arXiv:2603.10596v1 [math.CO] 11 Mar 2026

积图的 M-多项式

El-MehdiMehiri[a,*] SandiKlavžar[b,c,d,†]

2026年3月12日

[a] Mines Saint-Étienne，CMP，制造科学与物流系，F-13120 Gardanne，法国。

[b] 数学与物理学院，卢布尔雅那大学，斯洛文尼亚。[c] 数学、物理与力学研究所，卢布尔雅那，斯洛文尼亚。[d] 自然科学与数学学院，马里博尔大学，斯洛文尼亚

a.

摘要

M-多项式为一大类基于度的拓扑指标提供了统一框架。尽管它在结构上十分重要，但针对图构造计算 M-多项式的一般方法仍然有限。本文针对不同的图乘积，推导了相应的显式公式，并在可能的情况下给出简洁公式；这些图乘积的顶点集均为各因子的笛卡尔积。所研究的乘积包括直积、笛卡尔积、强积、字典积、对称差积、析取积和谢尔宾斯基积。所得公式从统一的结构角度描述了顶点度交互在图构造下的传播，并将基于度的指标的已有结果扩展到多项式层面。

关键词： M-多项式；图乘积；度多项式；拓扑指标；谢尔宾斯基积。

MSC（2020）： 05C31；05C09；05C76；05C92；05A15。

1 引言

拓扑指标是数值型图不变量，旨在以紧凑的代数形式编码结构信息。这类指标最初受化学图论启发；在化学图论中，分子结构被建模为图，其中顶点表示原子，边表示化学键。如今，这些指标已应用于定量构效关系（QSPR/QSAR）；参见 [14,32]。在众多此类不变量中，基于度的拓扑指标占据核心地位，这得益于它们的简洁性、可解释性，以及与多种物理化学性质之间强烈的经验相关性 [10]。

近几十年来，人们越来越重视能够将整族拓扑指标编码于单一多项式中的统一框架。在基于距离的情形中，这一角色

*通讯作者。电子邮件：elmehdi.mehiri@emse.fr 或 mehiri314@gmail.com

†电子邮件：sandi.klavzar@fmf.uni-lj.si

由 Sagan、Yeh 和 Zhang [29], 引入的维纳多项式承担，其导数可还原经典维纳指数。与之密切相关的细谷多项式推广了维纳数，并已被证明是研究复合图的有力工具 [30]。类似地，超维纳指数 [21] 以及 y-维纳指数 [16] 等推广，促使人们在基于距离的不变量下对图运算进行系统研究。基于度的指标也有平行发展，包括图运算下的 Zagreb 指数 [22]。

在基于度的研究中，Deutsch 和 Klavžar 于 2015年 引入了*M*-多项式 [11]。这一多项式构成了一个统一框架，可用于以闭式表示许多基于度的拓扑指标，正如细谷多项式能够表示基于距离的指标一样 [12]。一旦已知二元 M-多项式 $M(G;x,y)$，便可通过对 $M(G;x,y)$ 应用微分和积分算子，得到一系列经典指标，包括 Zagreb、Randić、调和、对称除法、遗忘以及逆和入度指标 [11]。近期论文 [8,24]展示了这一方法还可应用于多种 Sombor 型指数；而在 [26]中，研究者利用 M-多项式构建了用于预测抗生素物理化学性质的机器学习模型。因此，计算结构化图族的 M-多项式已成为一项核心任务。

尽管 M-多项式十分重要，目前可用的一般计算方法仍然有限。早期的系统性方法是针对受限图类开发的 [12,13], ，而近期许多论文则计算了特定图族的显式表达式，相关文献选例见 [1,2,7,19,25,28]。然而，相较之下，人们对 M-多项式在一般图构造下的行为进行结构分析的关注较少。

本文研究的图乘积中，顶点集是各因子顶点集的笛卡尔积。所讨论的积包括四种标准图乘积（笛卡尔积、直接积、强积和字典积）、对称差积、析取积以及谢尔宾斯基积。关于布尔运算 [17]和复合图的系统性研究 [30,33] 表明，这类构造在图论中具有基础性作用。近年来，谢尔宾斯基积等广义类积运算 [23] 进一步拓展了这一结构体系。关于图乘积（包括布尔积图）的系统论述，可参阅专著 [15],；而关于谢尔宾斯基积，除开创性论文 [23], 外，还可参阅 [18,31]。

本工作的动机兼具结构性和计算性。我们的目标是用因子的 M-多项式 G 及其度多项式来表示积的 M-多项式 $G*H$ 和H 。从计算角度看，这一目标是很自然的。如果$|V(G)|=n_G$ 且 $|V(H)|=n_H$，那么乘积图有 n_Gn_H 个顶点。即使因子的规模适中，顶点数量也会呈二次级增长，边的数量也随之急剧增加。由于 M-多项式需要按照边的端点的度类型对边进行枚举，直接在 $G*H$ 上计算很快就会变得十分昂贵。相比之下，分别计算$M(G;x,\ y)$和 $M(H;x,\ y)$的成本要低得多。如果能够推导出结构公式，用因子的不变量表示 $M(G*H;x,\ y)$，那么整体计算就可以化为对规模更小的多项式进行代数运算。

这类因式分解与图运算下距离型指标的经典公式相呼应 [6,16,21,30,33]。针对图运算下的 Hosoya 和 Wiener 型多项式 [27], 、度多项式及其在图乘积下的性质 [20],，以及 Zagreb 指数 [22], 、遗忘 F- 指标 [4,9], 和各种构造下相关的基于度的描述子 [3,5,11], 也已有类似研究。这些成果共同凸显了在图运算层面推导结构公式的重要性，而非直接在大型复合图上重新计算不变量。

本文的主要贡献是为所列出的七种图乘积推导出 M-多项式的显式紧凑公式。在可能的情况下，我们将所得公式表示为各因子的 M-多项式和度多项式，从而将全局复杂性化简为局部代数。

本文组织如下。第 2 节首先介绍全文所使用的符号和定义。随后介绍所研究的图乘积，并给出其度公式，这些内容构成后续推导的结构基础。第 3 节陈述并证明主要结果，其中每种所研究的积均在单独的小节中处理。第 4 节以路径的积为例说明所得公式。第 5 节总结所得公式，并讨论未来研究的展望。

2 预备知识

本文中，所有图都是有限、简单且无向的。对于图 G，分别用$V(G)$和 $E(G)$表示其顶点集和边集。我们用 $n_G = |V(G)|$ 表示 G的阶。图 G 的补图记为 $\overline{G}$。对于顶点 $g \in V(G)$， g 的（开）邻域为 $N_G(g) = \{g' \in V(G) \colon gg' \in E(G)\}$。 g 的度记为 $\deg_G(g)$，即 $\deg_G(g) = |N_G(g)|$。 G 的最小度和最大度分别记为 $\delta(G)$和 $\Delta(G)$。对于 $i \geq 0$，令

$$n_i(G) = |\{g \in V(G) \colon \deg_G(g) = i\}|,$$

对于 $i \leq j$，令

$$m_{i,j}(G) = |\{\{g, g'\} \in E(G) \colon \{\deg_G(g), \deg_G(g')\} = \{i, j\}\}|.$$

在第 3.5 节中，我们还将使用有序非邻接度型数，其定义为

$$\widehat{m}_{i,j}(G) = |\{(g, g') \in V(G)^2 \colon gg' \notin E(G),\ (\deg_G(g), \deg_G(g')) = (i, j)\}|.$$

请注意，在 $\widehat{m}_{i,j}(G)$ 的定义中，我们允许 $g = g'$。

图 G 的度多项式 和M-多项式 分别定义为

$$D_G(t) = \sum_{i \in \mathcal{D}(G)} n_i(G)\, t^i,$$
$$M(G; x, y) = \sum_{i \leq j} m_{i,j}(G) x^i y^j.$$

2.1 图乘积

现在，我们给出本文所讨论的图乘积的定义。我们关注的积包括四种标准图乘积（笛卡尔积、直接积、强积和字典积）、析取积（或）、对称差积（异或）以及谢尔宾斯基积。若 G 和 H 是图，且 $*$ 是上述积中的任意一种，则有 $V(G * H) = V(G) \times V(H)$。这些积中的边按以下方式确定。

