-Fisher 理论所得到的谱一致；例如参见 [8, 附录 A] 关于 Dirichlet 边界条件的情形。

连续收敛（在 $L^2(\Omega)$ 中）到该泛函

$$v \in L^2_0(\Omega) \mapsto -\frac{\omega_{N-1}}{2N}\mu_n^{(1)}\int_\Omega u_n v\,dx,$$

见 [10, 定义4.7]。因此， [10, 命题6.20] 表明 $\mathcal{G}_{s_k}$ Γ-收敛于 $L^2(\Omega)$中的泛函 $\mathcal{G}_1$： $L^2_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{G}_1(v) := \frac{1}{2}\mathcal{F}_1(v) - \frac{\omega_{N-1}}{2N}\mu_n^{(1)}\int_\Omega u_n v\,dx.$$

由于 $u^{(s_k)}_n \to u_n$ 在 $L^2_0(\Omega)$中当 $k \to +\infty$时， u_n 必为 $\mathcal{G}_1$的极小化子。事实上，对每一个$v \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$，存在一个恢复序列 $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}^*} \subset L^2_0(\Omega)$，使得 $v_k \to v$ 在 $L^2_0(\Omega)$中当$k \to +\infty$ 时成立，且满足上极限不等式。这表明

$$\mathcal{G}_1(u_n) \le \liminf_{k\to+\infty}\mathcal{G}_{s_k}\left(u_n^{(s_k)}\right) \le \limsup_{k\to+\infty}\mathcal{G}_{s_k}\left(u_n^{(s_k)}\right) \le \limsup_{k\to+\infty}\mathcal{G}_{s_k}(v_k) \le \mathcal{G}_1(v).$$

由 $\mathcal{G}_1$的严格凸性， u_n 是其唯一极小化子。因此， u_n 是Ω中与 $\mu_n^{(1)}$相应的局部诺伊曼拉普拉斯算子的特征函数。□

4. 对称性结果

本节的目的是证明定理1.1 与1.2。在此之前，我们给出若干与特征函数对称性质相关的辅助定义和结果。

下文中，我们令 $s \in (0,1)$、 $N \ge 2$和 $B \subset \mathbb{R}^N$ 为以原点为中心、半径为 $R > 0$ 的球。

定义4.1。设 $e \in \mathbb{S}^{N-1}$。设

$$\Sigma_e^+ := \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x\cdot e \ge 0\}, \qquad \Sigma_e^- := \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x\cdot e \le 0\}, \qquad H_e := \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, x\cdot e = 0\}.$$

对于 $x \in \mathbb{R}^N$，令 $\sigma_e(x) \in \mathbb{R}^N$ 为其关于 H_e的对称点。对于 u： $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，关于 H_e 的极化是函数 $P_e u$： $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$，其定义如下

$$(P_a u)(x) := \begin{cases} \min\{u(x), u(\sigma_e(x))\} & \text{if } x \in \Sigma_e^+, \\ \max\{u(x), u(\sigma_e(x))\} & \text{if } x \in \Sigma_e^-. \end{cases}$$

众所周知,

$$\|P_e u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \text{for any } u \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} P_e u\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u\,dx \quad \text{for any } u \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

参见，例如， [9, 式(3.7)] 应用于 u^+与 u^-，其中 $u^+ = \max\{u, 0\}$与 $u^- = \min\{u, 0\}$。特别地，我们有

$$\|P_e u\|_{L^2(B)} = \|P_e(u\,\chi_B)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\,\chi_B\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|u\|_{L^2(B)} \quad \text{对于任意 } u \in L^2(\mathbb{R}^N), \tag{4.1}$$

$$\int_B P_e u\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} P_e(u\,\chi_B)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u\,\chi_B\,dx = \int_B u\,dx \quad \text{for any } u \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{4.2}$$

定义 4.2. 函数 u 关于 $p \in \mathbb{S}^{N-1}$ 是分层施瓦茨对称的，当且仅当 :

(i) u 关于 $\mathbb{R}p$轴对称，因此

$$u(x) = \hat{u}\left(|x|, \arccos\left(\frac{x}{|x|}\cdot p\right)\right)$$

对于某个函数 $\hat{u}$: $[0,+\infty) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$。

