$\mathrm{RO}(C_p \times C_p)$-分次万有空间上同调与系数环

苏罗吉特·戈什与安基特·库马尔

Abstract. 我们计算与子群族相关联的等变万有空间及分类空间的 RO($C_p \times C_p$)-分次布雷登上同调，系数取常值 Mackey 函子 $\mathbb{F}_p$。由此得到所得系数环的显式描述，包括其乘法结构。这些计算随后被应用于借助等变复射影空间的布雷登上同调来研究上同调运算的提升。

arXiv:2603.10626v1 [math.AT] 11 Mar 2026

0. Introduction

等变稳定同伦论研究带有群作用的空间与谱，旨在理解相应的等变（上）同调理论。与经典的非等变情形不同，等变上同调自然地由有限群 G 的实表示环 RO(G) 分次。其计算揭示了由不动点、转移和范数产生的新代数结构。RO(G)-分次布雷登上同调的显式描述仍然稀少，其确定构成该领域的一个核心问题。

一个自然的出发点是系数环的计算，即带常值 Mackey 函子系数的点的布雷登上同调。对于 $G = C_p$，这些结果在 Stong 与 Lewis 的经典工作中得以确立 [22]。随后的进展包括 $G = C_{pq}$ 的等变上同调的加法结构，其中同时使用 A 与 $\mathbb{Z}$-系数 [4], ,_以及对无平方因子阶循环群的计算，这些计算确定了乘法结构的大部分 [6]。对于一般循环群，上同调环的若干选定分次部分在 [3]中得到。这些工作依赖于 Tate 方形 [14], 、几何不动点的计算、布雷登上同调技术以及不动点方法等工具。它们共同指向一个普遍挑战：将关于系数环的认识扩展到循环群之外。

对于克莱因四元群 $C_2 \times C_2$（下文记作 $\mathcal{K}_4$），其上同调群已在 [18], 中计算，而 $\pi_\star H\mathbb{F}_2$ 正锥的麦基函子结构和环结构则已在 [10]中确定。本文通过 Tate 方形推进这一研究计划，确定 $C_p \rtimes C_p$（对于 $p = 2$ 和奇素数 p）的系数环的乘法结构。我们的方法依赖于对进入 Tate 方形的万有空间的布雷登上同调进行细致分析。除了直接的计算作用外，这些万有空间本身也具有

日期：2026年3月12日。2020 数学主题分类。 55N91, 55P91（主要）； 57S17, 55Q91（次要）。关键词与短语。 等变同伦论，万有空间，麦基函子。1

独立的研究价值，因为它们控制着等变同伦论中幂运算的结构。

这一视角与等变 E_∞-环谱上的幂运算直接相关。对于 N_∞-歌剧，幂运算群由对称群的等变分类空间的 E-上同调所支配。特别是，针对 $H\mathbb{F}_p$和 MU^G、以 G 为有限阿贝尔群的情形，对幂运算进行显式计算具有核心作用。首先，需要计算偶素数和奇素数下某些图复形的 RO($C_p \times C_p$)-上同调；这些计算进而确定 $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的 C_p-等变上同调，其中 $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 是 C_p 的 C_p-等变分类空间，为研究等变同伦论中的幂运算奠定基础。

沿着这一思路，我们的第一个主要定理确定了一个万有空间的上同调：

定理A。 *(1)* 对于奇素数 p， $E_{C_p}\mathbb{Z}/p$的$\mathrm{RO}(\mathcal{G})$分次布雷登上同调的多项式部分为

$$\mathrm{P}(\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\underline{\mathbb{F}_p})) = \frac{\mathbb{F}_p\big[a_\beta, u_\beta, \kappa_\beta, a_{\alpha_\ell}, \kappa_{\alpha_\ell}, v_S, z_Q, w_Q, v_{p-1}^{\pm}\big]}{\mathfrak{J}},$$

其中 $0 \le \ell \le p-1$，且 S和 Q 分别遍历 $[p-1]=\{0,1,\dots,p-1\}$ 中基数至少为一和至少为三的子集。这里， $\mathfrak{J}$表示由定理 *2.17* 中列出的关系生成的理想。

(2) 对于 $p=2$，存在一个分次环同构

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2}) \;\cong\; \frac{\Big[\mathbb{F}_2[a_\beta,u_\beta] \;\oplus \bigoplus_{j,k\ge 1} \mathbb{F}_2\big\langle \Sigma^{-1}\tfrac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\big\rangle\Big]\,[\,a_{\alpha_0},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_1},v^{\pm}\,]}{(v\,u_\beta - u_{\alpha_0}u_{\alpha_1},\; v\,a_\beta - (a_{\alpha_0}u_{\alpha_1}+u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}))}$$

其中 v 是次数为 $\alpha_0+\alpha_1-\beta-1$的可逆类，如命题 *3.4* 中所构造。此结果见于 [9]。

参见定理 2.17 和定理 3.7。

在此过程中，我们还得到以下推论，计算分类空间 $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的 RO(C_p)-分次布雷登上同调：

推论*B.* (1) 对于奇数 p，$B_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的 RO(C_p)–分次布雷登上同调的多项式部分为

$$\mathrm{P}(\widetilde{H}^{\bigstar^\beta}_{C_p}(B_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\underline{\mathbb{F}_p})) \;=\; \mathbb{F}_p[a_\beta,u_\beta,\kappa_\beta,\nu,c,b,\eta,\xi,\omega]/\sim,$$

模去由命题 2.20 中提到的类所生成的理想。

(2) 存在一个同构：

$$\widetilde{H}^{\bigstar^\beta}_{C_2}(B_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2}) \;\cong\; \frac{\Big[\mathbb{F}_2[a_\beta,u_\beta] \oplus \bigoplus_{j,k\ge 1}\mathbb{F}_2\big\langle \Sigma^{-1}\tfrac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\big\rangle\Big]\,[c,b]}{(c^2 = a_\beta c + u_\beta b)}.$$

参见命题 2.20 和命题 3.8。值得注意的是，其中的（2）是一项出现在 [17] 中的经典结果。

掌握了 $E_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的结构后，我们将其纳入 Tate 方形，以确定系数环：

定理 C。*(1)* 对于奇素数 p，点的带常值 *Mackey* 函子的 $\mathrm{RO}(\mathcal{G})$–分次布雷登上同调的多项式部分见定理 *4.17*。*(2)* 对于 $p=2$，点的带常值 *Mackey* 函子 $\mathbb{F}_2$ 的 $\mathrm{RO}(\mathcal{K}_4)$–分次布雷登上同调在定理 *5.19* 中给出了明确描述。

—

系数环建立之后，自然的下一步是分析布雷登上同调的模结构。对于一个 G-空间 X 和一个格林函子 M，布雷登上同调 $H^{\star}_{G}(X;\,M)$ 带有关于 $H^{\star}_{G}(S^0;\,M)$ 的典范模结构。一该模的自由性与 X的 G-胞腔结构密切相关。大量研究探讨了这一主题：对于 $G=C_p$，复射影空间的自由性结果已在 [20]中建立； $G=C_2$ 的情形已在 [8]中得到深入研究；对于$G=C_n$ ，当 n 无平方因子时，在 $[4,6]$, 中证明了带 A-和 $\mathbb{Z}$-系数的自由性定理，并将其应用于射影空间和格拉斯曼流形的上同调。关于有限 C_p-空间的进一步自由性定理见 [5], ，而对一般循环群的扩展见 [3]。其他进展包括对射影空间连通和的计算 [2] ，以及对无限复射影空间的等变上同调的描述 [1]。

在此背景下，我们接下来的主要定理描述了取在一个完备宇宙 $\mathcal{U}$上的等变无限复射影空间的楔积幂的布雷登上同调：

定理 D。*(1)* 对于奇素数 p 和 $r\geq 2$，等变射影空间的 r重楔积幂的布雷登上同调的加法结构为：

$$\widetilde{H}^{\star}_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}_p}\right)\;\cong\;\bigoplus_{k=0}^{\infty}\bigoplus_{i=0}^{p-1}\bigoplus_{j=0}^{p-1}\widetilde{H}^{\star-j\Sigma_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell-i\beta-k\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_p}\right),$$

而 $r=1$ 表示为

$$\widetilde{H}^{\star}_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U});\underline{\mathbb{F}_p}\right)=\bigoplus_{t=0}^{\infty}\bigoplus_{i=0}^{p-1}\bigoplus_{j=0}^{p-1}\widetilde{H}^{\star-j\Sigma_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell-i\beta-k\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{G}}\left(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}\right)$$

其中 $(i,\;j,\;k)\neq(0,\;0,\;0)$。

(2) 对于 $p=2$ 和 $r\geq 2$，等变射影空间的r重 *smash* 幂的布雷登上同调的加法结构由下式给出：

$$\begin{aligned}\widetilde{H}^{\star}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\;\cong\;&\bigoplus_{i=1}^{\infty}\widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\\&\bigoplus_{i=0}^{\infty}\Big(\widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\\&\qquad\oplus\widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\\&\qquad\oplus\widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\Big),\end{aligned}$$

其基例 $r=1$ 由下式给出

$$\widetilde{H}^{\star}_{\mathcal{K}_4}(\mathcal{P}(\mathcal{U});\underline{\mathbb{F}_2}) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty}\widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{K}_4}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2})\bigoplus_{i=0}^{\infty}\Big(\widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0}_{\mathcal{K}_4}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2}) \oplus \widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2})\oplus \widetilde{H}^{\star-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2})\Big),$$

最后，我们转向第三个研究方向：等变 Steenrod 运算的结构。在经典（非等变）背景下，Steenrod 运算为上同调提供了基础性的结构层。然而，在等变背景下，对其进行明确描述颇为微妙，且相对少见。一般而言，对于 $E\in \mathrm{Sp}^G$，RO(G)-分次的 E-上同调运算由 $\pi^G_\star(F(E,\ E))$ 给出，而余运算代数为 $\pi^G_\star(E\wedge E)$。当 $E=H\mathbb{F}_p$ 时，它们分别记为 $\mathcal{A}^\star_G$ 和 $\mathcal{A}^G_\star$。

对于任意子群 $H\le G$，存在一个限制映射

$$\mathrm{res}^G_H:\mathcal{A}^\star_G\longrightarrow\mathcal{A}^\star_H.$$

由于 RO(H) 是 RO(G) 的一个收缩，人们可以询问，在 $\mathcal{A}^\star_H$ 中定义的运算何时可提升为 $\mathcal{A}^\star_G$ 中的运算。具体而言，若存在一个次数相同的运算$\tilde{\theta}\in\mathcal{A}^\star_G$，使得从 G 限制到 H 后，$\tilde{\theta}$ 的作用与 θ 的作用一致，则称上同调运算 θ：$H\mathbb{F}_p\to\Sigma^\alpha H\mathbb{F}_p$（次数为 $\alpha\in$ RO(H)）是可提升的。

因此，核心问题是：哪些 H-等变上同调运算可提升为 G-等变运算？对于素数阶循环群，Caruso [7]证明唯一非平凡的可提升运算是 Bockstein 同态，其方法是对 Eilenberg–Mac Lane 空间的布雷登上同调作显式计算，并利用系数环的结构。最近，在 [1]中，作者针对情形 $G=C_p$给出了 Caruso 这一结果的另一种证明。

最后，我们研究群 $C_p\times C_p$的类似问题，并证明如下结论：

定理 E. 设 θ 是次数为 $2r(p-1)$ 与 $2r$ 的上同调运算，分别对应于奇数 p情形与 $p=2$ 情形，且不涉及 $B\ddot{o}ckstein$ β。则不存在提升 θ的等变上同调运算 θ 。

参见定理 6.14。

0.1. 组织结构。本文其余部分安排如下。在第 2 节中，

首先讨论奇素数 p，并在定理 2.17 中计算等变万有空间 $E_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的 RO($\mathcal{G}$)-分次布雷登上同调的多项式部分。由此，我们在命题 2.20 中得到分类空间 $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 相应的 RO(C_p)-分次布雷登上同调。在第 3 节中，我们在定理 3.7 中计算 $p=2$ 情形下 $E_{C_2}\mathbb{Z}/2$ 的 RO($\mathcal{K}_4$)-分次上同调，并在命题 3.8 中计算分类空间 $B_{C_2}\mathbb{Z}/2$ 的 RO(C_2)-分次上同调。

在第4节和第5节中，我们分别将Tate 方形形式应用于$E_{C_p}\mathbb{Z}/p$和$E_{C_2}\mathbb{Z}/2$，以计算点的、系数分别取自$\mathbb{F}_p$ 和 $\mathbb{F}_2$的RO($\mathcal{G}$)与RO($\mathcal{K}_4$)分次布雷登上同调环，分别如定理4.17和定理5.19所述。

最后，在第6节中，我们确定了某个完备宇宙下等变复射影空间的布雷登上同调的加法结构，并进一步在定理 6.9中给出了等变无穷复射影空间的 r重Smash 积的上同调。本节以定理 6.14作结，我们在其中证明了等变环境中某些斯廷罗德平方的不可提升性。

0.2. 记号。本文中我们将始终使用以下记号。

(1) 我们用符号 p 表示任意素数，但特别指定 p 的值时除外。(2) 我们用 G 表示一个有限群，用 $C_p\times C_p$ 表示在素数 p 处秩为二的初等阿贝尔群。对于奇素数 p，我们将该群记为 $\mathcal{G}$；而对于 $p=2$，则记为 $\mathcal{K}_4$。(3) 我们用 σ 表示群 C_2 的符号表示，用 ξ 表示由旋转角度为 $2\pi/p$的旋转给出的二维实 C_p-表示。(4) 对于群 $C_p\times C_p=\langle a,\ b\colon\ a^p=b^p=1\rangle$，所有 p 阶子群均由 $H_i=\langle ab^i\rangle$ 和 $K=\langle b\rangle$ 给出，其中 $0\le i\le p-1$。(5) 对于 $\mathcal{G}$的每个 p阶子群 H_i，我们用 α_i^j 表示其不可约实表示；对于子群 K，则将其不可约表示记为 β^j，其中 $1\le j\le(p-1)/2$。相应地，$\mathcal{K}_4$ 的不可约表示记为 α_0、α_1 和 β。

(6) 我们用 $\bigstar$ 表示 RO(G)-分次，用 $*$表示整数分次。特别地，对于 $\mathcal{G}$，我们考虑 $\bigstar=\Sigma^{p-1}_{i=0}a_i\alpha_i+b\beta+c$，其中 $a_i,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$（见命题 1.17），并且当 a_i 的各项都为零时，$\bigstar_\beta$。

(7) 我们分别用 $\mathbb{M}_p(\xi)$ 和 $\mathbb{M}_2(\sigma)$ 表示群 C_p（奇数 p）和 C_2 的点的上同调，即

$$\mathbb{M}_p(\xi):=\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}}\widetilde{H}^{m+n\xi}_{C_p}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}),\quad \mathbb{M}_2(\sigma):=\bigoplus_{m,n\in\mathbb{Z}}\widetilde{H}^{m+n\sigma}_{C_2}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2})$$

作为分次环，其中 ξ 和 σ 分别是 C_p 和 C_2 的实不可约表示。我们也可以用 $\bigstar_\xi$ 表示形式为 $m+n\xi$ 的 RO(C_p)-分次。

(8) 方括号 $[\,]$ 表示多项式生成元，尖括号 $\langle\,\rangle$ 表示加法生成元。例如，

$$\mathbb{F}_p\langle a,b\rangle[c]$$

表示以 $a,\ b$ 为加法生成元、以 c 为多项式生成元的代数，因此其元素的形式为 lac^i+mbc^j，其中所有 $i,\ j\ge0$ 和 $l,\ m\in\mathbb{F}_p$。

(9) 对于形如 $\frac{\epsilon}{a^j_{\alpha_i}u^k_{\alpha_j}}\Sigma^{-1}$ 的负悬挂类，我们始终考虑 $j,\ k\ge1$ 和 $\epsilon=0,\ 1$。(10) 我们用 $\overline{i}$ 表示集合 $\{0,1,\cdots,i\}$。(11) 记号 $\mathcal{U}$ 用于完整的 $\mathcal{G}$-宇宙，而 $\rho_{\mathbb{C}}$ 用于相应群的复正则表示。(12) 对于映射 q，我们用 Im q 表示 q的像。(13) 记号 P($\widetilde{H}^{\bigstar}_G(X_+;\mathbb{F}_p)$) 用来表示 $\widetilde{H}^{\bigstar}_G(X_+;\mathbb{F}_p)$ 的多项式部分。例如，P($\widetilde{H}^{\bigstar}_{C_2}(S^0;\mathbb{F}_2)$) $=\mathbb{F}_2[a_\sigma,u_\sigma]$，其中 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{C_2}(S^0;\mathbb{F}_2)=\mathbb{F}_2[a_\sigma,u_\sigma]\bigoplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a^k_\beta u^k_\beta}\rangle$。

（14） $2^{\mathbb{N}}$ 表示自然数 $\mathbb{N}$ 的所有子集的集合。

致谢。第一作者（SG）感谢严国旗提供的宝贵建议。第二作者（AK）的研究得到印度大学拨款委员会的资助。

1. Preliminaries on Bredon Cohomology

布雷登上同调是奇异上同调在等变情形下的自然推广，其中群 G 作用于空间 X。我们回顾一些关于 G空间的标准构造。对于有限群 G的正交表示 V，有单位圆盘 $D(V)$和单位球面 $S(V)$，它们带有自然的 G作用，以及一点紧化 S^V。CW 复形的等变类比是G-**CW** 复形，它们由形如 $G/H \times D^n$ 的胞腔逐步构造而成，这些胞腔对应于子群$H \leq G$，并沿着 $G/H \times S^{n-1}$粘接

在这一框架中，常值阿贝尔系数群被更具结构性的概念所取代：麦基函子。此外，分次从整数 $\mathbb{Z}$ 提升为实表示环 $\mathrm{RO}(G)$，从而能够追踪由群 G的表示扭曲的上同调次数。更多详情请参阅 [21]。

1.1。麦基函子。

该理论的基础代数对象是伯恩赛德范畴 $\mathbf{Burn}_G$，其对象是形如 G/H 的有限 G-集，态射是 G-映射构成的跨度，按同构取商并作群完备化。具体而言，态射 $G/H \to G/K$ 是图表的形式线性组合

$$G/H \xleftarrow{f} S \xrightarrow{g} G/K$$

其中 S 是有限 G-集，f、g 是 G-映射。$\mathbf{Burn}_G$ 中的复合由沿这些跨度作拉回来定义。

一个麦基函子 M 从 G 出发，是一个反变加性函子：

$$\underline{M} : \mathrm{Burn}_G^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}.$$

等价地，麦基函子由一对相容的限制映射与转移映射系统构成：

$$\mathrm{res}^H_K : \underline{M}(G/H) \to \underline{M}(G/K), \quad \text{for} \quad K \leq H,$$

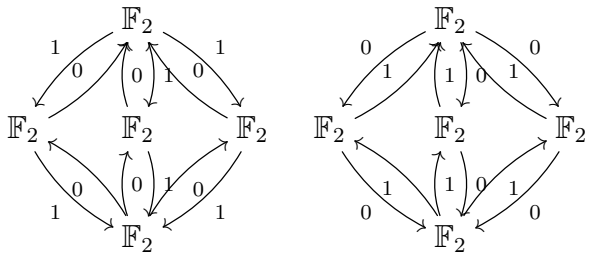
$$\mathrm{tr}^H_K : \underline{M}(G/K) \to \underline{M}(G/H), \quad \text{for} \quad K \leq H,$$

它们满足自然相干条件，例如双陪集公式。麦基函子范畴 $\mathbf{Mack}_G$ 是一个阿贝尔对称幺半范畴，其盒积 和内部 Hom 由戴卷积给出。

1.2. 例。

一个基本例子是常值 ***Mackey*** 函子 C，其定义为：对于阿贝尔群 C，$C(G/H) = C$，限制映射由恒等式给出，而转移 tr^H_K 由乘以 $[H : K]$ 给出：对于 $K \leq H$。其对偶 C^* 通过交换限制映射与转移得到，在轨道上有 $C^*(G/H) = C(G/H)$。

例如，当 $G = \mathcal{K}_4$ （克莱因四元群）且 $C = \mathbb{F}_2$ 时，相应的刘易斯图为：



$\underline{\mathbb{F}_2}$ $\underline{\mathbb{F}_2}^*$

这里，顶部的 $\mathbb{F}_2$ 是在 $\mathcal{K}_4/\mathcal{K}_4$ 处的取值，中间的三个 $\mathbb{F}_2$ 分别对应 $\mathcal{K}_4/H_0$，$\mathcal{K}_4/H_1$，$\mathcal{K}_4/K$（从左到右），底部的 $\mathbb{F}_2$ 是在 $\mathcal{K}_4/e$ 处的取值。向下的箭头表示限制映射，向上的箭头表示转移映射。

以下麦基函子的例子将在命题 1.9 中出现。

1.3. 例子。对于群 C_p （其中 p 可以是偶素数或奇素数），麦基函子 $\langle \mathbb{F}_p \rangle$ 定义为

$$\langle \underline{\mathbb{F}_p} \rangle (C_p/C_p) = \mathbb{F}_p, \qquad \langle \underline{\mathbb{F}_p} \rangle (C_p/e) = 0,$$