- 在笛卡尔积 $G \,\square\, H$中，顶点 (g_1, h_1) 和 (g_2, h_2) 相邻，当且仅当 $g_1 = g_2$ 且$h_1h_2 \in E(H)$，或 $h_1 = h_2$ 且 $g_1g_2 \in E(G)$。

- 在直积 $G \times H$中，顶点 (g_1, h_1) 和 (g_2, h_2) 相邻，当且仅当 $g_1g_2 \in E(G)$ 且$h_1h_2 \in E(H)$。

- 在强积 $G \boxtimes H$中，顶点（g_1，h_1）和（g_2，h_2）相邻，当且仅当 $g_1 = g_2$ 且$h_1h_2 \in E(H)$，或 $h_1 = h_2$ 且 $g_1g_2 \in E(G)$，或 $g_1g_2 \in E(G)$ 且 $h_1h_2 \in E(H)$。
- 在字典序积 $G[H]$中，顶点（g_1，h_1）和（g_2，h_2）相邻，当且仅当 $g_1g_2 \in E(G)$，或 $g_1 = g_2$ 且 $h_1h_2 \in E(H)$。
- 在对称差积（异或） $G \oplus H$中，顶点（g_1，h_1）和（g_2，h_2）相邻，当且仅当 $g_1g_2 \in E(G)$ 或 $h_1h_2 \in E(H)$（即两者恰有一个成立）。
- 在析取积（或） $G \vee H$中，顶点（g_1，h_1）和（g_2，h_2）相邻，当且仅当 $g_1g_2 \in E(G)$ 或 $h_1h_2 \in E(H)$。
- 关于 f 的谢尔宾斯基积 $G \otimes_f H$： $V(G) \to V(H)$，其边集由以下两种边组成。$-$内部边：对于每个 $g \in V(G)$ 和每个 $hh' \in E(H)$，都有 $(g, h)(g, h') \in E(G \otimes_f H)$。$-$连接边：对于每个 $gg' \in E(G)$，都有 $(g, f(g'))(g', f(g)) \in E(G \otimes_f H)$。

图1展示了上述积在 $G \cong H \cong P_3$ 情况下的示意图。

设 G 和 H 为图，令 $*$ 为前面介绍的七种图乘积中的任意一种。对于给定的 $h \in V(H)$，顶点集合 $\{(g, h) : g \in V(G)\}$ 称为一个 G-层。类似地，对于给定的顶点 $g \in V(G)$，顶点集合 $\{(g, h) : h \in V(H)\}$ 称为一个 H- 层。谈及 G- 层（分别为 H- 层）时，我们也可以将其理解为由该层中的顶点诱导出的$G * H$ 的子图。根据这种理解，我们可以推知，在大多数情况下，各层与相应的因子同构。

在推导图乘积的 M-多项式时，所得图中顶点的度起着核心作用。为方便起见并供后续参考，我们列出所考虑的积的度公式。这里所考虑的大多数积的这些公式都是众所周知的，可以直接由定义推导得出。因此，设 (g, h) 是这些积中的任意一个顶点。那么我们有：

$$\deg_{G\square H}(g, h) = \deg_G(g) + \deg_H(h)\,, \tag{1}$$
$$\deg_{G\times H}(g, h) = \deg_G(g)\deg_H(h)\,, \tag{2}$$
$$\deg_{G\boxtimes H}(g, h) = \deg_G(g) + \deg_H(h) + \deg_G(g)\deg_H(h)\,, \tag{3}$$
$$\deg_{G[H]}(g, h) = n_H \deg_G(g) + \deg_H(h)\,, \tag{4}$$
$$\deg_{G\oplus H}(g, h) = n_H \deg_G(g) + n_G \deg_H(h) - 2\deg_G(g)\deg_H(h)\,, \tag{5}$$
$$\deg_{G\vee H}(g, h) = n_H \deg_G(g) + n_G \deg_H(h) - \deg_G(g)\deg_H(h)\,. \tag{6}$$

最后考虑 Si ierpiński 积 $G \otimes_f H$ 关于 f： $V(G) \to V(H)$。然后令

$$c(g, h) = \big|\{g' \in N_G(g) : f(g') = h\}\big|\,,$$

我们推断

$$\deg_{G\otimes_f H}(g, h) = \deg_H(h) + c(g, h)\,. \tag{7}$$

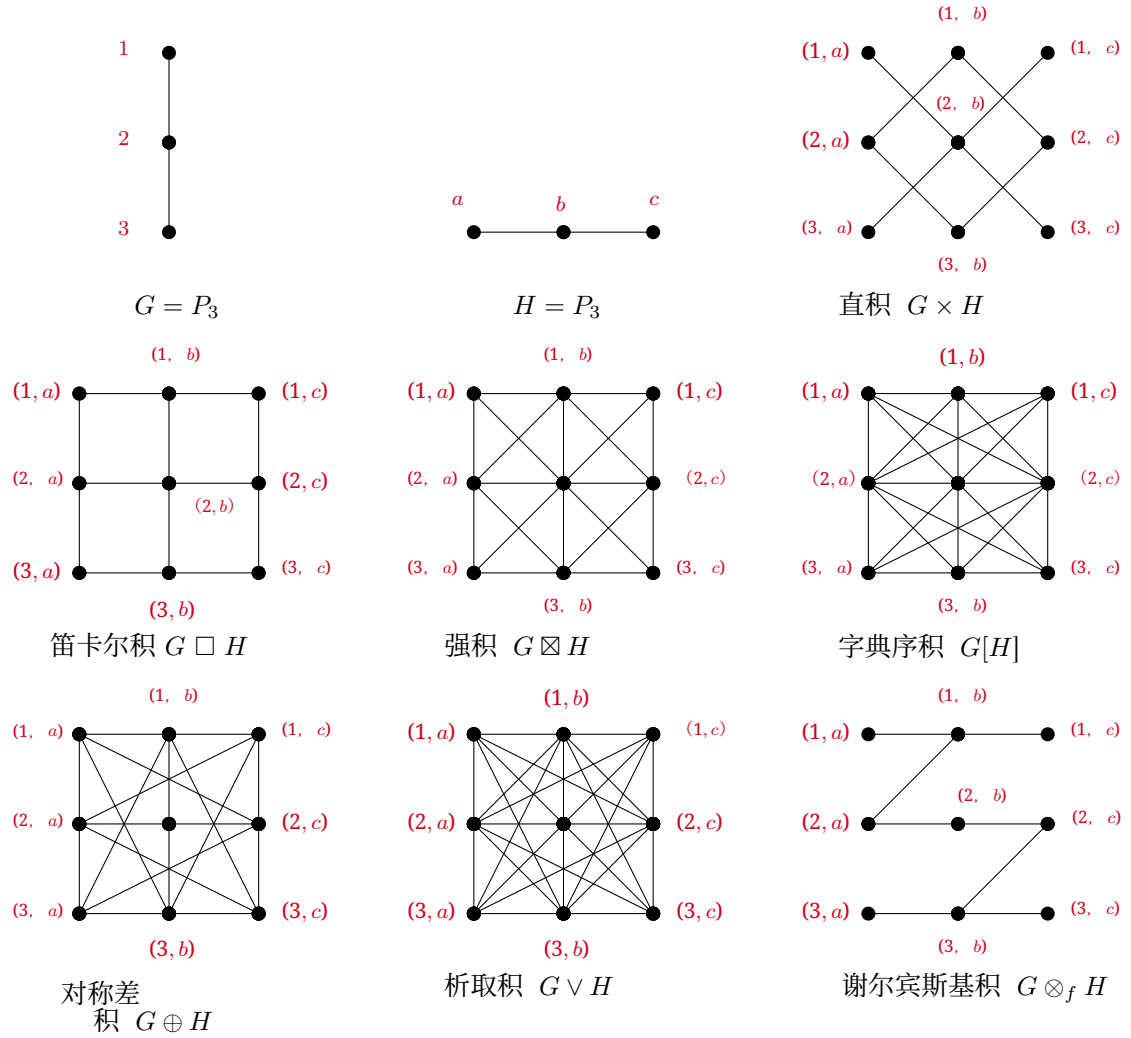

图1：针对情形 $G \cong H \cong P_3$所考虑的图乘积。在谢尔宾斯基积$G \otimes_f H$中，函数 f由 $f(1) = a$、 $f(2) = b$和 $f(3) = c$定义。