(ii) $\hat{u}$ 关于第二个变量单调不增。

现在我们证明，对函数进行$H^s_{B,\,0}$ 极化运算会降低其 $H^s_{B,\,0}$-半范数，这与 Gagliardo 半范数的相同性质类似，参见 [2]。此外，我们还给出了等号情形的刻画。

命题 4.3。 设 $e \in \mathbb{S}^{N-1}$。令 $u \in H^s_{B,\,0}$，并令 $P_e u$ 为其关于 H_e 的极化。则 $P_e u \in H^s_{B,\,0}$ 且

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2} \frac{|(P_e u)(x)-(P_e u)(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy \le \iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy. \tag{4.3}$$

此外，（4.3）中的等号成立，当且仅当 $P_e u = u$ 或 $P_e u = u\circ\sigma_e$ 在 $\mathbb{R}^N$中成立。

证明。 （4.3）的证明与 [3, 引理 2。3], 类似，通过使用分解

$$\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2 = (B\times B)\cup(B^c\times B)\cup(B\times B^c)$$

并证明每个子集上的积分在极化作用下都会减小。等号情形可以按照 [4, 命题 2。1]的证明进行刻画。随后，根据（$P_e u \in H^s_{B,\,0}$ 将由（4.1）和（4.3）推出。为使说明清晰，我们给出细节。

记 $v = P_e u$。我们有

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,\chi(x,y)\,dx\,dy,$$

其中 χ 是集合 $\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2$的示性函数。对于 u，同样的等式也成立。分解

$$\mathbb{R}^{2N} = (\Sigma_e^+\times\Sigma_e^+)\cup(\Sigma_e^+\times\Sigma_e^-)\cup(\Sigma_e^-\times\Sigma_e^+)\cup(\Sigma_e^-\times\Sigma_e^-)$$

注意到集合 $\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2$ 关于反射 σ_e对称，我们有

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2} \frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}}\,dx\,dy = \iint_{(\Sigma_e^+)^2} \Bigg[&\frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}} + \frac{|v(\sigma_e(x))-v(y)|^2}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} \\ &+\frac{|v(x)-v(\sigma_e(y))|^2}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}} + \frac{|v(\sigma_e(x))-v(\sigma_e(y))|^2}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}}\Bigg]\chi(x,y)\,dx\,dy,\end{aligned}$$

且 u也有类似的表示。因此，为了证明（4.3），只需证明不等式

$$\begin{aligned}&\frac{|v(x)-v(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}} + \frac{|v(\sigma_e(x))-v(y)|^2}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} + \frac{|v(x)-v(\sigma_e(y))|^2}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}} + \frac{|v(\sigma_e(x))-v(\sigma_e(y))|^2}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}} \\ &\leqslant \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}} + \frac{|u(\sigma_e(x))-u(y)|^2}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} + \frac{|u(x)-u(\sigma_e(y))|^2}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}} + \frac{|u(\sigma_e(x))-u(\sigma_e(y))|^2}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}}\end{aligned} \tag{4.4}$$

对于几乎所有点（x， y） $\in(\Sigma_e^+)^2\cap(\mathbb{R}^{2N}\setminus(B^c)^2)$成立，并刻画等号情形。

不难看出，对于每个 x， $y\in\Sigma_e^+$我们都有

$$\frac{1}{|x-y|^{N+sp}} = \frac{1}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}} \ge \frac{1}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} = \frac{1}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}}, \tag{4.5}$$

等号成立当且仅当 $x \in H_e$ 或 $y \in H_e$。由 (4.5) 可得，我们还有

$$\frac{1}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{1}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}} = \frac{1}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}} - \frac{1}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} \geq 0, \tag{4.6}$$

