arXiv:2603.10719v1 [math.GR] 11 Mar 2026

共轭仿射变换的乘积

SANDIPAN DUTTA、KRISHNENDU GONGOPADHYAY 和 RAHUL MONDA L

ABSTRACT. 若 $TT = I$，则称复矩阵为共合 involutive。在本文中，我们研究 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ 中的仿射变换分解为共反 involution 乘积的问题。我们证明，仿射变换 g 是 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$ 中两个共反 involution 的乘积，当且仅当其线性部分 $L(g)$ 是 c可逆的；也就是说，$L(g)$ 与$L(g)^{-1}$ 在 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ 中共轭。等价地，g与 g^{-1} 在 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$ 中共轭。我们还通过共相似刻画了可表示为三个共反 involution 乘积的元素，并证明每个$g = (A, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 中满足 $|\det(A)| = 1$ 的元素都可表示为至多四个共反 involution 的乘积。

1. INTRODUCTION

将单个元素分解为对合（阶为二的元素）之积，是几何学和线性代数中的一个经典问题。更一般地，对两个对合之积的研究 [Dj，GHR] 与群中的可逆性概念密切相关：若群中的一个元素 A 与其逆元共轭，则称其为可逆的；若可将逆转元素本身选为 G 中的一个对合，则称其为强可逆的。等价地，群中的一个元素强可逆，当且仅当它可以表示为G中两个对合之积；关于不同数学背景下可逆性的详细论述，参见 G；另见 [OS、Wo] 。

对于复数域上的可逆矩阵群，从不同角度将元素分解为对合之积的问题一直备受关注。Liu [Li]给出了矩阵可表示为三个对合之积的必要条件，而 Kn¨uppel 和 Nielsen [KN] 证明了 $\mathrm{SL}(V)$ 中的任意元素都可以表示为至多四个对合之积。

注意到，复数域具有由复共轭给出的自然对合。矩阵 $T \in \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ 称为共合 *involutive* ，如果 $TT = I$，参见 [Gr]。这自然引出了一个问题：能否将 $\mathbb{C}$ 上的矩阵分解为共反 involution 的乘积？尽管将矩阵分解为经典对合的乘积这一问题已得到深入研究，但共反 involution 对应的问题受到的关注相对较少。在 [HM，BHH]中，作者讨论了关于共反 involution 的这一问题。

日期：@00:56，星期四 12th 三月，2026。2010 数学学科分类。主要分类 15A86；次要分类 20E45,51N30。关键词和短语。仿射变换，c-可逆，共反 involution。

Ballantine [Ba] 证明，矩阵 T 是四个共轭 involution 的乘积，当且仅当 $|\det(T)| = 1$。Abara、Merino 和 Paras [AMP] 证明 T是两个共反 involution 的乘积，当且仅当 T 与 T^{-1} 相似。共反 involution 也与共相似性和共对角化性密切相关；参见 [HH88、HH86、Ik]。

最近，在射影变换分类的背景下，[GM]引入了 SL$(n,\mathbb{C})$ 中共轭可逆（或 c-可逆）元素的概念。若元素$A \in \in$SL$(n,\mathbb{C})$ 与其逆元 A^{-1} 共轭，则称其为 c-可逆；若可选取 SL$(n,\mathbb{C})$ 中的共合 involutive 元素作为反转元，则称其为强 c-可逆。他们证明，SL$(n,\mathbb{C})$ 中每个 c-可逆元素都是强 c-可逆的，并利用迹不变量刻画了这类元素。因此，两个共合 involution 之积的分类问题可归结为研究强 c-可逆元素。

仿射变换也可以引入类似的 c-可逆性概念，从而为研究将仿射映射分解为共合 involution 之积提供了自然框架。

令 Aff$(n,\ \mathbb{C})$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 上仿射变换构成的群，其定义如下：

$$g : x \mapsto Ax + v, \quad A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}),\ v \in \mathbb{C}^n.$$

这个群可以视为半直积

$$\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C}) \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n.$$

