arXiv:2603.10554v1 [math.CV] 11 Mar 2026

固定临界点的余弦族双曲分支

Weiyuan Qiu 和 Lingrui Wang

2026年3月9日

摘要

我们研究了具有固定临界点的余弦函数的参数平面。双曲分支可分为三种类型：A 型、C 型和 D 型。除唯一的 A 型分支外，所有双曲分支都是有界且单连通的；该 A 型分支以 0 为孤立边界点。我们利用参数拼图方法构造了相位-参数传递映射，并证明双曲分支的边界是若尔当曲线。通过类似的思路，我们证明了 C 型双曲分支是拟圆盘。

关键词：余弦函数，双曲分支，局部连通性，参数拼图。

1 引言

在研究解析函数的参数空间时，Fatou 曾在 [12]中猜想，双曲有理映射在给定次数的有理映射空间中稠密。对于指数函数族以及具有有限个奇异值的超越整函数族，也曾在[11]中提出这一猜想。该猜想被称为“双曲性稠密性”。这一猜想已在实多项式族中得到证明（ [14, 19] 针对二次多项式，以及 [18] 针对所有次数的多项式）。

在二次多项式族中，双曲性的稠密性可以由另一个猜想推出：曼德勃罗集的边界 $\mathcal{M}$是局部连通的（[8]）。 $\mathcal{M}$ 边界的局部连通性被称为曼德勃罗集局部连通性猜想。根据 Whyburn 局部连通性刻画（ [38]），要研究曼德勃罗集局部连通性猜想，就有必要研究双曲分支边界的局部连通性。

许多有理函数族和多项式族的双曲分支数十年来一直受到研究（见 [4, 5, 13, 24, 26, 28, 29, 32, 36]）。至于超越函数的参数空间，指数族$\{f_\kappa(z) = e^z + \kappa : \kappa \in \mathbb{C}\}$ 已得到充分研究。指数族的双曲分支由折叠序列分类（ [7]），且双曲分支的边界都是趋向于∞ 的若尔当弧（ [30]）。

正切族的参数空间 $\{T_\lambda(z) = \lambda\tan z\colon \lambda \neq 0\}$ 也已在 [15–17,39]中得到研究。然而，对其他超越族的研究较为少见。

本文考虑族 $\{f_{a,b}(z) = ae^z + be^{-z}\colon a,\ b \neq 0\}$，它含有两个参数，按照 [21] 的说法，称为余弦族。余弦函数是最简单的超越整函数之一，原因如下：它没有有限渐近值，且有两个临界值 $\pm 2\sqrt{ab}$；其临界点 $\log\sqrt{b/a} + k\pi i$，$k \in \mathbb{Z}$ 的周期为 πi（对数和平方根的分支选择恰当）。仿照 Milnor 对三次多项式参数空间的研究（ [23]），我们首先考虑截面 $\mathcal{S}_p$, $p \geq 1$。这里 p 是一个整数，并且

$$\mathcal{S}_p = \{f_{a,b} : f_{a,b} \text{ has a superattracting cycle of periodic } p\}.$$

特别地，我们考虑截面 $\mathcal{S}_1$，其中 $f_{a,b}$ 有一个超吸引不动点。经过共轭后，$\mathcal{S}_1$ 中的映射具有如下形式：

$$f_v(z) = v(\cos z - 1), \quad v \neq 0.$$

因此 $\mathcal{S}_1$ 可以视为穿孔平面 $\mathbb{C}^*$ （图 1）。为简便起见，我们不区分 f_v 的空间与 v-平面。

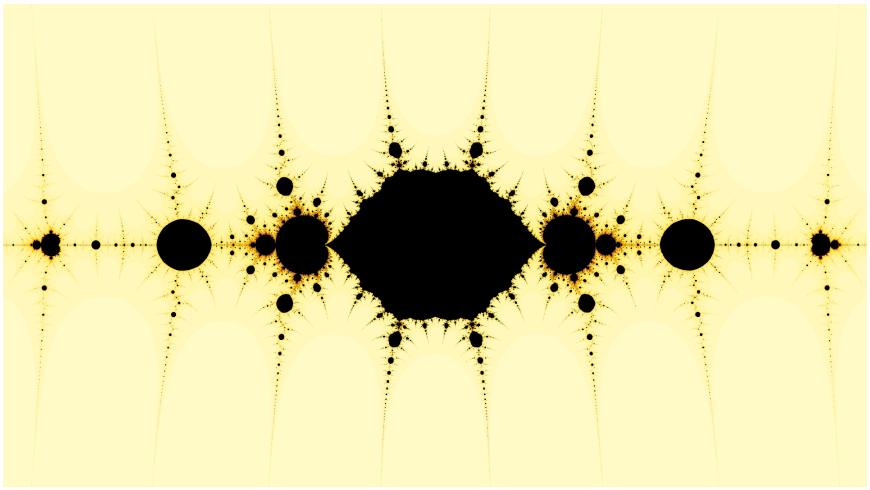

图 1： f_v的参数空间，黑色区域为双曲分支。

容易看出， f_v 有临界点 $k\pi$、 $k \in \mathbb{Z}$，两个临界值 0 和 $-2v$，且没有有限渐近值。此外，0 是 f_v的一个超吸引不动点。将包含 0 的 Fatou分支记为 B_v 。

$\mathcal{S}_1$ 中的双曲映射可定义为

$$\mathcal{H} = \{f_v : -2v \text{ is attracted by an attracting cycle}\}.$$

$\mathcal{H}$ 的每个连通分支都称为双曲分支。容易看出，存在一个双曲分支 $\mathcal{H}_0$，其中 0 是一个孤立的边界点。而 $\mathcal{H}_0$ 是一个 A 型双曲分支。

根据吸引周期轨道 $-2v$ 以及 $-2v$的位置，我们可以对双曲分支进行分类，这与三次多项式（ [23]）和二次有理函数（ [28]）中的分类类似：

- A型（相邻型）： $-2v \in B_v$，因此它被 0 吸引；
- C型（捕获型）： $-2v \notin B_v$，但存在一个整数 $m \geq 1$ 使得$f_v^m(-2v)$ 属于 B_v；
- D型（不相交型）：对于所有 $n \geq 0$， $f_v^n(-2v) \notin B_v$，因此 $-2v$ 被另一个周期轨道 $\{z_v, \ldots, f_v^{p-1}(z_v)\}$ 吸引。

容易看出，对于一个 C 型双曲分支 $\mathcal{U}$，令

$$m(v) = \min\{n \geq 1 : f_v^n(-2v) \in B_v\}.$$

那么 $m(v)$ 在 $\mathcal{U}$ 上为常数。因此，我们可以定义 $\mathcal{H}_m$ C 型双曲分支的并集，其中 $m = \min\{j \geq 1 : f_v^j(-2v) \in B_v\}$。

对于多项式，连通轨形中的双曲分支有界性显而易见。但对于其他解析函数族（ [10, 25]），这一结果并非显然。我们证明了， $\mathcal{S}_1$ 中的双曲分支均有界，而在指数族中，这些分支总是无界的。

定理 1.1。 每个双曲分支都是 $\mathbb{C}$中的一个有界域。*A* 型双曲分支是唯一的，且与穿孔单位圆盘同胚。*C* 型和 *D* 型双曲分支均与单位圆盘同胚。

如开篇所述，双曲分支边界的局部连通性与 Fatou 猜想有关。许多多项式族和有理函数族中双曲分支边界的局部连通性已得到证明（例如，见 [13, 26, 32, 36]）。

在多项式动力学中，研究局部连通性的有力方法是 Branner-Hubbard-Yoccoz 拼图。对于余弦函数 $f_{a,\ b}$，若临界值的轨道有界，也可以用类似的方法构造拼图（[27]）。在族 $\{f_v(z) = v(\cos z - 1) : v \neq 0\}$ 中，我们利用动力平面中的拼图构造了参数拼图，并证明了 $\mathcal{S}_1$ 中双曲分支的边界都是若尔当曲线。

定理 1.2。 $\mathcal{H}_0 \cup \{0\}$ 是一个若尔当区域。*C* 型和 *D* 型双曲分支都是若尔当域。

定理 1.2 意味着除 $\mathcal{H}_0$ 之外，所有双曲分支都是若尔当域。此外，C 型双曲分支具有更高的正则性。

定理 1.3。 *C* 型双曲分支是拟圆盘。

本文结构如下。在第§2节中，我们介绍超吸引不动点 B_v 的直接吸引盆0 的 f_v 的一些性质。其直径

当 B_v 趋近于0 时， v 趋近于∞，双曲分支除 $\mathcal{H}_0$外均为单连通。在第§3节中，我们对双曲分支进行参数化，并证明 A 型和 C 型双曲分支的有界性。在第§4节中，我们回顾参数射线及其落点定理，该定理可视为多项式情形的类比。

定理 1.2 在第 5 节和第 6节中得到证明。在第 5节中，我们构造参数拼图，并证明存在一列围绕不可重整化参数的非退化环带。在第 6节中，我们研究双曲分支边界上的可重整化参数。我们证明，这些参数总是位于曼德勃罗集的一个复制品中（见定义 6.1）。此外，我们证明了这些参数处双曲分支边界的局部连通性。同时，这也推出了 D 型双曲分支的有界性，并完成了定理 1.1的证明。最后，在第 7节中，我们通过全纯运动构造拟共形同胚，从而证明定理 1.3 。

2 基本性质

本节介绍 B_v0 的直接吸引盆和双曲分支的一些基本性质。

引理 2.1。设 $v \in \mathbb{C}^*$。如果 f_v 属于一个 *A* 型双曲分支，那么 B_v 是 $F(f_v)$ 的唯一连通分支，且 $k\pi \in B_v$、 $k \in \mathbb{Z}$。否则， f_v 的每个 *Fatou*分支至多包含一个临界点。

证明。 假设 f_v属于一个 A 型双曲分支，则 f_v 的所有 Fatou 分支最终都映射到 B_v 。由于 f_v 是 A 型，$-2v \in B_v$。因此存在一条连接 0 与 $-2v$的曲线 $\gamma \subset B_v$ 。其原像 $f_v^{-1}(\gamma)$ 是一条曲线，经过所有 $k\pi$、 $k \in \mathbb{Z}$。并且 $f_v^{-1}(\gamma)$ 完全包含在一个 Fatou分支 U中。由于 $0 \in f_v^{-1}(\gamma)$， $f_v^{-1}(\gamma) \subset B_v$与 $U = B_v$。因此， $f_v^{-1}(B_v) = B_v$。由归纳法， B_v 是 $F(f_v)$ 的唯一连通分支。

现在假设 $v \in \mathbb{C}^*$ 不属于任何 A 型双曲分支。用矛盾法假设 $k_1\pi$、 $k_2\pi$ 位于同一个 Fatou分支中。

情形 1： $|k_1|$、 $|k_2|$ 中至少有一个是偶数。由于 f_v 是 2π周期的，因此存在一个临界点 c 属于 B_v，也就是说， c 和 0 位于同一个 Fatou分支中。由于 f_v 是偶函数， $-c$ 与 0 位于同一个 Fatou分支中。若对某个 $k \in \mathbb{Z}$，有 $c = (2k+1)\pi$ ，则 $-2v \in B_v$，这与f_v 不是 A 型双曲参数矛盾。因此 $c = 2k\pi$。设 $\gamma \subset B_v$ 是一条连接 c、 $-c$且足够光滑的若尔当弧。我们可以假设对任意 $l \in \mathbb{Z}$，$(2l+1)\pi \notin \gamma$；否则 $-2v \in B_v$。由最大模原理， $\gamma \cup (-\gamma)$所围成的圆盘包含于 B_v中。但$(2l+1)\pi$、 $|l| < |k|$ 都包含在这个圆盘内。因此 $-2v \in B_v$，再次产生矛盾。

情况2： $|k_1|, |k_2|$均为奇数。存在 $k \geq 1$，使得（$2k+1$）π位于与 π相同的 Fatou分支 U 中。我们将证明 $\pm\pi \in U$，从而 $0 \in U$

由最大模原理可得。此外，$-2v \in B_v$，这导致矛盾。若 $k=1$，则由 f_v的周期性可知。现在假设 $k \geq 2$。我们可以假设（$2k-1$）$\pi \notin U$。令 γ：$[0,1] \to U$为一条连接（$2k+1$）π与 π的若尔当弧。于是 $\gamma-2\pi$是一条连接（$2k-1$）π与 $-\pi$的若尔当弧，并且 $\gamma \cap$（$\gamma-2\pi$）$=\varnothing$。令 $\pi=\gamma$（t_0）γ（t_1）.....、γ（t_n）$=$（$2k+1$）π为 γ 与像轴的交点，其中 $|\gamma$（t_j）$|<|\gamma$（t_{j+1}）$|$，$0 \leq j \leq n-1$。令 $0 \leq j_0 \leq n-1$ 满足 Re γ（t_{j_0}）$<$（$2k-1$）π，且 Re γ（t_{j_0+1}）$>$（$2k-1$）π。若 $|\gamma$（t_{j_0+1}）$-\gamma$（t_{j_0}）$|>2\pi$，令 $\epsilon>0$ 充分小。不失一般性，假设 Im γ（t）>0，$t \in$（$t_{j_0}+\epsilon$，$t_{j_0+1}-\epsilon$）。令 D 为由 $[\gamma$（t_{j_0}）γ（t_{j_0+1}）$] \cup \gamma$（$[t_{j_0}, t_{j_0+1}]$）围成的区域。于是γ（$[t_{j_0}+\epsilon, t_{j_0+1}-\epsilon]$）连接 D 中的一点 γ（$t_{j_0+1}-\epsilon$）与 D外的一点 γ（$t_{j_0}+\epsilon$），并且 γ（$[t_{j_0}+\epsilon, t_{j_0+1}-\epsilon]$）$-2\pi \cap [\gamma$（$t_{j_0}$）$\gamma$（$t_{j_0+1}$）$]=\varnothing$。因此，$\gamma \cap (\gamma-2\pi) \neq \varnothing$，这与 γ和 $\gamma-2\pi$不相交矛盾。类似地，若 $|\gamma$（t_{j_0+1}）$-\gamma$（t_{j_0}）$|<2\pi$，则有 $\gamma \cap (\gamma-2\pi) \neq \varnothing$。

因此，对于不属于任何 A 型双曲分支的参数 v，f_v 的每个 Fatou 连通分支至多包含一个临界点。 □

在 [27], 中，作者证明了以下两个结果：

推论 2.1。设 $v \in \mathbb{C}^*$。若 f_v 属于一个 A 型双曲分支，则 B_v 无界，并且 ∂B_v 处处不局部连通。否则，B_v 有界。

推论 2.2。设 $v \in \mathbb{C}^*$，它不属于任何 A 型双曲分支。若 P（f_v）有界，或 $-2v$ 的轨道逃逸到 I，则 B_v 是一个若尔当区域。

我们可以估计 B_v 的直径。

引理 2.2。直径 $B_v \to 0$ 当 $v \to \infty$。

证明。令 $h_1(z)=\cos z-1$, $h_2(z)=z/v$。令 $\epsilon>0$ 充分小，且 $Q=\{z \in \mathbb{C}: |\text{Re } z|<\epsilon, |\text{Im } z|<\epsilon\}$。那么 $h_1(Q)$ 是一个由椭圆和双曲线围成、包含焦点 0 的有界区域，而 $h_2(Q)$ 是由 Q 经过旋转和缩放得到的正方形。显然，$h_2(Q) \subset D(0, \sqrt{2}\epsilon/|v|)$。$d(0, \partial h_1(Q))=1-\cos \epsilon > \frac{\epsilon^2}{2\sqrt{2}^\circ}$ 因此，当 $|v|$ 足够大时，对于 $\epsilon=4/|v|$, $f_v: Q \to f_v(Q)$ 是一个重整化（重整化的定义见 [22] ）。这意味着 $B_v \subset Q$，从而 diam $B_v \leq$ diam $Q \leq 8\sqrt{2}/|v|$。 □

反之，中心为 0 且半径充分小的穿孔圆盘中的参数 $r>0$ 是双曲的，并且属于 A 型。

引理 2.3。对于 $0<|v|<1/5$，$-2v \in B_v$，即 f_v 是双曲的，并且属于 A 型。

证明。考虑矩形 $R=\{z=x+iy: |x|<\pi, |y|<\log 1/|v|\}$。那么$f_v(R)$是一个焦点为 0 和 $-2v$的椭圆，长轴长度为$1+|v|^2$。于是，对于 $0<|v|<1$，$f_v(R) \subset \mathbb{D} \subset R$。因此 $R \subset B_v$。此外，$|-2v|<2/5$，因此 $-2v \in R$。这意味着 $-2v \in B_v$，即 v 是一个 A 型双曲参数。 □