且等号情形的刻画相同。

记

$$\widetilde{\Sigma} = (\Sigma_e^+)^2 \cap (\mathbb{R}^{2N} \setminus (B^c)^2)$$

~并将 Σ 分解为以下（不必互不相交的）子集之并：

$$\begin{aligned}
A_{++} &= \{(x,y) \in \widetilde{\Sigma} : \ u(\sigma_e(x)) \geqslant u(x) \text{ and } u(\sigma_e(y)) \geqslant u(y)\},\\
A_{--} &= \{(x,y) \in \widetilde{\Sigma} : \ u(\sigma_e(x)) \leqslant u(x) \text{ and } u(\sigma_e(y)) \leqslant u(y)\},\\
A_{+-} &= \{(x,y) \in \widetilde{\Sigma} : \ u(\sigma_e(x)) > u(x) \text{ and } u(\sigma_e(y)) < u(y)\},\\
A_{-+} &= \{(x,y) \in \widetilde{\Sigma} : \ u(\sigma_e(x)) < u(x) \text{ and } u(\sigma_e(y)) > u(y)\}.
\end{aligned}$$

我们分别在每个子集中考察不等式（4.4）。

- 任取一个 $(x,\ y) \in A_{++}$。根据极化的定义，我们有

$$v(x) = u(x), \quad v(\sigma_e(x)) = u(\sigma_e(x)), \quad \text{and} \quad v(y) = u(y), \quad v(\sigma_e(y)) = u(\sigma_e(y)),$$

因此，不等式（4.4）在 $(x,y) \in A_{++}$ 时取等号。

- 任取 $(x,y) \in A_{--}$。根据极化的定义，我们有

$$v(x) = u(\sigma_e(x)), \quad v(\sigma_e(x)) = u(x), \quad \text{and} \quad v(y) = u(\sigma_e(y)), \quad v(\sigma_e(y)) = u(y).$$

利用（4.5）中的等式，我们将（4.4）左端改写为

$$\frac{|u(\sigma_e(x)) - u(\sigma_e(y))|^2}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}} + \frac{|u(x) - u(\sigma_e(y))|^2}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}} + \frac{|u(\sigma_e(x)) - u(y)|^2}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} + \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}}.$$

此表达式与（4.4）右端相同。也就是说，（4.4）在$(x,y) \in A_{--}$时取等号。

- 任取 $(x,y) \in A_{+-}$。根据极化的定义，我们有

$$v(x) = u(x), \quad v(\sigma_e(x)) = u(\sigma_e(x)), \quad \text{and} \quad v(y) = u(\sigma_e(y)), \quad v(\sigma_e(y)) = u(y),$$

因此，我们将（4.4）改写为

$$\begin{aligned}
&\frac{|u(x) - u(\sigma_e(y))|^2}{|x-y|^{N+sp}} + \frac{|u(\sigma_e(x)) - u(\sigma_e(y))|^2}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} + \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}} + \frac{|u(\sigma_e(x))-u(y)|^2}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}}\\
&\quad\leqslant \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+sp}} + \frac{|u(\sigma_e(x))-u(y)|^2}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}} + \frac{|u(x)-u(\sigma_e(y))|^2}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}} + \frac{|u(\sigma_e(x))-u(\sigma_e(y))|^2}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}}.
\end{aligned}$$

重新整理后，得到

$$\begin{aligned}
&|u(x)-u(y)|^2 \left(\frac{1}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{1}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}}\right)\\
&- |u(\sigma_e(x))-u(y)|^2 \left(\frac{1}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}} - \frac{1}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}}\right)\\
&- |u(x)-u(\sigma_e(y))|^2 \left(\frac{1}{|x-y|^{N+sp}} - \frac{1}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}}\right)
\end{aligned}$$

$$+|u(\sigma_e(x))-u(\sigma_e(y))|^2\left(\frac{1}{|\sigma_e(x)-\sigma_e(y)|^{N+sp}}-\frac{1}{|\sigma_e(x)-y|^{N+sp}}\right)\geqslant 0. \tag{4.7}$$

利用（4.6）中的等式，我们将（4.7）改写为

$$\begin{aligned}&\left[|u(x)-u(y)|^2-|u(\sigma_e(x))-u(y)|^2-|u(x)-u(\sigma_e(y))|^2+|u(\sigma_e(x))-u(\sigma_e(y))|^2\right]\\&\qquad\times\left(\frac{1}{|x-y|^{N+sp}}-\frac{1}{|x-\sigma_e(y)|^{N+sp}}\right)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{4.8}$$