3 公式

本节给出了本文所讨论的所有图乘积的 M-多项式公式。每种积都在单独的小节中讨论。

3.1 笛卡尔积

定理 3.1. 若 G与 H 为图，则

$$M(G \square H; x, y) = D_G(xy)\, M(H; x, y) + D_H(xy)\, M(G; x, y). \tag{8}$$

证明。设 $g \in V(G)$，并设 $e = (g, h_1)(g, h_2)$ 是一条来自 H-层的边。那么 $h_1h_2 \in E(H)$，根据 (1)， e 的两个端点的度分别为 $\deg_G(g) + \deg_H(h_1)$ 和 $\deg_G(g) + \deg_H(h_2)$。固定 i, j_1, j_2，并考虑满足 $(\deg_H(h_1), \deg_H(h_2)) = (j_1, j_2)$ 的边 $h_1h_2 \in E(H)$。对于每条这样的边，每一个满足 $\deg_G(g) = i$ y 的 $g \in V(G)$ 的取法，都会在 $G \square H$ 中得到一条端点度为 $(i + j_1, i + j_2)$ 的边。因此，对于每个三元组 (i, j_1, j_2)，我们得到 $n_i(G)m_{j_1,j_2}(H)$ 条边，它们贡献单项式 $x^{i+j_1}y^{i+j_2}$。对所有 i, j_1, j_2 求和，得到 $\sum_i \sum_{j_1 \le j_2} n_i(G)\, m_{j_1,j_2}(H)\; x^{i+j_1}\, y^{i+j_2}$。

根据笛卡尔积的交换性，我们得到来自 H-层的边的贡献为 $\sum_j \sum_{i_1 \le i_2} n_j(H)\, m_{i_1,\, i_2}(G)\, x^{i_1+j}\, y^{i_2+j}$，因此 $M(G \,\square\, H;\, x,\, y)$ 等于

$$\sum_i \sum_{j_1 \le j_2} n_i(G)\, m_{j_1,j_2}(H)\, x^{i+j_1}\, y^{i+j_2} + \sum_j \sum_{i_1 \le i_2} n_j(H)\, m_{i_1,i_2}(G)\, x^{i_1+j}\, y^{i_2+j}.$$

利用 $x^{i+j_1}y^{i+j_2} = (xy)^i x^{j_1} y^{j_2}$，我们可以将第一个求和式因式分解为

$$\sum_i n_i(G)(xy)^i \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{j_1} y^{j_2} = D_G(xy)\, M(H; x, y)\,.$$

类似地，第二个求和式可因式分解为 $D_H(xy)\; M(G;\, x,\, y)$。 □

3.2 直积

定理 3.2. 若 G和 H 是图，则

$$M(G \times H; x, y) = \sum_{i_1 \le i_2} \sum_{j_1 \le j_2} m_{i_1,i_2}(G) m_{j_1,j_2}(H) \Big(x^{\min\{i_1 j_1, i_2 j_2\}} y^{\max\{i_1 j_1, i_2 j_2\}} + x^{\min\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} y^{\max\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} \Big). \tag{9}$$

证明。设 $g_1 g_2 \in E(G)$，其中 $\deg_G(g_1) = i_1 \le i_2 = \deg_G(g_2)$，并设 $h_1 h_2 \in E(H)$，其中 $\deg_H(h_1) = j_1 \le j_2 = \deg_H(h_2)$。根据直积的定义，边 $g_1 g_2$和 $h_1 h_2$在 $G \times H$中生成边 $(g_1, h_1)(g_2, h_2)$ 和 $(g_1, h_2)(g_2, h_1)$。由 (2)，第一条边的端点度为 $(i_1 j_1, i_2 j_2)$。因此，这条边对应于由无序对 $\{i_1 j_1, i_2 j_2\}$给出的度类型，我们将其记为 (a_1, b_1)，其中 $a_1 \le b_1$。类似地，第二条边的端点度为 $(i_1 j_2, i_2 j_1)$，因此它对应于由无序对 $\{i_1 j_2, i_2 j_1\}$给出的度类型，即 (a_2, b_2)，其中 $a_2 \le b_2$。

现在固定 (i_1, i_2) 和 (j_1, j_2)。在 G 中，端点度为 $\{i_1, i_2\}$ 的边有 $m_{i_1,i_2}(G)$ 条；在 H 中，端点度为 $\{j_1, j_2\}$ 的边有 $m_{j_1,j_2}(H)$ 条。因此，对于固定的 (i_1, i_2) 和 (j_1, j_2)，对 M-多项式的总贡献为

$$m_{i_1,i_2}(G) m_{j_1,j_2}(H) \left(x^{a_1} y^{b_1} + x^{a_2} y^{b_2} \right),$$

其中 $a_1 = \min\{i_1 j_1, i_2 j_2\}$、 $b_1 = \max\{i_1 j_1, i_2 j_2\}$、 $a_2 = \min\{i_1 j_2, i_2 j_1\}$，且 $b_2 = \max\{i_1 j_2, i_2 j_1\}$。对 G 中边的所有可能度类型 (i_1, i_2) 以及 H 中边的所有可能度类型 (j_1, j_2) 求和，即得所述公式。 □

由于 $i_1 \le i_2$和 $j_1 \le j_2$，我们可以将 $M = M(G \times H;\, x, y)$ 改写如下

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i_1 \le i_2} \sum_{j_1 \le j_2} m_{i_1,i_2}(G) m_{j_1,j_2}(H) \Big(x^{i_1 j_1} y^{i_2 j_2} + x^{\min\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} y^{\max\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} \Big) \\ &= \sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G) \Big(\sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{i_1 j_1} y^{i_2 j_2} + \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{\min\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} y^{\max\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} \Big) \\ &= \sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G) \Big(M(H; x^{i_1}, y^{i_2}) + \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{\min\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} y^{\max\{i_1 j_2, i_2 j_1\}} \Big). \end{aligned}$$

3.3 强积

为了推导强积的 M-多项式公式，需要进行一些准备。设G和 H为图。然后，我们可以将 $G \boxtimes H$的边集合划分为三类：位于 G-层中的边、位于 H-层中的边，以及其他边（直接类型的边）。我们分别作如下处理。

(1) 对于边 $g_1g_2 \in E(G)$ 和顶点 $h \in V(H)$，其中 $\deg_G(g_1) = i_1$、$\deg_G(g_2) = i_2$ 以及 $\deg_H(h) = j$，令 $d_1 = i_1 + j + i_1j$、$d_2 = i_2 + j + i_2j$ 以及

$$M^{(G)}(x, y) = \sum_j \sum_{i_1 \le i_2} n_j(H) m_{i_1,i_2}(G) x^{\min(d_1,d_2)} y^{\max(d_1,d_2)} . \tag{10}$$

(2) 对于边 $h_1h_2 \in E(H)$ 和顶点 $g \in V(G)$，其中 $\deg_H(h_1) = j_1$、$\deg_H(h_2) = j_2$ 以及 $\deg_G(g) = i$，令 $e_1 = i + j_1 + ij_1$、$e_2 = i + j_2 + ij_2$ 以及

$$M^{(H)}(x, y) = \sum_i \sum_{j_1 \le j_2} n_i(G) m_{j_1,j_2}(H) x^{\min(e_1,e_2)} y^{\max(e_1,e_2)} . \tag{11}$$

(3) 对于边 $g_1g_2 \in E(G)$ 和 $h_1h_2 \in E(H)$，其中 $\deg_G(g_1) = i_1$、$\deg_G(g_2) = i_2$、$\deg_H(h_1) = j_1$ 以及 $\deg_H(h_2) = j_2$，且 $i_1 \le i_2$ 和 $j_1 \le j_2$，令 $f_{11} = i_1 + j_1 + i_1j_1$、$f_{12} = i_1 + j_2 + i_1j_2$、$f_{21} = i_2 + j_1 + i_2j_1$、$f_{22} = i_2 + j_2 + i_2j_2$ 以及

$$M^{(\times)}(x, y) = \sum_{\substack{i_1 \le i_2 \\ j_1 \le j_2}} m_{i_1,i_2}(G) m_{j_1,j_2}(H) \Big(x^{\min(f_{11},f_{22})} y^{\max(f_{11},f_{22})} + x^{\min(f_{12},f_{21})} y^{\max(f_{12},f_{21})} \Big) . \tag{12}$$