根据引理 2.3，存在一个 A 型双曲分支，它包含以 0 为中心的一个足够小的穿孔圆盘。将该分支记为 $\mathcal{H}_0$。现在我们证明，除$\mathcal{H}_0$之外，双曲分支都是单连通的，而$\mathcal{H}_0$是二连通的。

引理 2.4. 设 $\mathcal{U}$ 是一个双曲分支。若 $\mathcal{U} \neq \mathcal{H}_0$，则 $\mathcal{U}$ 是单连通的。而 $\mathcal{H}_0$ 是二连通的。

证明. 若 $\mathcal{U}$ 是 D 型双曲分支，则证明与二次多项式族的情形相同（见 [6], 第八章，定理 2.1）。

设 $\mathcal{U}$ 是一个 C 型双曲分支。令 $\gamma \subset \mathcal{U}$ 为任意一条有界若尔当曲线，Ω 为 γ所围成的区域。只需证明 $\Omega \subset \mathcal{U}$。事实上，由于 γ的紧致性，对充分小的 $\epsilon > 0$，存在 $N \geq m$，使得对于所有 $v \in \gamma$，$f_v^N(-2v) \in D(0, \epsilon)$。函数 $f_v^N(-2v)$ 在 $\mathbb{C}^*$上解析。根据最大模原理，对于所有 $v \in \Omega$，$f_v^N(-2v) \in D(0, \epsilon)$。因此，$\Omega$ 不可能与 $\mathcal{U}$的补集相交。换言之，$\Omega \subset \mathcal{U}$，即 $\mathcal{U}$ 是单连通的。

同理，$\mathcal{H}_0 \cup \{0\}$ 是单连通的，因此 $\mathcal{H}_0$ 是二连通的。 □

3 双曲分支的参数化

由引理2.4可知，双曲分支可以共形地映射到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 或穿孔单位圆盘 $\mathbb{D}^*$。可以根据 f_v的动力学来选择这些映射。此外，我们将证明所有双曲分支都是 $\mathbb{C}$ 中的有界区域；相比之下，指数族的双曲分支全都是无界的（见 [30]）。

3.1 A 型双曲分支

设 $\mathcal{U}$ 是一个 A 型双曲分支。回忆一下，B_v 是 0 的直接吸引盆，$\phi_v : U_v \to D(0, r)$ 是定义在 0 的某个邻域 U_v上的博特彻映射，满足 $\phi_v \circ f_v(z) = \phi_v(z)^2$，$\phi_v(0) = 0$，且自由临界值为 $-2v \in \partial U_v$。由于 $f_v(z) = f_v(-z)$，U_v 关于 0 对称，并且 $\phi_v(-z) = -\phi_v(z)$。定义

$$\begin{aligned} \Phi_0 : \mathcal{U} &\to \mathbb{D} \\ v &\mapsto \phi_v(-2v) \end{aligned} \tag{1}$$

引理 3.1. $\Phi_0(\mathcal{U}) \subset \mathbb{D}^*$.

证明。如果存在一个 $v \in \mathcal{U}$ 使得 $\Phi_0(v) = 0$，那么 $-2v$ 就是 f_v 的不动点 0。因此 $v = 0$，这就产生了矛盾。 □

的有界性 由推论 2.1 和引理 2.2可得:

引理 3.2。 设 $\mathcal{U}$ 是一个 A 型双曲分支，则 $\mathcal{U}$ 有界。

证明。由引理 2.2，存在 $R > 0$ 使得 B_v 对所有 $|v| > R$均有界。由推论 2.1，B_v 对所有 $v \in \mathcal{U}$均无界。因此 $\mathcal{U} \subset D(0, R)$。 □

事实上，映射 Φ_0 由（1）定义，给出了从 $\mathcal{U}$ 到 $\mathbb{D}^*$的解析覆盖。此外，A 型双曲分支是唯一的。

命题 3.1。 $\mathcal{H}_0$ 是唯一的 A 型双曲分支，并且 Φ_0: $\mathcal{H}_0 \to \mathbb{D}^*$ 由 （1）给出，是次数为 2 的解析覆盖。

证明。 设 $\mathcal{U}$ 是一个 A 型双曲分支。我们证明 $\Phi_0 : \mathcal{U} \to \mathbb{D}^*$是有限次数的解析覆盖。

首先，由于 $\phi_v(z)$ 关于 v 和 z均为解析函数， Φ_0 是一个解析函数。

接下来我们证明 $\Phi_0 : \mathcal{U} \to \mathbb{D}^*$ 是真映射。只需证明 $\Phi_0(v_n) \to \partial\mathbb{D}$ as $v_n \to v_0 \in \partial\mathcal{U}$即可。设 $G_n(z) = \log|\phi_{v_n}(z)|$ 是 B_{v_n}上的格林函数。对于 $z \notin \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(B_{v_n})$，定义 $G_{v_n}(z) = 0$。随后， G_{v_n}可以连续地延拓到 $\mathbb{C}^*$ 。类似地， G_{v_0} 在 $\mathbb{C}^*$上连续。由于$v_0 \in \partial\mathcal{U}$, $-2v_0 \notin \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(B_{v_0})$，即 $G_{v_0}(-2v_0) = 0$。因此， $|\Phi_0(v_n)| = |\phi_{v_n}(-2v_n)| = e^{G_n(-2v_n)} \to e^{G_0(-2v_0)} = 1$ as $n \to \infty$。所以 Φ_0 是真映射。此外，它还是解析分歧覆盖映射。

由于博特彻映射 ϕ_v 是共形的， $\Phi_0'(v) \neq 0$ 若 $v \neq 0$。因此对于 $\mathcal{U} \neq \mathcal{H}_0$， Φ_0 没有分支点。这意味着 Φ_0： $\mathcal{U} \to \mathbb{D}^*$ 是有限次数的解析覆盖映射。然而，这样的覆盖映射并不存在，因为 $\mathcal{U}$ 是单连通的，由引理2.4。换言之， $\mathcal{H}_0$ 是唯一的A型双曲分支。

最后我们证明， Φ_0： $\mathcal{H}_0 \to \mathbb{D}^*$ 是 2 次解析覆盖映射。由黎曼可去奇点定理， Φ_0 可延拓为 $\mathcal{H}_0 \cup \{0\}$上的解析函数。因此 Φ_0： $\mathcal{H}_0 \cup \{0\} \to \mathbb{D}$ 是有限次数的解析分支覆盖。由于 0 是 Φ_0的唯一零点，0 是 Φ_0的唯一分歧点。只需证明 0 是 Φ_0 的 2 次零点。由于 $f_v(z) = v(\cos z - 1) = \frac{vz^2}{2}(1 + O(z^2))$，对 n 作归纳，我们有

$$f_v^n(z) = (\frac{v}{2})^{2^n-1} z^{2^n}(1 + O(z^2)).$$

根据 $\phi_v(z)$ 的定义，

$$\Phi_0(v) = \phi_v(-2v) = \lim_{n\to\infty} (f_v^n(-2v))^{1/2^n} = v^2(1 + O(v^2)).$$

因此，0 是 Φ_0 的二重零点。所以 Φ_0： $\mathcal{H}_0 \to \mathbb{D}^*$ 是一个 2 次解析覆盖映射。 □

3.2 C 型双曲分支

回忆一下，对于 $m \geq 1$， $\mathcal{H}_m = \{v \in \mathbb{C}^*$: $f_v^m(-2v) \in B_v$， $f_v^{m-1}(-2v) \notin B_v\}$，且 $\mathcal{H}_0$ 是满足 $-2v \in B_v$ 的唯一双曲分支。因此可以定义 $\hat{} \mathcal{H} = \bigcup_{m\geq 0} \mathcal{H}_m$。

令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{H}_m$ 的一个连通分支， $m \geq 1$。由引理 2.1， B_v 仅包含一个临界点 0。因此， ϕ_v 可扩展为一个保角映射 ϕ_v： $B_v \to \mathbb{D}$。定义

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} &\to \mathbb{D} \\ v &\mapsto \phi_v(f_v^m(-2v)) \end{aligned}. \tag{2}$$

首先证明 $\mathcal{U}$ 是有界的。 $f_v^m(-2v) \in B_v$， $v \in \mathcal{U}$。存在一个整数 $k_v \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，使得 $f_v^{m-1}(-2v) \in B_v + 2k_v\pi$。

引理 3.3。函数 $v \mapsto k_v$ 在 $\mathcal{U}$上为常数。换言之，存在 $k \in \mathbb{Z}$、 $k \neq 0$，使得 $f_v^{m-1}(-2v) \in B_v + 2k\pi$对所有 $v \in \mathcal{U}$均成立。

证明。只需证明 k_v 局部为常数。令 $v \in \mathcal{U}$、$z(v) = f_v^{m-1}(-2v)$。 $z(v)$ 是关于 v 的解析函数。取 v 的一个邻域 $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}$，使得相对于豪斯多夫拓扑， ∂B_v 在 $\mathcal{N}$ 上连续。因此，若 $z(v) \in B_v + 2k\pi$，则对所有 $v' \in \mathcal{N}$， $z(v') \in B_{v'} + 2k\pi$。 □

引理 3.4。设 $\mathcal{U}$ 是一个 C 型双曲分支，则 $\mathcal{U}$ 有界。

证明。若 $\mathcal{U}$ 无界，则存在 $v_n \in \mathcal{U}$, $v_n \to \infty$。由引理 2.2，diam $B_{v_n} \to 0$当 $n \to \infty$ 时。因此 $f_{v_n}^m(-2v_n) = v_n(\cos f_{v_n}^{m-1}(-2v_n) - 1)$有界。于是存在 $k_n \in \mathbb{Z}$，使得 $|f_{v_n}^{m-1}(-2v_n) - 2k_n\pi| \to 0$。由引理 3 3 k_n k $f_{v_n}^{m-1} - 2v_n \to 2k\pi$ $m = 1$ $-2v_n \to .$，是一个常 $2k\pi$ $m \geq 2$ $f_{v_n}^{m-1} - 2v_n = v_n$ $f_{v_n}^{m-2} - 1 \to 2k\pi$ 数。因此 ( ) 。若，则，这与事实矛盾。若，则 ( ) (cos) 当$n \to \infty$时。因此，对某个 $k' \in \mathbb{Z}$, $f_{v_n}^{m-2}(-2v_n) \to 2k'\pi$。对 m作归纳可得$-2v_n \to 2k''\pi$ 当 $n \to \infty$时，这与 $v_n \to \infty$矛盾。 □

命题 3.2. 映射 $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{D}$ 由 (2) 定义，是一个共形同构。

证明。首先， $\Phi_{\mathcal{U}}$ 是一个解析函数。由 $\mathcal{U}$的有界性， $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{D}$ 是一个分支覆盖映射，证明与命题 3.1的证明类似。

我们断言， $\Phi_{\mathcal{U}}$没有分支点。设 $v_0 \in \mathcal{U}$, $\Phi_{\mathcal{U}}(v_0) = z_0 \in \mathbb{D}$。设 $\epsilon > 0$ 充分小， $z \in D(z_0, \epsilon)$。如[32], 中引理 2.8 的证明所示，我们可以进行拟共形手术，得到一个整函数h_z，满足

1. $h_z(w) = h_z(w + 2\pi)$;
2. $\rho(h_z) = 1$，这里 ρ 是一个超越整函数的阶;
3. h_z 没有渐近值;
4. h_z 的零点为 $2k\pi$、 $k \in \mathbb{Z}$，且它们的次数均为 2。

由 Hadamard 因子分解定理可得

$$\begin{aligned} h_z(w) &= w^2 e^{aw+b} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{2k\pi}\right)^2\right)^2 \\ &= Ce^{aw}(\cos w - 1) \end{aligned}$$

其中 $C \in \mathbb{C}$、 $a \in \mathbb{C}$。由于 $h_z(w + 2\pi) = h_z(w)$， $a \in \{0, 1, -1\}$。若 $a \neq 0$，则 h_z 有一个渐近值 $C/2$，这就导致矛盾。因此 $a = 0$， $h_z(w) = v(z)(\cos w - 1)$，即 $h_z = f_{v(z)}$。

再次，类似于三次多项式（ [32]），可以很容易验证$\Phi_{\mathcal{U}}(v(z)) = z$。这意味着 $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{D}$ 是一个局部同胚，因此没有分支点。由于 $\mathcal{U}$ 和 $\mathbb{D}$ 都是单连通的， $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{D}$是一个同胚，因而是一个共形同构。 □

根据命题3.2，对于 $\mathcal{U}$ 的每个连通分支 $\mathcal{H}_m$，存在唯一的 $v_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}$使得 $\Phi_{\mathcal{U}}(v_{\mathcal{U}}) = 0$，从而 $f_{v_{\mathcal{U}}}^m(-2v_{\mathcal{U}}) = 0$。我们称 $v_{\mathcal{U}}$为 $\mathcal{U}$的中心。

3.3 D 型双曲分支

设 $\mathcal{D}$ 为一个 D 型双曲分支。对每个 $v \in \mathcal{D}$，f_v 的自由临界值 $-2v$ 被吸引周期轨道 $\{z_v, f_v(z_v)\ldots\ldots, f_v^{p-1}(z_v)\}$ 所吸引。由隐函数定理，z_v 是关于 v 的解析函数，其周期 p 为常数。令 $\lambda(v) = (f_v^p)'(z_v)$。则 $\lambda: \mathcal{D} \to \mathbb{D}$ 是解析函数。

引理 3.5. *$\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{C}$ 中的有界域。*

引理 3.5 将在 §6.1 中证明。现在定理 1.1 由引理2.4、3.2、3.4 和3.5得出。

利用引理 3.5，我们可以证明 $\lambda: \mathcal{D} \to \mathbb{D}$ 是共形同构，并且可以延拓到 $\mathcal{D} \to \mathbb{D}$ 同胚地，从而 $\overline{\mathcal{D}}$是若尔当区域。

命题 3.3. *$\lambda: \mathcal{D} \to \mathbb{D}$ 是一个共形同构，并且可以同胚地延拓至 $\lambda: \overline{\mathcal{D}} \to \overline{\mathbb{D}}$。特别地，$\overline{\mathcal{D}}$ 是一个若尔当区域。*

证明。由引理 3.5，$\mathcal{D}$ 是有界的。与引理 3.1的证明类似，$\lambda: \mathcal{D} \to \mathbb{D}$是一个真映射。这表明 λ 是一个分支覆盖映射。与二次多项式族（[6], 第八章，定理 2.1）类似，λ 是一个局部同胚，因此没有分支点。由于 $\mathcal{D}$ 和 $\mathbb{D}$ 都是单连通的，λ 是一个共形同构。

同样，与 [6], 第八章，定理 2.1 λ 类似，可以将其同胚地延拓至 $\mathcal{D}$ 的边界。换言之，$\mathcal{D}$ 是一个若尔当区域。 □

4 参数射线

从现在起，我们将证明定理 1.2。本节回顾余弦族的参数射线。

4.1 动力射线

回顾一下，对于余弦函数 $f_v(z) = v(\cos z - 1)$，f_v 的逃逸集定义为

$$I(f_v) = \{z \in \mathbb{C} : f_v^n(z) \to \infty \text{ as } n \to \infty\}.$$

如 [33]所示，$I(f_v)$ 由不可数多条曲线组成，这些曲线称为动力射线，是多项式外射线的类似物。下面简要介绍动力射线。

设 $\Gamma = [-2v, 0] \cup \mathbb{R}_{\geq 0}$。则 $f_v^{-1}(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ 是可数多个半条带 $P_{j,k}, j = 0, 1$, $k \in \mathbb{Z}$。这里 $P_{0,k}$ 包含于上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$，而 $P_{1,k}$ 包含于下半平面，且 $P_{j,k+1} = P_{j,k} + 2\pi$。这些条带的标记使得线段 $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ 包含于

$P_{0,k}$ 与 $P_{1,k}$两者的边界。则 $f_v: P_{j,k} \to \mathbb{C} \setminus \Gamma$ 是一个共形同构，其逆映射记为 $L_{j,k}$。