由不等式4.6以及其中等号情形的刻画，我们得出4.8等价于四点不等式

$$F(x,y):=|u(x)-u(y)|^2-|u(\sigma_e(x))-u(y)|^2-|u(x)-u(\sigma_e(y))|^2+|u(\sigma_e(x))-u(\sigma_e(y))|^2\geqslant 0.$$

展开括号并重新整理后，我们发现

$$F(x,y)=2(u(\sigma_e(x))-u(x))(u(y)-u(\sigma_e(y)).$$

回顾 $(x,\ y)\in A_{+-}$，我们确实得到 $F(x,\ y)>0$。这意味着不等式4.4在 A_{+-}中是严格的。以大致相同的方式论证，我们得到不等式4.4在 A_{-+}中严格成立。

综合全部四种情形，我们得出4.4在 Σ中成立，由此证明了4.3。

现在假设（4.3）中取等号。通过考察A_{+-} 和 A_{-+}的等号情形，可知 $|A_{+-}|=0$ 和 $|A_{-+}|=0$。因此，我们有以下几种情形：

- $u(\sigma_e(x))=u(x)$ 对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^N$ 成立。这意味着 $P_eu=u=u\circ\sigma_e$。
- 集合 $\{x\in\Sigma_e^+\,|\,u(\sigma_e(x))>u(x)\}$ 不是零测集。由于 $|A_{+-}|=0$，可知$u(\sigma_e(x))\geq u(x)$ 对几乎处处的 $x\in\Sigma_e^+$ 成立，这意味着 $P_eu=u$。
- 集合 $\{x\in\Sigma_e^+\,|\,u(\sigma_e(x))<u(x)\}$ 不是零测集。由于 $|A_{-+}|=0$，可知$u(\sigma_e(x))\leq u(x)$ 对几乎处处的 $x\in\Sigma_e^+$ 成立，这意味着 $P_eu=u\circ\sigma_e$。

因此，我们总有 $P_eu=u$ 或 $P_eu=u\circ\sigma_e$。 □

推论 4.4. 设 u 是首个非平凡特征函数。那么，对每个 $e\in\mathbb{S}^{N-1}$，在 $\mathbb{R}^N$ 中，$P_eu=u$ 或 $P_eu=u\circ\sigma_e$，因此 u 关于某个$p\in\mathbb{S}^{N-1}$呈分层施瓦茨对称。

证明. 令$\|u\|_{L^2(B)}=1$，并将 $v\in H^s_{B,0}$ 定义为 $v:=P_eu$，其中 $e\in\mathbb{S}^{N-1}$固定。由 (4.1) 和 (4.2)，我们分别有$\|v\|_{L^2(B)}=1$ 和 $\int_B v\,dx=0$。利用命题 4.3 以及 $\mu_1^{(s)}$ 的变分刻画 (1.3)，我们得出 v 是 $\mu_1^{(s)}$ 的极小化子，因此 v也是首个非平凡特征函数。命题 4.3 还给出 $v=u$或 $v=u\circ\sigma_e$。回顾第 2 节中的结论，$u\in C(\mathbb{R}^N)$，并将命题 3.2] 应用于以原点为中心的任意球中的 u，可推得 u关于某个$p\in\mathbb{S}^{N-1}$呈分层施瓦茨对称。□

命题 4.5。设 u 是一个非径向的首个非平凡特征函数。设 $p\in\mathbb{S}^{N-1}$ 满足：u 关于 p 分层施瓦茨对称。那么 $u-u\circ\sigma_p$ 是一个首个非平凡特征函数，关于 H_p 反对称，关于 p 分层施瓦茨对称，并且在 B 中恰有两个节点域。

证明。由推论4.4，存在 $p\in\mathbb{S}^{N-1}$ 使得 u 关于 p分层施瓦茨对称。由于 u 是非径向的，我们推知 $u\not\equiv u\circ\sigma_p$。令 $v:=u-u\circ\sigma_p$，于是 $v\not\equiv 0$。因此，v 是关于 H_p反对称的首个非平凡特征函数。根据构造，v 关于 p分层施瓦茨对称，$v\geq 0$ 在 Σ_p^+中且 $v\leq 0$ 在 Σ_p^-中。