其限制映射和转移映射为

$$\mathrm{res}_e^{C_p} = 0, \qquad \mathrm{tr}_e^{C_p} = 0.$$

1.4.例。对于群 C_2，麦基函子 $\langle \Lambda \rangle$定义为

$$\langle \Lambda \rangle (C_2/C_2) = 0, \qquad \langle \Lambda \rangle (C_2/e) = \mathbb{F}_2,$$

其限制映射和转移映射为

$$\mathrm{res}_e^{C_2} = 0, \qquad \mathrm{tr}_e^{C_2} = 0.$$

对于 G-空间 X 和麦基函子 M，RO(G)-分次布雷登上同调群通过等变稳定同伦论定义如下：

$$\widetilde{H}_G^{\alpha}(X_+; \underline{M}) := [X_+, S^{\alpha} \wedge H\underline{M}]^G,$$

其中 $\alpha \in$RO(G)是 G的一个虚实表示， S^{α} 是相应的表示球面，而 HM 是表示系数取自 M的布雷登上同调的埃伦伯格–麦克莱恩 G-谱。

对于 $X = S^0$，这些上同调群定义了该理论的系数环：

$$\widetilde{H}_G^{\bigstar}(S^0; \underline{M}),$$

该环继承了由Smash 积赋予的分次环结构。这个环通常作为底环，使其他 G-空间的上同调通过映射 $X_+ \to S^0$.成为其上的模

RO(G)-分次上同调理论可以在麦基函子值的框架下表述。下述定义将对此作出明确说明。

设 X 是一个有基点的 G 空间，设 M 表示一个麦基函子，且 $\alpha \in$RO(G)。X 的麦基函子值上同调（系数为 M）是麦基函子

$$\underline{H}^{\alpha}_{G}(X;\underline{M})(G/K) \;=\; \widetilde{H}^{\alpha}_{G}(G/K_{+}\wedge X;\,\underline{M}),$$

为每个子群 $K \leq G$定义。限制映射和转移映射由 G-谱之间相应的映射诱导。

1.5。布雷登上同调中的一些特殊类。RO(G)-分次上同调环 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{G}(S^{0};\mathbb{F}_{p})$包含与表示[15]相关联的特殊类：

(1) 对于任意没有非平凡不动点的实 G-表示 V，存在一个典范的欧拉类

$$a_V \in \tilde{H}^{V}_{G}(S^{0};\underline{\mathbb{F}_{p}}),$$

由包含映射 $S^{0} \hookrightarrow S^{V}$表示。

(2) 若 V 是定向表示，则存在一个托姆类

$$u_V \in \widetilde{H}^{V-\dim V}_{G}(S^{0};\underline{\mathbb{F}_{p}}),$$

由余纤维序列 $S(V)_{+} \to D(V)_{+} \to S^{V}$ 导出。

这些类满足自然的乘法恒等式：

$$a_V \cdot a_W = a_{V\oplus W}, \quad u_V \cdot u_W = u_{V\oplus W}.$$

这些生成元在限制映射和转移映射下的行为，受表示 V 在各种子群 $H \leq G$ 上的结构控制，而这可能会显著影响上同调环的内部结构。

1.6. 注记。对于 $G = C_p$，可以发现，只需考虑形如 $m + n\xi$ 且 $m,\ n \in \mathbb{Z}$ 的分次，其中当 α 和 α^{C_p} 的维数均为零时，$S^{\alpha}\underline{\wedge}\, H\mathbb{F}_{p} \underline{\simeq} H\mathbb{F}_{p}$。（见 [12, 附录 B]）。我们用 $\bigstar_{\xi}$ 表示此分次。

我们记录以下计算结果，以便在下一节中使用

1.7.**命题**。 [5]

(1) 对于奇素数 p，点在 $\mathbb{F}_{p}$ 系数下的上同调由下式给出

$$\mathbb{M}_{p}(\xi) = \frac{\mathbb{F}_{p}[a_{\xi},\kappa_{\xi},u_{\xi}]}{(\kappa_{\xi}^{2})} \oplus \bigoplus_{j,k\geq 1} \mathbb{F}_{p}\langle \Sigma^{-1}\frac{\kappa_{\beta}^{\epsilon}}{a_{\xi}^{j}u_{\xi}^{k}}\rangle, \quad \epsilon = 0,1.$$

其中 $|\kappa_{\xi}| = \xi - 1$，且 ξ 是群 C_p 的一个 2 维实不可约表示。

(2) 以 $\mathbb{F}_2$ 为系数的点的 $\mathrm{RO}(C_2)$ 分次上同调为

$$\mathbb{M}_{2}(\sigma) = \mathbb{F}_{2}[a_{\sigma},u_{\sigma}] \oplus \bigoplus_{j,k\geq 1} \mathbb{F}_{2}\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\sigma}^{j}u_{\sigma}^{k}}\rangle$$

其中，σ 表示群 C_2的符号表示。

1.8.**命题**。 [5]

(1) 对于奇素数 p，自由 C_p空间 EC_p 的布雷登上同调由下式给出 *by*

$$\widetilde{H}^{\bigstar_\xi}_{C_p}(EC_{p_+};\underline{\mathbb{F}_p}) = \frac{\mathbb{F}_p[a_\xi, \kappa_\xi, u_\xi^{\pm}]}{(\kappa_\xi^2)}.$$

（2）对于一个 $p=2$，自由 C_2–空间 EC_2 的布雷登上同调由下式给出

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{C_2}(EC_{2+};\underline{\mathbb{F}_2}) = \mathbb{F}_2[a_\sigma, u_\sigma^{\pm}].$$

事实上，$H^{\bigstar}_{C_p}(S^0;\mathbb{F}_p)$与 $H^{\bigstar}_{C_2}(S^0;\mathbb{F}_2)$的麦基函子结构已由Ferland在 [11]中明确描述。

1.9.**命题**。（*1*）对于奇素数 p

$$\underline{H}^{\alpha}_{C_p}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) = \begin{cases} \underline{\mathbb{F}_p} & \text{if } |\alpha|=0,\ |\alpha^{C_p}|\le 0, \\ \underline{\mathbb{F}_p}^* & \text{if } |\alpha|=0,\ |\alpha^{C_p}|>0, \\ \langle \mathbb{F}_p\rangle & \text{if } |\alpha|>0,\ |\alpha^{C_p}|\le 0 \quad \text{and } |\alpha| \text{ even} \\ \langle \mathbb{F}_p\rangle & \text{if } |\alpha|<0,\ |\alpha^{C_p}|>1 \quad \text{and } |\alpha| \text{ odd} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.10}$$

（*2*）对于 $p=2$

$$\underline{H}^{\alpha}_{C_2}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2}) = \begin{cases} \underline{\mathbb{F}_2} & \text{if } |\alpha|=0,\ |\alpha^{C_2}|\le 0, \\ \underline{\mathbb{F}_2}^* & \text{if } |\alpha|=0,\ |\alpha^{C_2}|>0, \\ \langle \Lambda\rangle & \text{if } |\alpha|=0,\ |\alpha^{C_2}|=1, \\ \langle \mathbb{F}_2\rangle & \text{if } |\alpha|>0,\ |\alpha^{C_2}|\le 0, \\ \langle \mathbb{F}_2\rangle & \text{if } |\alpha|<0,\ |\alpha^{C_2}|>1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1.11}$$

1.12. 等变万有空间。一个族 $\mathcal{F}$，即 G的子群的族，是一个集合由在共轭以及取子群运算下封闭的子群组成。对于任何这样的族，可关联一个满足不动点条件 [21]的 G-空间 $E\mathcal{F}$：

$$E\mathcal{F}^H = \begin{cases} \simeq * & \text{if } H \in \mathcal{F}, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该 G-空间 $E\mathcal{F}$ 在相差一个 G-同伦等价的意义下由这一万有性质所刻画。它在各向同性群落在 $\mathcal{F}$中的 G-CW复形之中是始对象，并在等变同伦论中，尤其是在各向同性分离技术中，起着关键作用。

与这样一个族相关联的一条基本余纤维列是：

$$E\mathcal{F}_+ \to S^0 \to \widetilde{E\mathcal{F}},$$

由此得到布雷登上同调中的长正合列，并且可以将其理解为把空间中 $\mathcal{F}$ 各向同性群与其余部分分离开来。

现在假设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ 是满足以下条件的子群族：对于某个子群 $H \leq G$，有 $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{F} = \{H\}$。那么存在一个自然的 G 空间余纤维列：

$$E\mathcal{F}_+ \to E\mathcal{F}'_+ \to E\mathcal{F}\langle H\rangle, \tag{1.13}$$

其中， $E\mathcal{F}\langle H\rangle$ 是一个由其不动点行为刻画的 G-空间：

$$E\mathcal{F}\langle H\rangle^K \simeq \begin{cases} S^0 & \text{if } K = H, \\ * & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意， $\mathcal{F}\langle H\rangle$ 通常不是一个族，但相关空间 $E\mathcal{F}\langle H\rangle$ 仍然是定义良好且有用的，可通过连续的余纤维化来构造万有空间的胞腔分解。

现在，考虑两个有限群 G 和 Π。定义 $\mathcal{F}_{gr}$ 的子群族$G \times \Pi$ 如下：

$$\mathcal{F}_{gr} := \{H \leq G \times \Pi \mid H \cap (1 \times \Pi) = e\}. \tag{1.14}$$

相关的万有空间 $E_G\Pi := E\mathcal{F}_{gr}$ 是一个带有自由 Π-作用的 $G \times \Pi$-空间。商空间

$$B_G\Pi := E_G\Pi/\Pi$$

称为主 Π-丛的 G-等变分类空间。它将经典分类空间推广到等变背景下，并在 G-等变环境中刻画 Π-丛的同伦论。

对于子群 $H \leq G \times \Pi$，我们记 $\mathcal{F}(H)$ 为包含于 H 中的所有子群所成的族。对于阿贝尔群 $G \times \Pi$，每个族 $\mathcal{F}(H)$ 典范地对应于商群 $G \times \Pi/H$ 的子群格，并且我们可以等同

$$E\mathcal{F}(H) \simeq E(G \times \Pi/H).$$

对于初等阿贝尔群 $\mathcal{G} = \langle a, b\colon\ a^p = b^p = 1\rangle$，所有阶为 p 的子群由下式给出

$$H_i = \langle a\, b^i\rangle \qquad (0 \leq i \leq p-1),$$

连同子群

$$K = \langle b\rangle.$$

因此， $\mathcal{G}$ 恰有 $p+1$ 个不同的阶为 p 的子群。对每个 i，存在一条典范的 $\mathcal{G}$-空间余纤维列：

$$E\mathcal{G}_+ \xrightarrow{q_i} E\mathcal{F}(H_i)_+ \to E\mathcal{F}\langle H_i\rangle, \tag{1.15}$$

其中最右端的项定义为映射 q_i 的同伦余纤维。

而族 $\mathcal{F}_{gr}$ （对于 $\mathcal{G}$），即 (1.14) 中所定义者，由下式给出

$$\mathcal{F}_{\mathrm{gr}} = \{e, H_i\colon 0 \leq i \leq p-1\},$$

为计算 $E_{C_p}\mathbb{Z}/p := E\mathcal{F}_{gr}$ 的 RO($C_p \times C_p$)–分次布雷登上同调，我们采用如下余纤维序列塔：

(1.16)

$$E\mathcal{F}(H^0)_+ = E\mathcal{F}_{0+} \longrightarrow E\mathcal{F}_{1+} \longrightarrow \cdots E\mathcal{F}_{i-1_+} \xrightarrow{j_i} E\mathcal{F}_{i+} \longrightarrow \cdots E\mathcal{F}_{p-1_+} = E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+$$
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$E\mathcal{F}\langle H_1\rangle \quad E\mathcal{F}\langle H_{i-1}\rangle \quad E\mathcal{F}\langle H_i\rangle \quad E\mathcal{F}\langle H_{p-1}\rangle$$

注意，族 $\mathcal{F}_i$ 由 $\{e, H_0, \cdots, H_i\}$给出。

设 p为奇素数，令 α_i^j和 β^j分别表示 $\mathcal{G}$的两个二维实不可约表示，其核分别为 H_i和 $K:=\langle b\rangle$，其中 $1\le j\le(p-1)/2$。

1.17. **命题**。设 p 为奇素数。那么对于每个整数 $1\le j\le(p-1)/2$以及每个 $0\le i\le p-1$，在 $\mathrm{ho}\,\mathrm{Sp}^{\mathcal{G}}$ 中都有如下等价关系：

$$S^{\alpha_i^j}\wedge H\underline{\mathbb{F}_p} \simeq S^{\alpha_i}\wedge H\underline{\mathbb{F}_p} \quad and \quad S^{\beta^j}\wedge H\underline{\mathbb{F}_p} \simeq S^{\beta}\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}.$$

证明。我们证明 α_0 的情形；其余情形类似。

只需证明

$$\underline{\pi_k}\big(S^{\alpha_0^j-\alpha_0}\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}\big) \cong \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0-k}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})$$

集中在次数 $k=0$ 上。由等变 Eilenberg–Mac Lane 谱的唯一性，这就推出了所需的等价关系。

由注 1.6，只需计算麦基函子 $H_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0-k}(S^0;\mathbb{F}_p)$ 在轨道 $\mathcal{G}/\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}/\underline{H}$ 上的取值，其中 H 是一个阶为 p 的子群。我们将证明，对于 $k=0$，它在两个轨道上的取值均为 $\mathbb{F}_p$，限制映射为恒等式，传递映射为零，并且对于所有 $k\neq 0$ 都为零。

考虑由余纤维序列诱导的 RO($\mathcal{G}$)-分次上同调的长正合列

$$S(\alpha_0)_+ \longrightarrow S^0 \longrightarrow S^{\alpha_0}:$$
$$0\to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-2-\alpha_0}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) \to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-2}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) \to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-2}(S(\alpha_0)_+;\underline{\mathbb{F}_p})$$
$$\to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-1-\alpha_0}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) \to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-1}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) \to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-1}(S(\alpha_0)_+;\underline{\mathbb{F}_p})$$
$$\to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) \to \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) \to 0.$$

由相关次数中其余各项的消失可知

$$\underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0-k}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) = 0 \qquad \text{for all } k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,1,2\}.$$

对于 $k=1$,2，只需证明

$$\underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0-k}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})(\mathcal{G}/\mathcal{G}) = 0.$$

这是因为该映射

$$\underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-k}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) \longrightarrow \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-k}(S(\alpha_0)_+;\underline{\mathbb{F}_p})$$

在 $k=1$，2 上，利用限制映射与转移映射的相容性，它是 $\mathcal{G}/\mathcal{G}$-层级上的一个同构。

对于 $k=0$，我们有

$$\underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})(\mathcal{G}/\mathcal{G}) \;\cong\; \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})(\mathcal{G}/\mathcal{G}) = \mathbb{F}_p\{a_{\alpha_0^j}\}.$$

对于阶为 p 的子群 $H \neq H_0$，考虑以下正合列：

$$\begin{array}{lccccccc}
\mathcal{G}/\mathcal{G}: & \mathbb{F}_p\{\kappa_{\alpha_0}\} & \longrightarrow & \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{1} & \mathbb{F}_p\{a_{\alpha_0^j}\}\to 0 \\
 & \uparrow\downarrow{\scriptstyle 0\;1} & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow{\scriptstyle 0\;1} \\
\mathcal{G}/H: & \mathbb{F}_p\{\kappa_\xi\} & \xrightarrow{1} & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{0} & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{1} & \mathbb{F}_p\{a_\xi\}\to 0
\end{array}$$

其中 $\xi = \mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{H}(\alpha_0)$。由交换性可知，限制映射是恒等映射，而传递映射在 $H_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0}(S^0;\mathbb{F}_p)$ 处为零。

对于 $H=H_0$，我们有以下正合列

$$\begin{array}{lccccccc}
\mathcal{G}/\mathcal{G}: & \mathbb{F}_p\{\kappa_{\alpha_0}\} & \xrightarrow{1} & \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\alpha_0^j-\alpha_0}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{1} & \mathbb{F}_p\{a_{\alpha_0^j}\}\longrightarrow 0 \\
 & \uparrow\downarrow{\scriptstyle 0\;0} & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow{\scriptstyle 0\;0} \\
\mathcal{G}/H_0: & 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{1} & \mathbb{F}_p & \xrightarrow{0} & 0\longrightarrow 0
\end{array}$$

这表明 $\mathrm{tr}^{\mathcal{G}}_{H_0}=0$，而恒等式

$$\mathrm{res}^{H_0}_{e}\,\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{H_0} = \mathrm{res}^{H_1}_{e}\,\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{H_1} = \mathrm{Id}$$

意味着 $\mathrm{res}^{\mathcal{G}}_{H_0}$ 是恒等映射。证明至此完成。 □

1.18.注记。 由于 $\mathcal{G}$ 的表示环为

$$\mathrm{RO}(\mathcal{G}) = \mathbb{Z}\{\,1, \alpha_i^j, \beta^j \mid 0\le i\le p-1,\ 1\le j\le (p-1)/2\},$$

由前面的命题可知，只需考虑如下形式的分次

$$\bigstar = \sum_{i=0}^{p-1} a_i\alpha_i + b\beta + c, \qquad a_i, b, c \in \mathbb{Z}.$$

相比之下，对于克莱因四元群 $\mathcal{K}_4$，存在三个非平凡的一维实表示 α_0、α_1 和 β，其核分别为 H_0、H_1 和 K。因此，

$$\mathrm{RO}(\mathcal{K}_4) = \mathbb{Z}\{\,1, \alpha_0, \alpha_1, \beta\,\}.$$

由于 $p=2$ 和奇数 p 的情形表现出根本不同的性质，我们首先讨论 p 为奇数的情形。

2. Bredon cohomology of $E_{C_p}\mathbb{Z}/p$ for odd primes p

本节中，我们计算某些等变万有空间的 RO($\mathcal{G}$)-分次 Bredon 上同调。为此，我们首先分析由 H_i 生成的子群族所对应的空间 $E\mathcal{F}(H_i)$。

为计算 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\,\mathbb{F}_p)$，我们使用如下等同

$$E\mathcal{F}(H_i) \;\cong\; E\mathcal{G}/H_i \;\simeq\; S(\infty\alpha_i),$$

它给出了 $E\mathcal{F}(H_i)$ 的一个自然骨架滤过。该滤过的相伴分次部分满足

$$E\mathcal{F}(H_i)^{(s)}/E\mathcal{F}(H_i)^{(s-1)} \cong \bigvee_{e\in I(s)} \mathcal{G}/H_{i+} \wedge S^s,$$

其中 $I(s)$ 对 s-胞腔进行标号。

应用同伦不动点谱序列 [16], 其中 E_1–页由下式给出:

$$E_1^{s,t}(V) = \pi_{t-s}^{\mathcal{G}} \mathrm{Fun}(E\mathcal{F}(H_i)^{(s)}/E\mathcal{F}(H_i)^{(s-1)}, \Sigma^{-V} H\underline{\mathbb{F}_p})$$

对于 $V \in \mathrm{RO}(\mathcal{G})$。通过利用伴随作一些等同，可以计算出 E_2–页为:

$$E_2^{s,V} = H^s(B(\mathcal{G}/H_i); \pi^{H_i}_{\mathrm{res}_{H_i}(V)}(H\underline{\mathbb{F}_p})) \Rightarrow H_{\mathcal{G}}^{s-V}(E\mathcal{F}(H_i); \underline{\mathbb{F}_p}),$$

带有微分 d_r： $E_r^{s,V} \to E^{s+r,V-r+1}$对于 $r \geq 2$. 由于 $\mathcal{G}/H_i$ 在系数上的作用是平凡的（因为一切都在 $\mathbb{F}_p$ 中）。因此，利用命题 1.7， E_2–页可写为

$$E_2^{*,\bigstar} = \mathbb{M}_p(\beta) \otimes \frac{\mathbb{F}_p[t,y]}{(t^2)} \otimes \mathbb{F}_p[u_{\alpha_i}^{\pm}, u_{\alpha_j-\beta}^{\pm} : j \neq i]$$

其中双次数为 $|t| = (1,0)$, $|y| = (2,0)$, $|u_\beta| = (0, \beta - |\beta|)$, $|a_\beta| = (0,\beta)$, $|\kappa_\beta| = (0, \beta-1)$, $|u_{\alpha_i}| = (0, \alpha_i - |\alpha_i|)$ 和 $|u_{\alpha_j-\beta}| = (0, \alpha_j - \beta)$。

由此可得，所有微分均为零，因此谱序列在 E_2 页塌缩。由于该谱序列定义在 $\mathbb{F}_p$ 上，所有扩张都是平凡的。因此,

$$\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}(H_i)_+; \underline{\mathbb{F}_p}) \cong \mathbb{M}_p(\beta) \otimes \frac{\mathbb{F}_p[t,y,u_{\alpha_i}^{\pm}, u_{\alpha_j-\beta}^{\pm} : j \neq i]}{(t^2)}. \tag{2.1}$$

类似的计算可用于求自由空间 $E\mathcal{G}$ 的布雷登上同调，其 E_2 页为

$$E_2^{s,V} = H^s(B\mathcal{G}; \pi_{\dim(V)}(H\mathbb{F}_p)) \Rightarrow \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{s-V}(E\mathcal{G}_+; \underline{\mathbb{F}_p})$$

微分为 d_2: $E_2^{s,V} \to E^{s+2,V-1}$。由于 $\pi_{\dim(V)}(H\mathbb{F}_p)$ 集中在 $\dim(V) = 0$。因此，谱序列在第 E_2 页塌缩。因此,

$$\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{G}_+; \underline{\mathbb{F}_p}) \cong \frac{\mathbb{F}_p[t_0,t_1,y_0,y_1,u_{\alpha_i}^{\pm}, u_{\beta}^{\pm} : 0 \leq i \leq p-1]}{(t_0^2, t_1^2)} \tag{2.2}$$