令 $\Sigma = (\{0,1\} \times \mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, $\sigma: \Sigma \to \Sigma$ 为移位。若存在 $x > 0$，使得对所有 $n \geq 0$，都有 $|k_n| \leq F^n(x)$，则称序列 $s = ((j_n, k_n))_{n \geq 0}$为指数有界。令 $F(x) = e^x - 1$。函数序列

$$g^v_{\underline{s},n}(t) = L_{j_0,k_0} \circ \cdots \circ L_{j_n,k_n} \circ F^n \tag{3}$$

当 $t > 0$ 充分大时，一致收敛到函数 g^v_s。 g^v_s 定义在区间 $(t_s, +\infty)$ 上，称为具有外部地址 s的动力射线。 t_s 的定义见 [33], 定义 2.6。由（3）容易看出，只要 $g^v_s(t)$ 和 $g^v_{\sigma(s)}(F(t))$ 都有定义，就有 $f_v(g^v_s(t)) = g^v_{\sigma(s)}(F(t))$。若射线 g^v_s 落在某个点 $z \in \mathbb{C}$，则称其落在该点，若

$$\lim_{t \to t_{\underline{s}}+} g^v_{\underline{s}}(t) = z.$$

动力射线 g^v_s 包含在逃逸集 $I(f_v)$ 中。相反，每一个 $z \in I(f_v)$ 要么位于某条动力射线上，要么是某条射线的着陆点（ [33],定理6.4）。

我们在第4.1 节末以动力射线的落点定理作结（见 [1],定理 1.4）。

定理 4.1. 设 f_v 为余弦函数， $P(f_v)$ 为其后临界集。假设 $P(f_v)$ 有界。则

1. 每一条动力射线 g^v_s，若 s 在 σ 下是周期的，则落在一个排斥的或抛物周期点上；*2.* 对每一个排斥的或抛物周期点，至少有一条、至多有有限多条动力射线落在其上。

4.2 参数射线

逃逸参数集定义为

$$\mathcal{I} = \{v \in \mathbb{C}^* : f_v^n(-2v) \to \infty \text{ as } n \to \infty\}.$$

在 [35] 中已证明， $\mathcal{I}$ 也具有射线结构，它对应于多项式族的参数外射线。在 [35],中，Tian 考察了族 $\{E_\kappa(z) = e^\kappa(e^z + e^{-z}) : \kappa \in \mathbb{C}\}$。 [35]中的方法在此仍然适用。因此我们陈述结果，并省略证明。

命题4.1。 令 Σ 为第 *4.1* 节中定义的符号空间 $s \in \Sigma$。存在唯一的单射曲线 $G_s : (t_s, +\infty) \to \mathcal{I}$ 使得 $v = G_s(t)$ 当且仅当临界值 $-2v = g^v_s(t)$ 位于 f_v 的动力平面中。

若参数射线 G_s 落在 $v_0 \in \mathbb{C}$，则称其

$$\lim_{t \to t_{\underline{s}}+} G_{\underline{s}}(t) = v_0.$$

对于多项式，具有有理外角的参数外射线的落点定理众所周知（例如，参见 [6, 8]）。Schleicher（ [34]）为指数族建立了落点定理。对于余弦族，参数射线的落点定理也可以类似地得到。

命题 4.2. 设 $s \in \Sigma$ 在移位 σ下是最终周期的。则 G_s落在一个参数上，该参数要么是抛物的，要么是严格最终预周期的。更确切地说，我们有如下结果。

1. 若 s 是周期的，则 G_s 落在参数 v 上，使得 f_v 具有一个抛物周期点；
2. 若 s 是严格预周期的，则 G_s 落在一个参数上，使得 f_v 的临界值 $-2v$ 是严格预周期的。

命题 4.3. 设 v 是一个参数，使得 $-2v$ 是严格预周期的。则 v 是 G_s 的着陆点，当且仅当 g_s^v 在 f_v的动力平面中落在 $-2v$ 上。

定义 4.1. 设 v是一个抛物参数。 $\{z_0(v) \ldots, z_{p-1}(v)\}$ 是抛物周期。该周期轨道的特征点是位于包含 $-2v$的 *Fatou*分支边界上的点 $z_j(v)$ 。

命题 4.4。 设 v 是一个抛物参数。令 $z(v)$ 为 f_v 的抛物周期的特征点。那么，当且仅当 G_s 落在 $z(v)$ 时， v 落在 g_s^v 。

4.3 参数内部射线

设 $v \in \mathbb{C}^*$，使得 $-2v \notin B_v$。则 Böttcher映射延拓为一个共形同构 ϕ_v : $B_v \to \mathbb{D}$，满足 $\phi_v(0) = 0$， $\phi_v(f_v(z)) = \phi_v^2(z)$。在这种情况下，我们可以在 B_v 中定义内部射线。对于 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，定义 $R_0^v(\theta) = \phi_v^{-1}((0,1)e^{2\pi i\theta})$，称为角度为 θ 的内部射线。容易看出，$f_v(R_0^v(\theta)) = R_0^v(2\theta)$。

$R_0^v(\theta)$ 落在 z 上，当且仅当

$$\lim_{r\to 1-} \phi_v^{-1}(re^{2\pi i\theta}) = z.$$

下面的落点定理与多项式的情形类似。

命题 4.5。 假设 $v \in \mathbb{C}^*$，使得内部射线有定义，且 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。那么 $R_0^v(\theta)$ 落在预周期点 $z \in \partial B_v$ 上。反过来，每个预周期点 $z \in \partial B_v$ 都是至少一条且至多有限多条内部射线的着陆点。

根据双曲分支的参数化，我们可以定义参数内部射线。考虑双曲分支 $\mathcal{H}_0$。根据命题3.1， Φ_0 : $\mathcal{H}_0 \to \mathbb{D}^*$ 是一个次数为 2 的覆盖映射。根据 $\mathcal{H}_0$ 的对称性，我们考虑 $\mathcal{H}_0 \cap \mathbb{H}$。容易看出， $\Phi_0^{-1}((0,1)) = (-v_1, 0) \cup (0, v_1)$，其中

v_1 是引理 5.5 中的参数。因此定义 $\mathcal{R}_0(0) = (-v_1, 0) \cup (0, v_1)$。对于$\theta \in (0,1)$，角度为 $\mathcal{R}_0(\theta)$ 的参数内部射线 θ 是$\Phi_0^{-1}((0,1)e^{2\pi i\theta})$ 在上半平面中的连通分支。

类似地，对于一个 $\mathcal{U}$ 类型为 C的双曲分支，根据命题 3.2，$\Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{D}$ 是一个共形同构。角度为 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ 的参数内部射线$\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 定义为 $\Phi_{\mathcal{U}}^{-1}((0,1)e^{e\pi i\theta})$。

若参数内部射线 $\mathcal{R}_0(\theta)$（或 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$）落在 v，则称其落在

$$\lim_{t\to 1-} \Phi_0^{-1}(te^{2\pi i\theta}) = v \quad (\text{or } \lim_{t\to 1-} \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(te^{2\pi i\theta}) = v \text{ respectively}).$$

这里，Φ_0^{-1}是 Φ_0 的逆映射的分支，它将 $\mathbb{D}^* \setminus (0,1)$映入上半平面。

以下内容与命题 4.2类似。

命题 4.6。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$、$m \geq 0$的一个连通分支，且 $\mathcal{R}_0(\theta)$（分别为$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$）是角度为 $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$的参数内部射线。那么该射线落在某个 $v_0 \in \mathbb{C}^*$上。此外，f_{v_0} 要么有一个抛物周期，要么动力平面中 f_{v_0} 的内部射线$R_0^{v_0}(\theta)$ 落在 $f_{v_0}^m(-2v_0)$上，且该点是最终排斥的。

5 参数拼图

本节中，我们将为余弦族构造参数拼图。

5.1 双曲分支边界上的映射

首先，我们考虑 A 型和 C 型双曲分支边界上的映射。

引理 5.1. 假设 $-2v \notin B_v$，且 ∂B_v 不包含抛物周期点或临界点$(2k+1)\pi$，$k \in \mathbb{Z}$。那么存在拓扑圆盘$U \Subset V$，$m \geq 1$，满足 $B_v \Subset U$，使得 $f_v^m : U \to V$是一个次数为 2^m的类多项式映射。

证明. 如果 ∂B_v 不包含抛物周期点或临界点 $(2k+1)\pi$,$k \in \mathbb{Z}$，那么 f_v 在 ∂B_v（ [3]上是半双曲的。构造 U, V 与[26], 引理 4.2 相似。 □

引理 5.2. 假设 $v \in \partial\mathcal{H}_0$、$v \neq 0$。则 ∂B_v 包含一条抛物周期轨道或自由临界值 $-2v$。

证明。首先注意，如果 ∂B_v 包含一个抛物周期点，那么它就包含该抛物周期点的整个周期轨道。设 $v \in \partial\mathcal{H}_0$，$v \neq 0$使得 ∂B_v 不包含抛物周期轨道，并且 $-2v \notin \partial B_v$。根据引理5.1，存在拓扑圆盘 $U_v \Subset V_v$，$m \geq 1$，使得 $B_v \Subset U_v$，$f_v^m : U_v \to$

V_v 是一个次数为 2^m 的类多项式映射，并且 $f^m: U_v \to V_v$ 有唯一的临界点 0。我们可以缩小 U_v，使得

$$\overline{V_v} \cap \left(\bigcup_{0 \le j \le m} f_v^{-j}(\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}) \right) = \varnothing.$$

由 f_v^{-j}、$0 \le j \le m$ 的连续性可知，存在 $\mathcal{V}$ 的一个邻域 $\mathcal{V}$，使得对所有 $u \in \mathcal{V}$，

$$\overline{V_v} \cap \left(\bigcup_{0 \le j \le m} f_u^{-j}(\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}) \right) = \varnothing.$$

令 U_u 为 $f_u^{-m}(V_v)$ 中包含 0 的连通分支。我们可以假设 $U_u \Subset V_v$, $u \in \mathcal{V}$。那么对所有 $u \in \mathcal{V}$, $f_u^m: U_u \to V_v$ 是一个只有唯一临界点 0 的类多项式映射。然而，这对于 $u \in \mathcal{V} \cap \mathcal{H}_0$ 不可能成立。 □

对于 C 型双曲分支，我们也有类似的结果。

引理 5.3。设 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{H}_m$, $m \ge 1$, $v \in \partial\mathcal{U}$ 的一个连通分支。那么 ∂B_v 或者包含一个抛物周期，或者 $f_v^m(-2v)$。

在本节末尾，我们研究 f_v 在 $v \in i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}$ 下的动力学。

引理 5.4. 设 $v \in i\mathbb{R}$。那么存在 $y_0 > 0$，使得以下三分情形成立。

1. 对于 $0 < |v| < y_0$, $v \in \mathcal{H}_0$, f_v 是双曲的；*2.* 对于 $|v| = y_0$, f_v 是临界有限的。更确切地说，$2v$ 是 f_v的一个排斥不动点，并且 $f_v(-2v) = 2v$；*3.* 对于 $|v| > y_0$, $-2v$ 的轨道逃向 *1*。换言之，$-2v \in I(f_v)$。

证明。由于 f_v 的参数空间关于原点对称，我们可以假设 $\mathrm{Im}\ v > 0$。对于 $y > 0$，考虑方程 $2iy = f_{iy}(2iy)$。此方程在 $\mathbb{R}_+$上有唯一解 $y_0 = \log(\sqrt{2}+1)$。这意味着，对于参数 $v_0 = i\log(\sqrt{2}-1)$, $-2v_0$ 被映射到 f_{v_0}的不动点 $2v_0$。

注意，对于 $v \in i\mathbb{R}$, f_v 将虚轴映射到自身。对于 $0 < |v| < y_0$, $|f_v(-2v)| < |-2v|$。因此，$f_v^n(-2v) \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，即 $v \in \mathcal{H}_0$。类似地，对于 $|v| > v_0$, $f_v^n(-2v) \to +\infty$ 当 $n \to \infty$ 时，即 $-2v \in I(f_v)$。 □

推论 5.1。设 $\mathcal{U}$ 是一个 C 型双曲分支。那么 $\mathcal{U} \cap i\mathbb{R} = \varnothing$。

证明。由引理 5.4，唯一的可能是 $v_0 \in \partial\mathcal{U}$。此外，$\mathcal{U}$ 不能同时与上半平面和下半平面相交。假设$\mathcal{U} \subset \mathcal{H}_m$, $m \ge 1$。由引理 5.3 以及 ∂B_v 关于 v的连续性（与3.3的证明类似），m 是满足 $f_{v_0}^j(-2v_0) \in \partial B_{v_0}$的最小整数。然而，由于 $v_0 \in \partial\mathcal{H}_0$，由引理 5.2，$-2v_0 \in \partial B_{v_0}$，这就产生了矛盾。

□

推论 5.2。 $\partial\mathcal{H}_0$ 在 $\pm v_0$处局部连通。

证明。回想一下，存在一个次数为 2 的覆盖映射 $\Phi_0 : \mathcal{H}_0 \to \mathbb{D}^*$，由（1）定义。容易看出，$\Phi_0((0,v_0)) = (0,i)$。由 $\mathcal{H}_0$的对称性，$\Phi_0((-v_0,0)) = (0,i)$。当 $\epsilon > 0$ 足够小时，定义

$$\mathcal{L}_0(\epsilon) = \overline{\Phi_0^{-1}(\{re^{i\theta} : 1-\epsilon < r < 1, |\theta - \pi/2| < \epsilon\})},$$

它们是 $\pm v_0$的闭连通邻域。令

$$\mathcal{L}_0 = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{L}_0(\frac{1}{n}),$$

并分别令 $\mathcal{L}_0^{\pm}$和 $\mathcal{L}_0$ 为包含 $\pm v_0$ 的连通分支。于是，只需证明 $\mathcal{L}_0^{\pm}$是单点集。

显然，$\mathcal{L}_0^{\pm} \subset \partial\mathcal{H}_0 \cap \mathbb{R}$。由引理5.4，$\mathcal{L}_0^{\pm}$由单点组成。 □

引理 5.5。 存在 $v_1 > 0$，使得f_{v_1} 有一个抛物不动点 z_0,$f'_{v_1}(z_0) = 1$。此外，$\mathcal{H}_0 \cap \mathbb{R} = (-v_1, 0) \cup (0, v_1)$

证明。 由 $\mathcal{H}_0$的对称性，不妨设 $v > 0$。考虑方程

$$\begin{cases} v(\cos x - 1) = x \\ -v \sin x = 1 \end{cases}. \tag{4}$$

令 $z_0 < 0$ 为方程 $\tan(z/2) = z$ 的解，且在所有解中 $|z_0|$ 最小，并且 $v_1 = -1/\sin z_0$。那么 (v_1, z_0) 是方程 (4) 的一个解。容易看出 $\pi/2 < |z_0| < \pi$，因此 $\sin^2 v_0 \leq v_0^2 < 1$。于是当 $0 < v < v_1$时，$|f_v(-2v)| < |-2v|$，且 $f_v^n(-2v) \to 0$，当 $n \to \infty$时。因此 $(0, v_1) \subset \mathcal{H}_0 \cap \mathbb{R}$。显然，$v_1 \in \partial\mathcal{H}_0$。最后，我们证明 $(v_1, +\infty)$ 不会与 $\mathcal{H}_0$相交。由于 $\mathcal{H}_0$ 是二连通的，$\partial\mathcal{H}_0$ 除了 $\{0\}$之外没有其他有界连通分支。因此，在上半平面内存在一条若尔当弧 $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{H}_0$，连接 v_1 与 1。根据 $\mathcal{H}_0$的对称性，γ 的共轭 $\bar{\gamma}$ 也是一条若尔当弧，连接v_1 与 1。因此，$\gamma \cup \bar{\gamma}$ 是一条若尔当曲线，将 $\mathcal{H}_0$ 与 $(v_1, +\infty)$ 分隔开。由 $\mathcal{H}_0$的连通性，$\mathcal{H}_0 \cap \mathbb{R}_+ = (0, v_1)$。 □

5.2 副拼图的构造

在本节中，我们将为余弦族构造参数拼图。

回顾一下，g_s^v 是外部地址为 s的动力射线。B_v 是 0 的直接吸引盆，ϕ_v： $U_v \to D(0, r_v)$ 是在超吸引不动点 0 的某个邻域内定义的 Böttcher映射，满足 $\phi_v \circ f^v(z) = \phi_v(z)^2$。如果 $v \notin \mathcal{H}_0$，那么 ϕ_v 在整个 B_v上都有定义，并且当 $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 时，内部射线 $R_0^v(\theta)$ 有定义。