我们将这样的仿射变换记为 g (A, v)，其线性部分 A 记为$L(g)$。

定义 1.1. 若元素 $g = (A, v) \in$属于 Aff$(n,\mathbb{C})$，且存在$h \in$属于 Aff$(n,\mathbb{C})$ 使得 $hgh^{-1} = g^{-1}$，其中 $g = (A, v)$，则称其为 c-可逆的；若此外还满足 $hh = e = (I_n, 0)$，则称其为强 c-可逆的，此时 h 称为共反 involution。

本文研究仿射群 Aff(c-可逆和强 c-可逆元素，其中$n,\mathbb{C}$。本研究部分源于 O'Farrell 和 Short 提出的问题[OS，第 78–79]页。欧几里得等距变换群 O$(n,\mathbb{R})$ 中的可逆性 $\ltimes\ \mathbb{R}^n$ 曾由[Sh], 研究，之后 [GL] 将其推广到复数和四元数情形。因此，群 U$(n,\mathbb{F})$ 中的可逆性现已得到充分理解 $\ltimes\ \mathbb{F}^n$，其中 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$。

仿射群中的可逆元素和强可逆元素随后在 [GLM] 中得到了分类，其中仿射群为 Aff$(n,\ \mathbb{F})$。特别地，[GLM] 中证明了，Aff$(n,\ \mathbb{F})$ 的每个元素都可以表示为至多四个对合的乘积。

在对线性群 GL$(n,\mathbb{C})$ 中 c-可逆性的研究基础上，本文考察仿射群 Aff$(n,\mathbb{C})$ 中的 c-可逆元素和强 c-可逆元素。我们的目标是理解仿射变换如何分解为共反 involution 的乘积，并确定将群中任意元素表示为共反 involution 所需的最少个数。

本文的主要结果概括为以下三个定理。首先，下面的定理对强 c-可逆元素给出了完整分类。

定理 1.2。 设 $g \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$。则以下条件等价：

(i) g 是 c-可逆的。*(ii)* g 是强 c-可逆的，即 g 是两个共合 *involution* 的乘积。*(iii)* $L(g)$ 在$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$中是 c-可逆的。

因此，将仿射变换分解为两个共合 involution 之乘积的问题，归结为研究其线性部分的 c-可逆性。接下来，我们确定仿射变换何时可表示为三个共合 involution 的乘积，并为此利用两个矩阵的共相似性。

定义 1.3。 若存在 $k \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$，使得以下关系成立，则称元素 $g \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 与 $h \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$共相似：

$$h = kg\overline{k}^{-1}.$$

注意，共相似在 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 上定义了一个等价关系。

定理 1.4。 设 $g = (A, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 满足 $|\det(A)| = 1$。那么，g 可以表示为三个共合 *involution* 的乘积，当且仅当 g 与两个共合 *involutive* 仿射变换的乘积共相似。

最后，以下定理表明，任意仿射变换至多需要四个共合 involution 才能分解。

定理 1.5。 每个满足 $|\det(A)| = 1$ 的元素 $g = (A, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 均可表示为至多四个共合 *involution* 的乘积。

注意，每个共合 involutive 矩阵的行列式模均为 1。因此，当 1.4和 1.5 时，定理不成立 $|\det(A)| \neq 1$。

我们指出，尽管原则上可以针对四元数上的仿射变换提出类似结果，但本文不探讨这一方向。主要障碍在于，对于四元数仿射变换，强 c-可逆这一性质在共轭下并非不变。因此，四元数类比需要一种适当的、在共轭下不变的共反 involution 概念，而这必须先经过审慎的定义。

1.1. **论文结构**。 本文组织如下。在第 2节中，我们回顾所需的术语和背景知识。第 3节和 4节包含关于两个和三个共合 involution 之乘积的主要结果（定理 1.2 和 1.4）。最后，在第 5节中，我们证明关于四个共轭 involution 的乘积的定理（定理 1.5）。