其中双次数为 $|t_l| = (1,0)$、 $|y_l| = (2,0)$, 适用于 $l = 0$, 1。

在继续了解 $E\mathcal{F}\langle H_i\rangle$ 的布雷登上同调之前（可借助余纤维序列 (1.15) 计算），我们先如下描述映射 q_i 对上同调的作用:

2.3.**命题**。 诱导映射

$$q_i^{\bigstar} : \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}(H_i)_+; \underline{\mathbb{F}_p}) \longrightarrow \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{G}_+; \underline{\mathbb{F}_p})$$

在生成元上的作用为

$$\begin{aligned} t &\longmapsto t_0 - it_1, & y &\longmapsto y_0 - iy_1,\\ u_\beta &\longmapsto u_\beta, & u_{\alpha_i} &\longmapsto u_{\alpha_i},\\ u^{\pm}_{\alpha_j-\beta} &\longmapsto (u_{\alpha_j}u_\beta^{-1})^{\pm}, & (j &\neq i),\\ a_\beta &\longmapsto y_1 u_\beta, & \kappa_\beta &\longmapsto t_1 u_\beta,\\ \Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta}{u_\beta^j a_\beta^k} &\longmapsto 0, & \Sigma^{-1}\frac{1}{u_\beta^j a_\beta^k} &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

证明。令 H_i 为前面定义的 $\mathcal{G}$ 的 p 阶子群。我们将 $(1, b)$ 视为 $\mathcal{G}/H_i$ 的一个固定生成元。

由于 $\mathbb{F}_p$ 是平凡的 $\mathcal{G}$–模，因此可以将其识别为

$$\widetilde{H}^1_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+, \underline{\mathbb{F}_p}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}/H_i, \mathbb{F}_p), \quad \widetilde{H}^1_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+, \underline{\mathbb{F}_p}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}/H_i, \mathbb{F}_p),$$

这给出了如下交换方图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}/H_i, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{q_i^*} & \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{F}_p) \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathbb{F}_p\{t\} & \longrightarrow & \mathbb{F}_p\{t_0, t_1\}. \end{array}$$

这里，左侧的竖直同构 $\mathrm{Hom}(G/H_i, \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p\{t\}$ 将态射 $\psi : G/H_i \to \mathbb{F}_p$ 映射为 $\psi(1, b)$；右侧的竖直同构则将 $\varphi : \mathcal{G} \to \mathbb{F}_p$ 映射为 $(\varphi(1, b)\ \varphi(a, 1))$。

注意，计算下方的水平映射等价于求出 $0 \leq l \leq p-1$，使得 $aH_i = b^l H_i$，其中 $aH_i = \{a^2b^i, a^3b^{2i}, \cdots, a\}$ 且 $b^l H_i = \{ab^{i+l}, a^2b^{2i+l}, \cdots, b^l\}$，从而得到 $l = -i$。因此，下方的水平映射由 $t \mapsto t_0 - it_1$ 给出。对 y 的作用可由以下事实推出：$\beta(x) = y$，其中 β 是普通上同调中的 Bockstein。

For其他类的作用，考虑如下rin的交换图 gs

(2.4)

$$\begin{array}{ccccc} & & \widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+; \underline{\mathbb{F}_p}) & & \\ & \overset{q_i^\star}{\swarrow} & & \overset{\pi_i^\star}{\nwarrow} & \\ \widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+; \underline{\mathbb{F}_p}) & & \xleftarrow{\quad q^\star \quad} & & \widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(S^0; \underline{\mathbb{F}_p}) \\ & \underset{q_j^\star}{\nwarrow} & & \underset{\pi_j^\star}{\swarrow} & \\ & & \widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_j)_+; \underline{\mathbb{F}_p}) & & \end{array}$$

环同态 $q_i^\star$ 对其他类的作用由如下事实得出：$a_{\alpha_i}, a_{\alpha_j}, a_\beta, u_{\alpha_i}, u_{\alpha_j}, u_\beta, \kappa_{\alpha_i}, \kappa_{\alpha_j}$，并且 κ_β 在 $q^\star$ 下非平凡地映射，而负悬挂类由于次数原因映射为零。□

根据前文讨论，类 $a_{\alpha_i}, \kappa_{\alpha_i}, a_\beta, \kappa_\beta \in \widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(S^0; \mathbb{F}_p)$ 通过分别与类 $(y_0 - iy_1)u_{\alpha_i}$、$(t_0 - it_1)u_{\alpha_i}$、$y_1 u_\beta$ 和

t_1u_β 相乘，在(;) 上作用。利用这些识别，我们可以用相应的 RO($\mathcal{G}$) 分次类替换整数分次生成元。由此得到重新表述的 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\,\mathbb{F}_p)$ 和 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\,\mathbb{F}_p)$，这些表述将在后续计算中使用。

2.5.**命题**。 对于奇素数 p,

(1) 自由 $\mathcal{G}$–空间 $E\mathcal{G}$ 的 RO($\mathcal{G}$)–分次布雷登上同调为:

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\underline{\mathbb{F}_p}) \;\cong\; \frac{\mathbb{F}_p\Big[a_{\alpha_j},a_\beta,\kappa_{\alpha_j},\kappa_\beta,u^{\pm}_{\alpha_j},u^{\pm}_{\beta}\colon 0\le j\le p-1\Big]}{\sim},$$

其中的关系 $\sim$ 由以下代换导出

$$\begin{aligned} a_{\alpha_j} &= (y_0 - jy_1)\,u_{\alpha_j}, & \kappa_{\alpha_j} &= (t_0 - jt_1)\,u_{\alpha_i},\\ a_\beta &= y_1\,u_\beta, & \kappa_\beta &= t_1\,u_\beta,\\ t_0^2 &= t_1^2 = 0. \end{aligned}$$

(2) 对于每个 $0\le i\le p-1$, $E\mathcal{F}(H_i)$ 的 RO($\mathcal{G}$)–分次布雷登上同调 s

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\underline{\mathbb{F}_p}) \;\cong\; \mathbb{M}_p(\beta)\otimes\frac{\mathbb{F}_p\Big[a_{\alpha_i},\kappa_{\alpha_i},u^{\pm}_{\alpha_i},u^{\pm}_{\alpha_j-\beta}\;:\;j\neq i\Big]}{(\kappa^2_{\alpha_i})}.$$

现在我们转而计算 $E\mathcal{F}\langle H_i\rangle$ 的布雷登上同调。这些计算由余纤维序列 (1.15) 控制，尤其取决于所诱导映射的余核与核的计算

$$q_i^{\bigstar}:\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\underline{\mathbb{F}_p})\to\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\underline{\mathbb{F}_p}).$$

在计算它们之前，我们先观察下面这个代数表达式，它能让计算更容易:

2.6.**命题**。 设 p 是一个素数。作为阿贝尔群，有一个同构

$$\frac{\mathbb{F}_p[x^{\pm},y^{\pm}]}{\mathbb{F}_p\left[\frac{x}{y},\frac{y}{x},x,y\right]}\cong x^{-1}\mathbb{F}_p\left[x^{-1},\left(\frac{y}{x}\right)^{\pm}\right].$$

证明。 对于 $m,\ n\in\mathbb{Z}$，定义一个映射 $\phi\colon\mathbb{F}_p[x^{\pm},y^{\pm}]\to x^{-1}\mathbb{F}_p[x^{-1},(y/x)^{\pm}]$,

$$\phi(x^ny^m)=\begin{cases}0, & \text{if } m,n\ge 0\\ \frac{1}{x^ny^m}, & \text{if } m,n<0\\ y^{-(m+n)}(\frac{x}{y})^n, & \text{if } m<0; n\ge 0; m+n<0\\ x^{-(n+m)}(\frac{x}{y})^m, & \text{if } n<0; m\ge 0; m+n<0\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

容易验证， ϕ 是一个满同态，其核由子代数 $\mathbb{F}_p[\frac{x}{y},\frac{y}{x},x,y]$给出。□

该命题使我们能够显式计算余核 $q_i^{\bigstar-1}$ 。由于乘法结构在 Σ^{-1} 余核 $q_i^{\bigstar-1}$ 上是平凡的，我们得到如下上同调环描述:

2.7. **命题**。 对于 $0 \le i \le p-1$，约化布雷顿上同调 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_i\rangle;\ \mathbb{F}_p)$由下式给出

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_i\rangle;\underline{\mathbb{F}_p}) \;=\; \bigoplus_{k_1,k_2\ge 1} \mathbb{F}_p\Big\langle \Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^{\epsilon}}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}}\Big\rangle \frac{\mathbb{F}_p\big[a_{\alpha_i},\kappa_{\alpha_i},u_{\alpha_i}^{\pm},u_{\alpha_j-\beta}^{\pm}\colon j\ne i\big]}{(\kappa_{\alpha_i}^2)}$$

$$\oplus\ \Sigma^{-1}u_\beta^{-1}\mathbb{F}_p\big[\kappa_{\alpha_i},\kappa_{\alpha_j},\kappa_\beta,a_{\alpha_i},a_{\alpha_j},a_\beta,\Big(\tfrac{u_{\alpha_j}}{u_\beta}\Big)^{\pm},u_{\alpha_i}^{\pm},u_\beta^{-1}\colon j\ne i\big]\quad \mathrm{mod}\ \mathrm{Im}\,q_i^{\bigstar}.$$

证明. 考虑与余纤维序列 (1.15) 相关联的上同调长正合列：

$$\cdots\longrightarrow \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_i\rangle;\underline{\mathbb{F}_p})\longrightarrow \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\underline{\mathbb{F}_p})\xrightarrow{q_i^{\bigstar}}\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\underline{\mathbb{F}_p})\longrightarrow\cdots.$$

由命题 2.3、2.5 和 2.6，该序列中的映射可以显式描述。于是，通过计算 $q_i^{\bigstar}$. □的核与余核，即可得到 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_i\rangle;\mathbb{F}_p)$ 的所需描述

为研究 $E\mathcal{F}_i$ 的 RO($\mathcal{G}$)–分次布雷登上同调，我们利用先前考虑的诸族的万有空间之间的关系，该关系由下述结构引理刻画：

2.8. **引理.** 设 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2$ 为有限群 $\mathcal{G}$ 的子群族。则该图

$$\begin{array}{ccc} E(\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2)_+ & \longrightarrow & E\mathcal{F}_{1+} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E\mathcal{F}_{2+} & \longrightarrow & E(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)_+ \end{array}$$

是真 $\mathcal{G}$-谱范畴中的一个拉回。

证明。 这源于几何不动点能够检测弱等价，并且与悬挂谱交换这一事实。纤维上的映射是等价关系，因此该方形是一个同伦拉回。□

因此，可以得到一个布雷登上同调中的长正合列图表。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\underline{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{j_i^{\bigstar}} & \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i-1+};\underline{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{\partial_{i-1}^{\bigstar}} & \widetilde{H}^{\bigstar+1}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_i\rangle;\underline{\mathbb{F}_p})\cdots. \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_i^{\bigstar}} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{i-1}^{\bigstar}} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\ \cdots\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\underline{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{q_i^{\bigstar}} & \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\underline{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{\bar\partial_{i-1}^{\bigstar}} & \widetilde{H}^{\bigstar+1}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_i\rangle;\underline{\mathbb{F}_p})\cdots \end{array} \tag{2.9}$$

2.10. **命题**。 在整数层次上，边界映射 $\partial_0^{\bigstar}\colon \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_0)_+;\mathbb{F}_p)\to\widetilde{H}^{\bigstar+1}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_1\rangle;\mathbb{F}_p)$ 是非平凡的。此外，它将类 $\frac{\kappa_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}\mapsto\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta}{u_\beta}$ 和 $\frac{a_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}\mapsto\Sigma^{-1}a_\beta.u_\beta$ 映射为类。

证明。 在次数 1 时，类 $\frac{\kappa_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}\in\widetilde{H}^1_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_0)_+;\mathbb{F}_p)$ 和 $\frac{\kappa_{\alpha_1}}{u_{\alpha_1}}\in\widetilde{H}^1_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_1)_+;\mathbb{F}_p)$ 分别通过态射 $q_0^\star$ ($=\eta_0^\star$) 和$q_1^\star$ 映射到 $\widetilde{H}^1_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G};\mathbb{F}_p)$ 中的自身，而这两个像不相等；这迫使类 $\frac{\kappa_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}$ 映射为非零类 $\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta}{u_\beta}$，这是由图表 (2.9) 的交换性以及次数原因所致。对于类 a_{α_0}，也可采用类似的策略。$\square$

由于计算 $E\mathcal{F}_i$ 的上同调等价于求相应边界映射 $\partial_{i-1}^\star$的核与余核。下面的命题计算 $i=1$的边界映射的核与余核:

2.11. **命题**。 边界映射 $\partial_0^\star$： $\widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_0);\mathbb{F}_p)\to\widetilde{H}^{\star+1}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_1\rangle;\ \mathbb{F}_p)$ 的核与余核为:

(1)

$$\operatorname{Ker}\partial_0^\star=\bigoplus_{k_1,k_2\geq 1}\mathbb{F}_p\langle\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^\epsilon}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}}:\epsilon=0,1\rangle\frac{[a_{\alpha_0},\kappa_{\alpha_0},u_{\alpha_0}^\pm,u_{\alpha_j-\beta}^\pm:j\neq 0]}{(\kappa_{\alpha_0}^2)}$$

$$\bigoplus\mathbb{F}_p[a_\beta,\kappa_\beta,u_\beta,a_{\alpha_0},\kappa_{\alpha_0},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1},\kappa_{\alpha_1},u_{\alpha_1},(u_{\alpha_0}u_{\alpha_1-\beta})^\pm,u_{\alpha_j-\beta}^\pm:j\neq 0,1]/\sim$$

where $a_{\alpha_1}:=(\frac{a_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}u_\beta-a_\beta)u_{\alpha_1-\beta}$ *and* $\kappa_{\alpha_1}:=(\frac{\kappa_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}u_\beta-\kappa_\beta)u_{\alpha_1-\beta}$*, subject to the relations induced from* $\widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_0)_+;\mathbb{F}_p)$.

(2)

$$\operatorname{Coker}\partial_0^\star=\bigoplus_{k_1,k_2\geq 1}\mathbb{F}_p\langle\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^\epsilon}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}}:\epsilon=0,1\rangle\frac{[a_{\alpha_1},\kappa_{\alpha_1},u_{\alpha_1}^\pm,u_{\alpha_j-\beta}^\pm:j\neq 1]}{(\kappa_{\alpha_1}^2)}$$

$$\bigoplus\Sigma^{-1}u_\beta^{-1}\mathbb{F}_p[\kappa_{\alpha_0},\kappa_{\alpha_1},\kappa_{\alpha_j},\frac{\kappa_\beta}{u_\beta},a_{\alpha_0},a_{\alpha_1},a_{\alpha_j},\frac{a_\beta}{u_\beta},\frac{u_{\alpha_0}}{u_\beta},\frac{u_{\alpha_1}}{u_\beta},(\frac{u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}}{u_\beta})^\pm,(\frac{u_{\alpha_j}}{u_\beta})^\pm,u_\beta^{-1}:j\neq 0,1]/\sim$$

满足由 $\widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}\langle H_1\rangle;\ \mathbb{F}_p)$ 所诱导的关系，并模去像 $\partial_0^\star$。

证明。 $\operatorname{Ker}\partial_0^\star$ 的计算源于如下事实： $x\in\operatorname{Ker}\partial_0^\star$ 当且仅当存在$y\in\widetilde{H}^\star_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_1)_+;\mathbb{F}_p)$，使得 $q_0^\star(x)=q_1^\star(y)$，由此得到 $\operatorname{Ker}\partial_0^\star=(q_0^\star)^{-1}(\operatorname{Im}q_0^\star\cap\operatorname{Im}q_1^\star)$。

对于余核 $\operatorname{Coker}(\partial_0^\star)$，注意 $\partial_0^\star$ 作用于命题 2.10 中相关的类，如下所示:

$$\partial_0^\star\left(\frac{a_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}\right)=\Sigma^{-1}\frac{a_\beta}{u_\beta},\qquad\partial_0^\star\left(\frac{\kappa_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}\right)=\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta}{u_\beta},$$

$$\partial_0^\star(u_{\alpha_0}^{-n})=\Sigma^{-1}u_{\alpha_0}^{-n},\qquad\partial_0^\star(u_{\alpha_1-\beta}^n)=\Sigma^{-1}u_\beta^{-n}u_{\alpha_1}^n,\quad n\geq 1.$$

由这些数据，立即可得所声称的余核 $\operatorname{Coker}(\partial_0^\star)$ 的描述。 $\square$

由命题 2.11、命题 2.12 以及图表 (2.9) 可见， $E\mathcal{F}_i$ 的 Bredon 上同调由核 $\partial_{i-1}^\star$ 与余核 $\partial_{i-1}^{\star-1}$ 中的类所构成的直和项给出，但下面的命题表明，来自余核 $\partial_{i-1}^{\star-1}$ 的类总是经由 $\partial_i^\star$ 消失。

2.12.**命题**。 边界映射的余核

$$\partial_{i-1}^{\bigstar} : \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{i-1+}; \underline{\mathbb{F}_p}) \longrightarrow \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar+1}(E\mathcal{F}(H_i)_+; \underline{\mathbb{F}_p})$$

包含在边界映射的核中

$$\partial_{i}^{\bigstar} : \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{i+}; \underline{\mathbb{F}_p}) \longrightarrow \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar+1}(E\mathcal{F}(H_{i+1})_+; \underline{\mathbb{F}_p}).$$

也就是说,

$$\mathrm{Coker}(\partial_{i-1}^{\bigstar}) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial_{i}^{\bigstar}).$$

证明。 对于 $x \in$ 余核$\partial_{i-1}^{\bigstar -1}$，推出 $j_{i-1}^{\bigstar} x = 0$，然后证明由以下事实可得：$\partial_i^{\bigstar}$ 通过 $j_{i-1}^{\bigstar}$分解。□

由于显式计算余核既冗长又复杂，在奇数 p情形下，我们将只关注核中的多项式部分。对应的布雷登上同调 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{i+}; \mathbb{F}_p)$ 的部分记为 $\mathrm{P}(\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{i+}; \mathbb{F}_p))$，即 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{i+}; \mathbb{F}_p)$ 的多项式部分。

为进一步展开，我们在 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{i+}; \mathbb{F}_p)$ 中引入以下新的类。

2.13. **命题**。 对于每个带有 $i \geq 1$ 的非空子集 $S \subseteq [i] = \{0, 1, \ldots, i\}$，存在一个类

$$v_S \in \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{i+}; \underline{\mathbb{F}_p}).$$

满足以下性质；

(1) $v_{S_1} v_{S_2} = \begin{cases} v_{S_1 \cup S_2} u_\beta, & S_1 \cap S_2 = \phi \\ v_{S_1 \cup S_2} v_{S_1 \cap S_2}, & S_1 \cap S_2 \neq \phi \end{cases}$

(2) $v_S a_\beta - m\, v_{S\setminus\{j_1\}} a_{\alpha_{j_1}} + m\, v_{S\setminus\{j_2\}} a_{\alpha_{j_2}}$, *for* $j_1 \neq j_2 \in S$ *and* $m \in \mathbb{F}_p$ *satisfying* $m^{-1} = j_2 - j_1$;

(3) $v_S \kappa_\beta - m\, v_{S\setminus\{i\}} \kappa_{\alpha_i} + m\, v_{S\setminus\{j\}} \kappa_{\alpha_j}$, *under the same conditions as above;*

*More*此外，对于 $S = [i]$，相应的类 $v_i := v_S$ 在 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}$ $(E\mathcal{F}_{i+}; \mathbb{F}_p$ 中是可逆的，).

