arXiv:2603.10649v1 [math.SP] 11 Mar 2026

动力学刚性方法下长程准周期算子的安德森局域化

王振福、游建功、周琦

摘要。我们证明了具有大三角势和丢番图频率的长程准周期算子的安德森局域化，证明基于一种新颖的动力学刚性论证。

1. 引言

考虑作用于 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 上的长程准周期算子 $H_{v,\ \varepsilon w,\ \alpha,\ x}$

$$(H_{v,\varepsilon w,\alpha,x}u)_n = \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} w_k\, u_{n+k} + v(x+\langle n,\alpha\rangle)\, u_n, \qquad n\in\mathbb{Z}^d, \tag{1}$$

其中 $\alpha\in\mathbb{T}^d$ 是频率，$w_k\in\mathbb{C}$ 是实解析函数 $w:\mathbb{T}^d\to\mathbb{R}$ 的傅里叶系数，且 $v:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ 为实解析函数。令 $v(\theta)=2\cos(2\pi\theta)$，即可得到广为研究的长程算子：

$$(H_{2\cos,\varepsilon w,\alpha,x}u)_n = \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} w_k\, u_{n+k} + 2\cos(x+\langle n,\alpha\rangle)\, u_n, \qquad n\in\mathbb{Z}^d.$$

该模型的重要性源于它通过奥布里对偶与 [3], 一维准周期薛定谔算子之间的深刻联系：

$$(H_{\varepsilon w,\alpha,\theta}u)_n = u_{n+1}+u_{n-1}+\varepsilon w(\theta+n\alpha)u_n, \qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

奥布里对偶仍是谱理论中的关键工具，对分析局域化-离域化转变（[4, 6, 10, 20, 31, 36]）和康托尔谱问题（[5, 21, 36, 37]）都至关重要。

如果进一步假设 $w(\theta)=2\cos(2\pi\theta)$，该模型便化为著名的几乎马丢算子（AMO）：

$$(H_{\lambda,\alpha,\theta}u)_n = u_{n+1}+u_{n-1}+2\lambda\cos(\theta+n\alpha)u_n. \tag{3}$$

Peierls [35]最初提出该模型，用于描述均匀磁场 [28, 38]中二维晶格上的电子。

无序介质中的局域化研究是固体物理学的一个基础前沿领域。这一研究源于安德森1958年的研究 [2] ，该研究探讨了掺杂半导体中电子自旋的反常弛豫时间。如今，安德森局域化（*AL*）已成为理解量子输运的核心，在霍尔电导量子化等现象中发挥着关键作用 [1, 25]。从数学上说，如果薛定谔算子具有由指数衰减特征函数构成的完备基，则该算子表现出安德森局域化。

尽管过去几十年间取得了长足进展，现有的准周期薛定谔算子局域化结果基本上可分为两类，各自都存在内在局限。

第一类结果涉及固定相位局域化。在这种情形下，证明的是固定相位下的安德森局域化，同时允许频率变化。Bourgain 和 Goldstein 在这一方向上的工作是里程碑式的贡献 [8], ：他们证明，对于一维薛定谔算子$H_{v,\ \alpha,\ \theta}$如式（2）所示，当能量位于正李雅普诺夫指数区域时，对于固定相位和典型频率，局域化成立。此后，这些结果被推广到高维情形[9, 7, 34, 33]。证明具有非微扰性质，也就是说，所需频率的大小不依赖于频率。

第二类结果研究的是固定频率局域化。对于几乎马蒂厄算子$H_{\lambda,\ \alpha,\ \theta}$由（3）定义，Jitomirskaya 提出了一种非微扰方法，从而证明对于所有丢番图频率 [29, 30], 以及几乎处处的相位，安德森局域化均成立。这一里程碑式结果随后由 Avila-You-Zhou 推广至刘维尔频率情形[6], ，Jitomirskaya 和 Liu 也独立得到了这一推广 [32]。关于几乎马蒂厄算子的扰动（更一般地，关于 I 型算子，精确定义见 [21]），相关结果见 [26, 27, 20]。