根据隐函数定理，在参数发生微小扰动时，内部射线（或动力射线）及其排斥着陆点保持稳定。

引理 5.6. 假设 $v_0 \notin \mathcal{H}_0$ 使得 $R_0^v(\theta)$ （或 g_s^v）有定义，并落在一个周期为 $k \geq 1$ 的排斥周期点 z_0 上。那么射线$R_0^v(\theta)$ （或 g_s^v）与 z_0 按以下意义保持稳定：

存在 $\mathcal{N}$ v_0 的一个邻域，以及一个解析函数 $z(v)$，定义在 $\mathcal{N}$ 上，使得对所有 $v \in \mathcal{N}$，

1. $z(v)$ 是一个周期为 k的排斥周期点，且 $z(v_0) = z_0$；2. $R_0^v(\theta)$ （或分别为 g_s^v）定义良好；3. $R_0^v(\theta)$ （或分别为 g_s^v）落在 $z(v)$。

设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}$, $v_0 \in \partial\mathcal{U}$的一个连通分支。在 f_{v_0}的动力平面中，存在一个 f_{v_0}-不变图 $I_0^{v_0}(\theta_0)$，它由内部射线 $R_0^{v_0}(\theta_j) \subset B_{v_0}$ 和动力射线 $g_{s_j}^{v_0} \subset I(f_{v_0})$, $j = 0, \ldots, q-1$组成。角度 $\theta_j = 2^j/(2^q - 1)$ 满足 $R_0^{v_0}(\theta_j)$ 落在周期为 q的排斥周期点上。^{s_j}, $j = 0, \ldots, q-1$是外部地址，满足 $g_{s_j}^{v_0}$ 落在与 $R_0^{v_0}(\theta_j)$ 相同的点上，因此 $g_{s_j}^{v_0}$ 的周期也为 q。由不变图 $I_0^{v_0}(\theta)$，我们可以定义一个拼图系统 $\{P_n^{v_0}(z)\}_{n\geq 0}$，满足

1. 每个 $P_n^{v_0}(z)$， $n \geq 1$ 至多包含 f_{v_0}的一个临界点；

2. $f_{v_0}(P_n^{v_0}(z)) = P_{n-1}^{v_0}(f_{v_0}(z))$, $n \geq 1$;

3. 两个拼图块 $P_n^{v_0}(z_1)$、 $P_n^{v_0}(z_2)$要么不相交，要么相等。

可参阅[27] 以了解更多细节。

设 $\mathcal{E}_0(t) = \Phi_0^{-1}(te^{2\pi i[0,1)})$与 $\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(t) = \Phi_{\mathcal{U}}^{-1}(te^{2\pi i[0,1)})$，其中 $\mathcal{U}$ 是一个C 型双曲连通分支。设 $\mathcal{E}_n$ 为满足以下条件的$(\mathcal{U}, t)$的集合

1. $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$, $0 \leq m \leq n$的一个连通分支；

2. $t^{2^{n-m}} = t_0$。

令 $\mathcal{X}_n$ 为包含 v_0 的 $\mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{(\mathcal{U},\ t)\in\mathcal{E}_n} \mathcal{E}_{\mathcal{U}}(t)\right)$ 的连通分支。

现在在参数平面中定义图 $\mathcal{I}_0(\theta_0)$ 如下

$$\bigcup_{j=0}^{q-1} \overline{\mathcal{R}_0(\theta_j) \cup G_{\underline{s}_j}}.$$

对于 $n \geq 1$，令 $\mathcal{D}_n$ 为 $(\mathcal{U},\ \theta)$ 的集合，其中 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$、$m = 0$、……、 n、 $2^{n-m}\theta \in \{\theta_0$、……、 $\theta_{q-1}\}$ 的一个连通分支，并令 $\mathcal{S}_n = \{\underline{s} \in \Sigma\colon \sigma^n(\underline{s}) = {}^{\underline{s}_j},\ j =0$、……、 $q-1\}$。将第 n 级的参数图定义为

$$\mathcal{I}_n(\theta_0) = \left(\bigcup_{(\mathcal{U},\theta)\in\mathcal{D}_n} \overline{\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)}\right) \cup \left(\bigcup_{\underline{s}\in\mathcal{S}_n} G_{\underline{s}}\right).$$

$(\mathbb{C} \setminus \mathcal{I}_n(\theta_0)) \cap \mathcal{X}_n$ 的连通分支称为深度为n的参数拼图片。对于 $v \notin \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{I}_n(\theta_0)$, 记 $\mathcal{P}_n(v)$为深度为

n 且包含 v的参数拼图片。容易看出， $\mathcal{I}_n(\theta_0) \subset \mathcal{I}_{n+1}(\theta_0)$，因此 $\mathcal{P}_{n+1}(v) \subset \mathcal{P}_n(v)$。若给定 $v_0 \in \partial\mathcal{U}$ ，为简便起见，记 $P_n^{v_0} = P_n^{v_0}(-2v_0)$、 $I_n^{v_0} = I_n^{v_0}(\theta_0)$、 $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n(v_0)$和 $\mathcal{I}_n = \mathcal{I}_n(\theta_0)$。

5.3 参数拼图片的全纯运动

定义 5.1. 设 $\Lambda \subset \mathbb{C}$ 是一个区域， $\lambda_0 \in \Lambda$、 X 是 $\mathbb{C}$ 的子集。以 Λ 为参数、基点为 λ_0 的 X 的全纯运动，是一个映射 $h: \Lambda \times X \to \mathbb{C}$, ，满足

1. 对每个 $x \in X$, $h(\lambda_0, x) = x$； *2.* 对每个 $\lambda \in \Lambda$, $h^\lambda = h(\lambda, \cdot): X \to \mathbb{C}$ 都是单射； *3.* 对每个 $x \in X$, $h_x = h(\cdot, x): \Lambda \to \mathbb{C}$ 都是解析的。

引理 5.7. 设 v_0, $\mathcal{U}$ 如 5.2 中所定义。令 Ω 为满足以下条件的 v ： $g^v_{\sigma^j(s)}$、 $j \geq 0$ 均有定义，并且落在排斥周期点上。那么

1. Ω 非空且为开集； *2.* 存在一个以 $v \in \Omega$ 为参数的 $\bigcup_{j\geq 0} g^{v_0}\sigma^j(s_0)$ 全纯运动； *3.* $\partial\Omega = \bigcup_{j\geq 0} G_{\sigma^j(s_0)}$ 不含孤立点。

证明。 1. 显然， $v_0 \in \Omega$。由引理 5.6， Ω 是开集。

2. 定义 $h: \Omega \times g^{v_0}_{s_0} \to \mathbb{C}$ 为 $h(v, g^{v_0}_{s_0}(t)) = g^v_{s_0}(t)$。显然， $h^{v_0} = \mathrm{id}$. h^v 是单射；否则动力射线 $g^v_{s_0}$ 将与自身或其着陆点相交，这两种情况都不可能。对于每个固定的 $z = g^{v_0}_{s_0}(t)$， $t > 0$ 下， h_z 是解析的。根据引理 5.6， h 可解析延拓至着陆点 $z_0(v)$。

3. 设 $v_1 \in \partial\Omega$。首先证明 $\partial\Omega$ 不含孤立点。否则，设 v_1 是这样一个点。则存在 v_1的一个邻域 V，使得$V \setminus \{v_1\} \subset \Omega$。对于 v_1，存在某个 $s \in \{\sigma^j(s_0): j \geq 0\}$，它要么是 $-2v_1 \in g^{v_1}_s$，要么落在抛物周期点上。如果$-2v_1 \in g^{v_1}_s$，则 $v_1 \in G_s$ 在参数平面中。因此对于 $v \in V \cap G_s$， $-2v \in g^v_s$，这与 g^v_s 对 $v \in V \setminus \{v_1\}$定义良好矛盾。如果 $g^{v_1}_s$落在周期为 $p \geq 1$ 的抛物周期点 $z(v_1)$ 上，那么$z(v_1)$ 的乘子 $(f^p_{v_1}(z(v_1)))'$ 在 V 中定义了一个解析函数。它在 v_1 处取得其模的最小值，因为对于除 v_1 外的所有 $v \in V$， $z(v)$ 都是排斥的，这与最大模原理矛盾。

再次设 $v_1 \in \partial\Omega$。对于 v_1，存在某个 $s \in \{\sigma^j(s_0): j \geq 0\}$，要么 $-2v_1 \in g^{v_1}_s$，要么它落在一个抛物周期点。因此要么 $v_1 \in G_s$，要么它属于集合 $\mathrm{Par}_q(1) = \{v \in \mathbb{C}: \text{存在 } z_v \in \mathbb{C}, f^q_v(z_v) = z_v, (f^q_v)'(z_v) = 1\}$，该集合在 $\mathbb{C}$ 中是离散的。由于$\partial\Omega$ 不含孤立点，$\mathrm{Par}_q(1) \cap \partial\Omega$ 包含于 $\bigcup_{j\geq 0} G_{\sigma^j(s_0)}$。 □

类似地，我们有如下结论

引理 5.8. 令 v_0， $\mathcal{U}$ 如 5.2 中所定义。令 Ω' 为满足以下条件的 v 集合$R^v_0(2^j\theta_0)$, $j \geq 0$ 均有定义，且落在排斥周期点上。那么

1. Ω' 非空且为开集；2. 存在一个以 $v \in \Omega'$ 为参数的全纯运动，其对象为 $\bigcup_{j\geq 0} R_0^{v_0}(2^j\theta_0)$；

3. $\partial\Omega' = \bigcup_{j\geq 0} \overline{R_0^v(2^j\theta_0)}$，其中不含孤立点。

由引理 5.7 和 5.8，可得

推论 5.3。 $\mathcal{P}_0$ 包含于包含 v_0 的$\Omega\cap\Omega'$连通分支中。因此，存在一个以 $\mathcal{P}_0$ 为参数的 $I_0^{v_0}$ 全纯运动。

推论 5.4。 对于 $n \geq 1$，当且仅当 $-2v \in I_n^v$ 时， $v \in \mathcal{I}_n \cap \mathcal{P}_0$ 。

推论 5.3 中的全纯运动可以提升到更高深度的参数图。

引理 5.9。 设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}$的一个连通分支， $v_0 \in \partial\mathcal{U}$，且 $n \geq 0$。设 $\mathcal{P}_n$， $I_n^{v_0}$ 如 §5.2中所定义。那么存在一个全纯运动

$$H_n : \mathcal{P}_n \times I_{n+1}^{v_0} \to \mathbb{C} \tag{5}$$

满足：

1. $H_n^v(I_{n+1}^{v_0}) = I_{n+1}^v$;
2. H_n 和 H_{n-1} 在 $\mathcal{P}_n \times I_n^{v_0}$上重合;
3. *for* $z \in I_{n+1}^{v_0}$ *and* $v \in \mathcal{P}_n$, $H_{n-1}^v \circ f_{v_0}(z) = f_v \circ H_n^v(z)$.

证明。 设 H_0： $\mathcal{P}_0 \times I_0^{v_0} \to \mathbb{C}$ 为推论5.3中定义的全纯运动。我们通过对 H_n 归纳定义 $n \geq 0$。假设 H_n： $\mathcal{P}_n \times I_n^{v_0} \to \mathbb{C}$ 已定义。对于 $v \in \mathcal{P}_{n+1}$，考虑以下图示：

$$\begin{array}{ccc} I_{n+1}^{v_0} & \xrightarrow{H_{n+1}^v} & I_{n+1}^v \\ {\scriptstyle f_{v_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_v} \\ I_n^{v_0} & \xrightarrow{H_n^v} & I_n^v \end{array}$$

由于 $v \in \mathcal{P}_{n+1}$， I_{n+1}^v 不会接触临界点。因此 H_n^v 可以提升为一个同胚 H_{n+1}^v。容易验证，引理 5.9 中的 1–3 条均成立。

□

5.4 从动力平面到参数平面的传递

设 H_n 为引理 5.9中的全纯运动。它将参数平面与 f_{v_0} 的动力平面连接起来。

引理 5.10。 对于 $n \geq 0$，存在一个同胚

$$\begin{aligned} h_n : \mathcal{P}_n \cap \mathcal{I}_{n+1} &\to P_n^{v_0} \cap I_{n+1}^{v_0} \\ v &\mapsto (H_n^v)^{-1}(-2v) \end{aligned} \tag{6}$$

证明。 设 $v \in \mathcal{P}_n(v_0) \cap \mathcal{I}_{n+1}$。由推论 5.4， $-2v \in I_{n+1}^v$。因此 $h_n(v)$ 定义良好且属于 $I_{n+1}^{v_0}$。对于 v_0，根据定义， $-2v_0 \in P_n^{v_0}$。因此$-2v$ 属于由 $H_n^v($ $\partial P_n^{v_0})$所界定的拼图块。由于 $-2v$ 和 I_{n+1}^v互不相交， $h_n(-2v) \in P_n^{v_0}$。

h_n的单射性:
首先假设 $v = G_s(t)$, $t \geq 0$. 则 $-2v = g_s^v(t)$， 且 $h_n(v) = g_s^{v_0}(t)$。因此 h_n 在参数射线上是单射的。

接下来考虑参数内部射线。假设 $v_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{U}_1}(\theta_1)(t_1)$,$v_2 = \mathcal{R}_{\mathcal{U}_2}(\theta_2)(t_2)$， 且 $h_n(v_1) = h_n(v_2) = z_0$。 假设 $\mathcal{U}_j$ 是 $\mathcal{H}_{m_j}$, $j = 1,2$ 的一个连通分支。于是 $f_{v_j}^{m_j}(-2v_j) = R_{v_j}(\theta_j)(t_j)$， $j = 1,2$， 其中 $R_v(\theta)$ 是 B_v中的内部射线。对于 $j = 1,2$， $f_{v_j}^{m_j}(-2v_j)$ 是 $-2v_j$的轨道中进入直接吸引盆 B_{v_j}的第一个点。通过全纯运动 $H_n^{v_j}$， 将 f_{v_0}映到动力平面后， $f_{v_0}^{m_j}(z_0)$ 是 z_0的轨道中进入B_{v_0}的第一个点。因此 $m_1 = m_2 = m$, $t_1 = t_2$。

若 $m = 0$， 则 $v_2 = \pm v_1$。 由于它们属于同一个拼图块 $\mathcal{P}_n$， $v_1 = v_2$。

若 $m \geq 1$， 则 $f_{v_j}^{m-1}(-2v_j) \in B_{v_j} + 2k_j\pi$， 其中 $k_j \in \mathbb{Z}$ 依赖于 $\mathcal{U}_j$， 由引理 3.3。再由全纯运动 $H_n^{v_j}$， $k_1 = k_2$。 因此 $k_1 = k_2 = k$与 $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathcal{U}$。由命题 3.2， $\Phi_{\mathcal{U}}$： $\mathcal{U} \to \mathbb{D}$ 是一个共形同构， $v_1 = \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)(t) = v_2$。

最后，假设 v_1 与 v_2 是参数射线或内部射线的着陆点。

若 v_1 与 v_2 分别是参数射线 G_{s_1} 与 G_{s_2} 的着陆点，则 $g_{s_1}^{v_0}$ 与 $g_{s_2}^{v_0}$ 落在一个公共点。由 $I_n^{v_0}$ 的构造， $s_1 = s_2$ $v_1 = v_2$ v_1 v_2 使得。若与是参数内部射线的着陆点，则类似的论证同样成立。

现在假设 v_1 是 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$的着陆点， v_2 是 G_s的着陆点。那么 $R_{v_0}(\theta)$和 $g_s^{v_0}$落在同一个公共点。通过 $H_n^{v_1}$将其向前映射到 v_1-平面后， $R_{v_1}(\theta)$和 $g_s^{v_1}$落在同一个公共点，这恰好就是 $-2v_1$。 因此， v_1是 G_s的着陆点，即 $v_1 = v_2$。

h_n**的满射性**:
对于 $z = g_s^{v_0}(t)$， 令 $v = G_s(t)$。那么 $-2v = g_s^v(t)$， 使得 $h_n(v) = z$。
若 $z = R_{v_0}(\theta)(t)$， $0 \leq t \leq 1$， 则 $R_{v_0}(\theta)$落在某个点 z_1。 并且在 $I_{n+1}^{v_0}$ 中存在一条唯一的动力射线 $g_s^{v_0}$落在 z_1。 考虑 G_s。 根据命题 4.2， 它落在某个v_1 。根据 $\mathcal{I}_{n+1}$的构造，还存在唯一的 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta')$也落在 v_1。因此， $G_s \cup \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta')$被映射到 $g_s^{v_0} \cup R_{v_0}(\theta)$， 并且存在 $v \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta')$， 使得 $h_n(v) = z$。

h_n 和 h_n^{-1}的连续性显而易见。 □

注 5.1。 同胚 h_n 可以轻松延伸至等势线$\mathcal{E}_{\mathcal{U}}(t)$， $(\mathcal{U},\ t) \in \mathcal{E}_{n+1}$， 其中 $\mathcal{E}_{n+1}$ 定义于 §5.2。