上述求和是对无序度对进行的，因此 $i_1 \le i_2$ 与 $j_1 \le j_2$，以及 x 与 y 的幂始终使用 min 与 max 排序，以符合 M- 多项式约定 $i \le j$。经过这些准备，强积的主要结果如下所述。

定理 3.3. 若 G与 H 为图，则

$$M(G \boxtimes H; x, y) = M^{(G)}(x, y) + M^{(H)}(x, y) + M^{(\times)}(x, y) . \tag{13}$$

证明. 若 $(g, h) \in V(G \boxtimes H)$，则由 (3)，$\deg_{G\boxtimes H}(g, h) = \deg_G(g) + \deg_H(h) + \deg_G(g) \deg_H(h)$。如前所述，我们将 $E(G \boxtimes H)$划分为三个两两不相交集

$$E(G \boxtimes H) = E_G \dot\cup E_H \dot\cup E_\times , \tag{14}$$

其中 E_G 是位于 G层中的边的集合，E_H 是来自 H层的边的集合，而 $E_\times$ 是其余边（直接类型的边）的集合。我们现在考察这三部分各自对 M-多项式的贡献。

考虑一条边 $g_1g_2 \in E(G)$，其 $\deg_G(g_1) = i_1$ 且 $\deg_G(g_2) = i_2$，其中 $i_1 \le i_2$；再考虑一个顶点$h \in V(H)$，其 $\deg_H(h) = j$。然后，利用 (3)，边 $(g_1, h)(g_2, h)$ 贡献无序度对 $\{\min(d_1, d_2), \max(d_1, d_2)\}$，其中 $d_1 = i_1 + j + i_1j$ 且 $d_2 = i_2 + j + i_2j$。$m_{i_1,i_2}(G)$ 条边 g_1g_2 位于 G 中，其端点度为 $\{i_1, i_2\}$；此外，$n_j(H)$ 个顶点 h位于 H 中，度为 j。因此，E_G 中对应三元组 (i_1, i_2, j) 的边数为 $m_{i_1,i_2}(G)n_j(H)$，它们各自贡献相同的单项式 $x^{\min(d_1,d_2)}y^{\max(d_1,d_2)}$，该单项式出现在

M-多项式中。对 H 的所有 $i_1 \le i_2$ 和所有度 j 求和，可得对$M^{(G)}(x,\ y)$ 的贡献 (10)。

由强积的交换性可类似推知，来自 H 层的边对 $M^{(H)}(x,y)$ 的贡献为 (11)。

接下来考虑来自 $E_\times$ 的边。设 $g_1g_2 \in E(G)$ 和 $h_1h_2 \in E(H)$，其中 $\deg_G(g_1) = i_1$且 $\deg_G(g_2) = i_2$满足 $i_1 \le i_2$，并且 $\deg_H(h_1) = j_1$且 $\deg_H(h_2) = j_2$满足 $j_1 \le j_2$。由 (3) 得，

$$\begin{aligned}\deg(g_1,h_1) &= i_1 + j_1 + i_1j_1 = f_{11}, \quad \deg(g_1,h_2) = i_1 + j_2 + i_1j_2 = f_{12},\\ \deg(g_2,h_1) &= i_2 + j_1 + i_2j_1 = f_{21}, \quad \deg(g_2,h_2) = i_2 + j_2 + i_2j_2 = f_{22}.\end{aligned}$$

因此，边 $(g_1,h_1)(g_2,h_2)$ 的端点度为 (f_{11},f_{22})，并贡献无序对$\{\min(f_{11},f_{22}),\max(f_{11},f_{22})\}$；而边 $(g_1,h_2)(g_2,h_1)$ 的端点度为 (f_{12},f_{21})，并贡献无序对 $\{\min(f_{12},f_{21}),\max(f_{12},f_{21})\}$。

对于固定的 $i_1 \le i_2$ 和 $j_1 \le j_2$，端点度为$\{i_1,i_2\}$的 $g_1g_2 \in E(G)$ 有 $m_{i_1,i_2}(G)$ 种选择，端点度为 $\{j_1,j_2\}$的 $h_1h_2 \in E(H)$ 有 $m_{j_1,j_2}(H)$ 种选择。因此，来自 $E_\times$ 的边的总贡献为

$$\begin{aligned}M^{(\times)}(x,y) &= \sum_{i_1\le i_2}\sum_{j_1\le j_2}\Big[m_{i_1,i_2}(G)m_{j_1,j_2}(H)x^{\min(f_{11},f_{22})}y^{\max(f_{11},f_{22})}\\ &\qquad + m_{i_1,i_2}(G)m_{j_1,j_2}(H)x^{\min(f_{12},f_{21})}y^{\max(f_{12},f_{21})}\Big]\\ &= \sum_{i_1\le i_2}\sum_{j_1\le j_2} m_{i_1,i_2}(G)m_{j_1,j_2}(H)\Big(x^{\min(f_{11},f_{22})}y^{\max(f_{11},f_{22})} + x^{\min(f_{12},f_{21})}y^{\max(f_{12},f_{21})}\Big).\end{aligned}$$

将来自 E_G、 E_H 和 $E_\times$的贡献合并后，即得所需结果。 □

项 $M^{(G)}(x,y)$、 $M_{(H)}(x,y)$ 和 $M_{(\times)}(x,y)$ 也可以写成更紧凑的形式，下面将对此进行说明。由于 $i_1 \le i_2$ 和 $j_1 \le j_2$，我们有 $i_1+j+i_1j = d_1 \le d_2 = i_2+j+i_2j$、 $i + j_1 + ij_1 = e_1 \le e_2 = i + j_2 + ij_2$ 和 $i_1 + j_1 + i_1j_1 = f_{11} \le f_{22} = i_2 + j_2 + i_2j_2$。因此，可以写为

$$\begin{aligned}M^{(G)}(x,y) &= \sum_j\sum_{i_1\le i_2} n_j(H)m_{i_1,i_2}(G)x^{\min(d_1,d_2)}y^{\max(d_1,d_2)}\\ &= \sum_j n_j(H)\sum_{i_1\le i_2} m_{i_1,i_2}(G)x^{d_1}y^{d_2}\\ &= \sum_j n_j(H)\sum_{i_1\le i_2} m_{i_1,i_2}(G)x^{i_1+j+i_1j}y^{i_2+j+i_2j}\\ &= \sum_j n_j(H)x^jy^j\sum_{i_1\le i_2} m_{i_1,i_2}(G)x^{i_1(1+j)}y^{i_2(1+j)}\\ &= \sum_j n_j(H)x^jy^jM(G;x^{1+j},y^{1+j}).\end{aligned}$$

类似地,

$$M^{(H)}(x,y) = \sum_i n_i(G)x^iy^iM(H;x^{1+i},y^{1+i}).$$

此外，令 $Z = M^{(\times)}(x, y)$，我们可以如下计算：

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{i_1 \le i_2} \sum_{j_1 \le j_2} m_{i_1,i_2}(G) m_{j_1,j_2}(H) \Big(x^{\min(f_{11},f_{22})} y^{\max(f_{11},f_{22})} + x^{\min(f_{12},f_{21})} y^{\max(f_{12},f_{21})} \Big) \\
&= \sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G) \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) \Big(x^{f_{11}} y^{f_{22}} + x^{\min(f_{12},f_{21})} y^{\max(f_{12},f_{21})} \Big) \\
&= \sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G) \Big(\sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{i_1+j_1+i_1 j_1} y^{i_2+j_2+i_2 j_2} + \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{\min(f_{12},f_{21})} y^{\max(f_{12},f_{21})} \Big) \\
&= \sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G) \Big(x^{i_1} y^{i_2} \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{j_1(1+i_1)} y^{j_2(1+i_2)} + \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{\min(f_{12},f_{21})} y^{\max(f_{12},f_{21})} \Big) \\
&= \sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G) \Big(x^{i_1} y^{i_2} M(H; x^{1+i_1}, y^{1+i_2}) + \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H) x^{\min(f_{12},f_{21})} y^{\max(f_{12},f_{21})} \Big).
\end{aligned}
$$

笛卡尔积度恒等式 (1) 可由强积度恒等式 (3) 去掉乘性项得到，因此 $M(G \,\square\, H;\, x, y)$ 可按如下方式从 $M(G \boxtimes H;\, x, y)$ 恢复。