不难看出， v作为方程（1.4）的解，满足反对称超解的强极大值原理 [16, 命题 3。6] 在任意开子集$U \Subset B \cap \Sigma_p^+$中的假设，这意味着 $v > 0$ 在 K 的任意紧子集 U中。于是， v 在 B中恰有两个节点域。□

命题 4.6. 对于任意 $e \in \mathbb{S}^{N-1}$，至多存在一个（相差缩放意义下）关于 H_e反对称的首个非平凡特征函数。

证明。 设 $e \in \mathbb{S}^{N-1}$，并设 u， $v \in \widetilde{H}^s_{B,\,0}$ 是两个关于 H_e 反对称且归一化为如下形式的首个非平凡特征函数

$$\|u\|_{L^2(B)} = \|v\|_{L^2(B)} = 1.$$

推论 4.4 表明，要么 $P_e u = u$，要么 $P_e u = u \circ \sigma_e$，因此不失一般性，$u \geq 0$ 属于 Σ_e^+。同理，也可设 $v \geq 0$ 属于 Σ_e^+。设 $u \not\equiv v$，并定义 $w := u - v$。特别地， w 也是关于 H_e反对称的首个非平凡特征函数。再次由推论 4.4 可知，要么 $P_e w = w$，要么 $P_e w = w \circ \sigma_e$，因此不失一般性， $w \geq 0$ 属于 Σ_e^+。如命题 4.5 的证明所示，强极大值原理 [16, 命题 3.6] 给出，要么 $w = 0$，要么 $w > 0$ 属于 $B \cap \Sigma_e^+$。如果 $w > 0$ 属于$B \cap \Sigma_e^+$，那么 $u > v \geq 0$ 属于 $B \cap \Sigma_e^+$，这将导致以下矛盾：

$$1 = \|u\|^2_{L^2(B)} = 2\|u\|^2_{L^2(B \cap \Sigma_e^+)} > 2\|v\|^2_{L^2(B \cap \Sigma_e^+)} = \|v\|^2_{L^2(B)} = 1.$$

因此，我们有 $w = 0$ 在 $B \cap \Sigma_e^+$，从而 $u = v$ 在 B。然而，由于 u， $v \in \widetilde{H}^s_{B,\,0}$，命题 2.2给出 $u \equiv v$，这与我们的初始假设矛盾。□

命题 4.7. 令 $u \in H^s_{B,0}$ 为一个关于 H_e 对任意 $e \in \mathbb{S}^{N-1}$ 都不反对称的首个非平凡特征函数。令 $p \in \mathbb{S}^{N-1}$ 满足 u 关于 p 是分层施瓦茨对称的。则 $u + u \circ \sigma_p$ 是一个径向对称的首个非平凡特征函数。

证明。 根据假设，我们有 $u \not\equiv -u \circ \sigma_p$。考虑 $v := u + u \circ \sigma_p$，使得 $v \not\equiv 0$ 并且v 是一个首个非平凡特征函数。反设 v 是非径向的。由于 u 和$u \circ \sigma_p$ 关于 $\mathbb{R}p$ （见定义 4.2）是轴对称的，因此 v:

$$v(x) = \hat{v}\,(r, \theta)\,, \quad \text{where } r = |x|, \quad \theta = \arccos\left(\frac{x}{|x|} \cdot p\right),$$

对于某个 $\hat{v}$： $[0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$，并且根据构造，$\hat{v}(r, \theta) = \hat{v}(r, \pi - \theta)$。由推论 4.4， v 关于某个 $p' \in \mathbb{S}^{N-1}$呈分层施瓦茨对称。回想起 v是非径向的，我们得出 p' 必与 p共线。由于 $\hat{v}$ 关于 θ 单调不增，且 $\hat{v}(r, \theta) = \hat{v}(r, \pi - \theta)$，我们推断 $\hat{v}$ 不依赖于 θ，这与非径向性假设矛盾。因此， v 是径向对称的。□