设 $\mathcal{U}$ 是 $\hat{}$ $\mathcal{H}$ 的一个连通分支，且 $v_0 \in \partial\mathcal{U}$。在 [27], 作者将 $\hat{}$无界拼图块 $P_n^{v_0}$改为有界的 $P_n^{v_0}$， $n \geq 1$。此外，以下结论成立。

$\hat{}$**引理 5.11**。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}$ 和 $v_0 \in \partial\mathcal{U}$ 的一个连通分支。那么存在一个$\hat{}$拼图块序列 $\{P_{n_k}^{v_0}\}_{k\geq 0}$，使得

$\hat{}$*1.* $-2v_0 \in P_{n_k}^{v_0}$; $\hat{}$ $\hat{}$*2.* 设 $A_{n_k}^{v_0} = P_{n_k}^{v_0} \setminus P_{n_k+1}^{v_0}$，则 $f_{v_0}^{n_k-n_0}$: $A_{n_k}^{v_0} \to A_{n_0}^{v_0}$ 是覆盖映射; *3.* 要么 $\sum_{k\geq 0}$模 $A_{n_k}^{v_0} = \infty$，使得 $\bigcup_{n\geq 1}\hat{}$ $P_n^{v_0} = \{-2v_0\}$; 要么存在 $p \geq 1\hat{}$ $\hat{}$，使得 $n_{k+1} = n_k + p$ 且 $f_{v_0}^p$: $P_{n_{k+1}}^{v_0} \to P_{n_k}^{v_0}$ 是 f_{v_0} 的重整化，其中 p 称为该重整化的周期。

对于 $v \in \mathcal{P}_n$，令 $t_0 > 0$ 如第 5.2 节中所述。定义 E_n^v 为 (U,t) 的集合，其中 U 是 $f_v^{-m}(B_v)$ 的一个连通分支， $0 \leq m \leq n$， $t^{2^{n-m}} = t_0$。由于 $v \in \mathcal{P}_n$， B_v 中的等势线 $E_{B_v}^v(t)$ 可以对 $t \leq t_0^{1/2^n}$ 定义。并且它可以拉回到 $f_v^{-m}(B_v)$ 的分支 U， $0 \leq m \leq n$。定义

$$D_n^v = \bigcup_{(U,t)\in E_n^v} E_U^v(t).$$

于是类似于引理 5.9，存在一个全纯运动 H_n： $\mathcal{P}_n \times D_n^{v_0} \to \mathbb{C}$,满足 $H_n^v(D_n^{v_0}) = D_n^v$。将此与引理 5.9 结合，我们得到一个全纯运动 H_n： $\mathcal{P}_n \times (\partial P_n^{v_0} \cup \partial P_{n+1}^{v_0}) \to \mathbb{C}$。

令 $n \geq 1$。由斯沃德科夫斯基定理， H_n 延拓为全纯运动 $\tilde{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$$H_n$: $\mathcal{P}_n \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。特别地，拼图块 $P_n^{v_0}$全纯地运动。$\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ 定义 $P_n^v = H_n^v(P_n^{v_0})$, $A_n^v = P_n^v \setminus P_{n+1}^v$。由于 H_n^v是单射， A_n^v 确实是一个环域。

这使我们能够定义参数拼图块的“截断”。 $\{v \in \mathcal{P}_n\colon\ -2v \in \hat{}P_n^v\}$ 非空，因为它包含 v_0。定义$\hat{}$ $\mathcal{P}_n$为$\hat{}$ $\hat{}$$\hat{}${$v \in \mathcal{P}_n$: $-2v \in P_n^v$}包含 v_0的连通分支，并且$\mathcal{A}_n = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n+1}$。我们尚不确定 $\mathcal{A}_n$ 是否为非退化环带。但引理5.12 保证了这一点。

引理 5.12. $\mathcal{A}_{n_k}$、 $k \geq 0$ 是环绕 v_0的非退化环带。此外，存在 $K \geq 1$，使得

$$\frac{1}{K}\mathrm{mod}\ A_{n_k}^{v_0} \leq \mathrm{mod}\ \mathcal{A}_{n_k} \leq K\mathrm{mod}\ A_{n_k}^{v_0}$$

对所有 $k \geq 1$均成立。

证明。 设 $n \in \{n_k\colon\ k \geq 0\}$。定义

$$\begin{aligned}\tilde{h}_n : \mathcal{A}_n \cup \partial\hat{\mathcal{P}}_{n+1} &\to A_n^{v_0} \cup \partial\hat{P}_{n+1}^{v_0} \\ v &\mapsto (\tilde{H}_n^v)^{-1}(-2v)\end{aligned}. \tag{7}$$

对于 $v \in \partial\mathcal{P}_{n+1}$，在 f_v 的动力平面中，$-2v \in \partial \hat{P}^v_{n+1}$。因此 $\tilde{h}_n(v) = (\tilde{H}^v_n)^{-1}(-2v) \in \partial \hat{P}^{v_0}_{n+1}$。对于 $v \in \mathcal{A}_n$，$-2v \in \hat{P}^v_n \setminus \overline{\hat{P}^v_{n+1}}$ 因此 $\tilde{h}_n(v) \in \hat{P}^{v_0}_n \setminus \hat{\hat{P}}^{v_0}_{n+1} = A^{v_0}_n$。故 h_n 是良定义的，并将 $\mathcal{A}_n \cup \partial\mathcal{P}_{n+1}$ 映到 $A^{v_0}_n \cup \partial P^{v_0}_{n+1}$。容易看出 h_n 延拓了 h_n，其中 $h_n\colon \mathcal{P}_n \cap \mathcal{I}_{n+1} \to P^{v_0}_n \cap I^{v_0}_{n+1}$ 由 (6) 定义。

根据 λ引理（ [20]），H^v_n 是一个 $K_n(v)$-拟共形映射，其中伸缩率 $K_n(v)$ 取决于 $v \in \mathcal{P}_n$。根据 [9], IV. 3. 引理（另见 [31], 命题 3.2），传递映射 h_n 是 K_n-拟正则的，且 $K_n \le \sup\{K_n(v)\colon v \in \mathcal{P}_n\}$，其中 $K_n(v)$ 是 H^v_n的伸缩率。注意，h_n 是真映射。注意，$v \in \mathcal{I}_n$ 当且仅当 $h_n(v) \in I^{v_0}_n$。因此，$h_n(v)$ 描绘 $\partial P^{v_0}_n$一次，正如 v 描绘 $\partial\mathcal{P}_n$ 一次，因为 h_n 在 $\partial\mathcal{I}_{n+1}$上与 h_n 一致，而根据引理 5.10，后者是一个同胚。根据辩 argument 原理，$\tilde{h}_n\colon \mathcal{A}_n \cup \partial\hat{\mathcal{P}}_{n+1} \to A^{v_0}_n \cup \partial\hat{P}^{v_0}_{n+1}$也是一个同胚，并且 $\mathcal{A}_n = (\tilde{h}_n)^{-1}(A^{v_0}_n)$ 是一个环域。$\mathcal{A}_n$，$n \ge n_0$ 包围着 v_0，因为 v_0 属于每个 $\mathcal{P}_n$。

最后，我们证明 K_n 有上界。根据其定义，H^v_n 是通过提升 H^v_0得到的。因此 $K_n(v) = K_0(v)$。Slodkowski 的定理给出的扩张不会改变伸缩率。因此 $K_n(v) = K_n(v) = K_0(v)$。此外，对于 $k \ge 1$，$\mathcal{P}_{n_k} \Subset \mathcal{P}_{n_0+1} \subset \mathcal{P}_{n_0}$。因此，$K_n \le \sup\{K_n(v)\colon v \in \hat{\mathcal{P}}_n\} \le \sup\{K_{n_0+1}(v)\colon v \in \mathcal{P}_{n_0+1}\} =: K < +\infty$。这表明，对于 $k \ge 1$，$h_n\colon \mathcal{A}_n \to A_n$ 的伸缩率有上界。因此

$$\frac{1}{K}\operatorname{mod} A^{v_0}_{n_k} \le \operatorname{mod} \mathcal{A}_{n_k} \le K \operatorname{mod} A^{v_0}_{n_k}.$$

□

推论 5.5。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}$, $v_0 \in \partial\mathcal{U}$ 的一个连通分支。假设 f_{v_0} 不可重整化。那么 $\partial\mathcal{U}$ 在 v_0 处局部连通。

证明。对于 v_0，存在两个环带序列 $\{A^{v_0}_{n_k}\}_{k\ge0}$ 和 $\{\mathcal{A}_{n_k}\}$，满足

1. $A^{v_0}_{n_k}$、$k \ge 0$ 在 f_{v_0}的动力平面中包围 $-2v_0$；
2. $\mathcal{A}_{n_k}$ 在参数平面中包围 v_0。

由引理 5.12，存在 $K \ge 1$ 使得

$$\frac{1}{K}\operatorname{mod} A^{v_0}_{n_k} \le \operatorname{mod} \mathcal{A}_{n_k} \le K \operatorname{mod} A^{v_0}_{n_k}.$$

由于 f_{v_0} 不可重整化，根据引理5.11，$\sum_{k\ge0}$模 $A^{v_0}_{n_k} = +\infty$。因此 $\sum_{k\ge0}$模 $\mathcal{A}_{n_k} = +\infty$。由格罗茨奇不等式，$\bigcap_{n\ge n_0} \hat{\mathcal{P}}_n = \{v_0\}$。因此，$\{\mathcal{P}_n \cap \partial\mathcal{U}\}_{n\ge0}$ 在 $\partial\mathcal{U}$ 处 v_0构成拓扑基。显然，$\hat{\mathcal{P}}_n \cap \partial\mathcal{U}$，$n \ge 0$ 是连通的。因此 $\partial\mathcal{U}$ 在 v_0处局部连通。

□

6 $\mathcal{H}$中连通分支边界的局部连通性

6.1 双曲连通分支边界上的可重整化参数

本节讨论双曲分支边界上的可重整化参数。

设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个双曲连通分支，由引理 5.11，存在 $p \geq 1$ 以及一条拼图块序列 $\{P^{v_0}_{n_0+kp}\}_{k\geq 0}$，使得 $f^p_{v_0}: P^{v_0}_{n_0+(k+1)p} \to P^{v_0}_{n_0+kp}$ 是一个类二次映射，且小填充朱利亚集 $K_{v_0} = \bigcap_{k\geq 0} P^{v_0}_{n_0+kp}$ 是连通的。根据 §5.4中的过程，存在包含 $\{\mathcal{P}_{n_0+kp}\}_{k\geq 0}$的参数拼图片 v_0。

回忆一下，$\hat{P}^{v_0}_n$ 具有一个全纯运动 $\tilde{H}_n$ 由 $v \in$参数化 P_n。然而，对于不同的 $n_1 \leq n_2$，$f^{n_2-n_1}_v$可能不会将 $P^v_{n_2}$映射到 $P^v_{n_1}$，除非 $v = v_0$。因此，我们必须再次修改 P^v_n，使不同深度的拼图块之间存在动力学关系。

从 n_0开始，令 $\tilde{P}^v_{n_0} = \hat{P}^v_{n_0}$。由于全纯运动 $H^v_{n_0}$ 在图 $I^v_{n_0+1}$上与 H^v_n一致，因此 $f^{-p}_v(P^v_{n_0})$ 的连通分支包含于深度为 $n_1 = n_0 + p$ 的无界拼图块中。令 $P^v_{n_1}$ 为包含于 $P^v_{n_1}$中的 $f^{-p}_v(P^v_{n_0})$ 的连通分支。由于每个拼图块至多包含 f_v的一个临界点，根据黎曼-赫尔维茨公式，$P^v_{n_1}$ 是单连通的。

$\{v \in \mathcal{P}_{n_1}: -2v \in \tilde{P}^v_{n_1}\}$ 非空，因为它包含 v_0。定义 $\tilde{\mathcal{P}}_{n_1}$ 为：包含 v_0 的 $\{v \in \mathcal{P}_{n_1}$ 的连通分支 $-2v \in P^v_{n_1}\}$。归纳地，对于 $n_k = n_0 + kp,\ k \in \mathbb{N}$，可以定义 $P^v_{n_k}$和 $\mathcal{P}_{n_k}$，使得对于 $v \in \mathcal{P}_{n_k}$，$f^p_v: P^v_{n_k} \to P^v_{n_{k-1}}$是一个类多项式映射。令 $\mathcal{M}_{v_0} = \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{P}_{n_k}$为包含 v_0的一个紧集。

定义 6.1。复平面 f_v 的参数平面中的集合 $\mathcal{M}_0$ 称为曼德勃罗集 $\mathcal{M}$的一个复制，如果存在同胚 $\chi: \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}$ 以及满足以下条件的整数$p \geq 1$

1. $\mathcal{M}_0$ 由临界轨道不会逃逸到 *1* 的参数组成；*2.* 对于 $v \in \mathcal{M}_0$，f^p_v 是 f_v的重整化；*3.* $p_v(z) = z^2 + \chi(v)$ 在 p_v的填充朱利亚集的一个邻域上与 f^p_v 共轭。

引理 6.1。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}$的一个连通分支，$v_0 \in \partial\mathcal{U}$ 是一个可重整化参数。那么 $\mathcal{M}_{v_0}$ 是曼德勃罗集的一个复制。

证明。根据引理 5.11，存在 $n_0 \geq 1$，$p \geq 1$，使得对于 $v_0 \in \partial\mathcal{U}$，$k \geq 1$，$P^{v_0}_{n_k} \to P^{v_0}_{n_{k-1}}$ 是 f_{v_0}的重整化。

设 $\mathcal{P}_{n_k}$ 如上所述。考虑族 $\mathscr{F} = \{f_v^p\colon\ P_{n_1}^v \to P_{n_0}^v\colon\ v \in \mathcal{P}_{n_1}\}$。我们将证明 $\mathscr{F}$ 是一个解析族的类多项式映射，其意义见 [9],第二章 I.1。

事实上，令 $\mathcal{W} = \{(v,z)\colon\ v \in \mathcal{P}_{n_1}, z \in P_{n_0}^v\}$, $\mathcal{W}' = \{(v,z)\colon\ v \in \mathcal{P}_{n_1}, z \in P_{n_1}^v\}$, $F(v,z) = (v, f_v^p(z))$。那么

1. $\mathcal{W}'$ 和 $\mathcal{W}$ 同胚于 $\mathcal{P}_{n_1} \times \mathbb{D},$，因为 $P_{n_k}^v$ 都单连通；
2. $\mathcal{W}' \cap \mathcal{W} = \{(v,z)\colon\ v \in \mathcal{P}_{n_1}, z \in P_{n_1}^v\}$，且投影 $\mathcal{W}' \cap \mathcal{W} \Longrightarrow \mathcal{P}_{n_1}$是真映射；
3. $F\colon \mathcal{W}' \to \mathcal{W}$ 是解析且为真映射。

由于 $\mathcal{P}_{n_1}$是连通的，且 $f_{v_0}^p\colon\ P_{n_1}^{v_0} \to P_{n_0}^{v_0}$是类二次的， $\mathscr{F}$构成一个类二次族。令 $\mathcal{M}_F = \{v \in \mathcal{P}_{n_1}\colon\ K_v$ 是连通的$\}$，其中 $K_v = \bigcap_{k\geq 0} P_{n_k}^v$是 $f_v^p\colon\ P_{n_1}^v \to P_{n_0}^v$的小填充朱利亚集。我们断言$\mathcal{M}_F = \mathcal{M}_{v_0}$。事实上，对于 $v \in \mathcal{M}_F$ K_v $-2v$，其是连通的，因此 的轨道不会离开 $P_{n_0}^v$。于是，对所有 $k \geq 0$和 $v \in \mathcal{M}_{v_0}$，都有 $-2v \in P_{n_k}^v$。反过来，对于$v \in \mathcal{M}_{v_0}$，对所有 $k \geq 0$，都有 $-2v \in P_{n_k}^v$。因此， $-2v$ 的轨道始终留在 $P_{n_0}^v$ 中，且K_v 是连通的。所以 $v \in \mathcal{M}_F$。