推论 3.4. 若 G与 H 为图，则

$$M(G \,\square\, H; x, y) = M_{\square}^{(G)}(x, y) + M_{\square}^{(H)}(x, y),$$

其中

$$
\begin{aligned}
M_{\square}^{(G)}(x, y) &= \sum_{j} \sum_{i_1 \le i_2} n_j(H) m_{i_1,i_2}(G) x^{\min(i_1+j, i_2+j)} y^{\max(i_1+j, i_2+j)}, \\
M_{\square}^{(H)}(x, y) &= \sum_{i} \sum_{j_1 \le j_2} n_i(G) m_{j_1,j_2}(H) x^{\min(j_1+i, j_2+i)} y^{\max(j_1+i, j_2+i)}.
\end{aligned}
$$

证明。 从定理 3.3 的证明出发，并去掉直接邻接条件。此时顶点度满足不含乘性项的 (1)。将该度代入 M 多项式求和公式，恰好得到上文所示的两个表达式。由于不出现直接边，因此没有 $M^{(\times)}$ 项。 □

相比之下，直积 $G \times H$ 不能通过对定理 3.3 的直接特化得到。尽管 $G \times H$ 仅使用直接邻接机制（即仅边类 $E_{\times}$ 保留），直积中的顶点度满足的是不同的恒等式 (2)，而非 (3)。由于 M-多项式依赖于最终图中端点的度，必须按直积度规则重新计算端点度；因此，直积推论并不能仅通过舍弃项而由定理 3.3 推出。

3.4 字典序积

定理 3.5. 若 G与 H 是图，则

$$
\begin{aligned}
M(G[H]; x, y) = &\sum_{i} \sum_{j_1 \le j_2} n_i(G)\, m_{j_1,j_2}(H)\, x^{\,j_1 + i \cdot n_H}\, y^{\,j_2 + i \cdot n_H} \\
&+ \sum_{i_1 \le i_2} \sum_{j_1 \le j_2} m_{i_1,i_2}(G)\, n_{j_1}(H)\, n_{j_2}(H)\, x^{\,j_1 + i_1 \cdot n_H}\, y^{\,j_2 + i_2 \cdot n_H}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

证明。 首先考虑来自 G-层的边。固定一个顶点 $g \in G$，其中 $i = \deg_G(g)$。每条度为(j_1, j_2)的边 $h_1h_2 \in E(H)$给出边$(g, h_1)(g, h_2)$，其端点度为$(j_1 + i \cdot n_H, j_2 + i \cdot n_H)$。因此，来自 H-层的边总共贡献

$$\sum_i \sum_{j_1 \le j_2} n_i(G)\, m_{j_1,j_2}(H)\, x^{j_1+i\cdot n_H} y^{j_2+i\cdot n_H}\,.$$

$G[H]$ 的其他边连接来自不同 H层的顶点。设 $g_1g_2 \in E(G)$，其中$i_1 = 度_G(g_1)$且 $i_2 = 度_G(g_2)$，并设 h_1, $h_2 \in V(H)$。那么，边$(g_1,\ h_1)(g_2,\ h_2)$的端点度分别为 $j_1 + i_1 \cdot n_H$和 $j_2 + i_2 \cdot n_H$。因此，这类边的贡献为

$$\sum_{i_1 \le i_2} \sum_{j_1 \le j_2} m_{i_1,i_2}(G)\, n_{j_1}(H) n_{j_2}(H)\, x^{j_1+i_1\cdot n_H} y^{j_2+i_2\cdot n_H}.$$

将这两项贡献相加，即得所述公式。 □

字典序积的 M-多项式也可以表示为以下紧凑形式。

推论 3.6。 若 G和 H 是图，则

$$M(G[H]; x, y) = M(H; x, y)\, D_G\big((xy)^{n_H}\big) \;+\; M\big(G; x^{n_H}, y^{n_H}\big)\, D_H(x)\, D_H(y)\,. \tag{16}$$

证明。 我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_i \sum_{j_1 \le j_2} n_i(G)\, m_{j_1,j_2}(H)\, x^{j_1+i\cdot n_H} y^{j_2+i\cdot n_H} \\
&\quad = \sum_i n_i(G)(xy)^{i\cdot n_H} \sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H)\, x^{j_1} y^{j_2} \\
&\quad = \Big(\sum_{j_1 \le j_2} m_{j_1,j_2}(H)\, x^{j_1} y^{j_2}\Big)\Big(\sum_i n_i(G)\,(xy)^{i\cdot n_H}\Big) \\
&\quad = M(H; x, y)\, D_G\big((xy)^{n_H}\big).
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1 \le i_2} \sum_{j_1 \le j_2} m_{i_1,i_2}(G)\, n_{j_1}(H) n_{j_2}(H)\, x^{j_1+i_1 n_H} y^{j_2+i_2 n_H} \\
&\quad = \sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G)\, x^{i_1 n_H} y^{i_2 n_H} \sum_{j_1} n_{j_1}(H) x^{j_1} \sum_{j_2} n_{j_2}(H) y^{j_2} \\
&\quad = \Big(\sum_{i_1 \le i_2} m_{i_1,i_2}(G)\,(x^{n_H})^{i_1}(y^{n_H})^{i_2}\Big)\Big(\sum_{j_1} n_{j_1}(H) x^{j_1}\Big)\Big(\sum_{j_2} n_{j_2}(H) y^{j_2}\Big) \\
&\quad = M\big(G; x^{n_H}, y^{n_H}\big)\, D_H(x)\, D_H(y).
\end{aligned}$$

将这两项贡献相加，即得所声称的公式。 □

3.5 对称差积

接下来考虑图 G 与 H的对称差积 $G \oplus H$ 。若 $g \in V(G)$且$h \in V(H)$，其中$\deg_G(g) = i$ 且$\deg_H(h) = j$，则由(5)，

$$\deg_{G\oplus H}(g,h) = i(n_H - j) + j(n_G - i) = i \cdot n_H + j \cdot n_G - 2ij. \tag{17}$$

由于该值与选取 G 中一个度为 i 的顶点以及 H 中一个度为 j的顶点无关，我们令

$$\delta_{\oplus}^{G\oplus H}(i,j) \;=\; \deg_{G\oplus H}(g,h)\,.$$

如果从上下文中可以明确 G 和 H ，我们可以将记号 $\delta_{\oplus}^{G\oplus H}(i,j)$简化为 $\delta_{\oplus}(i,j)$。

定理 3.7. 如果 G 和 H 是图，则

$$\begin{aligned} M(G\oplus H;x,y) = &\sum_{i\le i'}\sum_{j,j'} m_{i,i'}(G)\widehat{m}_{j,j'}(H)x^{\min\{\delta_\oplus(i,j),\delta_\oplus(i',j')\}}y^{\max\{\delta_\oplus(i,j),\delta_\oplus(i',j')\}} \\ &+\sum_{j\le j'}\sum_{i,i'} m_{j,j'}(H)\widehat{m}_{i,i'}(G)x^{\min\{\delta_\oplus(i,j),\delta_\oplus(i',j')\}}y^{\max\{\delta_\oplus(i,j),\delta_\oplus(i',j')\}}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

证明。 在 $G \oplus H$中，两个不同的顶点(g,h)与(g',h')相邻，如果 $gg' \in E(G)$与 $hh' \in E(H)$中恰好有一个成立。

首先假设 $gg' \in E(G)$且 $hh' \notin E(H)$，其中边 gg' 的端点的度为(i,i')， hh'的端点的度为(j,j')。$G \oplus H$的边$(g,h)(g',h')$的端点的度为 $\delta_\oplus(i,j)$和 $\delta_\oplus(i',j')$。这样的有序对(h,h')的数目为$\widehat{m}_{j,j'}(H)$，并且对 gg'有$m_{i,i'}(G)$种选择。这给出了(18)的第一个求和。由对称性，当 $gg' \notin E(G)$且 $hh' \in E(H)$时得到第二个求和。对所有边将 $x^{\min}y^{\max}$ 求和即得所述公式。