对于一般势函数，早期结果主要局限于余弦或余弦型形式。针对这些势函数的研究通常遵循三种主要方法:

- 多尺度分析（MSA）：Fröhlich、Spencer 和 Wittwer 运用多尺度分析，证明了一维薛定谔算子在偶 C^2余弦型势函数 [19]下具有安德森局域化性质。随后，Surace 将这一结果推广至高维情形 [40, 41], ，Cao、Shi 和 Zhang 则将其推广至算术情形 [11]。之后，Forman 和 VandenBoom 在一维情形 [18],、Cao、Shi 和 Zhang 在高维情形 [12]分别去除了偶性假设。
- 微扰论证：与 MSA 的发展并行，Sinai 利用微扰方法和特征值的几何分析，对一维 C^2 余弦型势函数建立了局域化 [39]。这一研究方向由 Chulaevsky 和 Dinaburg [14, 15], 进一步推进，他们采用 KAM 型技术将这些结果推广到更高维。
- 可约性与奥布里对偶：安德森局域化也可以通过研究相关对偶余循环的可约性并利用奥布里对偶 [6, 22, 23, 24, 31]来处理。该方法将谱问题转化为动力学问题。

一项重要的中间结果归功于 Eliasson [16, 17], ，他利用 KAM 型方法证明：对于固定的丢番图频率和足够大的解析势，相应的准周期薛定谔算子具有纯点谱。然而，特征函数的指数衰减并未得到确立。最近，Cao、Shi 和 Zhang 对一般解析势和固定丢番图频率证明了安德森局域化 [13]。在此，我们为三角多项式给出一个显著更短的证明:

定理 1.1. 设 $\alpha \in DC$[1] 和 v 是三角多项式。假设对于某些常数 $C, c > 0$，有 $|w_k| \leq Ce^{-c|k|}$。那么存在 $\varepsilon_0(\alpha, v, w) > 0$，使得若$|\varepsilon| < \varepsilon_0$, $H_{v,\ \varepsilon w,\ \alpha,\ x}$，则对几乎处处的 $x \in \mathbb{T}$, 其具有绝对连续谱。

[1]我们称 若存在 $\gamma > 0, \tau > d-1$，使得 $\inf_{j\in\mathbb{Z}} |\langle k, \alpha\rangle - j| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \forall k \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}$ —— .

我们对证明作一点说明。以往基于可约性的证明都局限于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 框架，其中纤维旋转数起着根本性作用。通过应用奥布里对偶，可约对偶余圈的纤维旋转数能够严格确定局域相位。然而，当推广到具有一般三角势的长程算子时，对偶余圈取值于厄米辛群 $\mathrm{HSp}(2l)$[2]。在这些高维情形下，单个纤维旋转数这一概念不再适用。取而代之的是多个旋转相位（由对角化矩阵的特征值给出），而这些高维参数无法通过传统论证直接确定具体的局域相位。

为克服高维障碍，我们将结构上的劣势转化为动力学刚性论证。我们不再试图从不存在的纤维旋转向量中提取局域相位，而是从一个已知具有 x 特征函数的给定相位开始ℓ^2 （如 Eliasson 所证明的 [16, 17]）。随后我们证明，若系统在相应能量处解析可约，则对角化余圈的相位必然与 x （命题 2.1）严格对齐。结合这一刚性以及积分态密度绝对连续性所提供的测度论保障， [42], 奥布里对偶便可直接推出安德森局域化，无需借助繁复的摄动 KAM 展开。尽管这一框架目前仅适用于三角多项式，我们相信，这种动力学方法最终可通过逼近技术扩展到所有解析势——这是我们计划在未来工作中继续探索的方向。

2. 奥布里对偶与动力学刚性

若 $v(\theta) = \sum_{|k|\le l} v_k e^{2\pi i k\theta}$ 是三角多项式，我们考虑对偶算子 $\hat{H}_{\varepsilon w,\ v,\ \alpha,\ \theta}$，它作用于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的形式如下：

$$(\hat{H}_{\varepsilon w,v,\alpha,\theta}u)n = \sum_{|k|\le l} v_k u_{n+k} + \varepsilon w(\theta + n\alpha)u_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