2.14. 注记。 对于单元素子集 $\{j\} \subseteq [i]$，我们规定 $v_{\{j\}} := u_{\alpha_j}$。

命题 *2.13* 的证明。 我们对 i 归纳地构造类 v_S。

基例。 对于 $i = 1$， $\{0, 1\}$ 的子集产生类

$$v_{\{0\}} := u_{\alpha_0}, \qquad v_{\{1\}} := u_{\alpha_1},$$

以及一个类 v_1，其在 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}(H_0)_+; \mathbb{F}_p)$ 中的像为 $u_{\alpha_0} u_{\alpha_1 - \beta}$。 所有这些都属于 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{1+}; \underline{\mathbb{F}_p})$，其中 $u_{\alpha_0} u_{\alpha_1 - \beta}$ 是可逆的，如命题 2.11 所述。

归纳步骤。 假设类 v_S 已为第 $i - 1 \geq 1$ 层构造完成；也就是说，对于每个子集

$$S' = \{i - 1 \geq j_k > j_{k-1} > \cdots > j_0 \geq 0\} \subseteq [i - 1],$$

存在一个类 $v'_S \in \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E\mathcal{F}_{(i-1)+}; \mathbb{F}_p)$。

现在令

$$S = \{i \geq l_m > l_{m-1} > \cdots > l_0 \geq 0\} \subseteq [i].$$

我们定义 v_S 如下:

$$v_S = \begin{cases} \text{the preimage of } v_S \in \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{(i-1)+};\underline{\mathbb{F}_p}), & \text{if } l_m \neq i, \\ u_{\alpha_i-\beta}\, v_{\{l_{m-1},\dots,l_0\}}, & \text{if } l_m = i. \end{cases}$$

后一个表达式属于 $\mathrm{Ker}(\partial^{\bigstar}_{i-1})$，因此该类在 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\mathbb{F}_p)$ 中定义良好。

对于 $S=[i]$，相应的元素 v_i 是类 $u_{\alpha_i-\beta}v_{i-1}$ 的原像。由于$u_{\alpha_i-\beta}v_{i-1}$ 及其逆元属于 $\mathrm{Ker}\,\partial^{\bigstar}_{i-1}$。因此 v_i 也是可逆的。□

同样，下面的命题构造了对应于 $[i]$ 的一个子集的新类。

2.15. **命题**。设 $2\le i\le p-1$，且 $Q\subseteq[i]$ 是一个基数至少为三的子集。则存在类

$$w_Q,\ z_Q\ \in\ \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\underline{\mathbb{F}_p}).$$

2.16. 注记。在上述命题中，我们可以如下定义基数为二的集合对应的这些类:

$$\begin{cases} w_{\{s<t\}} = \kappa_{\alpha_s}\kappa_{\alpha_t} \\ z_{\{s<t\}} = \kappa_{\alpha_s}a_{\alpha_t} - \kappa_{\alpha_t}a_{\alpha_s} \end{cases}$$

命题 *2.15* 的证明。选取 Q 中满足 $s_0=\min(Q)$ 的相邻元素 $s_0<s_1$。考虑 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\mathbb{F}_p)$ 中由下式给出的类

$$\kappa_{\alpha_{s_0}}\kappa_{\alpha_{s_1}}\prod_{\substack{l\in Q\\ l\neq s_0,s_1}}\frac{u_{\alpha_l}}{u_\beta},\qquad \left(\kappa_{\alpha_{s_0}}a_{\alpha_{s_1}}-\kappa_{\alpha_{s_1}}a_{\alpha_{s_0}}\right)\prod_{\substack{l\in Q\\ l\neq s_0,s_1}}\frac{u_{\alpha_l}}{u_\beta}.$$

令 w_Q 和 z_Q 分别为它们在从 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\mathbb{F}_p)$ 到 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\mathbb{F}_p)$ 的典范映射下的原像。

这些原像的存在性可通过对 i 归纳得到，其构造与命题 2.13 中类的构造类似。基例出现在 $i=2$ 处，此时对于 $Q=[2]$，相应的类是以下元素的原像

$$\kappa_{\alpha_0}\kappa_{\alpha_1}u_{\alpha_2-\beta},\qquad \left(\kappa_{\alpha_0}a_{\alpha_1}-\kappa_{\alpha_1}a_{\alpha_0}\right)u_{\alpha_2-\beta}.$$

□

将新引入的类与命题 2.12 结合起来，即可计算 $1\le i\le p-2$ 对应的边界映射 $\partial^{\bigstar}_i$ 的核，从而得到相应的布雷登上同调 $\mathrm{P}(\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\mathbb{F}_p))$:

2.17.**定理**。$\mathcal{G}$–分次布雷登上同调的$\mathrm{RO}(\mathcal{G})$多项式部分由下式给出

$$\mathrm{P}(\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\underline{\mathbb{F}_p}))\ \cong\ \frac{\mathbb{F}_p\left[a_\beta,u_\beta,\kappa_\beta,a_{\alpha_\ell},\kappa_{\alpha_\ell},a_{\alpha_j},\kappa_{\alpha_j},v_S,z_Q,w_Q,v_i^{\pm},u^{\pm}_{\alpha_j-\beta}\colon \ell\in[i],j\in[p-1]\setminus[i]\right]}{\mathfrak{J}_i},$$

此外，对于 $i=p-1$

$$\mathrm{P}(\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\underline{\mathbb{F}_p}))\ \cong\ \frac{\mathbb{F}_p\left[a_\beta,u_\beta,\kappa_\beta,a_{\alpha_\ell},\kappa_{\alpha_\ell},v_S,z_Q,w_Q,v^{\pm}_{p-1}\colon \ell\in[i]\right]}{\mathfrak{J}_{p-1}},$$

其中， S 和 Q 分别遍历 $[i]$中基数至少为一和至少为三的子集。 $\mathfrak{J}_i$ 表示可从映射 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\ \mathbb{F}_p) \to \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\ \mathbb{F}_p)$拉回的类的关系：

$$
\begin{aligned}
&a_{\alpha_l} \mapsto (y_0 - l y_1)\, u_{\alpha_l}, && \kappa_{\alpha_l} \mapsto (t_0 - l t_1)\, u_{\alpha_l},\\
&a_{\beta} \mapsto y_1\, u_{\beta}, && \kappa_{\beta} \mapsto t_1\, u_{\beta},\\
&w_Q \mapsto \kappa_{\alpha_{s_0}} \kappa_{\alpha_{s_1}} \prod_{d \in Q\setminus\{s_0,s_1\}} \frac{u_{\alpha_d}}{u_\beta}, && z_Q \mapsto \left(\kappa_{\alpha_{s_0}} a_{\alpha_{s_1}} - \kappa_{\alpha_{s_1}} a_{\alpha_{s_0}}\right) \prod_{d \in Q\setminus\{s_0,s_1\}} \frac{u_{\alpha_d}}{u_\beta}\\
&v_S \mapsto \frac{\prod_{j\in S} u_{\alpha_j}}{u_\beta^{|S|-1}}
\end{aligned}
$$

证明。 上述表达式源于命题 2.11 中所用的类似事实，即任一类属于核 $\partial^{\bigstar}_{i-1}$ 当且仅当存在 $y \in \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\ \mathbb{F}_p)$，使得$\eta^{\bigstar}_{i-1}(x) = q_i^{\bigstar}(y)$，由此得到核 $\partial^{\bigstar}_{i-1} = (\eta^{\bigstar}_{i-1})^{-1}(\operatorname{Im}\ \eta^{\bigstar}_{i-1} \cap \operatorname{Im} q_i^{\bigstar})$。命题 2.13 与命题 2.15 给出了此类的存在性，而关系 $\mathfrak{J}_i$则源于如下事实：该映射

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\underline{\mathbb{F}_p}) \to \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{G}_+;\underline{\mathbb{F}_p})$$

对于多项式部分 $\mathrm{P}(\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}_{i+};\mathbb{F}_p))$ 是一个单射映射。 □

2.18. **布雷登上同调：** $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$. 典范投影

$$\pi\colon C_p \times C_p \longrightarrow C_p \times C_p/(1 \times C_p)$$

在表示环上诱导一个拉回同态

$$\pi^*\colon \mathrm{RO}(C_p \times C_p/(1 \times C_p)) \longrightarrow \mathrm{RO}(C_p \times C_p).$$

这使我们能够沿着 π 联系上同调理论：

2.19. **命题**。 设 $\alpha \in \operatorname{im}(\pi^*)$，则存在自然等价关系

$$\widetilde{H}^{\pi^*(\alpha)}_{C_p\times C_p}(X;\underline{\mathbb{F}_p}) \ \cong\ \widetilde{H}^{\alpha}_{C_p}(X/(1 \times C_p);\underline{\mathbb{F}_p}),$$

其中右侧是商空间$X/(1 \times C_p)$的$\mathrm{RO}(C_p)$-分次布雷登上同调。

证明。 根据通过 G-谱定义布雷登上同调的方式，我们有：

$$[X, S^{\pi^*(\alpha)} \wedge H\underline{\mathbb{F}_p}]^{C_p\times C_p} \cong [X, \pi^*(S^\alpha \wedge H\underline{\mathbb{F}_p})]^{C_p\times C_p} \cong [X/(1 \times C_p), S^\alpha \wedge H\underline{\mathbb{F}_p}]^{C_p}.$$

由此便得证。 □

特别地，若取 $\bigstar_\beta \in \mathbb{Z}\{1,\beta\} = \mathrm{RO}(\mathcal{G}/(1 \times C_p))$，则对 $X = E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+$应用命题 2.19 可得：

$$\widetilde{H}^{\bigstar_\beta}_{C_p}(B_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\underline{\mathbb{F}_p}) \ \cong\ \widetilde{H}^{\bigstar_\beta}_{\mathcal{G}}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\underline{\mathbb{F}_p}).$$

由于定理 2.17 已明确给出了 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\mathbb{F}_p)$ 的多项式部分，我们可以利用这一描述来计算 $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的布雷登上同调的多项式部分。

2.20.**命题**。 $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的 $RO(C_p)$–分次布雷登上同调的多项式部分为

$$\mathrm{P}(\widetilde{H}^{\bigstar^\beta}_{C_p}(B_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\underline{\mathbb{F}_p})) \;=\; \mathbb{F}_p[a_\beta,u_\beta,\kappa_\beta,\nu,c,b,\eta,\xi,\omega]/\sim,$$

模去由以下各类生成的理想:

(1) $c^p-u_\beta b-a_\beta^{p-1}c^{p-1}$

(2) $\nu^2,\xi^2,\eta^2,\omega^2,\kappa_\beta^2$

(3) $\nu\xi,\nu\eta,\kappa_\beta\xi,\xi\eta$

证明。 定义以下各类:

$$\nu \;=\; \frac{\kappa_{\alpha_0}v_{\{p-1,p-2,\dots,1\}}}{v_{p-1}}, \qquad c \;=\; \frac{a_{\alpha_0}v_{\{p-1,p-2,\dots,1\}}}{v_{p-1}},$$

$$b \;=\; \frac{a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_{p-1}}}{v_{p-1}}, \qquad \xi \;=\; \frac{w_{[p-1]}}{v_{p-1}},$$

$$\eta \;=\; \frac{z_{[p-1]}}{v_{p-1}}, \qquad \omega \;=\; \frac{\kappa_{\alpha_0}a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_{p-1}}}{v_{p-1}}.$$

上述多项式代数生成了 P($\widetilde{H}^{\bigstar^\beta}_{\mathcal{G}}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\,\mathbb{F}_p)$) 中所有 $\bigstar_\beta\in\mathbb{Z}\{1,\beta\}$–分次的类，因而描述了 $\widetilde{H}^{\bigstar^\beta}_{C_p}(B_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\mathbb{F}_p)$. □的多项式部分

3. Bredon cohomology of $E_{C_2}\mathbb{Z}/2$

现在我们以类似的方式计算 $p=2$ 这一情形。这里 $\mathcal{K}_4$ 表示克莱因四元群 $C_2\times C_2$。在这种情况下，非平凡的不可约表示记为 α_0、 α_1 和 β，其核分别为子群 $H_0=\langle a\rangle$、 $H_1=\langle ab\rangle$ 和 $K=\langle b\rangle$。与奇素数 p 的情形不同，这些都是一维实表示。

为了研究 $E_{C_2}\mathbb{Z}/2$ 的 RO($\mathcal{K}_4$):$=\mathbb{Z}\{1,\alpha_0,\alpha_1,\beta\}$–分次布雷登上同调，我们利用引理 2.8 中所述的万有空间之间的关系。利用引理 2.8 中与族 $\mathcal{F}_0:=\{1,H_0\}$ 和 $\mathcal{F}_1:=\{1,H_1\}$ 相对应的长正合列，可得如下图表，其中两行均为正合列，这与 (2.9) 类似:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2}) & \xrightarrow{j_1^\star} & \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(E\mathcal{F}(H_0)_+;\underline{\mathbb{F}_2}) & \xrightarrow{\partial^\star} & \widetilde{H}^{\bigstar+1}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{F}\langle H_1\rangle;\underline{\mathbb{F}_2})\cdots. \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_1^\star} & & \downarrow{\scriptstyle q_0^\star} & & \downarrow{\scriptstyle =} \\
\cdots\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{F}(H_1)_+;\underline{\mathbb{F}_2}) & \xrightarrow{q_1^\star} & \widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{K}_{4+};\underline{\mathbb{F}_2}) & \xrightarrow{\bar\partial^\star} & \widetilde{H}^{\bigstar+1}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{F}\langle H_1\rangle;\underline{\mathbb{F}_2})\cdots
\end{array} \tag{3.1}$$

采用类似的方法，可以得到空间 $E\mathcal{K}_4$、 $E\mathcal{F}(H_i)$ 和 $E\mathcal{F}\langle H_i\rangle$ 的布雷登上同调的如下计算结果:

3.2.**命题**。 $E\mathcal{K}_4$、 $E\mathcal{F}(H_i)$和 $E\mathcal{F}\langle H_i\rangle$ 的布雷登上同调为:

(1)

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{K}_{4+};\underline{\mathbb{F}_2}) = \frac{\mathbb{F}_2[a_{\alpha_0},a_{\alpha_1},a_\beta,u_{\alpha_0}^{\pm},u_{\alpha_1}^{\pm},u_\beta^{\pm}]}{(a_{\alpha_0}u_{\alpha_1}u_\beta+u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}u_\beta+u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}a_\beta)}$$

(2) 对于 $i,j\in\{0,1\}$,

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{F}(H_i)_+;\underline{\mathbb{F}_2})=\mathbb{M}_2(\beta)\otimes\mathbb{F}_2[a_{\alpha_i},u^{\pm}_{\alpha_i},u^{\pm}_{\alpha_j-\beta}\colon j\neq i],$$

(3) 对于 i、$j\in\{0,1\}$,

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{F}\langle H_i\rangle;\underline{\mathbb{F}_2})\cong\mathbb{F}_2\left\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}}\colon k_1,k_2\geq 1\right\rangle$$
$$\bigoplus\Sigma^{-1}u_\beta^{-1}\,\mathbb{F}_2\left[a_{\alpha_i},\,a_{\alpha_j},\,a_\beta,\,\left(\tfrac{u_{\alpha_j}}{u_\beta}\right)^{\pm},\,u^{\pm}_{\alpha_i},\,u_\beta^{-1}\colon j\neq i\right]\mod \operatorname{Im}q_i^{\bigstar}.$$

正如在命题 2.10 中对奇素数 p 所证明的，在整数层次上，j_1^*（在图表 (3.1) 中）是一个零态射。因此，我们得到如下对 $E_{C_2}\mathbb{Z}/2$ 的 $\mathbb{Z}$-分次上同调的描述:

3.3.**命题**。 等变万有空间的整数分次布雷登上同调由下式给出:

$$\widetilde{H}^*_{\mathcal{G}}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2})\cong\Sigma^{-1}\frac{a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}{u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}}\mathbb{F}_2[\frac{a_\beta}{u_\beta},\frac{a_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}},\frac{a_{\alpha_1}}{u_{\alpha_1}}]/\sim\cong\Sigma^{-1}\frac{a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}{u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}}\mathbb{F}_2[\frac{a_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}},\frac{a_{\alpha_1}}{u_{\alpha_1}}]$$

其中，$\sim$ 是由关系 $a_{\alpha_0}u_{\alpha_1}u_\beta+a_{\alpha_1}u_{\alpha_0}u_\beta+a_{\beta_0}u_{\alpha_1}u_{\alpha_0}=0$ 导出的。

下面的命题确立了一个可逆类 v 的存在性，它所扮演的角色类似于命题 2.13 中出现的类。

3.4. **命题**。 存在一个次数为$\bigstar=\alpha_0+\alpha_1-\beta-1$的可逆类 $v\in\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E_{\underline{C_2}}\mathbb{Z}/2_+;\mathbb{F}_2)$，它在 $j_1^{\bigstar}$ 下映至 $u_{\alpha_0}u_{\alpha_1-\beta}$。此外，以下恒等式成立:

(1) $vu_\beta=u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}$,
(2) $va_\beta=a_{\alpha_0}u_{\alpha_1}+u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}$.

证明。 对于次数 $\bigstar=k(\alpha_0+\alpha_1-1-\beta)$，可以验证类

$$u^k_{\alpha_0}u^k_{\alpha_1-\beta}$$

对每个 $k\in\mathbb{Z}$都属于 (3.1) 中 $\operatorname{Ker}(\partial^{\bigstar})$。因此，存在一个可逆类$v$，定义为 $u_{\alpha_0}u_{\alpha_1-\beta}$ 在映射 $j_1^{\bigstar}$ 下的原像。

对于这些关系，注意到 $j_1^{\bigstar}$ 在次数 $\bigstar=\alpha_0+\alpha_1-2$和 $\bigstar=\alpha_0+\alpha_1-1$上是同构，因为 $E\mathcal{F}\langle H_1\rangle$ 的上同调在 (3.1) 中对应的次数上消失。在经由 $j_1^{\bigstar}$ 得到的这一识别下，生成元对应如下:

$$u_{\alpha_0}\mapsto u_{\alpha_0},\qquad u_{\alpha_1}\mapsto u_{\alpha_1-\beta}u_\beta,\qquad a_{\alpha_0}\mapsto a_{\alpha_0},\qquad a_{\alpha_1}\mapsto\left(\frac{a_{\alpha_0}}{u_{\alpha_0}}u_\beta-a_\beta\right)u_{\alpha_1-\beta}.$$

□

为了计算 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\mathbb{F}_2)$，可以考虑以下短正合列:

$$0\to\operatorname{Coker}\partial^{\bigstar-1}\to\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2})\to\operatorname{Ker}\partial^{\bigstar}\to 0 \tag{3.5}$$

作为 $\mathbb{F}_2$ 上的向量空间。下面的命题给出了两侧的对象 :

3.6.**命题**。 由(3.5)中的短正合列得到的连接同态 $\partial^\bigstar : \widetilde{H}^\bigstar_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{F}(H_0)_+;\mathbb{F}_2) \to \widetilde{H}^{\bigstar+1}_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{F}\langle H_1\rangle;\mathbb{F}_2)$ 的核与余核如下：

(1) 核为：

$$\mathrm{Ker}(\partial^\bigstar) = \mathbb{F}_2[a_\beta, u_\beta, u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, a_{\alpha_0}, ((a_{\alpha_0}/u_{\alpha_0})u_\beta - a_\beta)u_{\alpha_1-\beta}, (u_{\alpha_0}u_{\alpha_1-\beta})^{\pm}] \bigoplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}} : k_1,k_2\geq 1\right\rangle [a_{\alpha_0}, u_{\alpha_0}^{\pm}, u_{\alpha_1-\beta}^{\pm}].$$

(2) 余核为：

$$\mathrm{Coker}(\partial^\bigstar) = \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j}u_\beta^{k}} : j,k\geq 1\right\rangle [a_{\alpha_1}, u_{\alpha_1}^{\pm}, u_{\alpha_0-\beta}^{\pm}] \bigoplus \Sigma^{-1}u_\beta^{-1}\mathbb{F}_2\left[a_{\alpha_0}, a_{\alpha_1}, \frac{a_\beta}{u_\beta}, \frac{u_{\alpha_1}}{u_\beta}, \frac{u_{\alpha_0}}{u_\beta}, \left(\frac{u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}}{u_\beta}\right)^{\pm}, u_\beta^{-1}\right] / \sim$$

其中，$\sim$ 表示由 $q_1^\bigstar$ 的像以及$\widetilde{H}^\bigstar_{\mathcal{K}_4}(E\mathcal{K}_{4+};\ \mathbb{F}_2)$的内部结构所产生的等价关系。

证明。 证明过程与命题 2.11 相同。 □

利用该环的平方零扩张结构，我们得到 $E_{C_2}\mathbb{Z}/2$ 的上同调的完整描述：

3.7.**定理**。存在一个分次环同构：

$$\widetilde{H}^\bigstar_{\mathcal{G}}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2}) \cong \frac{\left[\mathbb{F}_2[a_\beta,u_\beta]\oplus \mathbb{F}_2\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k} : j,k\geq 1\rangle\right][a_{\alpha_0},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_1},v^{\pm}]}{(vu_\beta - u_{\alpha_0}u_{\alpha_1},\ va_\beta - (a_{\alpha_0}u_{\alpha_1}+u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}))}$$

其中，v 是次数为 $\alpha_0+\alpha_1-\beta-1$ 的可逆类，如命题 *3.4* 中所构造。

证明。证明通过利用以下识别，展示 Ker($\partial^\bigstar$) 和 Coker($\partial^\bigstar$) 作为环 $\mathbb{F}_2[a_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1},v^{\pm}]$ 上的模的显式同构：

(1) 对于核：

$$\mathbb{F}_2\left\langle \frac{u_{\alpha_1}^\ell}{v^\ell}\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^{k+\ell}}\right\rangle [a_{\alpha_0},u_{\alpha_0},v^{\pm}] \oplus \mathbb{F}_2[a_\beta,u_\beta,a_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1},v^{\pm}].$$

对于 $\ell\geq 0$ 和 $j,\ k\geq 1$。

这通过 $\partial^\bigstar$ 下的基层级对应以及以下关系得出：

$$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\mapsto \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k},\quad u_{\alpha_1}^a\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^{k+a}}\mapsto u_{\alpha_1-\beta}^a\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k},\quad v^a\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\mapsto u_{\alpha_0}^a u_{\alpha_1-\beta}^a\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}.$$

（2）对于余核：

$$\mathbb{F}_2\left\langle \frac{u_{\alpha_1}^k a_{\alpha_0}^{k+a}}{v^{k+a}}\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+a+k}u_\beta^k}\right\rangle[a_{\alpha_1},u_{\alpha_1},v^{\pm}]$$

$$\oplus\,\mathbb{F}_2\left\langle u_{\alpha_0}^a u_{\alpha_1}^b\left(\frac{u_{\alpha_1}a_{\alpha_0}}{v}\right)^{a+b+m+n}\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{n+a+b}u_\beta^{n+m+a+b}}\right\rangle[a_{\alpha_0},a_{\alpha_1},v^{\pm}].$$