□

接下来，我们将证明 $\widehat{m}_{i,\,j}(G)$ 可以表示为补图的 M-多项式的经典系数。这个关系使得定理 3.7 可以完全用经典度型数重新表述。为陈述这一重新表述，我们首先定义示性函数如下:

$$\mathbf{1}_{\{i=j\}} := \begin{cases} 1; & i = j, \\ 0; & i \neq j. \end{cases}$$

命题 3.8。若 G 是一个图，且 i 和 j 是 G 中某些顶点的度，则

$$\widehat{m}_{i,j}(G) = 2m_{n_G-1-i,\,n_G-1-j}(\overline{G}) + \mathbf{1}_{\{i=j\}}n_i(G). \tag{19}$$

证明。固定 i和 j，并考虑集合

$$S_{i,j} = \{(g_1,g_2) \in V(G)^2 :\; g_1g_2 \notin E(G),\; (\deg_G(g_1),\deg_G(g_2)) = (i,j)\}.$$

将 $S_{i,\,j}$ 拆分为不相交子集 $S_{i\,,\,j}^{\neq} = \{(g_1,\;\; g_2) \in S_{i,\,j} :\;\; g_1 \neq g_2\}$ 和 $S_{i\,,\,j}^{=} = \{(g_1,\;\; g_2) \in S_{i,\,j}\}$。

首先考虑 $g_1 \neq g_2$ 的情况。对于 $(g_1,\;\; g_2) \in S_{i\,,\,j}^{\neq}$，条件 $g_1g_2 \notin E(G)$ 等价于 $g_1g_2 \in E(G)$。此外，对于每个顶点 g_1，

$$\deg_{\overline{G}}(g_1) = n_G - 1 - \deg_G(g_1),$$

因此，$(\deg_G(g_1),\ \deg_G(g_2)) = (i,\ j)$ 等价于 $(\deg_G(g_1),\ \deg_{\overline{G}}(g_2)) = (n_G-1-i,\ n_G-1-j)$。由此，度类型为 $\{n_G-1-i,\ n_G-1-j\}$ 的无序边 $\{g_1,g_2\}\in E(G)$ 与 $S_{i,\,j}^{\neq}$ 中的有序元素对 (g_1,g_2) 和 $(g_2,\ g_1)$ 一一对应。因此，

$$|S_{i,j}^{\neq}| = 2m_{n_G-1-i,\,n_G-1-j}(\overline{G}).$$

其次考虑情形 $g_1=g_2$。我们有 $(g_1,g_2)\in S_{i,\,j}^{=}$ 当且仅当 $i=j=\deg_G(g_1)$。因此 $|S_{i,\,j}^{=}| = \mathbf{1}_{\{i=j\}}n_i(G)$。

将两种情形相加，即得所述的 (19)。 □

3.6 析取积

在图 G 和 H 的析取积 $G\vee H$ 中，若 $g\in V(G)$ 的 $\deg_G(g)$ 为 $=i$，且 $h\in V(H)$ 的 $\deg_H(h)$ 为 $=j$，则由 (6) 得，

$$\deg_{G\vee H}(g,h) = i\cdot n_H + j\cdot n_G - ij.$$

令

$$\delta_{\vee}^{G\vee H}(i,j) \;=\; \deg_{G\vee H}(g,h)\,.$$

当上下文中 G 和 H 明确时，我们可以将记号 $\delta_{\vee}^{G\vee H}(i,j)$ 简写为 $\delta_{\vee}(i,j)$。

定理 3.9. 若 G 与 H 为图，则

$$\begin{aligned} M(G\vee H;x,y) = &\sum_{i\le i'}\sum_{j,j'} m_{i,i'}(G)n_j(H)n_{j'}(H)x^{\min\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}}y^{\max\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}} \\ &+\sum_{j\le j'}\sum_{i,i'} m_{j,j'}(H)n_i(G)n_{i'}(G)x^{\min\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}}y^{\max\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}} \\ &-\sum_{i\le i'}\sum_{j\le j'} m_{i,i'}(G)m_{j,j'}(H)\Big(x^{\min\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}}y^{\max\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}} \\ &\qquad + x^{\min\{\delta_\vee(i,j'),\delta_\vee(i',j)\}}y^{\max\{\delta_\vee(i,j'),\delta_\vee(i',j)\}}\Big). \end{aligned} \tag{20}$$

证明. 由 $G\vee H$ 的定义，我们有 $E(G\vee H) = E_A\cup E_B$，其中

$$\begin{aligned} E_A &= \big\{\{(g,h),(g',h')\}:\ gg'\in E(G)\big\}, \\ E_B &= \big\{\{(g,h),(g',h')\}:\ hh'\in E(H)\big\}. \end{aligned}$$

此外，

$$E_A\cap E_B = \big\{\{(g,h),(g',h')\}:\ gg'\in E(G), hh'\in E(H)\big\}.$$

现固定一条边 $gg'\in E(G)$，其在 G 中的端点度为 (i,i')（其中 $i\le i'$）。在 E_A 中，第二坐标是任意的，因此对任意选取的 h、$h'\in V(H)$，满足 $\deg_H(h)=j$ 且 $\deg_H(h')=j'$，无序对 $\{(g,h),(g',h')\}$ 是 E_A 的一条边。此类选取的数目为 $n_j(H)n_{j'}(H)$。对每一条这样的边，其在 $G\vee H$ 中的端点度为 $\delta_\vee(i,j)$ 与 $\delta_\vee(i',j')$，故其M-单项式为

$$x^{\min\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}}y^{\max\{\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\}}.$$

对 G 中所有类型为 (i,i') 的边求和（这样的边共有 $m_{i,i'}(G)$ 条），并对所有 (j,j') 求和，恰好得到陈述中的第一个二重和，即 $M_A=\sum_{e\in E_A}x^{\min}y^{\max}$。由对称性，固定一条边 $hh'\in E(H)$ 即得到第二个和。

接下来考虑交集 $E_A \cap E_B$ 的贡献。固定一条类型为 (i,i') 的边 $gg' \in E(G)$，以及一条类型为 (j,j') 的边 $hh' \in E(H)$。在 $E_A \cap E_B$ 中，由这两条边生成的不同边恰好有两条：

$$\{(g,h),(g',h')\} \quad \text{and} \quad \{(g,h'),(g',h)\}.$$

（它们不同，因为 $h \neq h'$ 和 $g \neq g'$。）它们在 $G \vee H$ 中的端点度数对为

$$\big(\delta_\vee(i,j),\delta_\vee(i',j')\big) \quad \text{and} \quad \big(\delta_\vee(i,j'),\delta_\vee(i',j)\big),$$

因此，它们的 M-单项式就是第三个求和式括号中的两项。选择底层边 gg' 和 hh' 有 $m_{i,i'}(G)m_{j,j'}(H)$ 种方式，因此对所有 (i,i') 和 (j,j') 求和可得

$$M_I = \sum_{e \in E_A \cap E_B} x^{\min} y^{\max},$$

这等于陈述中的第三个（被减去的）求和式。

由于 $E(G \vee H) = E_A \cup E_B$ 和 E_A, E_B 都是有限的，

$$\sum_{e \in E(G\vee H)} x^{\min} y^{\max} = \sum_{e \in E_A} x^{\min} y^{\max} + \sum_{e \in E_B} x^{\min} y^{\max} - \sum_{e \in E_A \cap E_B} x^{\min} y^{\max},$$

也就是说，$M(G \vee H;\, x,y) = M_A + M_B - M_I$，这正是所要证明的公式。 □

3.7 谢尔宾斯基积

定理 3.10. 若 G 和 H 是图，且 $f\colon V(G) \to V(H)$，则

$$M(G \otimes_f H; x, y) = M^{(\text{inner})}(x,y) + M^{(\text{conn})}(x,y)\,, \tag{21}$$

其中

$$M^{(\text{inner})}(x,y) = \sum_{g \in V(G)} \sum_{\{h,h'\} \in E(H)} x^{\min\{d_{g,h},\, d_{g,h'}\}}\, y^{\max\{d_{g,h},\, d_{g,h'}\}}\,, \tag{22}$$

$$M^{(\text{conn})}(x,y) = \sum_{\{g,g'\} \in E(G)} x^{\min\{d_{g,f(g')},\, d_{g',f(g)}\}}\, y^{\max\{d_{g,f(g')},\, d_{g',f(g)}\}}, \tag{23}$$