The $\hat{}$ 特征函数 $H_{\varepsilon w,v,\alpha,\theta}u = Eu$ 诱导了一个拟周期余圈 $(\alpha, A_E(\theta))$，其中

$$A_E(\theta) = \begin{pmatrix} -\frac{v_{\ell-1}}{v_\ell} & \cdots & -\frac{v_1}{v_\ell} & \frac{E-v_0-\varepsilon w(\theta)}{v_\ell} & -\frac{v_{-1}}{v_\ell} & \cdots & -\frac{v_{-\ell+1}}{v_\ell} & -\frac{v_{-\ell}}{v_\ell} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

本文的核心是以下命题 2.1，它可视为动力系统中的一种刚性结果：

[2] $\mathrm{HSp}(2l) = \{A \in \mathbb{C}^{2l\times 2l} \mid A^* J A = J\}$,where $J = \begin{pmatrix} O & -I_l \\ I_l & O \end{pmatrix}$.

命题 2.1。设 $h>0$、$\varepsilon>0$，且 $\alpha\in\mathbb{R}^d$ 为无理数。记 $\mathcal{R}$ 为能量 E 的集合，使得对偶余圈 (α, A_E) 是 C_h^ω-对角可约的，也就是说，存在 $B\in C_h^\omega(\mathbb{T}^d, \mathrm{GL}(2\ell,\mathbb{C}))$ 使得

$$B(\theta+\alpha)^{-1}A_E(\theta)B(\theta)=\Lambda:=\mathrm{diag}\big(e^{2\pi i\rho_1},\dots,e^{2\pi i\rho_{2\ell}}\big).$$

若 $E\in\mathcal{R}$ 与 $x\in\mathbb{T}$ 使得 E 是$H_{v,\ \varepsilon w,\ \alpha,\ x}$的特征值，则有如下结论：

（1）存在 $1\le j\le 2d$、$k\in\mathbb{Z}^d$，使得 $\rho_j-x=\langle k、\ \alpha\rangle$ 模 $\mathbb{Z}$，特别地$\Im\rho_j=0$。
（2）相应的特征函数 $u\in l^2$（$\mathbb{Z}$） 指数衰减：$|u_n|\le C\,e^{-2\pi h|n|}$.

证明。设 $u=(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\ell^2(\mathbb{Z}^d)$满足$H_{v,\ \varepsilon w,\ \alpha,\ x}u=Eu$，并定义其傅里叶变换 $\hat{u}(\theta)$ $=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}u_ne^{2\pi i\langle n,\ \theta\rangle}\in L^2(\mathbb{T}^d)$。由奥布里对偶，对几乎处处的 $\theta\in\mathbb{T}^d$，序列 $\widetilde{u}_\theta(n):=\hat{u}(\theta+n\alpha)\,e^{2\pi inx}$，$n\in\mathbb{Z}$，是对偶方程$\widehat{H}_{\varepsilon w,\ v,\ \alpha,\ \theta}\widetilde{u}_\theta=E\widetilde{u}_\theta$的一个非平凡解。定义

$$w(\theta):=\big(\widetilde{u}_\theta(2\ell-1),\dots,\widetilde{u}_\theta(1),\widetilde{u}_\theta(0)\big)^\top\in L^2(\mathbb{T}^d,\mathbb{C}^{2\ell}).$$