对于 $j,\ k,\ n\geq 1$和 $a,\ b,\ m\geq 0$。

这可由类似的对应关系推出：

$$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\mapsto\left(\frac{u_{\alpha_1}a_{\alpha_0}}{v}\right)^k\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+k}u_\beta^k},$$

$$\Sigma^{-1}u_{\alpha_0}^a u_{\alpha_1}^b u_\beta^{-(a+b+n+m)}a_\beta^m\mapsto u_{\alpha_0}^a u_{\alpha_1}^b\left(\frac{u_{\alpha_1}a_{\alpha_0}}{v}\right)^{m+n+a+b}\cdot\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{n+a+b}u_\beta^{m+n+a+b}}$$

□

利用命题 2.19，我们得到命题 2.20 在情形 $p=2$下的类似结论。在这种情况下，所有次数为 $\bigstar_\beta\in\mathbb{Z}\{1,\beta\}$ 的类都已明确确定。

3.8.**推论**。存在一个$\mathrm{RO}(C_2)$-分次 $\mathbb{F}_2$-代数同构：

$$\widetilde{H}_{C_2}^{\bigstar_\beta}(B_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2})\ \cong\ \frac{\left[\mathbb{F}_2[a_\beta,u_\beta]\oplus\bigoplus_{j,k\geq 1}\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\rangle\right][c,b]}{(c^2=a_\beta c+u_\beta b)}.$$

证明。在 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\mathbb{F}_2)$ 中，我们有：

$$a_\beta=v^{-1}(u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}+a_{\alpha_0}u_{\alpha_1}),\quad u_\beta=v^{-1}u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}.$$

现在定义

$$c:=v^{-1}u_{\alpha_0}a_{\alpha_1},\quad b:=v^{-1}a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}.$$

直接计算可得：

$$c^2=(v^{-1}u_{\alpha_0}a_{\alpha_1})^2=v^{-2}u_{\alpha_0}^2a_{\alpha_1}^2,$$

而

$$a_\beta c+u_\beta b=v^{-1}(u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}+a_{\alpha_0}u_{\alpha_1})\cdot v^{-1}u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}+v^{-1}u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}\cdot v^{-1}a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}.$$

两边化简后得到相同的表达式，因此所声称的关系成立。 □

4. The ring structure of $\widetilde{H}_{C_p\times C_p}^{\bigstar}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})$

本节将计算点关于常值麦基函子 $\mathbb{F}_p$ 系数的 RO($\mathcal{G}$)–分次布雷登上同调。我们的方法遵循*Tate* 方形 形式主义 [14], ，其输入来自定理 2.17 和定理 3.7 中等变万有空间 $E_{C_p}\mathbb{Z}/p$ 的上同调。我们首先考察奇素数 p 的情形，此时定理 2.17 描述了环 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\mathbb{F}_p)$ 的多项式部分 P($\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\mathbb{F}_p)$)。对于 $p=2$，随后我们将明确描述点的上同调中的所有类。

4.1. **对于奇素数** p。

下面是一个 $\mathcal{G}$–谱的同伦拉回图：

(4.2)

$$\begin{array}{ccccc} E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge H\underline{\mathbb{F}_p} & \xrightarrow{\quad f\quad} & H\underline{\mathbb{F}_p} & \longrightarrow & \widetilde{E_{C_p}\mathbb{Z}/p}\wedge H\underline{\mathbb{F}_p} \\ \simeq\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge \mathbf{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\underline{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\mathbb{F}_p)\underline{\quad} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \widetilde{E_{C_p}\mathbb{Z}/p}\wedge \mathbf{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\underline{\mathbb{F}_p}) \end{array}$$

它被称为 $Tate$ 图表。同样的方法已被用于各种计算，其中一些最重要的例子是 $\pi_\star H\mathbb{Z}$ 对于 $G=C_2$ 在 [13],$\pi_\star H\mathbb{Z}/p$ 对于 $G=C_p$ 在 [5]。

此处，左侧竖直映射是 $\mathcal{G}$–谱的等价关系 [14]，底行是通过对顶行 (4.2) 应用函数谱 $\mathbf{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, -)$ 得到的。因此，$E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge H\mathbb{F}_p$ 的同伦群可计算为底行的同伦拉回。

我们从 $\mathbf{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\mathbb{F}_p)$ 开始计算，$\pi_\star\,\mathbf{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, \mathbb{F}_p)$ 由定理 2.17 给出，连同由因子R表示的非多项式类

$$\pi_\star\,\mathrm{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, \underline{\mathbb{F}_p}) = \frac{\mathbb{F}_p\big[a_\beta, u_\beta, \kappa_\beta, a_{\alpha_\ell}, \kappa_{\alpha_\ell}, v_S, z_Q, w_Q, v_{p-1}^{\pm} \mid \ell\in[i]\big]}{\mathfrak{J}_{p-1}}\bigotimes R. \tag{4.3}$$

Since $\widetilde{E_{C_p}\mathbb{Z}/p}\simeq S^{\infty V}$ for $V=\bigoplus_{0\le r\le p-1}\alpha_r$,

$$\pi_\star\big(\widetilde{E_{C_p}\mathbb{Z}/p}\wedge\mathrm{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\underline{\mathbb{F}_p})\big) \;=\; \pi_\star\,\mathrm{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\underline{\mathbb{F}_p})\big[a_{\alpha_r}^{\pm 1} \;:\; 0\le r\le p-1\big].$$

这里 $\mathcal{L}_\star$ 是在由类 $\{a_{\alpha_r}\mid 0\le r\le p-1\}\cup\{1\}$ 生成的乘法集处的局部化。因此，$\pi_\star\big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p\wedge\mathbf{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\mathbb{F}_p)\big)$中那些不在 $\mathcal{L}_\star$ 的像中的元素，恰好是那些在分母中至少含有一个因子a_{α_r} 的元素。

利用 Tate 方形中左侧竖直映射的等价关系，我们得到如下结果：

4.4.**命题**。 存在一个同构

$$\pi_\star\big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}\big) \;\cong\; \left[\frac{\mathbb{F}_p[a_\beta,\kappa_\beta,u_\beta]}{(\kappa_\beta^2)}\;\otimes\;\bigoplus_{1\le i\le p-1} Q_i\right] \quad (\textit{modulo } \mathrm{Im}(\ell_\star))$$

$$\bigoplus R_C\bigoplus \mathrm{Ker}\,\mathcal{L}_\star$$

其中每个 Q_i 由下式描述

$$Q_i \;=\; \bigoplus_{\substack{|S_i|=i\\ S_i\subset[p-1]}} \mathbb{F}_p\Big\langle \Sigma^{-1}\Big(\frac{1}{\prod_{s\in S_i}a_{\alpha_s}}\Big)\Big\rangle\big[a_{\alpha_n},\, a_{\alpha_j}^{-1},\, \kappa_{\alpha_\ell},\, v_S,\, z_Q,\, w_Q,\, v_{p-1}^{\pm}\big],$$

with

$$j\in S_i,\qquad n\in[p-1]\setminus S_i,\qquad 0\le\ell\le p-1,$$

且 S 和 Q 遍历 $[p-1]$的非空子集，其中 Q 的基数至少为三， R_C 表示与直和项 R对应的 $\mathcal{L}_\star$ 的余核。

同样，为了确定 $\pi_\star\big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{F}_p\big)$， 只需计算次数 $\bigstar_\beta \in \mathbb{Z}\{1,\beta\}$. 作为 (4.2) 中上方余纤维序列的推论，映射的计算

$$f_{\bigstar_\beta}\colon \pi_{\bigstar_\beta}\Big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_p}\Big) \longrightarrow \pi_{\bigstar_\beta} H\underline{\mathbb{F}_p}$$

提供所需信息并得出预期结果，其中定义域环的表达式可通过从上述表达式中分离出所有 $\bigstar_\beta$–次数类并对这些关系取模得到。由于 $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_{\bigstar_\beta} \subset \widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar_\beta}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\mathbb{F}_p) \cong \widetilde{H}_{C_p}^{\bigstar_\beta}(B_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\mathbb{F}_p)$， $B_{C_p}\mathbb{Z}/p$的 RO(C_p)–分次 Bredon 上同调为

4.5.**命题**。 [19, 命题 6] 对于奇素数 p，布雷登上同调$\widetilde{H}_{C_p}^{\bigstar_\beta}(B_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\mathbb{F}_p)$ 同构于

$$\left[\frac{\mathbb{F}_p[a_\beta,u_\beta,\kappa_\beta]}{(\kappa_\beta^2)} \bigoplus_{j_1,j_2>0} \mathbb{F}_p\langle \Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^\epsilon}{a_\beta^{j_1}u_\beta^{j_2}}\rangle\right][b] \bigotimes \Lambda_{\mathbb{F}_p}[\omega] \bigoplus \left[\Sigma^{\beta-2}\left[\mathbb{F}_p\langle u_\beta,\kappa_\beta\rangle[a_\beta,u_\beta] \bigoplus_{j_1,j_2>0} \mathbb{F}_p\langle \Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^\epsilon}{a_\beta^{j_1}u_\beta^{j_2}}\rangle \bigoplus \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta}\mathbb{F}_p[\frac{1}{a_\beta}]\right][c,b]\right]/(u_\beta b - c^p + a_\beta^{p-1}c) \bigotimes \mathbb{F}_p\langle c,\nu\rangle$$

其中 $|b| = (p-1)\beta+2$, $|\omega| = (p-1)\beta+1$, $|c| = \beta$ 以及 $|\nu| = \beta-1$。

4.6.**命题**。 局部化映射 $\mathcal{L}_\star$ 的核限制在$\bigstar_\beta \in \mathbb{Z}\{1,\beta\}$ 次数上是平凡的，即

$$\operatorname{Ker}\mathcal{L}_{\bigstar_\beta} = 0.$$

证明。 注意，根据 Tate 方形 (4.2) 中左侧竖直箭头的等价关系，我们可以将 $\pi_\star E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+ \wedge H\mathbb{F}_p \cong \operatorname{Ker}\ \mathcal{L}_\star \oplus \Sigma^{-1}$ 余核$\mathcal{L}_{\star+1}$. 识别为。因此复合映射

$$\operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star \hookrightarrow \pi_\star E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_p} \to \pi_\star \operatorname{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\underline{\mathbb{F}_p})$$

是单射。特别地，如果 $x \in$核 $\mathcal{L}_{\bigstar_\beta}$ 非零，那么它在$\pi_{\bigstar_\beta}\operatorname{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\mathbb{F}_p)$ 中的像 $f_{\bigstar_\beta}(x)$ 也非零。

首先，假设 $f_{\bigstar_\beta}(x)$ 由一个多项式类表示。由于 (2.9) 中间的垂直映射在多项式类上作用为恒等式，因此 $f_{\bigstar_\beta}(x)$ 在局部化下的像非零。这与 (2.9) 中左侧方块的交换性矛盾，因为 x 属于 $\mathcal{L}_{\bigstar_\beta}$ 的核。因此，这种情况不可能发生。

接下来只需考虑这样的情形： $f_{\bigstar_\beta}(x)$ 是形如 $\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^\epsilon}{a_\beta^j u_\beta^k}$. 的非多项式类。根据命题 4.5, 这样的类只能映射到以下对象之一

元素：

$$\Big\{b^\ell\omega^{\epsilon_1}\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^{\epsilon_0}}{a_\beta^{j_1}u_\beta^{k_1}},\ c^nb^\ell\Sigma^{\beta-3}\frac{\kappa_\beta^{\epsilon_0}}{a_\beta^{j_1}u_\beta^{k_1}},$$
$$\nu c^mb^\ell\Sigma^{\beta-3}\frac{\kappa_\beta^{\epsilon_0}}{a_\beta^{j_1}u_\beta^{k_1}},\ c^nb^\ell\Sigma^{\beta-3}\frac{1}{a_\beta^{j_1}},\ \nu c^mb^\ell\Sigma^{\beta-3}\frac{1}{a_\beta^{j_1}}\Big\},$$

其中 $\epsilon_0,\epsilon_1\in\{0,1\}$、 $n,j_1,k_1\geq 1$，以及 $\ell,m\geq 0$。若竖直映射将 $\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^{\epsilon}}{a_\beta^{j}u_\beta^{k}}$映到自身，则局部化再次产生一个非零类，这与 $x\in$核 $\mathcal{L}_{\bigstar_\beta}$ 矛盾。对其余所有可能性，次数方面的考虑迫使 $j_1>j$。利用乘法结构，这意味着竖直映射会把零类映到一个非零类，而这是不可能的。

因此，核 $\mathcal{L}_{\bigstar_\beta}$ 中不可能存在非零元素，从而该结论成立。 □

因此， $\pi_{\bigstar_\beta}\Big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}\Big)$ 的表达式由下式给出

$$\pi_{\bigstar_\beta}\Big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}\Big)\ =\ \left[\frac{\mathbb{F}_p[a_\beta,\kappa_\beta,u_\beta]}{(\kappa_\beta^2)}\ \otimes\bigoplus_{1\leq i\leq p-1}R_i\right]\ \bmod\ (\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_\bigstar)\bigoplus R_{C_\beta}$$

其中 R_i 由下式给出

$$R_i=\bigoplus_{\substack{|S_i|=i\\ S_i\subset[p-1]}}\left[\mathbb{F}_p\left\langle\Sigma^{-1}\frac{v_{S_i}}{\prod_{s\in S_i}a_{\alpha_s}},\ \Sigma^{-1}\frac{\kappa_{\alpha_{m_1}}v_{S_i\setminus\{m_1\}}}{\prod_{s\in S_i}a_{\alpha_s}},\ \Sigma^{-1}\frac{\kappa_{\alpha_{m_1}}\kappa_{\alpha_{m_2}}v_{S_i\setminus\{m_1,m_2\}}}{\prod_{s\in S_i}a_{\alpha_s}},\right.\right.$$
$$\left.\left.\Sigma^{-1}\frac{w_{L_i}v_{S_i\setminus L_i}}{\prod_{s\in S_i}a_{\alpha_s}},\ \Sigma^{-1}\frac{z_{L_i}v_{S_i\setminus L_i}}{\prod_{s\in S_i}a_{\alpha_s}},\ \Sigma^{-1}\frac{\kappa_{\alpha_{m_1}}z_{D_i}v_{S_i\setminus(D_i\cup\{m_1\})}}{\prod_{s\in S_i}a_{\alpha_s}}\right\rangle\right]$$
$$\otimes\ \mathbb{F}_p\left[\frac{v_{E_i}}{\prod_{s\in E_i}a_{\alpha_s}},\ \frac{\kappa_{\alpha_j}}{a_{\alpha_j}},\ \frac{w_{T_i}}{\prod_{s\in T_i}a_{\alpha_s}},\ \frac{z_{T_i}}{\prod_{s\in T_i}a_{\alpha_s}}\right],$$

其中

$$L_i,D_i,E_i,T_i\subset S_i,\qquad |L_i|,|D_i|,|T_i|\geq 3,\qquad j,m_1,m_2\in S_i\text{ with }m_1\notin D_i,$$

R_{C_β} 是将 R_C 中次数为 $\bigstar_\beta$的类分离出来后得到的相应部分。

4.7.注记。 (1) 尽管中间表达式中可能出现其他类，但利用关系可以证明它们都与上面列出的类相同。(2) 对于 R_1 和 R_2，出现的项较少，因为相应的集合不含基数至少为三的子集。

4.8.**命题。** 诱导的环同态 $f_{\bigstar_\beta}$ 是平凡的，其中根据命题 *2.19*，陪域为

$$\pi_{\bigstar_\beta}H\underline{\mathbb{F}_p}\ =\ \frac{\mathbb{F}_p[a_\beta,\kappa_\beta,u_\beta]}{(\kappa_\beta^2)}\bigoplus_{j,k\geq 1}\mathbb{F}_p\{\Sigma^{-1}\frac{\kappa_\beta^{\epsilon}}{a_\beta^{j}u_\beta^{k}}\}$$

证明。 $f_{\bigstar_\beta}$ 是平凡的，因为没有任何类能够通过中间垂直映射 (4.2) 命中 $\pi_{\bigstar_\beta} H\mathbb{F}_p$ ：所有类都非平凡地映射，但 $\pi_{\bigstar_\beta} E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+ \wedge H\mathbb{F}_p$中的所有类都来自余核 $\mathcal{L}_{\bigstar_\beta+1}$，因此这与 (4.2) 中左方交换图的交换性相矛盾。□

由上述命题以及 Tate 方形 (4.2) 中的顶层余纤维序列可得

$$\pi_\bigstar\big(\widetilde{E_{C_p}\mathbb{Z}/p}\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}\big) = \left[\pi_{\bigstar_\beta} H\underline{\mathbb{F}_p} \bigoplus \Sigma\,\pi_{\bigstar_\beta-1}\big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}\big)\right] \otimes \mathbb{F}_p[a_{\alpha_r}^{\pm 1} \mid 0\le r\le p-1].$$

在接下来的几个命题中，我们构造核 Ker($\partial_\bigstar$) 中显式的新类，它们类似于命题 2.13 和 2.15 中描述的类。

首先，我们证明类 $k_{S_i}^{(i)}$ 的存在性。对于子群 H_i，该类类似于命题 2.13 中先前定义的类 v_S 。

4.9. **命题**。设 $0\le i\le p-1$，对于 $[p]\setminus\{i\}$ 的每个基数至少为二的有序子集 S_i，存在一个类 $k_{S_i}^{(i)}$，属于 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(S^0;\mathbb{F}_p)$，且具有以下性质

$$k_{S_i}^{(i)} u_{\alpha_i}^{|S_i|-1} - \prod_{j\in S_i} u_{\alpha_j} = 0 \tag{4.10}$$

此外，它通过类 $v_{S_i\setminus\{p\}}\left(\frac{v_{[p-1]\setminus\{i\}}}{v_{p-1}}\right)^{|S_i|-1}$ 的乘法作用于 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\ \mathbb{F}_p)$。

4.11.注记。 为方便起见，我们用 α_p 表示 β 表示。

证明。 这里，我们证明 $i=0$情形下存在；其他情形可用相同的论证得出。

存在性。 令 S_0 为 $[p]\setminus\{0\}$的任意非空子集。若 $p\notin S_0$，则考虑如下次数

$$\Sigma_{j\in S_0}\alpha_j - 2 - (|S_0|-1)\alpha_0 = \Sigma_{j\in S_0}\alpha_j - 2 - (|S_0|-1)\beta + (|S_0|-1)(\beta-\alpha_0),$$

考虑如下的类

$$v_{S_0\setminus\{p\}}\left(\frac{v_{[p-1]\setminus\{0\}}}{v_{p-1}}\right)^{|S_0|-1}. \tag{4.12}$$

现在我们证明，在 $\pi_\bigstar\big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p\wedge H\mathbb{F}_p\big)$ 中存在一个类，它经边界映射 $\partial_\bigstar$ 映射到 (4.12) 中所表示的类的负悬挂 。由于 (4.12) 属于 Im($\mathcal{L}_\bigstar$)，它在 $\pi_\bigstar($ $E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+\wedge H\mathbb{F}_p$) 中为零；因此它在 Ker($\partial_\bigstar$) 中有一个代表元。

考虑 $\bigstar_\beta\in\mathbb{Z}\{1,\beta\}$次数下的如下类，它是利用 $0\le r\le p-1$对应的类 a_{α_r} 的可逆性得到的:

$$\frac{v_{S_0\setminus\{p\}}}{\prod_{j\in S_0\setminus\{p\}} a_{\alpha_j}}\left(\frac{a_{\alpha_0}\, v_{[p-1]\setminus\{0\}}}{v_{p-1}}\right)^{|S_0|-1} = \frac{v_{S_0\setminus\{p\}}}{v_{p-1}^{|S_0|-1}\prod_{j\in S_0\setminus\{p\}} a_{\alpha_j}}\left(a_{\alpha_l} v_{[p-1]\setminus\{\ell\}} + \ell\, a_\beta v_{p-1}\right)^{|S_0|-1},$$

其中 $\ell\in S_0\setminus\{p\}$。我们使用了关系

$$v_S\, v_{[p-1]\setminus\{\ell\}} = v_{S\setminus\{\ell\}}\, v_{p-1}.$$

通过反复应用相同的代换，可以消去分母中所有的 v_{p-1} 因子。因此，所得的类可以表示为

$$\pi_{\star_\beta}\big(\widetilde{E_{C_p}\mathbb{Z}/p\wedge H\underline{\mathbb{F}_p}}\big).$$

因此，这种构造确保 (4.12) 中的类属于 $\pi_\star\big(E_{C_p}\mathbb{Z}/p\wedge H\mathbb{F}_p\big)$，并且经 $\underline{\partial_\star}$ 映射后为零，从而得到一个类

$$k_{S_0}^{(0)}\in\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\star}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})$$

由顶层余纤维序列 (4.2) 的正合性可知该关系成立。该类的作用由类的定义以及上述关系得出。□

类似地，对于子群 H_i，也存在与 z_S 和 w_S 类似的类。

4.13. **命题**。 对于 $0\le i\le p-1$，存在一些类

$$\psi_{T_i}^{(i)},\ \phi_{T_i}^{(i)}\in\mathrm{Ker}(\partial_\star),$$

其中 T_i 表示 $[p]\setminus\{i\}$ 的一个子集，其基数至少为3 ，并满足以下关系4

(.14)

$$\psi_{T_i}^{(i)}u_{\alpha_i}^{|T_i|-2}-\kappa_{\alpha_{s_0}}\kappa_{\alpha_{s_1}}\prod_{j\in T_i\setminus\{s_0,s_1\}}u_{\alpha_j}=0,\quad \phi_{T_i}^{(i)}u_{\alpha_i}^{|T_i|-2}-(\kappa_{\alpha_{s_0}}a_{\alpha_{s_1}}-\kappa_{\alpha_{s_1}}a_{\alpha_{s_0}})\prod_{j\in T_i\setminus\{s_0,s_1\}}u_{\alpha_j}=0.$$