2. Preliminaries

定义 2.1(参见 [Ro，第 94]页）。 设 $\lambda \in \mathbb{C}$。 ***Jordan*块** $\mathrm{J}(\lambda, m)$ 是 $m \times m$ 矩阵 x

$$\mathrm{J}(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

也就是说， λ 出现在对角线元素上，1 出现在超对角线元素上，其他位置均为零。对角块均为 Jordan块 的分块对角矩阵称为***Jordan*形**。

GL$(n, \mathbb{C})$ 中的 Jordan标准形在文献中已有充分研究；参见 [Ro，第 5 章，第 15]。

回顾一下，元素 $U \in$ GL$(n, \mathbb{C})$ 若其所有特征值都等于 1，则称为幂零 。

引理 2.2 （参见 [Ro，定理 15.1.1、定理 5.5。3]） 。 设 $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 是幂零的。那么存在 $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 使得

$$SAS^{-1} = I_{m_0} \oplus J(1, m_1) \oplus \cdots \oplus J(1, m_k),$$

其中 $m_0 \geq 0$, $m_i \geq 2$ 对于 $i \geq 1$，且

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n.$$

现在我们证明一些关于共轭可逆性和强共轭可逆性的基本事实。

引理 2.3。 具有 c-可逆性和强 c-可逆性的性质在 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$中的共轭下保持不变。

证明。 假设 g 具有 c-可逆性。那么存在 $h \in$ Aff$(n, \mathbb{C})$，使得

$$hgh^{-1} = \overline{g}^{-1}.$$

若 $k \in$ Aff$(n, \mathbb{C})$，则 $(khk^{-1})(kgk^{-1})(\overline{khk^{-1}})^{-1} = \overline{k}hgh^{-1}\overline{k}^{-1} = k\overline{g}^{-1}\overline{k}^{-1} = (\overline{kgk^{-1}})^{-1}$. 因此 kgk^{-1} 具有 c-可逆性。

此外，若 $hh = e$，则 $(khk^{-1})(\overline{khk^{-1}}) = k(hh)\overline{k}^{-1} = e$. 因此，强 c-可逆性在共轭下也保持不变。□

引理 2.4. </style}元素 Aff$(n, \mathbb{C})$ 是强 c-可逆的，当且仅当 g 是两个共反 *involution* 的乘积。

证明。 假设 g 是强 c-可逆的。那么存在一个元素 $h \in$ Aff$(n, \mathbb{C})$，使得

$$hgh^{-1} = \overline{g}^{-1} \quad \text{with} \quad h\overline{h} = e.$$

因此 $g = (h^{-1})(g^{-1}h)$。由于 h 是共反 involution， h^{-1} 也是共反 involution。此外，$\overline{g}^{-1}h$ 是共反 involution，因为

$$(\overline{g}^{-1}h)\overline{(\overline{g}^{-1}h)} = \overline{g}^{-1}h\overline{g}^{-1}\overline{h} = h\overline{h} = e.$$

反之，设 g 是两个共反 involution的乘积。即设 $g = ab$，其中$aa = e$ 与 $bb = e$。则

$$a^{-1}ga = ba = \overline{g}^{-1}.$$

因此， g 是强 c-可逆的。 □

3. Product of two coninvolutions

我们将 $\mathbb{C}^n$ 作为仿射超平面嵌入 $\mathbb{C}^{n+1}$

$$P = \{(z, 1) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in \mathbb{C}^n\}.$$

考虑同态

$$\Theta : \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$$

定义为

$$\Theta((A, v)) = \begin{pmatrix} A & v \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

其中，0 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的零向量。 P 上 Θ(Aff$(n, \mathbb{C})$) 的作用与 $\mathbb{C}^n$ 上 Aff$(n, \mathbb{C})$ 的自然作用一致。

在接下来的两个引理（3.1 和 3.2）中，我们将对仿射群 Aff$(n, \mathbb{C})$ 中的可逆元素和强可逆元素进行分类。

引理 3.1。 设 $g = (A, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$。那么， g 在 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 中是共轭可逆的，当且仅当存在 $h = (B, w) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 使得：
(a) $BAB^{-1} = \overline{A}^{-1}$， ***(b)*** $(A^{-1}\overline{\ } - I_n)w = Bv + A^{-1}v$。