于是，对于几乎处处的 θ，有 $A_E(\theta)w(\theta)=e^{2\pi ix}w(\theta+\alpha)$。

令 $c(\theta):=B(\theta)^{-1}w(\theta)$。由于 B 将 A_E 共轭变换为 Λ，我们得到 $\Lambda c(\theta)=e^{2\pi ix}c(\theta+\alpha)$。记 $c=(c_1,\dots,c_{2\ell})^\top$，这意味着对于每个 $1\le j\le 2\ell$ 以及几乎处处的 θ，

$$c_j(\theta+\alpha)=e^{2\pi i(\rho_j-x)}c_j(\theta).$$

由于 $c(\theta)\not\equiv 0$，至少存在一个 j 使得 $c_j(\theta)\not\equiv 0$。考察 c_j的傅里叶级数，存在唯一的 $k\in\mathbb{Z}^d$ 使得 $\rho_j-x=\langle k,\alpha\rangle$ 模 $\mathbb{Z}$，这尤其蕴含了 (1) 以及 $c_j(\theta)=a_je^{2\pi i\langle k,\theta\rangle}$，其中 $a_j\in\mathbb{C}$ 为常数。对每个分量 c_j应用同样的论证，每个非平凡分量都是单个傅里叶模态，而其余分量恒等于零。因此，$c(\cdot)\in C_h^\omega(\mathbb{T}^d,\mathbb{C}^{2\ell})$。由于 $B(\cdot)\in C_h^\omega(\mathbb{T}^d,\mathrm{GL}(2\ell,\mathbb{C}))$，可得 $w(\cdot)\in C_h^\omega(\mathbb{T}^d,\mathbb{C}^{2\ell})$，从而，$\hat{u}(\theta)=\tilde{u}_\theta(0)\in C_h^\omega(\mathbb{T}^d,\mathbb{C})$，其中 $|u_n|\le\|w\|_he^{-2\pi h|n|}$. □

3. 定理的证明1

我们假设势函数 $v(\theta)$是一个三角多项式。我们的证明有三个主要要素。出发点是Eliasson著名的纯点结果：

定理 *3.1.* [17] 假设 $\alpha\in DC$，$|w_n|\le Ce^{-c|n|}$ 对某些常数 C，$c>0$，$v(\cdot)\in C^\omega(\mathbb{T},\mathbb{R})$。则存在 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(\alpha,v,w)>0$ 以及一个博雷尔可测函数$E:\ \mathbb{T}\to\mathbb{R}$，使得对所有 $|\varepsilon|<\varepsilon_1$，对几乎每一个 $x\in\mathbb{T}$，值 $E\big(x+\langle k,\ \alpha\rangle\big)$，$k\in\mathbb{Z}^d$是$H_{v,\ \varepsilon w,\ \alpha,\ x}$的特征值，且相应的特征函数 $\{u^k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$属于 $\ell^1(\mathbb{Z}^d)$，并构成 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$的完备基。

令 $\mathcal{A}\subset\mathbb{T}$ 表示满足定理 3.1 结论的相位全测度集。固定这样一个 $x\in\mathcal{A}$。则算子 $H_{v,\ \varepsilon w,\ \alpha,\ x}$ 具有纯点谱，其特征值为 $E(x+\langle k,\ \alpha\rangle)$ $k\in\mathbb{Z}^d$.

接下来我们回顾 [42] 中的以下全测度可约性结果：

定理 3.2 ([42, 定理 2.3]). 存在 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\alpha, v, w) > 0$ 使得对于$|\varepsilon| \le \varepsilon_2$，存在一个豪斯多夫维数为零的集合 $\mathcal{S} \subset \Sigma$，具有以下性质：对于每个 $E \in \Sigma \setminus \mathcal{S}$，都存在 $B_E \in C_h^\omega(\mathbb{T}^d, \mathrm{GL}(2l, \mathbb{C}))$ 满足[4]

$$B_E^{-1}(\cdot+\alpha)A_E(\cdot)B_E(\cdot) = \mathrm{diag}\big(e^{2\pi i\rho_{1,E}}, \dots, e^{2\pi i\rho_{2\ell,E}}\big).$$