且 $d_{u,v} = 度^{G \otimes_f H}(u,v)$ 对所有 $(u,v) \in V(G \otimes_f H)$ 均成立。

证明. 根据谢尔宾斯基积的定义，$E(G \otimes_f H)$ 是 E_{inner} 和 E_{conn} 的不交并，其中

$$E_{\text{inner}} = \big\{\{(g,h),(g,h')\} : g \in V(G),\ \{h,h'\} \in E(H)\big\},$$
$$E_{\text{conn}} = \big\{\{(g,f(g')),(g',f(g))\} : \{g,g'\} \in E(G)\big\}.$$

根据标准对称定义，

$$M(G \otimes_f H; x, y) = \sum_{\{u,v\} \in E(G \otimes_f H)} x^{\min\{\deg_{G\otimes_f H}(u),\deg_{G\otimes_f H}(v)\}}\, y^{\max\{\deg_{G\otimes_f H}(u),\deg_{G\otimes_f H}(v)\}}\,. \tag{24}$$

由于 $E(G \otimes_f H)$ 是 E_{inner} 和 E_{conn} 的不交并，因此我们有

$$M(G \otimes_f H; x, y) = \sum_{\{u,v\} \in E_{\text{inner}}} x^{\min\{\deg_{G\otimes_f H}(u), \deg_{G\otimes_f H}(v)\}} y^{\max\{\deg_{G\otimes_f H}(u), \deg_{G\otimes_f H}(v)\}} + \sum_{\{u,v\} \in E_{\text{conn}}} x^{\min\{\deg_{G\otimes_f H}(u), \deg_{G\otimes_f H}(v)\}} y^{\max\{\deg_{G\otimes_f H}(u), \deg_{G\otimes_f H}(v)\}}.$$

回顾一下， $G \otimes_f H$ 中的度由式 (7) 给出。一条内部边的形式为 $\{(g,h), (g,h')\}$，其中$\{h,h'\} \in E(H)$。因此，其单项式贡献等于

$$x^{\min\{d_{g,h}, d_{g,h'}\}} y^{\max\{d_{g,h}, d_{g,h'}\}}.$$

对所有 $g \in V(G)$ 和所有 $\{h,h'\} \in E(H)$ 求和，得到 $M^{(\text{inner})}(x,y)$。

对应于 $\{g,g'\} \in E(G)$ 的一条连接边形式为 $\{(g, f(g')), (g', f(g))\}$。因此，其单项式贡献等于

$$x^{\min\{d_{g,f(g')}, d_{g',f(g)}\}} y^{\max\{d_{g,f(g')}, d_{g',f(g)}\}}.$$

对所有 $\{g,g'\} \in E(G)$ 求和，得到 $M^{(\text{conn})}(x,y)$。

因此， $M(G \otimes_f H;\ x,y) = M^{(\text{内部})}(x,y) + M^{(\text{conn})}(x,y)$。 □

4 路径的积

为说明上一节中的公式，我们在此考虑路径的积。除非另有说明，否则假设所考虑的路径阶数至少为三。对于路径 P_n $(n \geq 3)$ 本身，显然有

$$D_{P_n}(t) = 2t + (n-2)t^2\,,$$
$$M(P_n; x, y) = 2xy^2 + (n-3)x^2y^2\,.$$

我们按照上一节中的相同顺序考虑路径的积 .

- **笛卡尔积**。对于网格图 $P_m \,\square\, P_n$，利用定理 3.1，我们得到

$$M(P_m \,\square\, P_n; x, y) = \big(2xy + (m-2)(xy)^2\big)\big(2xy^2 + (n-3)x^2y^2\big) + \big(2xy + (n-2)(xy)^2\big)\big(2xy^2 + (m-3)x^2y^2\big)\,.$$

- **直积**。由于 $m_{1,\,2}(P_m) = 2$ 和 $m_{2,\,2}(P_m) = m-3$，定理 3.2 得出

$$M(P_m \times P_n; x, y) = 4xy^4 + 4x^2y^2 + 4(m+n-6)x^2y^4 + 2(m-3)(n-3)x^4y^4.$$

- **强积**。对于王图 $P_m \boxtimes P_n$，利用定理 3.3 可得

$$M(P_m \boxtimes P_n; x, y) = 8x^3y^5 + 4x^3y^8 + 2(m+n-4)x^5y^5 + (6m+6n-32)x^5y^8 + (4mn - 11m - 11n + 30)x^8y^8.$$

• **字典序积**。根据推论 3.6，有

$$M(P_m[P_n];x,y)=\big(2xy^2+(n-3)x^2y^2\big)\Big(2(xy)^n+(m-2)(xy)^{2n}\Big)+\Big(2x^ny^{2n}+(m-3)x^{2n}y^{2n}\Big)\Big(2x+(n-2)x^2\Big)\Big(2y+(n-2)y^2\Big).$$

Thus

$$\begin{aligned}M(P_m[P_n];x,y)=&\,4x^{n+1}y^{n+2}+2(m-2)x^{2n+1}y^{2n+2}+2(n-3)x^{n+2}y^{n+2}\\&+(n-3)(m-2)x^{2n+2}y^{2n+2}\\&+8x^{n+1}y^{2n+1}+4(n-2)x^{n+1}y^{2n+2}+4(n-2)x^{n+2}y^{2n+1}\\&+2(n-2)^2x^{n+2}y^{2n+2}\\&+4(m-3)x^{2n+1}y^{2n+1}+2(m-3)(n-2)x^{2n+1}y^{2n+2}\\&+2(m-3)(n-2)x^{2n+2}y^{2n+1}\\&+(m-3)(n-2)^2x^{2n+2}y^{2n+2}.\end{aligned}$$

• **对称差积**。根据定理 3.7，我们有

$$\begin{aligned}M(P_m\oplus P_n;x,y)=&\,8x^Ay^B+8x^Ay^C+4(m+n-6)x^Ay^D\\&+4(m+n-6)x^{\min\{B,C\}}y^{\max\{B,C\}}\\&+\Big(2n^2-12n+20+4(m-3)(n-3)\Big)x^{\min\{B,D\}}y^{\max\{B,D\}}\\&+\Big(2m^2-12m+20+4(m-3)(n-3)\Big)x^{\min\{C,D\}}y^{\max\{C,D\}}\\&+4(m-3)x^Cy^C+4(n-3)x^By^B\\&+\Big((m-3)(n^2-6n+10)+(n-3)(m^2-6m+10)\Big)x^Dy^D,\end{aligned}$$

其中 $A:=\delta_{\oplus}^{P_m\oplus P_n}(1,\ 1)=m+n-2$，$B:=\delta_{\oplus}^{P_m\oplus P_n}(1,\ 2)=n+2m-4$，$C:=\delta_{\oplus}^{P_m\oplus P_n}(2,\ 1)=m+2n-4$，以及 $D:=\delta_{\oplus}^{P_m\oplus P_n}(2,\ 2)=2m+2n-8$。

• **析取积**。根据定理 3.9，我们有

$$\begin{aligned}M(P_m\vee P_n;x,y)=&\,8x^Ay^B+8x^Ay^C+4(m+n-5)x^Ay^D\\&+4(m+n-5)x^{\min\{B,C\}}y^{\max\{B,C\}}\\&+\big(4mn-12m+2n^2-20n+44\big)x^By^D\\&+\big(2m^2+4mn-20m-12n+44\big)x^Cy^D\\&+4(n-3)x^By^B+4(m-3)x^Cy^C\\&+\big(m^2n+mn^2-10mn-3m^2-3n^2+22m+22n-42\big)x^Dy^D,\end{aligned}$$

其中 $A:=\delta_{\vee}(1,\ 1)=m+n-1$，$B:=\delta_{\vee}(1,\ 2)=2m+n-2$，$C:=\delta_{\vee}(2,\ 1)=m+2n-2$，以及 $D:=\delta_{\vee}(2,\ 2)=2m+2n-4$。

• **谢尔宾斯基积**。利用定理 3.10，我们确定函数 f 在两种基本情形下的谢尔宾斯基积的 M-多项式。

1. 常值映射。 假设对所有 $i \in [m]$, $f(i) = 1$。那么

$$M(P_m \otimes_f P_n; x, y) = mxy^2 + \big(m(n-3)+2\big)x^2y^2 + mx^2y^3 + (m-3)x^3y^3.$$