此外，类 $\psi_{T_i}^{(i)}$ 和 $\phi_{T_i}^{(i)}$ 在 $\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\star}\,(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+;\underline{\mathbb{F}_p})$ 上的作用，分别由类 $z_{T_i\setminus\{p\}}\begin{pmatrix}v_{[p-1]\setminus\{i\}}\\ v_{p-1}\end{pmatrix}^{|T_i|-2}$ 和 $w_{T_i\setminus\{p\}}\begin{pmatrix}v_{[p-1]\setminus\{i\}}\\ v_{p-1}\end{pmatrix}^{|T_i|-2}$ 的乘法给出。

证明。 同样，我们证明 $i=0$对应的所述类存在；其余情形由对称性可得。

关于 $\psi_{T_0}^{(0)}$ 的存在性：令 $T_0\subseteq\{1,2,\dots,p\}$ 为这样的一个子集。我们要寻找一个次数为

$$\sum_{j\in T_0}\alpha_j-2-(|T_0|-2)\alpha_0=\sum_{j\in T_0}\alpha_j-2-(|T_0|-2)\beta-(|T_0|-2)(\alpha_0-\beta).$$

沿用前述命题的策略，我们旨在构造一个$\pi_\star(E_{C_p}\mathbb{Z}/p\wedge H\mathbb{F}_p)$中的类，使其在 $\partial_\star$ 下的边界为类

$$w_{T_0\setminus\{p\}}\left(\frac{v_{[p-1]\setminus\{0\}}}{v_{p-1}}\right)^{|T_0|-2},\tag{4.15}$$

对于 $s\ne t\in T_0$。

现在考虑$\pi_{\star_\beta}($ $E_{C_p}\mathbb{Z}/p\wedge H\mathbb{F}_p)$中的相应元素，它是利用$a_{\alpha_r}$ 对 $0\le r\le p-1$的可逆性得到的：

(4.16)

$$\frac{w_{T_0\setminus\{p\}}}{\prod_{j\in S_0\setminus\{p\}}a_{\alpha_j}}\left(a_{\alpha_0}\frac{v_{[p-1]\setminus\{0\}}}{v_{p-1}}\right)^{|T_0|-2}=\frac{w_{T_0\setminus\{p\}}}{v_{p-1}^{|T_0|-2}\prod_{j\in S_0\setminus\{p\}}a_{\alpha_j}}\big(a_{\alpha_\ell}v_{[p-1]\setminus\{\ell\}}+\ell\,a_\beta v_{p-1}\big)^{|T_0|-2},$$

对某个 $\ell\in S_0\setminus\{p\}$。利用关系

$$w_{T_0\setminus\{p\}}v_{[p-1]\setminus\{\ell\}}=cw_{T_0\setminus\{\ell,p\}}v_{p-1},$$

其中 $c \in \mathbb{F}_p$ 是依赖于 $T_0 \setminus \{p\}$ 与 $T_0 \setminus \{\ell, p\}$ 最小值的某个标量，通过迭代这一过程，可以消去分母中 v_{p-1} 的所有出现。因此，(4.16) 中的类在模去关系的意义下属于 $\pi_{\star_\beta}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{F}_p)$。因此，在 (4.15) 中所得的类位于 $\pi_\star(E_{C_p}\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{F}_p)$ 中。但经由边界映射 $\partial_\star$，它映为零（因为 (4.15) 中的类位于 $\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_\star$ 中）。因此，存在一个相应的类

$$\psi_{T_0}^{(0)} \in \operatorname{Ker} \partial_\star$$

表示核$(\partial_\star)$中的一个元素。

类似的论证确立了 $\phi_{T_0}^{(0)}$ 的存在性。

同样，关系成立是由于顶层余纤维序列 (4.2) 的正合性，而作用成立是由于与类的定义相关的关系。□

由 (4.2) 中的顶层余纤维序列，我们可以得到核 $\partial_\star$ 中某些特殊类的表达式，进而得到 $\mathbb{F}_p$–系数下点的上同调的多项式部分 $\mathrm{P}(\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\star}(S^0;\mathbb{F}_p))$。

4.17.**定理**。对于奇素数 p，$\mathbb{F}_p$ 系数下点的上同调的多项式部分为

$$\mathrm{P}(\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\star}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})) = \mathbb{F}_p[a_\beta, \kappa_\beta, u_\beta, a_{\alpha_i}, \kappa_{\alpha_i}, u_{\alpha_i}, w_T, z_T, v_S, k_{S_i}^{(i)}, \phi_{T_i}^{(i)}, \psi_{T_i}^{(i)}]/\sim$$

其中，S和 T分别是 $[p-1]$ 中基数至少为二和三的子集；对于 $0 \le i \le p-1$、S_i 和 T_i，它们分别是 $[p]\setminus\{i\}$ 中基数至少为二和三的子集。其中，$\sim$ 表示可由复合映射 $\pi_\star H\mathbb{F}_p \to \pi_\star \operatorname{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\mathbb{F}_p) \to \pi_\star \operatorname{Fun}(E\mathcal{G}_+, H\mathbb{F}_p)$拉回得到的关系，该映射显式地表示为：

$$a_\beta \mapsto y_1 u_\beta, \qquad \kappa_\beta \mapsto t_1 u_\beta, \qquad u_\beta \mapsto u_\beta,$$

$$a_{\alpha_i} \mapsto (y_0 - i y_1) u_{\alpha_i}, \qquad \kappa_{\alpha_i} \mapsto (t_0 - i t_1) u_{\alpha_i}, \qquad u_{\alpha_i} \mapsto u_{\alpha_i},$$

$$w_T \mapsto (s_0 - s_1) t_0 t_1 \frac{\prod_{j\in T} u_{\alpha_j}}{u_\beta^{|T|-2}}, \qquad z_T \mapsto (s_0 - s_1)(t_0 y_1 - t_1 y_0) \frac{\prod_{j\in T} u_{\alpha_j}}{u_\beta^{|T|-2}},$$

$$v_S \mapsto \frac{\prod_{j\in S} u_{\alpha_j}}{u_\beta^{|S|-1}}, \qquad k_{S_i}^{(i)} \mapsto \frac{\prod_{j\in S_i} u_{\alpha_j}}{u_{\alpha_i}^{|S_i|-1}},$$

$$\phi_{T_i}^{(i)} \mapsto (s_0 - s_1) t_0 t_1 \frac{\prod_{j\in T_i} u_{\alpha_j}}{u_{\alpha_i}^{|T_i|-2}}, \qquad \psi_{T_i}^{(i)} \mapsto (s_0 - s_1)(t_0 y_1 - t_1 y_0) \frac{\prod_{j\in T_i} u_{\alpha_j}}{u_{\alpha_i}^{|T_i|-2}},$$

其中，$s_0 < s_1$ 表示相应集合中连续的最小元素。

证明。上述多项式结构由计算连接态射 $\partial_\star$：$\pi_\star(E_{C_p}\mathbb{Z}/p \wedge H\mathbb{F}_p) \to \pi_{\star-1}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+ \wedge H\mathbb{F}_p)$的核得到，利用了这样一个事实：任何$a_{\alpha_r}$ 不在分母中的类都必须属于 $\operatorname{Ker}\partial_\star$；其他类由命题 4.9 和命题 4.13 得出。

利用以下事实可以证明，映射 $P(\pi_\star H\mathbb{F}_p) \to P(\pi_\star \operatorname{Fun}(E_{C_p}\mathbb{Z}/p_+, H\mathbb{F}_p))$ 是单射：a、u 和 κ 映射到自身，而其他类均映射为非零

利用该映射的环结构。由于复合中的后一个映射在这些类上是单射的（由 (2.9) 可知），因此将定义域限制为多项式部分时，复合映射是单射的。□

5. The ring structure of $\widetilde{H}^{\star}_{\mathcal{K}_4}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2})$

现在我们考虑 $p = 2$ 的情形。尽管总体策略与处理奇素数时相同，但在此情形下，我们计算整个 RO($\mathcal{K}_4$)–分次布雷登上同调环，而不只是其多项式部分。考虑下面的 Tate 方形

(5.1)

$$\begin{array}{ccccc} E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_2} & \xrightarrow{\quad f \quad} & H\underline{\mathbb{F}_2} & \longrightarrow & \widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2} \\ \simeq\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+,\ H\underline{\mathbb{F}_2}) & \to & \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+,\ H\underline{\mathbb{F}_2}) & \to & \widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+,\ H\underline{\mathbb{F}_2}) \end{array}$$

$\pi_\star$ (2) 计算从同伦群 $\pi_\star \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+, H\mathbb{F}_2)$, 开始，它们由定理 3.7 给出：

$$\pi_\star \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+, H\underline{\mathbb{F}_2}) \cong \widetilde{H}^{-\star}_{\mathcal{G}}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+;\underline{\mathbb{F}_2}).$$

(2) 由于 $E_{C_2}\mathbb{Z}/2 \simeq S^{\infty(\alpha_0\oplus\alpha_1)}$，我们得到

$$\pi_\star\big(\widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+, H\underline{\mathbb{F}_2})\big) \cong \pi_\star \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+, H\underline{\mathbb{F}_2})\big[a_{\alpha_0}^{\pm 1}, a_{\alpha_1}^{\pm 1}\big].$$

(3) 由于该环存在零因子，局部化映射 $\mathcal{L}_\star$ 不是单射。根据下方的余纤维序列以及 Tate 方形图表中的左侧垂直等价关系，可计算 $\pi_\star(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)$ 如下。

5.2. **命题**。 同伦 $\pi_\star(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2)$ 分解为

$$\pi_\star(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}) \ \cong\ \Sigma^{-1}\,\mathrm{Coker}(\mathcal{L}_{\star+1}) \ \oplus\ \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_\star),$$

其中余核直和项的显式描述为

$$\begin{aligned} \mathrm{Coker}(\mathcal{L}_\star) \cong \mathbb{M}_2(\beta) \otimes \Bigg[& \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}} \right\rangle \left[a_{\alpha_0}^{-1}, a_{\alpha_1}, u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, v^{\pm}\right] \\ & \oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}} \right\rangle \left[a_{\alpha_0}, a_{\alpha_1}^{-1}, u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, v^{\pm}\right] \\ & \oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}} \right\rangle \left[a_{\alpha_0}^{-1}, a_{\alpha_1}^{-1}, u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, v^{\pm}\right] \Bigg] \mod (\mathrm{Im}\,\mathcal{L}_\star), \end{aligned}$$

而核是由以下形式的类生成的 $\widetilde{H}^{\star}_{\mathcal{G}}(E_{C_2}\underline{\mathbb{Z}}/2_+;\mathbb{F}_2)$ 的理想

$$u_{\alpha_i}^m\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}}, \quad \textit{such that} \quad a_{\alpha_j}^m u_{\alpha_i}^m\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}} = 0$$

对于 $i \neq j \in \{0,1\}$，满足由定理 *2.17* 导出的关系。特别地，关系如下（对于 $i \neq j$）：

$$(a)\ v\,u_{\alpha_i}^m\,\Sigma^{-1}\tfrac{1}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}} = u_{\alpha_i}^{m+1}u_{\alpha_j}\,\Sigma^{-1}\tfrac{1}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2+1}},$$
$$(b)\ v\,u_{\alpha_i}^m\,\Sigma^{-1}\tfrac{1}{a_\beta^{k_1}u_\beta^{k_2}} = u_{\alpha_i}^{m+1}a_{\alpha_j}\,\Sigma^{-1}\tfrac{1}{a_\beta^{k_1+1}u_\beta^{k_2}} + u_{\alpha_i}^m u_{\alpha_j}a_{\alpha_i}\,\Sigma^{-1}\tfrac{1}{a_\beta^{k_1+1}u_\beta^{k_2}}.$$

5.3. 注记。 请注意，在 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}_\star$ 的表达式中，可以忽略 $\mathbb{F}_2[a_\beta, u_\beta]$ term（来自 $\mathbb{M}_2(\beta)$），因为所有相应的类都可以利用其余的类和关系生成。

(4) 对 $\pi_\star(E_{C_2}\mathbb{Z}/2 \wedge H\mathbb{F}_2)$ 的计算归结为理解映射$f_{\star_\beta}$。根据命题 4.6 和命题 4.8，我们有如下结论：

5.4.**命题**。该映射

$$f_{\star_\beta}\colon \pi_{\star_\beta}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}) \longrightarrow \pi_{\star_\beta}H\underline{\mathbb{F}_2}$$

是平凡的。其中，

$$\pi_{\star_\beta}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}) \cong \mathbb{M}_2(\beta) \otimes \Bigg[\mathbb{F}_2\Big\langle \Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}}{a_{\alpha_0}}\Big\rangle\Big[\tfrac{u_{\alpha_0}}{a_{\alpha_0}}\Big]$$
$$\oplus\mathbb{F}_2\Big\langle \Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_1}}\Big\rangle\Big[\tfrac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_1}}\Big] \ \oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle \Sigma^{-1}\frac{v}{a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}\Big\rangle\Big[\tfrac{u_{\alpha_0}}{a_{\alpha_0}}, \tfrac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_1}}, \tfrac{v}{a_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}\Big]\Bigg]/\sim_1,$$

其中，$\sim_1$ 表示从命题 *5.2* 继承的关系，而 $\pi_{\star_\beta}H\mathbb{F}_2 \cong \mathbb{M}_2(\beta)$ 由命题 *2.19* 得出。

(5) 最后，由于

$$\pi_\star\big(\widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}\big) \cong \pi_{\star_\beta}\big(\widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}\big)[a_{\alpha_0}^{\pm 1}, a_{\alpha_1}^{\pm 1}],$$

并且前面的计算表明：

5.5. **命题**。 同伦 $\pi_\star(E_{C_2}\mathbb{Z}/2 \wedge H\mathbb{F}_2)$ 可分解为

$$\pi_\star(\widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}) \cong \mathbb{M}_2(\beta)[a_{\alpha_0}^{\pm 1}, a_{\alpha_1}^{\pm 1}]$$
$$\oplus\,\mathbb{M}_2(\beta) \otimes \Big[\mathbb{F}_2\langle u_{\alpha_0}\rangle[u_{\alpha_0}, a_{\alpha_0}^{\pm 1}, a_{\alpha_1}^{\pm 1}] \oplus \mathbb{F}_2\langle u_{\alpha_1}\rangle[u_{\alpha_1}, a_{\alpha_0}^{\pm 1}, a_{\alpha_1}^{\pm 1}]$$
$$\oplus\ \mathbb{F}_2\langle v\rangle[u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1}, v, a_{\alpha_0}^{\pm 1}, a_{\alpha_1}^{\pm 1}]\Big]/\sim_2,$$

其中 $\sim_2$ 表示由 $\sim_1$诱导的相应关系。

5.6. **边界映射**。

由于边界映射的核与余核的计算

$$\partial_\star : \pi_\star\widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2} \longrightarrow \pi_{\star-1}\widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge \mathrm{Fun}(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+, H\underline{\mathbb{F}_2})$$

要控制所需结果，只需分析限制映射

$$\partial_{\star_\beta} : \pi_{\star_\beta}\widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2} = \pi_{\star_\beta}H\underline{\mathbb{F}_2} \oplus \Sigma\,\pi_{\star_\beta-1}E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_2} \ \longrightarrow\ \pi_{\star_\beta-1}E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}$$

together with the $\pi_\star H\underline{\mathbb{F}_2}$–module structure.

5.7. **命题**。 $\bigstar_\beta \in \mathbb{Z}\{1,\beta\}$ 的边界映射由下式给出

$\widetilde{\partial_{\bigstar_\beta}}$:
$\pi_{\bigstar_\beta} E_{C_2}\mathbb{Z}/2\wedge H\mathbb{F}_2 = \pi_{\overline{\bigstar_\beta}} H\mathbb{F}_2 \oplus \Sigma\,\pi_{\overline{\bigstar_\beta - 1}} E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+\wedge H\mathbb{F}_2 \longrightarrow \pi_{\overline{\bigstar_\beta - 1}} E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+\wedge H\mathbb{F}_2$由下式给出

$$\partial_{\bigstar_\beta}(x+y) \;=\; \Sigma^{-1}y,$$

其中 $x \in \pi_{\bigstar_\beta} H\underline{\mathbb{F}_2}$和 $y \in \Sigma\,\pi_{\bigstar_\beta - 1} E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+ \wedge H\mathbb{F}_2$。

证明。 这直接由 Tate 图 (5.1) 中顶层余纤维序列所关联的同伦群长正合序列得出。□

5.8. **更多特殊类的存在性**。 在命题 3.4 中，我们证明了子群 K对应的类 v 的存在性。这里我们证明类 k_0和 k_1的存在性，它们分别在子群 H_0 和 H_1中发挥类似的作用。

5.9. **命题**。 对于 i、 $j \in \{0,1\}$ （其中 $i \neq j$），存在一个类

$$k_i \;\in\; \pi_{1+\alpha_i-\beta-\alpha_j}(H\underline{\mathbb{F}_2})$$

满足:

(1) $k_i u_{\alpha_i} = u_\beta u_{\alpha_j}$, *(2)* $k_i a_{\alpha_i} = a_\beta u_{\alpha_j} + u_\beta a_{\alpha_j}$, *(3)* $k_i k_j = u_\beta^2$, *(4)* $k_i v = u_{\alpha_j}^2$。

证明。 考虑类

$$\frac{a_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}u_\beta + \frac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}a_\beta \;\in\; \pi_\bigstar \widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}.$$

由于

$$\partial_\bigstar\left(\frac{a_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}u_\beta + \frac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}a_\beta\right) = \Sigma^{-1}\left(\frac{a_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}u_\beta + \frac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}a_\beta\right) = \Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_1}^2}{v} = 0,$$

它属于 $\ker(\partial_\bigstar)$。这产生了所需的类 $k_0 \in \pi_\bigstar H\mathbb{F}_2$， 使其成为上述类的原像。类似地，可以构造一个类 k_1. 。所列关系由图表 (5.1) 中顶层余纤维序列的正合性推出。□

5.10. 记号。 为简便起见，在相关商映射下，我们分别将 $k_0' := \frac{a_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}u_\beta + \frac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}a_\beta$ 和 $k_1' := \frac{a_{\alpha_0}}{a_{\alpha_1}}u_\beta + \frac{u_{\alpha_0}}{a_{\alpha_1}}a_\beta$~~~~记为 k_0 和 k_1 在 $\pi_\bigstar E_{C_2}\mathbb{Z}/2\wedge H\mathbb{F}_2$ 中的像。

为计算 $\partial_\bigstar$的核，考虑一个类

$$x(k) = a_{\alpha_1}^{-i}k_1'^n u_{\alpha_0}^m a_{\alpha_0}^\ell\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k} \in \pi_\bigstar \widetilde{E_{C_2}\mathbb{Z}/2} \wedge H\underline{\mathbb{F}_2}$$

其中 $i,j \geq 1$和 $n,m,\ell \geq 0$为固定整数。这里我们将定义简写 Ξ，它给出使得 $x(k)$属于 $\partial_\bigstar$ 的核的 k 取值范围。

I. 从基本情形开始

$$a_{\alpha_1}^{-i}u_{\alpha_0}^m\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}.$$

在 $\pi_\star(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+\wedge H\mathbb{F}_2)$ 中，我们有：

$$\begin{aligned}\partial_\star\left(a_{\alpha_1}^{-i}u_{\alpha_0}^m\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\right) &= \Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}^m}{a_{\alpha_1}^i}\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\\ &= \Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}^m}{v\,a_{\alpha_1}^i}\cdot v\,a_\beta\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+1}u_\beta^k}\\ &= \Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}^m}{v\,a_{\alpha_1}^i}\cdot\left(u_{\alpha_0}a_{\alpha_1}+u_{\alpha_1}a_{\alpha_0}\right)\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+1}u_\beta^k}\\ &= \Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}^{m+1}}{v\,a_{\alpha_1}^{i-1}}\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+1}u_\beta^k}\;+\;\Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}^{m-1}a_{\alpha_0}}{a_{\alpha_1}^i}\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+1}u_\beta^{k-1}}\end{aligned}$$

根据这一计算，我们得到：

$$\partial_\star\left(a_{\alpha_1}^{-i}u_{\alpha_0}^m\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\right)=0\quad\Longleftrightarrow\quad m\geq k.$$

II. 考虑一般的类

$$a_{\alpha_1}^{-i}k_1'^n u_{\alpha_0}^m a_{\alpha_0}^\ell\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}.$$

其中 $i,j\geq 1$ 和 $n,m,\ell\geq 0$ 为固定整数。

在 $\pi_\star(E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+\wedge H\mathbb{F}_2)$ 中，我们有：

$$\begin{aligned}\partial_\star\left(a_{\alpha_1}^{-i}k_1'^n u_{\alpha_0}^m a_{\alpha_0}^\ell\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\right) &= \Sigma^{-1}\frac{k_1'^n u_{\alpha_0}^m(a_{\alpha_0}u_\beta)^\ell}{a_{\alpha_1}^i}\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^{k+l}}\\ &= \Sigma^{-1}\frac{k_1'^n u_{\alpha_0}^m\left(k_1'a_{\alpha_1}+a_\beta u_{\alpha_0}\right)^\ell}{a_{\alpha_1}^i}\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^{k+\ell}}.\end{aligned}$$