其中 $\rho_{i,E} \neq \rho_{j,E}$ 对 $i \neq j$。

作为直接推论，我们有如下结果：

定理 3.3 ([42, 定理 1.2]). 设 $\alpha \in DC$、$|w_k| \le Ce^{-ck}$、$v(\cdot)$ 是一个三角多项式。存在 $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\alpha、v、w) > 0$，使得若 $|\varepsilon| < \varepsilon_3$，则 $\{H_{v,\varepsilon w,\alpha,x}\}_{x\in\mathbb{T}}$ 的积分态密度是绝对连续的。

固定 $x \in \mathcal{A}$，定义“坏”特征值

$$\mathcal{E}_x := \{E(x+\langle k,\alpha\rangle) : E(x+\langle k,\alpha\rangle) \in \mathcal{S}\},$$

其中 $\mathcal{S}$ 是出现于引理 3.2 的例外集。令 $\mathcal{E} := \bigcup_{x\in\mathcal{A}} \mathcal{E}_x$. 显然，$\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$。对我们而言重要的是如下事实：

命题 3.1. 对几乎每一个 $x \in \mathcal{A}$，都有 $\mathcal{E}_x = \emptyset$。

证明。 令 N 为态密度，且 μ_{x,δ_p} 为对应于向量 $H_{v,\varepsilon w,\alpha,x}$ 的谱测度 δ_p $(p \in \mathbb{Z}^d)$。由于 N 是绝对连续的（定理 3.3），且例外集 $\mathcal{S}$ 的勒贝格测度为零（定理 3.2），因此有 $N(\mathcal{S}) = 0$。根据定义，

$$N(\mathcal{S}) = \int_{\mathbb{T}} \mu_{x,\delta_p}(\mathcal{S})\,dx, \qquad p \in \mathbb{Z}^d.$$

因此，对每个固定的 p，被积函数对几乎处处的 x 均为零。对所有 p 取可数交集，可得一个全测度集 $\mathcal{F} \subset \mathbb{T}^d$，使得 $\mu_{x,\delta_p}(\mathcal{S}) = 0$，$\forall x \in \mathcal{F}$，$\forall p \in \mathbb{Z}^d$.

由于 $\mathcal{E}_x \subset \mathcal{S}$，可知对所有 $x \in \mathcal{F}$ 及所有 p，$\mu_{x,\delta_p}(\mathcal{E}_x) = 0$。现在假设存在某个 $x \in \mathcal{F}$，使得 $\mathcal{E}_x \neq \emptyset$。由定理 3.1，算子 $H_{v,\varepsilon w,\alpha,x}$ 具有纯点谱，其特征值为 $\{E(x+\langle k,\alpha\rangle)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$。因此，任意 $E \in \mathcal{E}_x$ 都是一个特征值，并且存在 $p \in \mathbb{Z}^d$，使得 $\mu_{x,\delta_p}(\{E\}) > 0$，从而 $\mu_{x,\delta_p}(\mathcal{E}_x) \ge \mu_{x,\delta_p}(\{E\}) > 0$，这与对 $x \in \mathcal{F}$ 有 $\mu_{x,\delta_p}(\mathcal{E}_x) = 0$ 矛盾。因此，对所有 $x \in \mathcal{F}$，$\mathcal{E}_x = \emptyset$，即对几乎处处的 x成立。□

定理的证明*1*。由命题3.1可知，对几乎所有 $x \in \mathbb{T}$ 和每个 $k \in \mathbb{Z}^d$，余循环 $A_{E(x+\langle k,\alpha\rangle)}$ 都可作 C_h^ω -对角化约化。由命题2.1可知，这意味着与能量 $E(x+\langle k,\alpha\rangle)$ 相关联的特征函数 u^k[4]呈指数衰减。由定理3.1可知，族 $\{u^k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ 构成了 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$的完备基。因此，$\{u^k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$是 $H_{v,\varepsilon w,\alpha,x}$的一组完备特征函数族，其中每个特征函数都呈指数衰减。□

致谢

周琦谨向 Artur Avila 致谢，感谢他富有洞见的讨论，这些讨论最终促成了本文。王振福获得国家自然科学基金项目（124B2011）和南开至德基金会的资助。游建功和周琦获得国家自然科学基金项目（12531006、12526201）和南开至德基金会的资助。