现在，我们已经具备了证明以下定理所需的全部条件：1.1 关于球内第一个非平凡特征空间的结构。

定理的证明*1.1*。 记 $E^1 \subset H^s_{B,0}$ 为对应于第一个非平凡特征值 $\mu_1^{(s)}$ 的特征空间。设 E_r 为径向对称特征函数的子空间，且 E_a 为由特征函数生成的子空间，其中每个特征函数关于某个超平面是反对称的。设 $u \in E^1$。由推论 4.4， u 关于某个 $p \in \mathbb{S}^{N-1}$是分层施瓦茨对称的。写成

$$u = \frac{1}{2}\,(u - u \circ \sigma_p) + \frac{1}{2}(u + u \circ \sigma_p),$$

并结合命题 4.5和 4.7，我们推得

$$E^1 = E_a \oplus E_r.$$

由于 E^1 的维数有限， E_a 和 E_r 也同样如此。特别地， E^1 中至多存在 $k \in \mathbb{N}$ 个线性无关的径向对称特征函数。

假设 $E_a \neq \{0\}$，并更详细地考察子空间 E_a 。任取一个关于某个 $H_{e'}$ 反对称的 $u_1 \in E_a$，其中 $e' \in \mathbb{S}^{N-1}$。由于 B 中的问题 (1.1) 具有旋转不变性，我们不失一般性地假设 $e' = (1, 0, \ldots, 0)$。记 e_j 为第 j 个单位坐标向量， $j = 1, \ldots, N$，令 u_j 为 u_1 的一个旋转，使得 $u_j \in E_a$ ，且其关于 H_{e_j} 反对称。根据构造，函数 $u_1, \ldots, u_N$ 两两 $L^2(\Omega)$-正交（因此线性无关）。

现在任取一个 $e \in \mathbb{S}^{N-1}$。由于 $e = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha e_N$对某个 $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_N) \neq (0, \ldots\ldots, 0)$ 成立，因此函数 $v = \alpha_1 u_1 + \ldots \alpha_N u_N$ 非零。事实上，回想一下， $u_1, \ldots\ldots, u_N$ 在 $L^2(\Omega)$ 中两两正交，我们得到

$$\|v\|^2_{L^2(B)} = \alpha_1^2 \|u_1\|^2_{L^2(B)} + \cdots + \alpha_N^2 \|u_N\|^2_{L^2(B)} = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_N^2)\|u_1\|^2_{L^2(B)} = \|u_1\|^2_{L^2(B)} > 0.$$

因此， $v \in E_a$ 且它关于 H_e反对称。根据命题4.6， v 在其对称类中是唯一的特征函数，差一个缩放因子。由于 v 是任意的，我们得出函数 $\{u_1, \ldots, u_N\}$ 构成了 E_a的一组正交基。关于u_j的其余性质见命题4.5。□

借助定理1.1和3.1，当 s充分接近1时，我们能够证明球中首个非平凡特征函数的反对称性。

定理 1.2 的证明。反设存在一个序列 $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (0, 1)$，满足 $s_k \to 1^-$ as $k \to +\infty$，使得对每个 $k \in \mathbb{N}$，都存在一个径向对称特征函数 $u^{(s_k)}$) 1，并在 $L^2(B)$ 中归一化，且对应于 $\mu_1^{(s_k)}$)。由定理 3.1， $u^{(s_k)}$) 1 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛；取适当的子序列后，其极限为特征函数 $u \in H^1(B)$，对应于 B 中局部诺伊曼拉普拉斯算子的第一个非平凡特征值 $\mu_1^{(1)}$ 。然而， u 也是径向对称的，这不可能，参见第 1 节。因此，存在 $s^* \in (0, 1)$，使得对于所有 $s \in (s^*, 1)$，与 $\mu_1^{(s)}$ 对应的特征函数都不是径向对称的。由定理 1.1，与 $\mu_1^{(s)}$ 对应的特征空间由 N 个线性无关的反对称特征函数张成。□

参考文献

[1] A. Audrito, J.C. Felipe-Navarro, X. Ros-Oton。 分数阶拉普拉斯算子的诺伊曼问题：直至边界的正则性。《比萨高等师范学院科学年刊》(5 **24** 2023 2, 1155 1222 6) ( ), 第 – 期。W. Beckner。 索*оболев*不等式、

[2] 泊松半群与球面上的分析。美国国家科学院院刊, S^n **89** 1992 11, 4816 4819 13 ( ), 第 – 期。J.