III. 展开与逐项分析

展开 $\left(k_1'a_{\alpha_1}+a_\beta u_{\alpha_0}\right)^\ell$ 得到如下形式的项

$$k_1'^b a_{\alpha_1}^b\;a_\beta^{\ell-b}u_{\alpha_0}^{\ell-b},$$

对于某个 $0\leq b\leq\ell$。

$\pi_\star E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+\wedge H\mathbb{F}_2$ 中对应的项为

$$\Sigma^{-1}\frac{k_1'^{n+b}\,u_{\alpha_0}^{m+\ell-b}}{a_{\alpha_1}^{i-b}}\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+b-l}u_\beta^{k+\ell}}\;=\;\Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}^{2n+2b+m+l-b}}{v^{n+b}\,a_{\alpha_1}^{i-b}}\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+b-l}u_\beta^{k+\ell}},$$

满足 $j+b-\ell>0$，使得 a_β-指数为正。

IV. 根据上述分析，我们设：

(1) 令 $\{0=b_0<b_1<\cdots<b_t=\ell\}$ 为二项式展开中出现的 b值集合（这些值是 $k_1'a_{\alpha_1}$的指数）。选择最小的b_s，使得 $j+b_s-\ell>0$。

(2) 则 $\Xi(n,\ m,\ \ell,\ i,\ j)$ 是一个取值于 $2^{\mathbb{N}}$ 的函数，定义如下：

$$\begin{cases}[1,2n+b_s+m], & \text{if } i-b_s>0,\\ \mathbb{N}, & \text{if } i-b_s\leq 0\end{cases}\tag{5.11}$$

5.12. **命题**。 类 $x(k) = a_{\alpha_1}^{-i}k_1'^n u_{\alpha_0}^m a_{\alpha_0}^\ell \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k} \in \pi_\star E_{C_2}\mathbb{Z}/2\wedge H\mathbb{F}_2$ 属于核 $\partial_\star$ 当且仅当 $k\in\Xi(n,m,\ell,i,j)$。

事实上，在 $i-b_s\le 0$ 的情形下，类 $x(k)$ 可以用一种不含分母中的 a_{α_1} 因子的方式表示，因此它属于下文所示 $\operatorname{Ker}\partial_\star$ 的第二个直和项。

5.13.**命题**。 $\partial_\star$ 的核与余核可描述如下

(1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\partial_\star = {}& \mathbb{F}_2[a_\beta,u_\beta,a_{\alpha_0},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_1},k_0',k_1',v]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\right\rangle [a_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1},k_0',k_1',v]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle a_{\alpha_1}^{-i}k_1'^n u_{\alpha_0}^m a_{\alpha_0}^\ell\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\ :\ b_s<i,k\le 2n+b_s+m\right\rangle [u_{\alpha_1},k_0',v]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle a_{\alpha_0}^{-i}k_0'^n u_{\alpha_1}^m a_{\alpha_1}^\ell\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\ :\ b_s<i,k\le 2n+b_s+m\right\rangle [u_{\alpha_0},k_1',v].\end{aligned}$$

where $k_0' := \frac{a_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}u_\beta + \frac{u_{\alpha_1}}{a_{\alpha_0}}a_\beta$ *and* $k_1' := \frac{a_{\alpha_0}}{a_{\alpha_1}}u_\beta + \frac{u_{\alpha_0}}{a_{\alpha_1}}a_\beta$.

(2)

$$\begin{aligned}\operatorname{Coker}\partial_\star = {}& \Big[\mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}}\right\rangle [a_{\alpha_0}^{-1},a_{\alpha_1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1},v^{-1}]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_1}}\right\rangle [a_{\alpha_0},a_{\alpha_1}^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1},v^{-1}]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}\right\rangle [a_{\alpha_0}^{-1},a_{\alpha_1}^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1},v^{-1}]\Big]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\right\rangle \otimes \Big[\mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}}\right\rangle [a_{\alpha_0}^{-1},v^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1}]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_1}}\right\rangle [a_{\alpha_1}^{-1},v^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1}]\\ &\oplus \mathbb{F}_2\left\langle \Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}\right\rangle [a_{\alpha_0}^{-1},a_{\alpha_1}^{-1},v^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1}]\Big]\\ &\oplus \operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star.\end{aligned}$$

模去来自 $\pi_\star E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+\wedge H\mathbb{F}_2$ 和 $\operatorname{Im}\partial_\star$ 的受限关系。

证明。 $\pi_\star E_{C_2}\mathbb{Z}/2_+\wedge H\mathbb{F}_2$ 中的每个类要么是 $a_{\alpha_0}^{-1}$ 或 $a_{\alpha_1}^{-1}$的倍数，要么来自 $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star$；但根据命题 5.7，没有任何元素映到 $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star$。因此，所有不含 $a_{\alpha_0}^{-1}$或 $a_{\alpha_1}^{-1}$的类都必须属于 $\operatorname{Ker}\partial_\star$。事实上，结合命题 5.9，前两个直和项属于 $\operatorname{Ker}\partial_\star$。根据命题 5.12 中确立的 Ξ-判据，最后两个直和项属于 $\operatorname{Ker}\partial_\star$；对给定的类取多项式时，它们仍满足 Ξ-判据。

对于余核，注意没有类映到涉及 v^{-1} 的元素或 $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star$；结合注 5.3，即得所述分解。□

5.14. **系数环中的对称性与识别**。为了使 $\pi_\star H\mathbb{F}_2$ 的结构具有对称性，我们在某些新定义的类之间引入一种等价关系。这种等价关系由以下对应关系编码：

$$
\begin{cases}
\Sigma^{-1}\dfrac{u_{\alpha_0}}{va_{\alpha_0}} \longmapsto k_1\,\Sigma^{-1}\dfrac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}}, & \\
\Sigma^{-1}\dfrac{u_{\alpha_0}^{2n-k}}{v^n a_{\alpha_0}^j} \longmapsto k_1^n\,\Sigma^{-1}\dfrac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}, & 2n\geq k,\\
\Sigma^{-1}\dfrac{a_{\alpha_1}}{va_{\alpha_0}} \longmapsto k_1 a_{\alpha_1}\,\Sigma^{-1}\dfrac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}^2} = a_\beta\,\Sigma^{-1}\dfrac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}}, & \\
\Sigma^{-1}\dfrac{u_{\alpha_1}}{va_{\alpha_0}} \longmapsto k_1 u_{\alpha_1}\,\Sigma^{-1}\dfrac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}^2} = u_\beta\,\Sigma^{-1}\dfrac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}}. &
\end{cases}
\tag{5.15}
$$

5.16. 注记。上述对应关系在 $\pi_\star H\mathbb{F}_2$ 中定义良好，因为所有项的次数相同，且与乘法结构相容。此外，这些关系经过选择，使得分次和乘法生成元在这种识别下表现出对称性。

特别是，消失关系

$$\Sigma^{-1}\frac{u_{\alpha_0}^{\ell}u_{\alpha_1}^{m}}{v^k a_{\alpha_0}^n}=0 \quad \text{whenever} \quad \ell+m\geq 2k$$

在这种对应关系下保持不变，从而确保该等价关系的商空间继承相同的湮灭模式。

由于类 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}$ 存在于 $\pi_\star H\mathbb{F}_2$ 中，这促使我们在 $\pi_\star H\mathbb{F}_2$ 中定义类似 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}$ 和 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^j u_{\alpha_1}^k}$ 的类。为了证明相应次数上存在这类，我们在 $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star$ 中定义如下等价关系：

由于 $\frac{u_{\alpha_1}^2}{v^2}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta a_\beta}$ 和 $\frac{u_{\alpha_0}^2}{v^2}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta a_\beta}$ 分别属于次数为 $2-2\alpha_0$ 和 $2-2\alpha_1$ 的 $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star$，我们将类 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}}$ 和 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}u_{\alpha_1}}$ 定义为它们在 $\pi_\star H\mathbb{F}_2$ 中相应次数上的像，并通过简单的步骤证明 $\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}\rangle_{j,k\geq 1}$ 和 $\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^j u_{\alpha_1}^k}\rangle_{j,k\geq 1}$ 属于核 $\mathcal{L}_\star$。

我们描述一种显式过程，用于在核 $\mathcal{L}_\star$ 中构造类 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}$ 的一个代表元。

(1) 若

$$\frac{u_{\alpha_1}^{j+k}}{v^{j+k}}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\in\operatorname{Ker}\mathcal{L}_\star,$$

那么这个元素就代表所需的类。

（2）否则，考虑

$$\frac{u_{\alpha_1}^{j+k+1}}{v^{j+k+1}}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^{j+1}u_\beta^k}.$$

如果该元素属于 $\mathrm{Ker}\,\mathcal{L}_\bigstar$，则乘以 a_{α_0} 以修正次数。否则，重复此步骤，直到找到这样的元素。

下面列出了通过此过程得到的若干显式代表元。

Class	Preimage
$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}}$	$\frac{u_{\alpha_1}^2}{v^2}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta u_\beta}$
$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^2u_{\alpha_0}}$	$\frac{u_{\alpha_1}^3}{v^3}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^2 u_\beta}$
$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}^2}$	$a_{\alpha_0}\frac{u_{\alpha_1}^4}{v^4}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^2u_\beta^2}$
$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^2u_{\alpha_0}^2}$	$\frac{u_{\alpha_1}^4}{v^4}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^2u_\beta^2}$
$\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}^3}$	$a_{\alpha_0}^3\frac{u_{\alpha_1}^7}{v^7}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^4u_\beta^3}$

5.17.**命题**。 存在环等价

(1)

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}}\rangle[a_{\alpha_0}^{-1},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_1},v^{-1}]\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_1}}\rangle[a_{\alpha_0},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1}^{-1},u_{\alpha_1},v^{-1}]\\ \oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}\rangle[a_{\alpha_0}^{-1},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1}^{-1},u_{\alpha_1},v^{-1}]\oplus\mathrm{Ker}\,l_\bigstar\end{aligned}\tag{5.18}$$

and

$$\begin{aligned}&\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^ju_{\alpha_0}^k}\rangle[a_{\alpha_1},u_{\alpha_1},a_\beta,u_\beta,k_0,k_1,v]\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^ju_{\alpha_1}^k}\rangle[a_{\alpha_0},u_{\alpha_0},a_\beta,u_\beta,k_0,k_1,v]\\ &\oplus\mathbb{F}_2\langle a_{\alpha_1}^{-i}k_1^na_\beta^\ell u_\beta^m\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^ju_{\alpha_0}^k}:b_s<i,k\le 2n+b_s+m\rangle[u_{\alpha_1},k_0,v]\\ &\oplus\mathbb{F}_2\langle a_{\alpha_0}^{-i}k_0^na_\beta^\ell u_\beta^m\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^ju_{\alpha_1}^k}:b_s<i,k\le 2n+b_s+m\rangle[u_{\alpha_0},k_1,v].\end{aligned}$$

其中 ℓ、m、$n\ge 0$ 以及 i、j、$k\ge 1$。

(2)

$$\begin{aligned}\Big[\mathbb{F}_2\left\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}}\right\rangle[a_{\alpha_0}^{-1},a_{\alpha_1},v^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1}]\quad\oplus\mathbb{F}_2\left\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_1}}\right\rangle[a_{\alpha_0},a_{\alpha_1}^{-1},v^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1}]\\ \oplus\mathbb{F}_2\left\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{va_{\alpha_0}a_{\alpha_1}}\right\rangle[a_{\alpha_0}^{-1},a_{\alpha_1}^{-1},v^{-1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1}]\Big]\otimes\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^su_\beta^t}\rangle\end{aligned}$$

and

$$\Big[\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^ju_{\alpha_0}^k}\rangle[a_{\alpha_1}^{\pm},u_{\alpha_1},k_0,k_1,v]\oplus\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^ju_{\alpha_1}^k}\rangle[a_{\alpha_0}^{\pm},u_{\alpha_0},k_0,k_1,v]\Big]\otimes\mathbb{F}_2\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^su_\beta^t}\rangle$$

where $s,t,j,k\ge 1$.

满足以下关系：

(1) $k_0u_{\alpha_0}-u_{\alpha_1}u_\beta$***(2)*** $k_1u_{\alpha_1}-u_{\alpha_0}u_\beta$***(3)*** $vu_\beta-u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}$

(4) $k_0a_{\alpha_0}-a_\beta u_{\alpha_1}-a_{\alpha_1}u_\beta$***(5)*** $k_1a_{\alpha_1}-a_\beta u_{\alpha_0}-a_{\alpha_0}u_\beta$

(6) $va_\beta - a_{\alpha_0}u_{\alpha_1} - a_{\alpha_1}u_{\alpha_0}$*(7)* $k_0k_1 - u_\beta^2$*(8)* $k_0v - u_{\alpha_1}^2$*(9)* $k_1v - u_{\alpha_0}^2$ *(10)* $k_0\,\Sigma^{-1}\,\frac{1}{a_{\alpha_1}u_{\alpha_1}} = k_1\,\Sigma^{-1}\,\frac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}}$, *(11)* $k_r\,\Sigma^{-1}\,\frac{1}{a_\beta u_\beta} = v\,\Sigma^{-1}\,\frac{1}{a_{\alpha_r}u_{\alpha_r}}\ r = 0, 1.$

证明。(1) 证明由 (5.15) 中给出的等价关系得出。考虑以下类和等价关系

$$k_1^n a_\beta^\ell u_\beta^m \Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k} = v^{-(\ell+m)}k_1^n v^\ell a_\beta^\ell v^m u_\beta^m \Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k} = \frac{u_{\alpha_0}^{2n+m}u_{\alpha_1}^m(a_{\alpha_1}u_{\alpha_0}+u_{\alpha_1}a_{\alpha_0})^\ell}{v^{\ell+m+n}}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}$$

它们具有以下型项:

$$\frac{u_{\alpha_0}^{2n+m+b}u_{\alpha_1}^{m+\ell-b}a_{\alpha_1}^b}{v^{\ell+m+n}}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^{j-\ell+b}u_{\alpha_0}^k}$$

对于某个 $0 \le b \le \ell$，因为当 $j+b-\ell \le 0$ 时，上述因子为零。对于$j+b-\ell>0$, 注意若 $2n+m+b-k \ge 0$，则类属于余核 $\partial_\bigstar$，并具有以下对应关系

$$u_{\alpha_0}^{2n+m+b-k}u_{\alpha_1}^{m+\ell-b}a_{\alpha_1}^b\Sigma^{-1}\frac{1}{v^{\ell+m+n}a_{\alpha_0}^{j-\ell+b}} \in \operatorname{Coker}\partial_\bigstar$$

若 $2n+m+b-k<0$，则类属于核 $\mathcal{L}_\bigstar$，并具有以下对应关系

$$\frac{u_{\alpha_1}^{m+\ell-b}a_{\alpha_1}^b}{v^{\ell+m+n}}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^{j-\ell+b}u_{\alpha_0}^{k-2n-m-b}}$$

因为可以将类 $\Sigma^{-1}\,\frac{1}{a_{\alpha_0}^{j-\ell+b}u_{\alpha_0}^{k-2n-m-b}}$ 识别为核 $\mathcal{L}_\bigstar$ 中的元素。

对于与 $a_{\alpha_0}^{-i}$–类的等价关系，考虑以下类

$$\begin{aligned}\frac{k_1^n a_\beta^\ell u_\beta^m}{a_{\alpha_1}^i}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k} &= \frac{k_1^n v^m u_\beta^m u_{\alpha_0}^\ell a_\beta^\ell}{v^m a_{\alpha_1}^i}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^{k+\ell}}\\ &= \frac{k_1^n v^m u_\beta^m(k_1a_{\alpha_1}+u_\beta a_{\alpha_0})^\ell}{v^m a_{\alpha_1}^i}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^{k+\ell}}\\ &= \frac{u_{\alpha_0}^{2n+m}u_{\alpha_1}^m(k_1a_{\alpha_1}+u_\beta a_{\alpha_0})^\ell}{v^{n+m}a_{\alpha_1}^i}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^{k+\ell}}\end{aligned}$$

其具有以下型项:

$$\frac{u_{\alpha_0}^{2n+m}u_{\alpha_1}^m k_1^b a_{\alpha_1}^b u_\beta^{\ell-b}a_{\alpha_0}^{\ell-b}}{a_{\alpha_1}^i v^{m+n}}\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^{k+\ell}} = \frac{u_{\alpha_0}^{2n+b+m-k}u_{\alpha_1}^{m+\ell-b}}{a_{\alpha_1}^{i-b}}\Sigma^{-1}\frac{1}{v^{\ell+m+n}a_{\alpha_0}^{j+b-\ell}}$$

再次考虑由 $k_1a_{\alpha_1}$ 的指数构成的序集 $\{0=b_0<b_1<\cdots<b_t=\ell\}$。取最小的 b_s 使得 $j-\ell+b_s>0$，那么如果

$i-b_s\le 0$，则分母中不会出现 a_{α_1} 项，而且模关系后的类等于前一个类。但对于 $i-b_s>0$，类在 Coker$\partial_\bigstar$ 中有一个关于 $k\le 2n+m+b_s$ 的表示。

(2) 证明利用 (1) 得出，并且由于与 $\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^s u_\beta^t}$ 因子的乘法，对 k 的限制是多余的。

□

利用命题 5.13 及上述等价关系，我们得到一个点的上同调环。

5.19.**定理**。 点的 $\mathrm{RO}(\mathcal{K}_4)$–分次布雷登上同调为

$$\begin{aligned}\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}(S^0;\,\mathbb{F}_2) \cong\ & \mathbb{F}_2[a_\beta,u_\beta,a_{\alpha_0},u_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_1},k_0,k_1,v]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\Big\rangle[\,a_{\alpha_0},a_{\alpha_1},u_{\alpha_0},u_{\alpha_1},v,k_0,k_1\,]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}\Big\rangle[\,a_\beta,a_{\alpha_1},u_\beta,u_{\alpha_1},v,k_0,k_1\,]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^j u_{\alpha_1}^k}\Big\rangle[\,a_\beta,a_{\alpha_0},u_\beta,u_{\alpha_0},v,k_0,k_1\,]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle a_{\alpha_1}^{-i}k_1^n u_{\alpha_0}^m a_{\alpha_0}^\ell\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\ :\ b_s<i;k\le 2n+b_s+m\Big\rangle[\,u_{\alpha_1},k_0,v\,]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle a_{\alpha_0}^{-i}k_0^n u_{\alpha_1}^m a_{\alpha_1}^\ell\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^j u_\beta^k}\ :\ b_s<i;k\le 2n+b_s+m\Big\rangle[\,u_{\alpha_0},k_1,v\,]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle a_{\alpha_1}^{-i}k_1^n u_\beta^m a_\beta^\ell\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}\ :\ b_s<i;k\le 2n+b_s+m\Big\rangle[\,u_{\alpha_1},v,k_0\,]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle a_{\alpha_0}^{-i}k_0^n u_\beta^m a_\beta^\ell\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^j u_{\alpha_1}^k}\ :\ b_s<i;k\le 2n+b_s+m\Big\rangle[\,u_{\alpha_0},v,k_1\,]\\
&\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta^s u_\beta^t}\Big\rangle\ \otimes\ \Big[\mathbb{F}_2\Big\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}^j u_{\alpha_0}^k}\Big\rangle[\,a_{\alpha_1}^{\pm},u_{\alpha_1},v,k_0,k_1\,]\\
&\qquad\qquad\oplus\ \mathbb{F}_2\Big\langle\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}^j u_{\alpha_1}^k}\Big\rangle[\,a_{\alpha_0}^{\pm},u_{\alpha_0},v,k_0,k_1\,]\Big]\end{aligned}$$

其中 n、m、$\ell\ge 0$；i、j、k、s、$t\ge 1$ 和 $0\le b_s\le\ell$ 的定义见前文（5.11）。

满足以下关系：

(1) $k_0u_{\alpha_0}=u_{\alpha_1}u_\beta$, *(2)* $k_1u_{\alpha_1}=u_{\alpha_0}u_\beta$, *(3)* $vu_\beta=u_{\alpha_0}u_{\alpha_1}$,

(4) $k_0a_{\alpha_0}=a_\beta u_{\alpha_1}+a_{\alpha_1}u_\beta$, *(5)* $k_1a_{\alpha_1}=a_\beta u_{\alpha_0}+a_{\alpha_0}u_\beta$, *(6)* $va_\beta=a_{\alpha_0}u_{\alpha_1}+a_{\alpha_1}u_{\alpha_0}$, *(7)* $k_0k_1=u_\beta^2$, *(8)* $k_0v=u_{\alpha_1}^2$, *(9)* $k_1v=u_{\alpha_0}^2$, *(10)* $k_0\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_1}u_{\alpha_1}}=k_1\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_0}u_{\alpha_0}}$,

(11) $k_r\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_\beta u_\beta} = v\,\Sigma^{-1}\frac{1}{a_{\alpha_r} u_{\alpha_r}}, \quad r = 0, 1.$