参考文献

[1] M. Aizenman 和 G. Graf，电子气的局域化界。《J. Phys. A: Math. Gen.》31（1998），6783。[2] P. Anderson，某些随机晶格中扩散的缺失。《 Phys. Rev. 》 109 （ 1958 ），1492–1505。[3] S. J. Aubry 和 G. André，非公度晶格中的解析性破缺与安德森局域化，载于《物理学中的群论方法》（第八届国际研讨会论文集，基里亚特阿纳维姆，1979），第133–164页，《Ann. Israel Phys. Soc.》第3卷，Hilger，布里斯托尔。[4] A. Avila 和 S. Y. Jitomirskaya，几乎局域化与几乎可约性，《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》12（2010），第1期，93–131。[5] A. Avila 和 S. Y. Jitomirskaya，十马提尼问题，《数学年刊》（第2辑 1，303 170 2009 342）（），第–期。[6] A. Avila、J. You 和 Q. Zhou，几乎马丢算子的尖锐相变，《Duke Math. J.》166（2017），第14期，2697–2718。[7] J. Bourgain，准周期格点薛定谔算子上的安德森局域化，适用于 $\mathbb{Z}^d$, d 任意情形，《几何与泛函分析》17（2007），第3期，682–706。[8] J. Bourgain 和 M. Goldstein，关于准周期势下的非微扰局域化，《数学年刊》（第 2 辑） 152 （ 2000），第3期，835–879。[9] J. Bourgain、M. Goldstein 和 W. Schlag，带有准周期势的 Z^2 上薛定谔算子的安德森局域化，《Acta Math.》188（2002），第1期，41–86。[10] J. Bourgain 和 S. Y. Jitomirskaya，一维准周期算子的绝对连续谱，《Invent. Math.》148（2002），第3期，453–463。[11] H. Cao、Y. Shi 和 Z. F. Zhang，带有 $\mathbb{Z}^d$ 上 C^2余弦型准周期势的薛定谔算子的局域化与积分态密度的正则性，《数学物理通讯》404（2023），第1期，495–561。[12] H. Cao、Y. Shi 和 Z. F. Zhang，关于带有 $\mathbb{Z}^d$ 上 C^2余弦型势的准周期薛定谔算子的谱，《数学物理通讯》405（2024），第8期，论文编号 174，共84页。[13] H. Cao、Y. Shi 和 Z. F. Zhang，解析准周期薛定谔算子的安德森局域化与积分态密度的赫尔德正则性，arXiv：2603.07180（2026）。[14] V. Chulaevsky 和 E. I. Dinaburg，Z^ν 上长程准周期算子的 KAM理论方法：纯点谱，《数学物理通讯》153（1993），第3期，559–577。[15] E. I. Dinaburg，准周期系数离散算子的谱理论中的若干问题，《Russian Math. Surveys》52（1997），第3期，451–499；译自《Uspekhi Mat. Nauk》52（1997），第3期（315），3–52。[16] L. H. Eliasson，具有纯点谱的离散一维准周期薛定谔算子，《Acta Math.》179（1997），第2期，153–196。[17] L. H. Eliasson，线性准周期系统的扰动，载于《动力系统与小除数》（切特拉罗，1998），第1–60页，《Lecture Notes in Math. Fond. CIME/CIME Found. Subser.》第1784卷，Springer，柏林。[18] Y. Forman 和 T. VandenBoom，具有非对称光滑余弦型采样函数的准周期离散薛定谔算子的局域化与康托尔谱，《Mem. Amer. Math. Soc.》312（2025），第1583期，v+86 页。[19] J. Fröhlich、T. C. Spencer 和 P. Wittwer，一类一维准周期薛定谔算子的局域化，《数学物理通讯》132（1990），第1期，5–25。[20] L. Ge 和 S. Y. Jitomirskaya，I型算子的隐藏次临界性、辛结构与尖锐算术谱结果的普适性，arXiv：2407.08866（2024）。[21] L. Ge、S. Y. Jitomirskaya 和 J. You，科塔尼理论、普伊格论证与十马提尼问题的稳定性，arXiv：2308.09321（2023）。[22] L. Ge 和 J. You，通过可约性实现安德森局域化的算术版本，《几何与泛函分析》30（2020），第5期，1370–1401。[23] L. Ge、J. You 和 Q. Zhou，指数动力学局域化：判据及其应用，《Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.》（第4辑）56（2023），第1期，91–126。[24] L. Ge、J. You 和 Q. Zhou，尖锐谱隙、算术局域化与通过共振分析实现的可约性，arXiv：2407.05490（2024）。