[3] Benedikt, V. Bobkov, R. N. Dhara, P. Girg。球内分数阶拉普拉斯算子第二特征函数的非径向性。《美国数学会会刊》 **150** 2022 12, 5335 5348 13 ( ), 第 – 期。V. Bobkov, S. Kolonitskii。施泰纳对称域中分数阶

[4] *p-Laplacian* 的佩恩节点集猜想。圣彼得堡数学研究所科学札记 **536** 2024 96 125 13 ( ), –。J. Bourgain, H. Brézis, P.

[5] Mironescu。再谈 *Sobolev* 空间。最优控制与偏微分方程，IOS出版社，阿姆斯特丹 (2001 439 455 9), –。A. Braides， 面向初学者的 Γ-收敛。牛津数学应用讲座丛书第22卷，牛津大学

[6] 出版社，牛津， 2002年。7， 8， 11[7] L. Brasco, E. Lindgren, E. Parini。分数阶切格问题。界面与自由边界**16** 3, 41920144589( ), 第 – 期。

[8] L. Brasco, E. Parini, M. Squassina。分数阶 p-Laplacian 变分特征值的稳定性。《离散与连续动力系统》 **36** 2016 4, 1813 1845 10, 11 ( ), 第 – 期。F. Brock, A. Y. Solynin。通过极化实现对[9]称化的一种方法。《美国数学会汇刊》352 (2000 4, 1759 1796 12), 第 – 期。G. Dal Maso。 Γ-收敛导论。《非线性微分方程及其应用进展》第8卷，Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，1993年。7, 12[10][11] M. Degiovanni, M. Marzocchi。 Γ-收敛下极小极大值的极限。《电子微分方程杂志》 **266** 2014 19 11 ( ), 第 E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci。分数阶 Sobolev 空间指南。《数[12]学科学通报》 **136** 2012 5, 521 573 1, 4, 9, 11 ( ), 第 – 期。S. Dipierro, X. Ros-Oton, E. Valdinoci。具有 Neumann[13] 边界条件的非局部问题。《伊比利亚美洲数学评论》 **33** 2017 2, 377 416 1, 2, 3, 5, 6, 9 ( ), 第 – 期。L. Friedlander。Dirichlet 与 Neumann 特征[14]值之间的一些不等式。《理性力学与分析档案》 **116** 1991 2, 153 160 3 ( ), 第 – 期。B. Helffer, M. Persson Sundqvist。欧几里得球中的节点域。[15]《美国数学会会刊》144 (2016), 第11期, 4777–4791。2[16] S. Jarohs, T. Weth。变阶非局部问题中的反对称最大值原理与对称性。《纯粹与应用数学年刊》(4 **195** 2016 1, 273 291 16) ( ), 第 – 期。D. Mugnai, E. Proietti Lippi。[17]Neumann 分数阶 p-Laplacian：特征值与存在性结果。《非线性分析》 **188** 2019 455 474 6 ( ), –。A. Ponce。一个体现 Poincaré 不等式精神的估计。《欧洲数学会杂志》[18](JEMS) 6 (2004), 第1期, 1–15。8[19] A. Saldaña, T. Weth。有界径向区域中抛物型方程解的渐近轴对称性。《演化方程杂志》12 (2012), 第3期, 697–712。

15 (V. Bobkov) 俄罗斯科学院乌法联邦研究中心数学研究所，车尔尼雪夫斯基街112号，450008 乌法，俄罗斯。电子邮箱：bobkov@matem.anrb.ru (E. Parini) 艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、I2M，维克多·雨果广场3号，13331 马赛 CEDEX 3，法国。电子邮箱：enea.parini@univ-amu.fr