5.20.注记。 在上述表达式中，可以为对称结构添加更多因子，但根据上述关系，所有这些类实际上都已经包含在上述表达式中。

6. Equivariant Complex Projective Spaces

对于阿贝尔群 G 的复表示 V，有一个复射影空间 $\mathcal{P}(V)$，它是 V 中复直线的空间，其中 G 在 $\mathcal{P}(V)$ 上的作用由其在 V 上的作用诱导而来。这里，底层空间是复射影空间 $\mathbb{C}P^{\text{维数}V-1}$。在本节中，我们将为完备宇宙 $\mathcal{U} = \text{lim}\!\!\longrightarrow_n n\cdot\rho_{\mathbb{C}}$ 构造复射影空间，其中 $\rho_{\mathbb{C}}$ 是复正则表示。

我们首先处理奇素数 p 的情形，$p = 2$ 的情形留待后面讨论。对于群 $\mathcal{G}$，不可约特征为

$$\chi^{i,j}(a^s b^r) = \exp(\frac{2\pi\iota}{p}(si + rj)), \qquad 0 \le i, j, r, s \le p-1.$$

We o按字典序排列特征 (i, j)，且张量积满足

$$\chi^{i_1,j_1} \otimes \chi^{i_2,j_2} = \chi^{\,i_1+i_2 \bmod p,\, j_1+j_2 \bmod p}.$$

这种排列在 $\mathcal{G}$–空间 $\mathcal{P}(\rho_{\mathbb{C}})$ 上诱导出一个递增滤过：

$$\mathcal{P}(1_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{P}(1_{\mathbb{C}} \oplus \chi^{0,1}) \subset \mathcal{P}(1_{\mathbb{C}} \oplus \chi^{0,1} \oplus \chi^{0,2}) \subset \cdots. \tag{6.1}$$

利用上述排序和滤过，我们定义一个 $\mathcal{G}$–表示 V_k，其中$k = mp + \ell$ 满足 $0 \le m$, $\ell \le p-1$，定义如下：

$$V_k := \bigoplus_{i=0}^{m-1}\bigoplus_{j=0}^{p-1}\chi^{i,j} \;\oplus\; \bigoplus_{t=0}^{\ell}\chi^{m,t}. \tag{6.2}$$

存在一个余纤维序列

$$\mathcal{P}(V_{k-1})_+ \longrightarrow \mathcal{P}(V_k)_+ \longrightarrow S^{\chi^{p-m,p-\ell}\otimes V_{k-1}}, \tag{6.3}$$

其中球面上的表示为

$$\chi^{p-m,p-\ell} \otimes V_{k-1} = \bigoplus_{i=0}^{m-1}\bigoplus_{j=0}^{p-1}\chi^{\,p-m+i,\,p-\ell+j} \;\oplus\; \bigoplus_{t=0}^{\ell-1}\chi^{0,\,p-\ell+t}. \tag{6.4}$$

通过计算核，这个表示在指数意义下可与先前定义的表示 α_i 和 β 等同。事实上，由于命题 **1.17**，只需在指数意义下识别各个直和项。

对于 $p = 2$，$\mathcal{P}(\rho_{\mathbb{C}})$的滤过为

$$\mathcal{P}(1_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{P}(1_{\mathbb{C}} \oplus 2\alpha_0) \subset \mathcal{P}(1_{\mathbb{C}} \oplus 2\alpha_0 \oplus 2\alpha_1) \subset \mathcal{P}(\rho_{\mathbb{C}}). \tag{6.5}$$

类似于 **(6.3)**，相应的球表示为

$$\{\, 2\alpha_0,\ 2\alpha_1 + 2\beta,\ 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + 2\beta \,\}.$$

以下命题给出了任意素数 p 时，$\mathrm{RO}(C_p \times C_p)$ 中一种特定分次的上同调群的消失判据。

6.6. **命题**。 设 $\gamma\in \mathrm{RO}(C_p\times C_p)$ 满足：对于所有 $H\leq C_p\times C_p$, $|\gamma^H|\leq -1$。那么，

$$\widetilde{H}^{\gamma}_{\mathcal{G}}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})=0.$$

其中， p 是任意素数。

证明。 我们证明 p 为奇数时的结论；另一种情况类似。

考虑满足上述不动点维数条件的 $\gamma=b+\Sigma_{i=0}^{p-1}c_i\alpha_i+d\beta\in \mathrm{RO}(\mathcal{G})$。注意， b 为负数。

第一步是将 γ 约化为一个虚表示 γ_0，使得 $b<0$ 且 $c_i,d\leq 0$。假设 $d>0$。我们断言

$$\widetilde{H}^{\gamma}_{\mathcal{G}}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})\cong \widetilde{H}^{\gamma-d\beta}_{\mathcal{G}}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}). \tag{6.7}$$

这由各向同性余纤维化所对应的长正合列得到

$$S(\beta)_+\longrightarrow S^0\longrightarrow S^{\beta}.$$

在次数 γ 上，这给出

$$\cdots\to \widetilde{H}^{\gamma-1}_{\mathcal{G}}(S(\beta)_+;\underline{\mathbb{F}_p})\to \widetilde{H}^{\gamma-\beta}_{\mathcal{G}}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})\to \widetilde{H}^{\gamma}_{\mathcal{G}}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})\to \widetilde{H}^{\gamma}_{\mathcal{G}}(S(\beta)_+;\underline{\mathbb{F}_p})\to\cdots. \tag{6.8}$$

两端项利用余纤维序列计算得到

$$\mathcal{G}/K_+\longrightarrow \mathcal{G}/K_+\longrightarrow S(\beta)_+,\qquad K=\ker(\beta).$$

因此，要证明 (6.7)，只需证明

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}/K_+;\underline{\mathbb{F}_p})=0\quad \text{for}\quad \bigstar=\gamma,\ \gamma-1.$$

利用标准识别

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}/K_+;\underline{\mathbb{F}_p})\cong \widetilde{H}^{\mathrm{res}_K(\bigstar)}_{K}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}),$$

结论随即得证。

对于上述次数 $\bigstar$，相应的限制次数将为

$$\mathrm{res}_K(\gamma)=(b+2d)+\xi\Sigma_{i=0}^{p-1}c_i \text{ and } \mathrm{res}_K(\gamma-1)=(b+2d-1)+\xi\Sigma_{i=0}^{p-1}c_i$$

因此，由于命题 1.9， $\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}/K_+;\mathbb{F}_p)$，即 $\widetilde{H}^{\mathrm{res}_K(\bigstar)}{}_K(S^0;\mathbb{F}_p)$，在上述次数下为零。迭代应用相同的方法，我们得到 γ_0，其所有系数均为非正数。

现在假设 $\gamma_0=b+\sum_{i=0}^{p-1}c_i\alpha_i+d\beta,\quad b<0,\quad c_i,\ d\leq 0$. 对上述余纤维序列应用相同的论证，我们得到一个同构

$$\widetilde{H}^{\gamma_0}_{\mathcal{G}}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p})\cong \widetilde{H}^{b}_{\mathcal{G}}(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}).$$

由于 $b<0$ 是负整数分次，点的约化上同调为零。证明至此完成。□

由于布雷登上同调中余纤维序列 (6.3) 的连接同态是 $\widetilde{H}^{\bigstar}_{C_p\times C_p}(S^0;\mathbb{F}_p)$-模映射，且球面项的悬挂次数满足命题 6.6 的假设，相关上同调群均为零。因此，所有边界映射都是平凡的，所需的分裂由此得出。

此外，由于余纤维序列在 Smash 积下保持不变，对于两种素数情形，都可以通过归纳计算 r 重等变射影空间 Smash 积的布雷登上同调。该论证同样归结为命题 6.6。

6.9.**定理**。 *(1)* 对于奇素数 p 和 $r \geq 2$，等变射影空间的 r 重 *smash* 幂的布雷登上同调的加法结构如下：

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}_p}\right) \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty}\bigoplus_{i=0}^{p-1}\bigoplus_{j=0}^{p-1}\widetilde{H}^{\bigstar-j\Sigma_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell-i\beta-k\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_p}\right),$$

且 $r=1$ 给出如下

$$\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{G}}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U});\underline{\mathbb{F}_p}\right) = \bigoplus_{k=0}^{\infty}\bigoplus_{i=0}^{p-1}\bigoplus_{j=0}^{p-1}\widetilde{H}^{\bigstar-j\Sigma_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell-i\beta-k\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{G}}\left(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}\right) \tag{6.10}$$

其中 $(i,j,k) \neq (0,0,0)$。

(2) 对于 $p=2$ 和 $r \geq 2$，等变射影空间的r 重 *smash* 幂的布雷登上同调的加法结构如下：

$$\begin{aligned}\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}_2}\right) \cong & \bigoplus_{i=1}^{\infty}\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\\ & \bigoplus_{i=0}^{\infty}\Big(\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\\ & \quad\oplus\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\\ & \quad\oplus\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r-1)};\underline{\mathbb{F}_2}\right)\Big),\end{aligned}$$

其基例 $r=1$ 如下

$$\begin{aligned}\widetilde{H}^{\bigstar}_{\mathcal{K}_4}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U});\underline{\mathbb{F}_2}\right) \cong & \bigoplus_{i=1}^{\infty}\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{K}_4}\left(S^0;\underline{\mathbb{F}_2}\right)\bigoplus_{i=0}^{\infty}\Big(\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0}_{\mathcal{K}_4}\left(S^0;\underline{\mathbb{F}_2}\right)\\ & \quad\oplus\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}\left(S^0;\underline{\mathbb{F}_2}\right)\oplus\widetilde{H}^{\bigstar-i\rho_{\mathbb{C}}-2\alpha_0-2\alpha_1-2\beta}_{\mathcal{K}_4}\left(S^0;\underline{\mathbb{F}_2}\right)\Big).\end{aligned}$$

根据定理 6.9，等变射影空间的 r 重 Smash 积的上同调可以表示为点的上同调的悬挂。在奇素数情形下，每个直和项的形式为

$$\widetilde{H}^{\bigstar-\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}k_i^{(j)}(jU_0+i\beta)-\sum_{j=1}^{p-1}k_0^{(j)}jU_0-\sum_{s=1}^{r}d_s\rho_{\mathbb{C}}}_{\mathcal{G}}\left(S^0;\underline{\mathbb{F}_p}\right), \tag{6.11}$$

其中 $U_0=\bigoplus_{\ell=0}^{p-1}\alpha_\ell$。

非负整数 $k_i^{(j)}$ 和 $k_0^{(j)}$ 满足

$$\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}k_i^{(j)}+\sum_{j=1}^{p-1}k_0^{(j)} \leq r,$$

并且整数 $d_1,\dots,d_r$ 中至少有 $r-\left(\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}k_i^{(j)}+\sum_{j=1}^{p-1}k_0^{(j)}\right)$ 个严格为正。

对于群 $\mathcal{K}_4$，等变射影空间的类似 r 重 Smash 积，其直和项是点的上同调的移位悬挂，形式为

$$\widetilde{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar-\sum_{m=1}^{r}i_m\rho_{\mathbb{C}}-k_1(2\alpha_0)-k_2(2\alpha_1+2\beta)-k_3(2\alpha_0+2\alpha_1+2\beta)}(S^0;\underline{\mathbb{F}_2}), \tag{6.12}$$

其中 k_1，k_2，k_3 为非负整数，满足 $k_1+k_2+k_3\le r$，且至少有 $r-(k_1+k_2+k_3)$ 个 $d_s\ge 0$ 严格为正。

6.13.**命题**。*(1)* 对于奇素数 p，*Mackey* 函子值上同调 $H_{\mathcal{G}}^{\bigstar}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\ \mathbb{F}_p\right)$ 不含有常值 *Mackey* 函子 $\mathbb{F}_p$，当 $\bigstar=r\beta+2r(p-1)$时。*(2)* 对于 $p=2$，*Mackey* 函子值上同调 $H_{\mathcal{K}_4}^{\bigstar}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\ \mathbb{F}_2\right)$ 不含有常值 *Mackey* 函子 $\mathbb{F}_2$，当 $\bigstar=2r\alpha_0+2r$时。

证明。我们证明 p 为奇数时的结论；$p=2$ 的情形类似。反设常值 Mackey 函子 $\mathbb{F}_p$ 是 $H_{\mathcal{G}}^{\bigstar}\left(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge r}\right.$ 的直和项；$\left.\mathbb{F}_p\right)$ 对于 $\bigstar=r\beta+2r(p-1)$。将这份 $\mathbb{F}_p$ 限制到子群 $K=\langle b\rangle$，得到 K 上的常值 Mackey 函子 $\mathbb{F}_p$；特别地，$\mathrm{res}_K(\mathbb{F}_p)=\mathbb{F}_p$。

根据 (6.11) 中的描述，次数为 $\bigstar$ 的任一直和项所对应的次数具有如下形式

$$\alpha=r\beta+2r(p-1)-\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}k_i^{(j)}\left(jU_0+i\beta\right)-\sum_{j=1}^{p-1}k_0^{(j)}\,jU_0-\sum_{s=1}^{r}d_s\rho_{\mathbb{C}},$$

考虑以下计算

$$\left|\mathrm{res}_K(\alpha)\right|=2rp-\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}k_i^{(j)}\left(2pj+2i\right)-\sum_{j=1}^{p-1}2pj\,k_0^{(j)}-2p^2\sum_{s=1}^{r}d_s.$$

and

$$\left|(\mathrm{res}_K(\alpha))^K\right|=2rp-\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}k_i^{(j)}\,2i-4\sum_{s=1}^{r}d_s.$$

若 $\left|\mathrm{res}_K(\alpha)\right|=0$，代入后可得

$$\left|(\mathrm{res}_K(\alpha))^K\right|=\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}2pj\,k_i^{(j)}+\sum_{j=1}^{p-1}2pj\,k_0^{(j)}+(2p^2-4)\sum_{s=1}^{r}d_s\ge 0.$$

断言：$\left|(\mathrm{res}_K(\alpha))^K\right|>0$。

如果 $\left|(\mathrm{res}_K(\alpha))^K\right|=0$ 意味着 $d_s=0$，$k_i^{(j)}=0$ 对所有 $j\neq 0$ 均成立，从而推出 $\Sigma_{i=1}^{p-1}k_i^{(0)}=r$，但 $\left|\mathrm{res}_K(\alpha)\right|=2(rp-\Sigma_{i=1}^{p-1}ik_i^{(0)})>0$，因为 $\max\{\Sigma_{i=1}^{p-1}ik_i^{(0)}\}=(p-1)r$，这与命题 1.9 矛盾。因此，常值 Mackey 函子 $\mathbb{F}_p$ 不可能出现在次数 $\bigstar=r\beta+2r(p-1)$ 中，从而完成了对奇数 p 的证明。□

下文将证明，某个上同调运算无法提升到$\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{K}_4$ 层；这与 Caruso [7] 针对 C_p 群给出的类似结果相同。

6.14. **定理。** 设 θ 是一个次数为 $2r(p-1)$ 的上同调运算，在奇数 p 情形和 $p=2$ 情形下分别为 $2r$ ，且不涉及 Bockstein β。那么不存在提升 θ的等变上同调运算 θ 。

证明。 设 p 为奇素数。反证假设存在一个等变提升

$$\tilde{\theta}\colon H\underline{\mathbb{F}}_p \longrightarrow \Sigma^{2r(p-1)} H\underline{\mathbb{F}}_p$$

其底非等变映射与 θ一致。这样的映射对每个G-空间 X诱导一个 RO($\mathcal{G}$)-分次麦基函子的自然变换

$$\underline{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar}(X;\underline{\mathbb{F}}_p) \longrightarrow \underline{H}_{\mathcal{G}}^{\bigstar+2r(p-1)}(X;\underline{\mathbb{F}}_p),$$

且关于 X具有函子性。

现取 $X=\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)}$ 与 $\bigstar = r\beta$。由定理 6.11，存在一个 Mackey 函子嵌入

$$\underline{H}_{\mathcal{G}}^{0}(S^0;\underline{\mathbb{F}}_p) \;\cong\; \underline{\mathbb{F}}_p \;\hookrightarrow\; \underline{H}_{\mathcal{G}}^{r\beta}\big(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}}_p\big).$$

另一方面，命题 6.13 表明

$$\underline{H}_{\mathcal{G}}^{r\beta+2r(p-1)}\big(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}}_p\big)$$

不含与 $\mathbb{F}_p$ 同构的直和项。因此，复合映射

$$\underline{\mathbb{F}}_p \;\hookrightarrow\; \underline{H}_{\mathcal{G}}^{r\beta}\big(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}}_p\big) \xrightarrow{\tilde{\theta}} \underline{H}_{\mathcal{G}}^{r\beta+2r(p-1)}\big(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}}_p\big)$$

必然是平凡的 Mackey 函子态射。

取底层非等变上同调后，包含映射将 $\mathbb{F}_p(\mathcal{G}/e)$ 送到非零类

$$\mathbb{F}_p\{x_1\otimes\cdots\otimes x_r\}.$$

由于 θ 对此元素的作用非平凡，诱导的底层上同调映射非零。这与相应 Mackey 函子态射的平凡性矛盾。因此，不存在这样的提升 θ 。

对于 $p=2$ 情形，论证类似。可以证明，不存在非平凡的 Mackey 函子态射

$$\underline{H}_{\mathcal{K}_4}^{2r\alpha_0}\big(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}}\big) \longrightarrow \underline{H}_{\mathcal{K}_4}^{2r\alpha_0+2r}\big(\mathcal{P}(\mathcal{U})^{\wedge(r)};\underline{\mathbb{F}}\big),$$

并且同样的矛盾论证仍然适用。 □

References

[1] Basu, S.; Dey, P.; Karmakar, A. “射影空间的等变上同调。”代数与几何拓扑**25** (2025) 第5期，3049-3088.[2] Basu, S.; Dey, P.; Karmakar, A.“定号4维流形上循环群作用的等变同调分解。” 纽约数学杂志**28** (2022)，1554–1580.[3] Basu, S.; Dey, P. “循环群的等变上同调。” 国际数学研究通报**12** (2025)，41页.[4] Basu, S.; Ghosh, S. “ C_{pq}-布雷登上同调中的计算。” 数学杂志 **293** (2019)，第3–4期，1443–1487.[5] Basu, S.; Ghosh, S. “有限维 C_p-空间的布雷登上同调。” 同调与同伦应用 **23**(2021)，第2期，33–57.[6] Basu, S.; Ghosh, S. “无平方因子阶循环群的等变上同调。” 数学科学研究**11** (2024)，第29号论文，33页。

[7] Caruso, J. L. “等变 $\mathbb{Z}/p$-上同调中的运算。” 剑桥哲学学会数学论文集126 (1999)，521–541.[8] Dugger, D.; Hazel, C.; May, C.“循环群 C_2的等变 $\mathbb{Z}/2$-模。” 纯粹与应用代数杂志 228 (2024)，第9期，第107473号论文，48页。[9] Deng, B.; Voineagu M. “一点的RO($C_2 \times C_2$)-分次上同调环及其应用。” arXiv预印本 arXiv:2502.00956 (2025).[10] Ellis-Bloor, B. “ $H\mathbb{F}_2$ 的克莱因四元数同伦麦基函子结构。” 澳大利亚国立大学荣誉学位论文 (2020).[11] Ferland, K. K. “关于 $G = \mathbb{Z}/p$上的广义 G-胞腔复形的RO(G)-分次等变普通上同调。” 博士论文，雪城大学，1999.[12] Ferland, K. K.; Lewis, L. G.“ $G = \mathbb{Z}/p$的偶维胞腔 G-胞腔复形的 $RO(G)$-分次等变普通同调。” 美国数学学会回忆录167 (2004)，第794号，第viii+129 页。[13] Greenlees, J. P. C. “实结构上同调理论的四种处理方法。” 预印本，2017.[14] Greenlees, J. P. C.; May, J. P. “广义 Tate 上同调。” 美国数学学会回忆录113 (1995)，第543号，第viii+178 页。[15] Hill, M. A.; Hopkins, M. J.; Ravenel, D. C. “关于 Kervaire 不变量一的元素不存在性。” 数学年刊（第2辑）184 (2016)，第1期，1–262.[16] Hill, M.; Meier, L. “ C_2–谱 $\mathrm{tmf}_1(3)$ 及其可逆模。” 代数与几何拓扑17 (2017)，第4期，1953–2011.[17] Hu, P.; Kriz, I. “实定向同伦论与 Adams–Novikov 谱序列的一种类比。” 拓扑学40 (2001)，第2期，317–399.[18] Holler, John, and Igor Kriz. “关于RO(G)–分次等变‘普通’上同调，其中 G 是 $\mathbb{Z}/2$的幂。” 代数与几何拓扑 17.2 (2017)：741-763.[19] Hu, P; Kriz, I, Somberg, P; Zou, F. 奇素数 p 的 Z/p-等变对偶 Steenrod 代数。arXiv预印本 arXiv:2205.13427。2022 May.[20] Lewis, L. G. “具有线性 $\mathbb{Z}/p$-作用的复射影空间的 $RO(G)$-分次等变普通上同调。” 载于《代数拓扑与变换群》（G ¨ottingen, 1987），《数学讲义》，第1361卷，施普林格，柏林，1988年，第53–122页。[21] May, J. P.等变同伦与上同调理论。谨以此书纪念 Robert J. Piacenza。区域数学会议系列，第91卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。x+366 页。[22] Stong, R. E. “等变上同调札记。” 未发表手稿，弗吉尼亚大学，1986年。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Roorkee, Uttarakhand-247667, India电子邮箱地址：surojit.ghosh@ma.iitr.ac.in; surojitghosh89@gmail.com

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Roorkee, Uttarakhand-247667, India电子邮箱地址：ankit k@ma.iitr.ac.in