[25] B. Halperin，量子化霍尔电导、载流边缘态，以及二维无序势中扩展态的存在性。《物理评论B》**25** (1982), 2185. [26] R. Han，李乌维尔频率下第一超临界层上的尖锐局域化，arXiv:2405.07810 (2024). [27] R. Han 和 W. Schlag，通过行列式的零点研究 Avila 加速度及其在薛定谔余循环中的应用，《纯粹与应用数学通讯》**79** (2026), no. 3, 729–761. [28] P. Harper，均匀磁场中导电电子的单带运动。Pro. Phys. Soc. **68(10)** (1955), 874-878. [29] S. Y. Jitomirskaya，几乎 Mathieu 方程的安德森局域化：一种非微扰证明，《数学物理通讯》**165** (1994), no. 1, 49–57. [30] S. Y. Jitomirskaya，几乎马丢算子的金属-绝缘体转变，《数学年刊》(2) **150** (1999), no. 3, 1159–1175. [31] S. Y. Jitomirskaya 和 I. V. Kachkovskiy，L^2-可约性与准周期算子的局域化，Math. Res. Lett. **23** (2016), no. 2, 431–444. [32] S. Y. Jitomirskaya 和 W. Liu，准周期特征函数的普适层级结构，《数学年刊》(2) **187** (2018), no. 3, 721–776. [33] S. Y. Jitomirskaya、W. Liu 和 Y. Shi，$\mathbb{Z}^D$上的多频准周期算子的安德森局域化，《几何与泛函分析》**30** (2020), no. 2, 457–481. [34] W. Liu，非自伴矩阵格林函数的定量归纳估计，《偏微分方程分析》**15** (2022), no. 8, 2061–2108. [35] R. Peierls，导电电子抗磁性理论。《物理学杂志》**80** (1933), 763-791. [36] J. Puig，一种非微扰的 Eliasson 可约性定理，《非线性》**19**(2006), no. 2, 355–376. [37] J. Puig，几乎马丢算子的康托尔谱，《数学物理通讯》**244** 2, 297 2004 309 ( ), no. – .[38] A. Rauh，晶体中朗道能级的简并，Phys. Status Solidi B **65** (1974), 131-135. [39] Y. G. Sinaˇi，具有准周期势的一维差分薛定谔算子的安德森局域化，《统计物理学杂志》**46** (1987), no. 5-6, 861–909. [40] S. Surace Jr.，具有准周期势的有限程算子，《微分积分方程》**9** (1996), no. 1, 213–237. [41] S. Surace Jr.，具有准周期势的薛定谔方程，《美国数学会汇刊》**320** (1990), no. 1, 321–370. [42] J. Wang、X. Xu、J. You 和 Q. Zhou，局域化区间中积分态密度的绝对连续性，《数学物理通讯》**406** (2025), no. 9, Paper No. 226, 57 pp.

陈省身数学研究所和概率统计与数学科学研究中心，南开大学，中国天津 300071电子邮箱: zhenfuwang@mail.nankai.edu.cn 陈省身数学研究所和概率统计与数学科学研究中心，南开大学，中国天津 300071电子邮箱: jyou@nankai.edu.cn 陈省身数学研究所和概率统计与数学科学研究中心，南开大学，中国天津 300071电子邮箱: qizhou@nankai.edu.cn