对于类二次映射 $f_v^p\colon\ P_{n_1}^v \to P_{n_0}^v$，直化定理([9], 第一章，定理 1) 给出了一个连续映射 χ χ $=\colon P_{n_1} \to \mathbb{C}$，并且 $(\mathcal{M}_{v_0})$ $\mathcal{M}$，使得 $f_v^p\colon\ P_{n_1}^v \to P_{n_0}^v$ 在 K_v的一个邻域上与二次多项式 $z \mapsto z^2 + \chi(v)$ 拟共形共轭。

根据[9], 定理 4，要证明 $\chi\colon\ \mathcal{M}_{v_0} \to \mathcal{M}$ 是一个同胚，只需证明存在唯一的 $v_1 \in \mathcal{M}_{v_0}$ 使得 $f_{v_1}^p(c_{v_1}) = c_{v_1}$，其中 c_v 是 $f_v^p\colon P_{n_{k+1}}^v \to P_{n_k}^v$的临界点。考虑一条环绕 $\mathcal{M}_{v_0}$的曲线 $\gamma = \partial\mathcal{P}_{n_k}$。于是，只需证明当 v 沿着 γ移动时， $f_v^p(c_v) - c_v$恰好绕 0 一周。

由于 $f_v^p\colon\ P_{n_{k+1}}^v \to P_{n_k}^v$只有一个临界值 $-2v$， $f_v^p(c_v) = -2v$。令 h_{n_k-1} 为引理 5.10 中的传递映射，它在$\partial\mathcal{P}_{n_k-1} \cap \mathcal{I}_{n_k}$ 上有定义，并且可以如引理 5.12 的证明中那样延拓到 γ。令$G_0(v) = h_{n_k-1}(v) - c_{v_0}$， $G_1(v) = -2v - c_v$。事实上，令 $\delta\colon\ [0,1] \to \mathcal{P}_{n_k}$为连接 v_0和 v的若尔当弧。令 $G(t,v) = H_{n_k-1}(\delta(t)$ $h_{n_k-1}(v)) - c_{\delta(t)}$。于是 $G(0,v) = H_{n_k-1}(v_0, h_{n_k-1}(v)) - c_{v_0} = h_{n_k-1}(v) - c_{v_0}$， $G(1,v) = H_{n_k-1}(v, h_{n_k-1}(v)) - c_v = -2v - c_v$。因此， G_0和 G_1在 $\mathcal{P}_{n_k}$中同伦。

要证明 $G_1(\gamma(t))$ 恰好绕 0 转一圈，只需证明 $G_0(\gamma(t))$ 恰好绕 0 转一圈。对于 $v \in \partial\tilde{\mathcal{P}}_{n_k}$， $h_{n_k-1}(v) \in \partial\tilde{P}_{n_k}^{v_0} = \partial\hat{P}_{n_k}^{v_0}$，且 $P_{n_k}^{v_0}$ 是一个围绕 c_{v_0}的拼图块。因此，当 v 沿着 γ 运动时， $G_0(v)$ 至少绕 0 转一圈。由于根据引理 5.10, h_{n_k-1} 是一个同胚， $G_0(v)$ 恰好绕 0 转一圈。 □

引理 6.2。 假设 f_v 有一个吸引或抛物周期点$x \neq 0$，那么 f_v 是可重整化的，并且 v 包含于 $\mathcal{M}$ 的一个副本中。

证明。由于 f_v 有一个吸引或抛物周期点 $x \neq 0$， f_v 不在 $\mathcal{H}$的任何连通分支中。此外， $-2v$ 的轨道是有界的，因为它被这个吸引周期所吸引。因此，包含 x的拼图块 $P_n^v(x)$ 、 $n \geq 0$是定义良好的。假设 x 的周期为 $p \geq 1$。那么 $f_v^p(P_{n+p}^v(x)) = P_n^v(x)$， $n \geq 0$。

我们断言，$f_v^p: \hat{} P_{n+p}^v(x) \to \hat{} P_n^v(x)$ 是一个拟二次映射。事实上，如果 $\hat{} P_{n+p}^v(x)$ 不包含 f_v^p 的临界点，那么在 $\hat{} P_n^v(x)$ 上存在一个 f_v^{-p} 的分支 g，且该分支固定 x。换言之， $g: \hat{} P_n^v(x) \to \hat{} P_{n+p}^v(x)$ 是一个共形同构。由施瓦茨引理， $|g'(x)| < 1$。这意味着 $|(f_v^p)'(x)| > 1$，这就导出了矛盾。因此， $f_v^p: P_{n+p}^v(x) \to P_n^v(x)$ 包含 f_v^p 的一个临界点，并且对于某个 $0 \leq j \leq p-1$，有 $-2v \in \hat{} P_{n+j}^v(f_v^j(x))$。由于 $\hat{} P_{n+j}^v(f_v^j(x))$、 $0 \leq j \leq p-1$ 两两不相交，恰有一个拼图块 $\hat{} P_{n+j}^v(f_v^j(x))$ 包含 $\hat{}\hat{} -2v$，且 $f_v^p: P_{n+p}^v(x) \to P_n^v(x)$ 的次数为 2。

由于 x 是吸引的或抛物的， $-2v$ 的轨道始终留在 $\hat{} P_{n+j}^v(f_v^j(x))$ 中。因此，类二次映射 $f_v^p: \hat{}\hat{}\hat{}\hat{} P_{n+p}^v(x) \to P_n^v(x)$ 的小填充朱利亚集是连通的，所以 $f_v^p: P_{n+p}^v(x) \to P_n^v(x)$ 是 f_v的一个可重整化。因此，根据引理 6.1， v 属于 $\mathcal{M}$的一个副本。□

现在，由引理 6.2 可得 D 型双曲分支的有界性。

引理 *3.5* 的证明。对于一个 $\mathcal{D}$ D 型双曲连通分支， $v_0 \in \mathcal{D}$， f_{v_0} 根据引理 6.2 可重整化，而 v_0 根据引理 $\mathcal{M}_{v_0}$ 属于 $\mathcal{M}$ 的一个副本。引理 6.1。 ˜ ˜ 此外， $\mathcal{M}_{v_0} \subset \mathcal{P}_{n_0}$ 对于某个 $n_0 \geq 1$，其中 $\mathcal{P}_{n_0}$ 有界。因此， $\mathcal{D}$完全包含于 $\mathcal{M}_{v_0}$ 中，故有界。□

6.2 $\partial\mathcal{H}_0$的局部连通性

本节中，我们考察 $\mathcal{H}_0$的边界。

命题 6.1。设 $v_0 \in \partial\mathcal{H}_0$ 满足 f_{v_0} 可重整化。则 $\partial\mathcal{H}_0$在 v_0处局部连通。更确切地说，恰有两条参数射线G_{s_+}、 G_{s_-} 和一条参数内部射线 $\mathcal{R}_0(\theta)$，它们~~都落在 v_0~~上。并且$G_{s_+} \cup G_{s_-}$ 将 $\mathcal{M}_{v_0} \setminus \{v_0\}$ 与 $\partial\mathcal{H}_0$分隔开。在 f_{v_0}的动力平面中，动力射线 $g_{s_\pm}^{v_0}$ 和内部射线 $R_0^{v_0}(\theta)$ 落在一个抛物周期点$x_{v_0} \in \partial B_{v_0}$上，并且 $g_{s_+}^{v_0} \cup g_{s_-}^{v_0}$ 将~~$-2v_0$ 与 B_{v_0}~~分隔开。

证明。由引理5.11，存在 $p \geq 1$，一列拼图块 $\{\hat{} P_{n_k}^{v_0}\}\hat{}$ $\hat{}$包含 $-2v_0$， $k \geq 0$， $n_k = n_0 + p$，使得 $f_{v_0}^p: P_{n_{k+1}}^{v_0} \to P_{n_k}^{v_0}$是 f_{v_0}的重整化。

$\mathcal{M}_{v_0}$包含于每个 $\mathcal{P}_{n_k}$, $k \geq 0$中。 $\partial\mathcal{P}_{n_k} \cap \mathcal{H}_0$由两条参数内部射线 $\mathcal{R}_0(\theta_k^\pm)$组成，它们分别落在$v_k^\pm$上。而$v_k^\pm$分别是参数射线 $G_{s_k^\pm}$的着陆点。根据 $\mathcal{P}_{n_k}$的构造，$|\theta_{k+1}^+ - \theta_{k+1}^-| = |\theta_k^+ - \theta_k^-|/2^p$。因此存在 θ，使得$\theta_k^\pm \to \theta$ 当 $k \to \infty$时成立。我们看到，在角度加倍映射下， θ 的周期为 p。与 [27],的证明类似

引理4.5，随着 $k \to \infty$ 分别变化， $s_k^{\pm}$ 收敛到 $s_{\pm}$ ，并且 $s_{\pm}$ 在移位下的周期也为p 。

根据引理 6.1，存在一个同胚 $\chi_{v_0}: \mathcal{M}_{v_0} \to \mathcal{M}$。我们将证明射线 $G_{s_{\pm}}$, $\mathcal{R}_0(\theta)$ 都落在 $\chi_{v_0}^{-1}(1/4)$。由于 θ 在角度加倍映射下是周期的，根据命题 4.6, $\mathcal{R}_0(\theta)$ 落在 v_1 ，使得 $R_0^{v_1}(\theta)$ 落在 f_{v_1} 的抛物周期点 x_{v_1} 或 $-2v_1 \in \partial B_{v_1}$。由于 θ 是周期的，如果 $R_0^{v_1}(\theta)$ 落在 $-2v_1$，那么 $-2v_1$ 将由 $f_{v_1}^p$ 固定。然而，这意味着对于某个 $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$， $f_{v_1}^{p-1}(-2v_1)$ 是临界点 $2k\pi$，且 $2k\pi$ 是 f_{v_1} 的超吸引周期点，这与 $v_1 \in \partial\mathcal{H}_0$ 矛盾。因此，$R_0^{v_1}(\theta)$ 落在抛物周期点 x_{v_1}。由于 θ 位于每个区间 (θ_k^-, θ_k^+) 内， $v_1 \in \mathcal{M}_{v_0}$。 x_{v_1} 的乘子为 1，因为 $R_0^{v_1}(\theta)$ 被 $f_{v_1}^p$ 固定。因此，$v_1 = \chi_{v_0}^{-1}(1/4)$。

同样，根据命题 4.2， G_{s_+} 着陆于某个 v_2 ，使得 $g_{s_+}^{v_2}$ 着陆于一个抛物周期点 x_{v_2}。回忆一下， $\tilde{\mathcal{P}}_{n_k} = \{v \in \hat{\mathcal{P}}_{n_k}: \ -2v \in \tilde{P}_{n_k}^v\}$。因此，对于 $v \in G_{s_k^{\pm}}$, $-2v \in g_{s_k^{\pm}}^v \subset \partial P_{s_k^{\pm}}^v$。于是， $G_{s_k^{\pm}}$的着陆点 $v_k^{\pm}$ 属于 $\partial\tilde{\mathcal{P}}_{n_l}$， $0 \le l \le k$。由于 v_2 是 v_k^+ 的极限， $v_2 \in \mathcal{M}_{v_0}$。同样，由于$g_{s_+}^{v_2}$ 被 $f_{v_2}^p$固定， x_{v_2} 的乘子为 1，即 $v_2 = \chi_{v_0}^{-1}(1/4) = v_1$。参数射线 G_{s_-}也有同样的论证。因此，射线 $G_{s_\pm}$和$\mathcal{R}_0(\theta)$ 都着陆于 $\chi_{v_0}^{-1}(1/4)$。

由于 $\mathcal{M}_{v_0}$ 包含在 $\mathbb{C} \setminus G_{s_+} \cup G_{s_-}$,的连通分支的闭包中，$\mathcal{M}_{v_0}$ 与 $\partial\mathcal{H}_0$ 唯一可能的交点是 v_1。因此 $v_1 = v_0$，且 $\partial\mathcal{H}_0$ 在 v_0处局部连通。

动力平面中 f_{v_0} 的结果 [27], 引理 4.3。 □

由命题6.1的证明可得以下结论

推论 6.1。 设 $v_0 \in \partial\mathcal{H}_0$ 可重整化， $\mathcal{M}_{v_0}$ 是包含 v_0的 $\mathcal{M}$ 副本，且 $\chi_{v_0}: \mathcal{M}_{v_0} \to \mathcal{M}$ 是同胚。那么 $v_0 = \chi_{v_0}^{-1}(1/4)$，它是 $\mathcal{M}_{v_0}$的一个尖点。

推论 6.2。 $\mathcal{H}_0 \cup \{0\}$ 是一个若尔当区域。

证明。 根据引理 2.4， $\mathcal{H}_0 \cup \{0\}$ 是单连通的。根据推论 5.5 和命题 6.1, $\partial\mathcal{H}_0 \cup \{0\}$ 是局部连通的。最大模原理蕴含它是一条若尔当曲线。 □

定义 6.2。 设 $v_0 \in \partial\mathcal{H}_0$ 是可重整化的。设 $\mathcal{R}_0(\theta)$， $G_{s_\pm}$ 是命题 *6.1*中的射线。连通分支 $\mathbb{C} \setminus G_{s_+} \cup s_-$ 不包含 $\mathcal{H}_0$ 的部分称为 v_0的醒域，记作 $W(v_0)$。

由命题 6.1， $\mathcal{M}_{v_0} \setminus \{v_0\} \subset W(v_0)$。

引理 6.3。 对于 $v \in W(v_0)$，射线 $R_0^v(\theta)$ 和 $g_{s_\pm}^v$ 落在同一点上。

证明。 根据引理 5.9， ∂P_n^v 对于 $v \in \mathcal{M}_{v_0}$全纯地移动。取极限， $R_0^v(\theta) \cup g_{s_+}^v \cup g_{s_-}^v$ 对于 $v \in \mathcal{M}_{v_0}$全纯地移动。因此，射线$R_0^v(\theta)$ 和 $g_{s_\pm}^v$ 对于 $v \in \mathcal{M}_{v_0}$ 落在同一点上。

对于 $v \in W(v_0)$，临界值 $-2v$ 永远不会与射线 $R_0^v(\theta)$ 和 $g_{s_\pm}^v$ 相交。因此，$R_0^v(\theta) \cup g_{s_+}^v \cup g_{s_-}^v$ 对于 $v \in W(v_0)$ 全纯地移动。因此，射线 $R_0^v(\theta)$ 和 $g_{s_\pm}^v$ 对于 $v \in W(v_0)$ 落在同一点上。 □

在本节末尾，我们可以描述 $\mathcal{H}_0$ 的边界。

命题 6.2。设 $v_0 \in \partial\mathcal{H}_0$ 和 $v_0 \neq 0$。那么存在唯一一条参数内部射线 $\mathcal{R}_0(\theta)$ 落在 v_0 上。此外，以下二分情形成立。

1. 要么 f_{v_0} 不可重整化，且它是唯一一条参数射线 G_s 的着陆点。在这种情况下，在 f_{v_0} 的动力平面中，$R_0^{v_0}(\theta)$ 和 $g_s^{v_0}$ 都落在 $-2v_0$ 上，并且它们是落在 v_0 上的唯一内部射线和动力射线；*2.* 要么 f_{v_0} 可重整化，且恰有两条参数射线 $G_{s_\pm}$ 落在 v_0 上。在这种情况下，v_0 是 $\mathcal{M}_{v_0}$ 的尖点。在 f_{v_0} 的动力平面中，$R_\theta^{v_0}$ 和 $g_{s_\pm}^{v_0}$ 都落在 f_{v_0} 的一个抛物周期点 x_{v_0} 上，并且没有其他内部射线或动力射线落在 x_{v_0} 上。

证明。由命题 3.1，Φ_0 将 $\mathcal{H}_0 \setminus \mathbb{R}$ 的两个连通分支映射到 $\mathbb{D} \setminus [0,1)$，且映射为同胚。因此，每个 $v \in \partial\mathcal{H}_0 \setminus \mathbb{R}$ 都是恰好一条参数内部射线 $\mathcal{R}_0(\theta)$的着陆点。对于 $v \in \partial\mathcal{H}_0 \cap \mathbb{R}$，$v$ 是 $\mathcal{R}_0(0)$的着陆点。它不可能是其他参数内部射线的着陆点，因为 $\mathcal{R}_0(\theta)$当 $\partial\mathcal{H}_0 \setminus \mathbb{R}$ 时落在 $\theta \neq 0$。