2. 恒等映射：假设对所有 $i \in [m]$, $m \le n$ 与 $f(i) = i$。则

$$M(P_m \otimes_f P_n; x, y) = a_{1,2}xy^2 + a_{1,3}xy^3 + a_{2,2}x^2y^2 + a_{2,3}x^2y^3 + a_{3,3}x^3y^3,$$

其中系数由下式给出

$$(a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,3}) = \begin{cases} \big(2m-6, 4, m^2-7m+14, 4m-10, m-3\big), & n = m, \\ \big(2m-4, 3, m^2-6m+10, 4m-8, m-2\big), & n = m+1, \\ \big(2m-3, 2, mn-7m+9, 4m-7, m-2\big), & n \ge m+2. \end{cases}$$

5 结论与展望

本文建立了一个系统框架，用于在图乘积下计算 M-多项式，其中积的顶点集是其因子的顶点集的笛卡尔积。利用顶点度的公式，我们推导了相应 M-多项式 $M(G * H; x, y)$ 的显式表达式，并在可能的情况下，得到了用 $M(G; x, y)$、 $M(H; x, y)$ 以及度多项式 D_G与 D_H 表示的紧凑因式分解。特别地，笛卡尔积与字典序积具有优美的紧凑形式，可将整体计算归结为低维度多项式的代入与积。

如前所述，迄今为止关于 M-多项式的大多数论文都聚焦于特定类别的图和特定的化学分子。然而，要更一般地理解该多项式，无疑仍需进一步研究。这包括对系数、根和递归结构的研究。

从我们的研究角度来看，进一步研究其他图运算无疑是有意义的。从这一角度而言，局部运算的前景似乎不大，因为它们通常只会略微改变 M-多项式。另一方面，还有一些“非积”全局运算，例如联、分层积、冠积和膨胀图，从 M-多项式的角度来看都很有趣。

数据可用性声明

由于本研究未创建或分析任何新数据，本文不适用数据共享。

利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

致谢

Sandi Klavžar 获斯洛文尼亚研究与创新局（ARIS）资助，资助项目编号为 P1-0297、N1-0285、N1-0355、N1-0431、J1-70045。

参考文献

[1]Abubakar, M. S.、Aremu, K. O.、Aphane, M. 和 Siddiqui, M. K. 通过邻域M-多项式探究寡聚噻吩树枝状大分子的拓扑指标。*RAIRO-运筹学 59*，1（2025），149–161。[2] Akhbari, M. H.、Movahedi, F.、Zameni, M. 和 Shahavi, M. H. 利用拓扑指标和M-多项式构建阿尔茨海默病药物的QSPR模型：一项计算研究。《科学报告》*16* （2025），论文编号1900。[3] Akhter, S. 和 Imran, M. 强积图的基于度的拓扑描述符。《加拿大化学杂志》*94*，6（2016），559–565。[4] Akhter, S. 和 Imran, M. 计算图的四种运算的遗忘拓扑指标。《*AKCE*国际图论与组合学杂志》*14*，1（2017），70–79。[5]Ali, N.、Kousar, Z.、Safdar, M.、Tolasa, F. T. 和 Suleiman, E. 连通模式映射：冠积图的基于度的拓扑指标。《应用数学杂志》*2023* （2023），1–10。[6] Behmaram, A.、Yousefi-Azari, H. 和 Ashrafi, A. 关于基于距离的多项式的一些新结果。《*MATCH*数学与计算机化学通讯》*65*，1（2011），39–50。[7] Chamua, M.、Moran, R.、Pegu, A. 和 Bharali, A. 某些简明药物结构的M-多项式和邻域M-多项式：阿扎胞苷、地西他滨和胍西他滨。《分子结构杂志》*1263* （2022），论文编号133197。[8] Das, S. 和 Barman, J. 关于图的椭圆型指标的M-多项式封闭导出公式。《伊朗数学化学杂志》*16*，4（2025），291–312。[9] De, N.、Nayeem, S. M. A. 和 Pal, A. 某些图运算的F-指数。《离散数学、算法与应用》*08*，02（2016），论文编号1650025。[10] Dearden, J. C. *QSPR*和定量构效关系中拓扑指标的使用。施普林格国际出版公司，Cham，2017。[11] Deutsch, E. 和 Klavžar, S. M-多项式和基于度的拓扑指标。《伊朗数学化学杂志》*6*，2（2015），93–102。[12] Deutsch, E. 和 Klavžar, S. M-多项式再探：贝特仙人掌图与Gutman方法的扩展。《应用数学与计算杂志》*60*，1（2019），253–264。[13] Deutsch, E.、Klavžar, S. 和 Romih, G. D. 如何计算（化学）图的M-多项式。《*MATCH*数学与计算机化学通讯》*89*，2（2023），275–285。[14] Gutman, I. 和 Polansky, O. E. 《有机化学中的数学概念》。施普林格柏林，海德堡，2012。

[15] Hammack, R. H., Imrich, W., 和 Klavžar, S. 乘积图手册。第二版，CRC出版社，博卡拉顿，2011年。[16] Hamzeh, A., Hossein-Zadeh, S., 和 Ashrafi, A. 复合图的 y-维纳指数。《应用数学快报》*24*，第7期（2011年），1099–1104。[17] Harary, F., 和 Wilcox, G. W. 图上的布尔运算。《斯堪的纳维亚数学》*20*，第1期（1967年），41–51。[18] Henning, M. A., Klavžar, S., 和 Yero, I. G. 图的谢尔宾斯基积中的可分辨性与凸性性质。《地中海数学杂志》*21*，第1期（2024年）。第3号论文。[19] Ishfaq, F., 和 Nadeem, M. F. 通过 M-多项式研究分形的拓扑性质。《阿拉伯数学杂志》*13*，第2期（2024年），303–317。[20] Jafarpour-Golzari, R. 图中顶点的度多项式及其在图运算下的表现。《查理大学数学评论》*63*，第4期（2022年），397– 413。[21] Khalifeh, M., Yousefi-Azari, H., 和 Ashrafi, A. 图运算的超维纳指数。《计算机与应用数学》*56*，第5期（2008年），1402–1407。[22] Khalifeh, M., Yousefi-Azari, H., 和 Ashrafi, A. 若干图运算的第一和第二 Zagreb 指数。《离散应用数学》*157*，第4期（2009年），804–811。[23] Kovič, J., Pisanski, T., Zemljič, S. S., 和 Žitnik, A. 图的谢尔宾斯基积。《当代数学艺术》 *23*，第 1 期（ 2022 年），论文编号 # P1.01。[24] Kumar, V., 和 Das, S. 一种通过 M-多项式计算 Sombor 型指数的新方法。《应用数学与计算杂志》*71*，第1期（2025年），983–1007。[25] Kwun, Y. C., Munir, M., Nazeer, W., Rafique, S., 和 Min Kang, S. V-亚苯基纳米管和纳米环面的 M-多项式与拓扑指标。《科学报告》*7*，第1期（2017年），论文编号 8756。[26] Li, X., Ghods, M., Kheirkhahan, N., 和 Shafi, J. 基于 M-多项式的机器学习模型，用于预测抗生素的物理化学性质。《*PLOS ONE*》*20*，第12期（2025年），论文编号 e0338093。[27] Mohamadinezhad-Rashti, H., 和 Yousefi-Azari, H. 关于图运算的细谷多项式的一些新结果。《伊朗数学化学杂志》*1*，第2期（2010年），37–43。[28] Pradeepa, A., 和 Arathi, P. 使用 M-多项式和邻域M-多项式计算凯库勒烯若干镶嵌的基于度的拓扑描述符。《多环芳香化合物》*45*，第1期（2025年），36–59。[29] Sagan, B. E., Yeh, Y.-N., 和 Zhang, P. 图的维纳多项式。《国际量子化学杂志》*60*，第5期（1996年），959–969。

[30] Stevanović, D. 复合图的细谷多项式。离散数学 *235*，第1期（2001年），237–244。[31] Tian, J., 和 Klavžar, S. 一般位置集、共线集与谢尔宾斯基积图。组合学年鉴 *29*，第3期（2025年），837–852。[32] Trinajstić, N. 化学图论。CRC出版社，2018。[33] Yeh, Y.-N., 和 Gutman, I. 复合图中所有距离之和。离散数学 *135*，第1期（1994年），359–365。