现在令 $v_0 \in \partial\mathcal{H}_0 \setminus \{0\}$。有以下两种情形。

情形 1。f_{v_0} 不可重整化。由引理 5.11，存在一个拼图块序列$\{\hat{}P_{n_k}^{v_0}\}_{k\geq 0}$，使得 $\bigcap_{k\geq 0} \hat{}P_{n_k}^{v_0} = \{-2v_0\}$，并且由引理 5.10，$\partial\mathcal{P}_{n_k}$和 $\partial P_{n_k}^{v_0}$同胚。由于 $\mathcal{R}_0(\theta)$落在 v_0，它会进入所有$\mathcal{P}_{n_k}$。$\hat{}$ 因此，$R_0^{v_0}(\theta)$会进入所有 $P_{n_k}^{v_0}$。由于 $\bigcap_{k\geq 0} P_{n_k}^{v_0} = \{-2v_0\}$，$R_0^{v_0}(\theta)$落在 $-2v_0$。

由于 $-2v_0 \in \partial B_{v_0}$，曲线 $\Gamma = [-2v, 0] \cup \mathbb{R}_{\geq 0}$ 仅在 $(2k+1)\pi$、$k \geq 0$ 和 $-2v_0$ 处与 $J(f_{v_0})$ 相交。因此，每两个半条带之间都由可数多个 Fatou 分支的闭包分隔，并且每条动力射线 g_s 在 $s = (s_0, s_1, \ldots\ldots)$成立时都完全包含于 P_{s_0}中。因此，每条落在 $-2v_0$ 上的动力射线都有相同的外部地址。这意味着恰好有一条动力射线$g_s^{v_0}$落在 $-2v_0$ 上。因此，G_s 是落在 v_0 上的唯一参数射线。

情况2。f_{v_0} 是可重整化的。由命题 6.1，v_0 是 $\mathcal{M}_{v_0}$的尖点，也是 $\mathcal{R}_0(\theta)$ 和 $G_{s_\pm}$的公共落点。在 f_{v_0}的动力平面中，$R_0^{v_0}(\theta)$ 和 $g_{s_\pm}^{v_0}$ 都落在同一个抛物周期点 x_{v_0}上。还需证明 $G_{s_\pm}$ 是落在 v_0上的唯一参数射线。

~反设 $G_{s'}$ 也着陆于 v_0。那么它会进入所有的 $\mathcal{P}_{n_k}$。因此，我们不妨假设 $s_- \prec s' \prec s_+$，其中外部地址的阶定义见 [27]。因此，$\mathcal{M}_{v_0}$ 完全包含在 $\mathbb{C} \setminus G_{s_-} \cup G_{s'} \cup G_{s_+}$的某个连通分支中。不妨设 $\mathcal{M}_{v_0} \setminus \{v_0\}$ 和 G_{s_+} 位于 $\mathbb{C} \setminus G_{s_-} \cup G_{s'}$的不同连通分支中。那么 $g_{s'}^{v_0}$也着陆于 x_{v_0}。考虑一个排斥周期点 K_{v_0}，它是一个周期动态射线的着陆点

射线 $g_t^{v_0}$和 $s' \prec t \prec s_+$。那么 G_t 会着陆于点 $v' \in \mathcal{M}_{v_0}$，因为它会进入每一个$\mathcal{P}_{n_k}$。然而，这是不可能的，因为 $\mathcal{M}_{v_0} \setminus \{v_0\}$ 被 $G_{s_-} \cup G_{s'}$与 G_{s_+}隔开。□

6.3 C 型双曲分支边界的局部连通性

在本节中，我们证明 C 型双曲分支边界的局部连通性。

命题 6.3。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$ 的一个连通分支，$m \geq 1$ 是可重整化的，重整化周期为 p。则 $\partial\mathcal{U}$ 在 v_0 处局部连通。更确切地说，以下陈述成立：

1. $\mathcal{M}_{v_0} \cap \partial\mathcal{H}_0 = \chi_{v_0}^{-1}(1/4) =: v_1$，它是 $\mathcal{M}_{v_0}$ 的尖点；*2.* 恰有两条参数射线 $G_{s^\pm}$ 和一条参数内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ 落在 v_0 上，其中 $t^\pm = \sigma^m(s^\pm)$ 和 θ 的周期为 p，而 $s^\pm$、θ 来自命题 *6.1*；*3.* m 是 p 的倍数；*4.* $G_{s^+} \cup G_{s^-}$ 将 $\partial\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{M}_{v_0} \setminus \{v_0\}$ 分隔开。

证明。设 $\mathcal{U}, v_0$ 如上。由于 v_0 是可重整化的，根据引理 5.11，存在拼图块 $P_{n_k}^{v_0}$，$k \geq 0$，使得 $f_{v_0}^p : P_{n_{k+1}}^{v_0} \to P_{n_k}^{v_0}$是一个二次-型映射。根据引理 6.1，存在参数拼图块 $\mathcal{P}_{n_k}$，$k \geq 0$，使得 $\mathcal{M}_{v_0} = \bigcap_{k\geq 0} \mathcal{P}_{n_k}$ 是 $\mathcal{M}$的一个副本。根据参数拼图块的定义，$\partial\mathcal{P}_n \cap \mathcal{U}$ 由两条参数内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta_n^\pm)$组成，分别落在 $v_n^\pm$上。并且 $v_n^\pm$ 分别是参数射线 $G_{s_n^\pm}$ 的着陆点，它们也位于 $\partial\mathcal{P}_n$上。随后，动力射线 $g_{s_n^\pm}^{v_0}$ 位于 $\partial P_n^{v_0}$上，并落在与 $f_{v_0}^{-m}(R_0^{v_0}(\theta_n^\pm))$的某些原像相同的点上。

首先我们证明$\mathcal{P}_{n_k} \cap \mathcal{H}_0 \neq \varnothing$，从而 $\mathcal{M}_{v_0} \cap \partial\mathcal{H}_0 \neq \varnothing$。事实上，考虑$P_l^{v_0}$，$l \geq m+1$。由于 $\mathcal{U}$的深度为 m，$f_{v_0}^m(P_l^{v_0})$是一个与B_{v_0}相交的拼图块。因此，对于 $kp \geq m$，$n_l \geq m$，$P_{n_l}^{v_0} = f_{v_0}^{kp}(P_{n_{l+k}}^{v_0})$是一个与$B_{v_0}$相交的拼图块。由命题 5.10 中的同胚，$P_{n_k} \cap \mathcal{H}_0 \neq \varnothing$。因此，$\mathcal{P}_{n_k} \cap \mathcal{H}_0$ 包含两条参数内部射线 $\mathcal{R}_0(\eta^\pm n_k)$，它们分别与参数射线 $G_{t_{n_k}^\pm}$ 落在相同的点上。

接下来我们证明 $\mathcal{M}_{v_0} \cap \partial\mathcal{H}_0$ 在同一个点 $v_1 = \chi_{v_0}^{-1}(1/4)$。假设 $\mathcal{M}_{v_0}$ 与 $\partial\mathcal{H}_0$ 相交于两个点 v_1，v_2。那么由命题6.1，$v_i = \chi_{v_i}^{-1}(1/4)$，$i = 1, 2$。由于 $v_1, v_2 \in \mathcal{M}_{v_0}$，$\chi_{v_1} = \chi_{v_0} = \chi_{v_2}$。由于 χ_{v_0}是一个同胚，$v_1 = v_2$。

由于 $R_0^{v_0}(\eta_{n_k}^\pm) = R_0^{v_0}(\theta_{n_k-m}^\pm)$，$f_{v_0}^m(\partial P_{n_k-m}^{v_0}) = -2v_0$ 在 B_{v_0} 下的像包含于 $f_{v_0}^m|_{B_{v_0}}(\partial P_{n_k-m}^{v_0})$ 中，而后者由 $\partial P_{n_k-m}^{v_0}$ 组成。由于 $f_{v_0}^m$ 会将 B_{v_0}、$2^m\eta_{n_k}^\pm = \theta_{n_k-m}^\pm$ 中内部射线的角度加倍。类似地，$f_{v_0}^m$ 将 $g_{s_{n_k}^\pm}^{v_0}$ 和 $g_{t_{n_k}^\pm}^{v_0}$ 映到动力射线上，这些动力射线落在与 $R_0^{v_0}(\theta_{n_k-m}^\pm)$ 相同的点上。因此，$\sigma^m(t_{n_k}^\pm) = \sigma^m(s_{n_k}^\pm)$。

我们证明 $P_{n_k}^{v_0}(f_{v_0}^m(-2v_0)) = P_{n_k}^{v_0}$，从而 m 是 p 的倍数。由于 $\mathcal{U}$ 的深度为 m，$f_{v_0}^{-m}(B_{v_0})$ 的连通分支 U（$g_{s_{n_k+m}^{\pm}}^{v_0}$ 落在其边界上）满足 $f_{v_0}^m(U) = B_{v_0}$，并且 $f_{v_0}^j(U) \neq B_{v_0}, 0 \leq j \leq m-1$。因此，$\sigma^j(s_{n_k+m}^{\pm})$ 永远不会落在 ∂B_{v_0} 上。因此，$f_{v_0}^{m-1}: \hat{} P_{n_k+m}^{v_0} \to \hat{} P_{n_k+1}^{v_0}(f_{v_0}^{m-1}(-2v_0))$ 是一个共形同构。$f_{v_0}: \hat{} P_{n_k+1}^{v_0}(f_{v_0}^{m-1}(-2v_0)) \to \hat{} P_{n_k}^{v_0}(f_{v_0}^m(-2v_0))$ 是一个次数为 2 的分支覆盖，因为它在 $\partial \hat{} P_{n_k+1}^{v_0}(f_{v_0}^{m-1}(-2v_0))$ 上不是同胚，且每个拼图块至多包含 f_{v_0} 的一个临界点。这意味着 $\hat{} P_{n_k+1}^{v_0}(f_{v_0}^{m-1}(-2v_0))$ 包含 f_{v_0} 的一个临界点，且 $-2v_0 \in \hat{} P_{n_k}^{v_0}(f_{v_0}^m(-2v_0))$。因此，$P_{n_k}^{v_0}(f_{v_0}^m(-2v_0)) = P_{n_k}^{v_0}$，且 m 是 p 的倍数。同时，这也表明 $\eta_{n_k} = \theta_{n_k}$，且 $t_{n_k}^{\pm} = \sigma^m(t_{n_k+m}^{\pm}) = \sigma^m(s_{n_k+m}^{\pm})$。

再次利用引理 5.10 中的同胚，$\mathcal{R}_0(\theta_{n_k}^{pm})$ 和 $G_{t_{n_k}^{\pm}}$ 位于 $\partial \mathcal{P}_{n_k}$ 上。由于 $\mathcal{P}_{n_k}(v_1) = \mathcal{P}_{n_k}$，根据命题 6.1，存在一个角度 θ 和两个外部地址 $t^{\pm}$，使得 $\theta_{n_k}^{\pm} \to \theta$ 和 $t_{n_k}^{\pm} \to t^{\pm}$ 作为 $k \to \infty$。此外，θ 在角度加倍映射下的周期为 p，而 $t^{\pm}$ 在单侧移位 σ 下的周期为 p。并且，$\mathcal{R}_0(\theta)$、$G_{t^{\pm}}$ 都落在 v_1 上。

考虑落在 ∂U 上的动力射线 $g_{s_{n_k}^{\pm}}^{v_0}$。它们构成两个单调的外部地址序列。因此，存在 $s^{\pm}$，使得 $s_{n_k}^{\pm}$ 分别收敛到 $k \to \infty$。

最后，我们证明 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ 和 $G_{s^{\pm}}$ 都落在 v_0 上，并且 $G_{s^+} \cup G_{s^-}$ 将 $\partial \mathcal{U}$ 与 $\mathcal{M}_{v_0} \setminus \{v_0\}$ 分开。由于 θ 是有理数，$\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ 落在某个点 $v_\theta \in \partial \mathcal{U}$ 上。同样，$G_{s^{\pm}}$ 分别落在 $v_{\pm} \in \partial \mathcal{U}$ 上。

由于 $s^{\pm}$ 是严格预周期的，根据命题 4.2，$v_{\pm}$ 是后临界有限的。考虑 f_{v_+} 的动力平面。$f_{v_+}^m(-2v_+)$ 是 $f_{v_+}^p$ 的一个不动点，也是 $R_0^{v_+}(\theta)$ 和 $g_{t^{\pm}}^{v_+}$ 的着陆点，因为根据命题 6.1，$v_+ \in W(v_1)$、$R_0^{v_1}(\theta)$ 和 $g_{t^{\pm}}^{v_1}$ 落在同一点。通过 $f_{v_+}^m$ 将其拉回到 $-2v_+$，$g_{s^+}^{v_+}$ 和 $g_{s^{\pm}}^{v_+}$ 都落在 $-2v_+$。根据命题 4.3，v_+ 是 $G_{s^{\pm}}$ 的着陆点，即 $v_+ = v_-$。

接下来考虑参数 v_θ。根据命题 4.6，它要么是后临界有限的，要么是抛物的。根据命题 4.3 和 4.4，至少有一条参数射线 $G_{s'}$ 落在 v_θ。若 $v_\theta \neq v_+$，我们不妨设 $s^- \prec s'$。由于 v_θ 是 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ 的着陆点，它属于每个参数拼图片 $\mathcal{P}_{n_k}$。因此，$G_{s'}$ 进入每个 $\mathcal{P}_{n_k}$，并且对于每个 $k \geq 0$，都有 $s^- \prec s' \asymp s_{n_k}^-$。由于 $s_{n_k}^- \to s^-$，如同 $k \to \infty$、$s' = s^-$，这与 $v_\theta \neq v_+$ 矛盾。

设 S 是包含 $\mathcal{U}$ 的 $\mathbb{C} \setminus G_{s^+ \cup G_{s^-}}$ 连通分支。若 $\mathcal{M}_{v_0} \cap S \neq \varnothing$，则我们可以选取一个后临界有限参数 $v' \in \mathcal{M}_{v_0} \cap S$。它是某个 $G_{s''}$ 的着陆点。与上文相同，s'' 必定等于 s^+ 或 s^-，这与 $v' \in S$ 矛盾，而 $v_+ \in \partial S$。因此，$\mathcal{M}_{v_0} \cap \partial \mathcal{U} = \{v_+\}$。~~由于 v_0 也属于~~ $\mathcal{M}_{v_0} \cap \partial \mathcal{U}$，所以 $v_0 = v_+$。于是，$G_{s^+} \cup G_{s^-}$ 将 $\partial \mathcal{U}$ 与 $\mathcal{M}_{v_0} \setminus \{v_0\}$ 分隔开来，而 v_0 是 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}(\theta)}$ 和 $G_{s^{\pm}}$ 的着陆点。

出于与推论 6.2 相同的原因，C 型双曲分支是若尔当域。

推论 6.3。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$、$m \geq 1$ 的一个连通分支。那么 $\mathcal{U}$ 是一个若尔当区域。

现在定理 1.2 由命题 3.3、推论 6.2 和 6.3得证。

推论 6.4。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$、$m \geq 1$、$v \in \partial\mathcal{U}$ 的一个连通分支。那么，v 是唯一参数内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$ 的着陆点，因此内部射线 $R_0^v(\theta)$ 落在 $f_v^m(-2v) \in \partial B_v$ 上。

证明。由推论 6.3，$\Phi_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to \mathbb{D}$ 可延拓为一个同胚 $\Phi_{\mathcal{U}}: \overline{\mathcal{U}} \to \overline{\mathbb{D}}$。因此，每个 $v \in \partial\mathcal{U}$ 都是唯一参数内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$的着陆点。根据 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\theta)$的定义，$f_v^m(-2v)$ 是 $R_0^v(\theta)$的着陆点。□

推论 6.5。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$、$m \geq 1$ 的一个连通分支。那么至多存在一个可重整化的 $v_0 \in \partial\mathcal{U}$。并且 v_0 必须是后临界有限的。

证明。反设 $v_1 \neq v_2 \in \partial\mathcal{U}$ 均可重整化。那么存在一条若尔当曲线 γ，位于 $\mathcal{H}_0 \cup \mathcal{M}_{v_1} \cup \mathcal{M}_{v_2} \cup \mathcal{U}$内，并围成一个有界域 Ω。考虑两条参数射线 $G_{s^\pm}$，它们落在 v_1上。曲线$G_{s^+} \cup G_{s^-}$ 根据命题 $\partial\mathcal{U}$ 将 $\mathcal{M}_{v_1} \setminus \{v_1\}$ 与 6.3隔开。因此，$G_{s^\pm}$中有一个包含于 Ω，而 Ω 是有界域。这不可能。

由命题 6.3的证明可知，可重整化的参数$v_0 \in \partial\mathcal{U}$ 必为后临界有限。

□

7 C 型双曲分支是拟圆盘

本节证明 C 型双曲分支是拟圆盘。

引理 7.1。设 $\mathcal{U}_1$、$\mathcal{U}_2$ 是 $\hat{}\,\mathcal{H}$ 的两个分支。那么 $\mathcal{U}_1 \cap \overline{\mathcal{U}_2} = \varnothing$。

证明。若 $\mathcal{U}_i$、$i = 1$、2 之一为 $\mathcal{H}_0$，我们不妨设 $\mathcal{U}_2 = \mathcal{H}_0$。令 $v \in \mathcal{U}_1 \cap \overline{\mathcal{H}_0}$。鉴于 $\mathcal{U}_1$，由推论 6.4，v 是参数内部射线 $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_1}(\theta)$ 的着陆点，从而 $f_v^m(-2v) \in \partial B_v$ 是 $R_0^v(\theta)$ 的着陆点，且$-2v \notin \partial B_v$。此外，f_v 没有抛物周期点，因为临界值 $-2v$ 属于 $J(f_v)$。然而，鉴于 $\mathcal{H}_0$，v 是 $\mathcal{R}_0(\theta')$ 的着陆点，从而 $R_0^v(\theta')$ 落在 $-2v$。这意味着 $-2v \in \partial B_v$，矛盾。

现设 $\mathcal{U}_1$ 与 $\mathcal{U}_2$ 分别是 $\mathcal{H}_{m_1}$ 与 $\mathcal{H}_{m_2}$ 的分支。令 $v \in \partial\mathcal{U}_1 \cap \partial\mathcal{U}_2$。鉴于 $\mathcal{U}_1$，$f_v^{m_1}(-2v) \in \partial B_v$与 $f_v^j(-2v) \notin \partial B_v$对 $0 \leq j \leq m_1 - 1$成立。类似地，由于 $v \in \partial\mathcal{U}_2$，$f_v^{m_2}(-2v) \in \partial B_v$与 $f_v^j(-2v) \notin \partial B_v$对$0 \leq j \leq m_2 - 1$ 成立。因此 $m_1 = m_2 = m$。

由引理 3.3，存在整数 k_1、$k_2 \in \mathbb{N}$，使得 $f_v^{m-1}(-2v) \in \partial(B_v + 2k_1\pi) \cap \partial(B_v + 2k_2\pi)$，因为 v 是 $\mathcal{U}_1$ 和 $\mathcal{U}_2$ 的公共边界点。但 $B_v + 2k_1\pi$ 和 $B_v + 2k_2\pi$ 都被 f_v 映射到 B_v。这意味着 $f_v^{m-1}(-2v)$ 是一个临界点。否则 f_v 在 $J(f_v)$ 中会有一个周期临界点，这是不可能的。□

引理 7.2。设 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{H}_m$、 $m \geq 1$、 $v_0 \in \mathcal{U}$ 的一个连通分支。那么 B_{v_0} 是一个拟圆盘。

证明。 f_{v_0} 是双曲的，且恰有两个临界值。由于这些临界值位于不同的 Fatou 分支中，f_{v_0} 的 Fatou 分支根据[27], 引理 2.1 均为有界集。由 [2], 定理 1.4， B_{v_0} 是一个拟圆盘。 □

引理 7.3。 设 $m \geq 1$。则 $\mathcal{H}_m$ 的分支在 $\mathbb{C}$中是离散的。

证明。固定 $R > 0$ 充分大。定义 $\mathcal{W}_1$ 为 $\bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{H}_n$ 中包含于 $D(0, R)$ 内的连通分支集合，并定义 $\mathcal{W}_2$ 为 $\bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{H}_n$的连通分支集合，其中的分支与 $D(0, R)$ 的补集相交。

首先，我们证明 $\mathcal{W}_1$ 只包含有限个连通分支。反设 $\bigcup_{n=1}^{m}$ 中有无穷多个连通分支 $\mathcal{U}_k$ 包含于 $D(0, R)$ 内。我们不妨设 $\mathcal{U}_k$ 是某个 $1 \leq n \leq m$的全部连通分支。设 $\mathcal{U}_k$的中心为 v_k 。则 v_k 是 $f_{v_k}^n(-2v_k) = 0$的解。然而，这将意味着解析函数 $G_n(v) = f_v^n(-2v)$ 在紧集 $D(0, R)$ 中有无穷多个零点，因此 $G_n \equiv 0$，矛盾。

然后我们证明 $\mathcal{W}_2$ 的元素是离散的。事实上，设 $G_m(v) = f_v^m(-2v)$。对于 $v \in (\bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{H}_n) \backslash D(0, R)$，由引理 2.2 可知，$\overline{\text{diam}}\, B_v \leq 2\sqrt{2}/R$。因此，$(\bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{H}_n) \setminus D(0, R) \subset G_m^{-1}(D(0, 2\sqrt{2/R}))$。根据开映射定理， $G_m^{-1}(D(0, 2\sqrt{2/R}))$ 的连通分支只能在 1 或 $\partial D(0, R)$ 处聚集。

如果 $\{U_k\}_{k\geq 1}$ 是 $G_m^{-1}(D(0,\ 2\sqrt{2/R}))$ 的连通分支序列，并且聚集于 $\partial D(0,\ R)$，那么存在一个整数 K，使得对于 $k \geq K$， $U_k \subset D(0,\ R+1)$。如上所示，$\bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{H}_n$ 中完全包含于 $D(0,\ R+1)$ 内的连通分支只有有限多个。因此，$(\bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{H}_n) \cap U_k, k \geq K$ 中包含的 $\bigcup_{n=1}^{m} \mathcal{H}_n$ 的连通分支只有有限多个。所以， $\mathcal{W}_2$ 的元素只能聚集于∞ ，因而它们是离散的。 □

现在令 $\mathcal{U}$ 为 $\mathcal{H}_m, m \geq 1$ 的一个连通分支。由引理 3.4，存在 $R > 0$ ，使得 $D(0, R)$ 包含 $\mathcal{U}$。令 W 为 $D(0, 2R)$ 的一个连通子集，它包含 $\mathcal{U}$ ，并且只要 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{H}_n, 0 \leq n \leq m$ 中不同于 $\mathcal{U}$ 的一个连通分支， $W \cap \mathcal{V} = \varnothing$ 就成立。这样的 W 存在，因为根据引理 7.1 和 7.3，$\bigcup_{n=0}^{m} \mathcal{H}_n$ 的各个分支的闭包互不相交且是离散的。

引理 7.4. 令 v_0 为 $\mathcal{U}$ 的中心。存在一个全纯运动 $\xi : W \times B_{v_0} \to \mathbb{C}$。

证明。由于 $\overline{W} \cap \overline{\mathcal{H}_0} = \varnothing$，根据推论 2.1，对于每个 $v \in W$, B_v 都是有界的。并且，Böttcher映射在整个直接吸引盆 B_v 上都有定义。因此存在一个共形同构 $\phi_v : B_v \to \mathbb{D}$。定义 $\xi(v, z) = \phi_v^{-1} \circ \phi_{v_0}(z)$。容易验证， $\xi : W \times B_v \to \mathbb{C}$ 是一个全纯运动。根据 λ-引理（ [20]） ， ξ 可扩展为一个全纯运动 $\xi : W \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。 □

根据斯沃德科夫斯基定理，全纯运动 ξ 在引理 7.4 ^ ^中定义，并扩展为一个全纯运动 ξ： $W \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。定义

$$\begin{aligned} \Xi : W &\to \mathbb{C} \\ v &\mapsto \xi_v^{-1}(f_v^m(-2v)) \end{aligned}. \tag{8}$$

取一个区域 $V \Subset W$，其包含 $\mathcal{U}$。类似于引理 5.12 （另见 [37],引理 3.3），存在 $K \geq 1$ 使得 Ξ 由（8）给出的映射是 K-拟正则映射，在 V上。

定理 *1.3*的证明。 我们将证明 Ξ： $\mathcal{U} \to B_{v_0}$ 是一个 K-拟共形映射。那么，由于 $\mathcal{U}$ 是拟圆盘，因为 B_{v_0} 是拟圆盘。

对于 $v \in \mathcal{U}$， $\Xi(v) = \phi_{v_0}^{-1} \circ \phi_v(f_v^m(-2v)) = \phi_{v_0}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{U}}(v) \in B_{v_0}$。由于 $\phi_{v_0}^{-1}$: $\mathbb{D} \to B_{v_0}$ 和 $\Phi_{\mathcal{U}}$： $\mathcal{U} \to \mathbb{D}$ 都是共形同构， Ξ: $\mathcal{U} \to B_{v_0}$ 是一个共形同构。由于 $\mathcal{U}$ 和 B_{v_0} 都是若尔当区域（推论 2.2 和 6.3），根据卡拉西奥多里定理， Ξ: $\mathcal{U} \to B_{v_0}$ 是一个同胚。

接下来我们证明 $\overline{\Xi^{-1}(B_{v_0})} = \mathcal{U}$。设 $v \in \overline{\Xi^{-1}(B_{v_0})}$。则 $\Xi(v) = \phi_{v_0}^{-1} \circ \phi_v(f_v^m(-2v)) \in B_{v_0}$。这意味着 $f_v^m(-2v) \in B_v$。根据定义，$v \in \bigcup_{n=0}^m \mathcal{H}_n$。由于 W不与 $\bigcup_{n=0}^m \mathcal{H}_n$ 中除 $\mathcal{U}$之外的任何分支相交，$v \in \mathcal{U}$。设 $v \in W$ 满足 $\Xi(v) \in \partial B_{v_0}$。于是，根据开映射定理，对于 v的任意开邻域 N，存在 $v_1, v_2 \in N$，使得 $\Xi(v_1) \in B_{v_0}$, $\Xi(v_2) \notin B_{v_0}$。这意味着 $v_1 \in \mathcal{U}$ 且 $v_2 \notin \mathcal{U}$。因此 $v \in \partial\mathcal{U}$。

最后，与引理的证明类似 6.1， Ξ 在邻域上是双射V属于 $\mathcal{U}$，因此 Ξ： $V \to \Xi(V)$ 是一个 $\overline{K}$-拟共形映射。 B_{v_0} 由引理 7.2可知是拟圆盘。因此 $\mathcal{U} = \Xi^{-1}(B_{v_0})$ 是一个拟圆盘。

□

参考文献

[1] A. Benini 和 L. Rempe。《有界后奇异集整函数的落点定理》。《几何与泛函分析》，30(6):1465–1530，2020年。[2] W. Bergweiler、N. Fagella 和 L. Rempe-Gillen。《具有有界Fatou分支的双曲整函数》。《海尔维提数学评论》，90(4):799–829，2015年。[3] W. Bergweiler 和 S. Morosawa。《半双曲整函数》。《非线性》，15(5):1673–1684，2002年。[4] B. Branner 和 J. H. Hubbard。《三次多项式的迭代。I. 参数空间的整体拓扑》。《数学学报》，160(3-4):143–206，1988年。[5] B. Branner 和 J. H. Hubbard。《三次多项式的迭代。II. 模式与拟模式》。《数学学报》，169(3-4):229–325，1992年。[6] L. Carleson 和 T. W. Gamelin。《复动力学》。Universitext：数学论丛。施普林格出版社，纽约，1993年。

[7] R. L. Devaney、N. Fagella 和 X. Jarque。《复指数族的双曲分支》。《基本数学》，174(3):193–215，2002年。[8] A. Douady 和 J. H. Hubbard。《复多项式的动力学研究》。第一部分，奥赛数学出版物第84-2卷 [奥赛数学出版物]。巴黎南大学数学系，奥赛，1984年。[9] A. Douady 和 J. H. Hubbard。《关于多项式型映射的动力学》。《高等师范科学年刊》(第4辑)，18(2):287–343，1985年。[10] A. L. Epstein。《二次有理映射的有界双曲分支》。《遍历理论与动力系统》，20(3):727–748，2000年。[11] A. È. Erëmenko 和 M. Yu. Lyubich。《若干类整函数的动力学性质》。《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔），42(4):989–1020，1992年。[12] P. Fatou。《论函数方程》。《法国数学会通报》，48:33–94，1920年。[13] J. D. Faught。《三次多项式族的局部连通性》。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1992年。博士论文——康奈尔大学。[14] J. Graczyk 和 S. Smirnov。《Collet、Eckmann 与赫尔德》。《数学发明》，133(1):69–96，1998年。[15] L. Keen 和 J. Kotus。《族 $\lambda \tan z$ 的动力学》。《保形几何与动力学》，1:28–57，1997年。[16] L. Keen 和 J. Kotus。《关于族 $\lambda \tan(z)$ λ 的倍周期现象及沙可夫斯基型序》。载于《值分布理论与复动力学》（香港，2000年），《当代数学》第303卷，第51–78页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002年。[17] L. Keen 和 S. Yuan。《族 $\lambda \tan z$ 的抛物扰动》。载于《复动力学》，《当代数学》第396卷，第115–128页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006年。[18] O. Kozlovski、W. Shen 和 S. van Strien。《一维情形下双曲性的稠密性》。《数学年刊》(第2辑)，166(1):145–182，2007年。[19] M. Yu. Lyubich。《二次多项式的动力学。I、II》。《数学学报》，178(2):185–247，247–297，1997年。[20] R. Mañé、P. Sad 和 D. Sullivan。《关于有理映射的动力学》。《高等师范科学年刊》(第4辑)，16(2):193–217，1983年。[21] C. T. McMullen。《整函数茹利亚集的面积与豪斯多夫维数》。《美国数学会汇刊》，300(1):329–342，1987年。

[22] C. T. McMullen. 复动力学与重整化，第135卷，《数学年刊研究》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1994年。[23] J. Milnor. 具有周期临界轨道的三次多项式映射. I. 载于复动力学，第333–411页。A K Peters，马萨诸塞州韦尔斯利，2009年。[24] J. Milnor. 双曲分支。载于保角动力系统与双曲几何，第573卷，《当代数学》，第183–232页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。附A. Poirier所撰附录。[25] H. Nie与K. M. Pilgrim. 双临界有理映射的有界双曲分支。《现代动力系统杂志》，18:533–553，2022年。[26] W. Qiu、P. Roesch、X. Wang与Y. Yin. McMullen映射的双曲分支。《高等师范学校科学年刊》*(4)*，48(3):703–737，2015年。[27] W. Qiu与L. Wang. 余弦函数的有界Fatou分支，2025年。[28] M. Rees. 二次双曲有理映射的分支。《数学发明》，100(2):357–382，1990年。[29] M. Rees. 二次有理映射参数空间的部分描述. I.《数学学报》，168(1-2):11–87，1992年。[30] L. Rempe与D. Schleicher. 指数映射空间中的分岔。《数学发明》，175(1):103–135，2009年。[31] P. Roesch. 全纯运动与拼图（遵循M. Shishikura）。载于曼德勃罗集合：主题与变奏，第274卷，伦敦数学会讲义系列，第117–131页。剑桥大学出版社，剑桥，2000年。[32] P. Roesch. 具有最大阶临界不动点的多项式的双曲分支。《高等师范学校科学年刊》*(4)*，40(6):901–949，2007年。[33] G. Rottenfusser与D. Schleicher. 余弦族的逃逸点，第396–424页。伦敦数学会讲义系列。剑桥大学出版社，2008年。[34] D. Schleicher. 论迭代指数映射的动力学。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，1999年。博士论文——慕尼黑工业大学（德国）。[35] T. Tian. 余弦族的参数射线。《复旦学报（自然科学版）》，50(1):10–22，2011年。[36] X. Wang. 双曲分支与三次多项式。《数学进展》，379:论文编号107554，42，2021年。

[37] Y. Wang与W. Qiu. 捕获分支是拟圆盘：具有临界不动点的三次多项式（中文）。中国科学：数学，49(10):1431–1438，2019年。[38] G. Whyburn. 解析拓扑，第28卷，美国数学会讨论会出版物。美国数学会，纽约，1942年。[39] S. Yuan. 具有两个渐近值的一族亚纯函数的参数平面。载于保角动力系统与双曲几何，第573卷，《当代数学》，第245–256页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2012年。