证明。 设 $g = (A, v) \in$ Aff$(n, \mathbb{C})$。那么

$$\overline{g}^{-1}(z) = \overline{A}^{-1}z - \overline{A}^{-1}\overline{v}.$$

对于 $h = (B, w) \in$ Aff$(n, \mathbb{C})$，我们有

$$hgh^{-1} = \overline{g}^{-1} \iff hg = \overline{g}^{-1}h.$$

Now,

$$hg(z) = BAz + (Bv + w), \quad \overline{g}^{-1}h(z) = \overline{A}^{-1}Bz + \overline{A}^{-1}w - \overline{A}^{-1}\overline{v}.$$

比较各项可得

$$BAB^{-1} = \overline{A}^{-1}, \quad (\overline{A^{-1}} - I_n)w = Bv + \overline{A}^{-1}\overline{v}.$$

证明至此完成。 □

在下一个引理中，我们将讨论 Aff$(n,\mathbb{C})$ 中元素的强共轭可逆性。

引理 3.2. 设 $g=(A,v)\in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$。那么， g 在 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$ 中强共轭可逆，当且仅当存在 $h=(B,w)\in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$ 使得：
(a) $BAB^{-1}=\overline{A}^{-1}$ 和 $B\overline{B}=I_n$，***(b)*** $(A^{-1}=I_n)w=Bv+A^{-1}\overline{v}$ 和 $-Bw+w=0$。

证明。 根据引理 3.1， g 共轭可逆当且仅当

$$BAB^{-1}=\overline{A}^{-1} \quad \text{and} \quad (\overline{A}^{-1}-I_n)w=Bv+\overline{A}^{-1}\overline{v}.$$

由于 g 是强c-可逆的，因此

$$(B,w)(\overline{B},\overline{w})=(I_n,0).$$

这意味着

$$B\overline{B}=I_n \quad \text{and} \quad B\overline{w}+w=0.$$

证明完毕。 □

引理 3.3 ([GLM])。 每个元素 $g\in \mathrm{Aff}(n,\ \mathbb{C})$ 都共轭于如下形式的元素$g=(A,\ v)$，其中

$$A=T\oplus U,$$

其中 $T\in \mathrm{GL}(n-m,\mathbb{C})$ 和 $U\in \mathrm{GL}(m,\mathbb{C})$ 满足： T没有等于 1的特征值，而 U的唯一特征值是1。此外，平移部分 $v\in\mathbb{C}^n$ 可以写成

$$v=(0,\ldots,0,v_1,\ldots,v_m),$$

其中 $0\le m\le n$ 是线性部分 A的特征值1 的重数 .
此外，如果1 不是 A 的特征值（即 $m=0$），那么 g 共轭于$(A、0)$。

当仿射变换具有非平凡的幺幂部分时，直接寻找一个强 c-逆元是困难的。为克服这一困难，我们转而研究仿射群的李代数，并使用伴随作用。我们引入一个类似于经典李群李代数的伴随实性的概念（见 [GM23]），称为伴随共轭实性。设 $\mathfrak{g}=\mathfrak{aff}(n,\ \mathbb{C})$ 表示仿射群 Aff$(n,\ \mathbb{C})$ 的李代数，即

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\ltimes\mathbb{C}^n.$$

李代数 $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{C})=\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})\ltimes\mathbb{C}^n$ 可忠实嵌入到 $\mathfrak{gl}(n+1,\mathbb{C})$ 中，嵌入映射为

$$(X,u)\longmapsto\begin{pmatrix}X & u\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Note 即 Aff$(n,\mathbb{C})$ 在其李代数 $\mathfrak{aff}(n,\mathbb{C})$ 上的伴随作用由下式给出

$$\mathrm{Ad}:G\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},$$

$$\mathrm{Ad}_{(A,v)}(X,u) = \big(AXA^{-1},\ A(u - Xv)\big)\,,$$

其中 $G = \mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$，且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{aff}(n,\mathbb{C})$。

若存在 $g \in G$ 使得……，则称元素 $X \in \mathfrak{g}$ 为 伴随 c-实（或称为 伴随共轭实）。

$$\mathrm{Ad}_g(X) = -\overline{X}.$$

称其为 强 伴随 c-实，此外还需满足 $gg = I$。注意，若 $\mathrm{Ad}_g(X) = -X$，则……

$$g(\exp X)g^{-1} = \exp\big(-\overline{X}\big) = \overline{(\exp X)}^{-1}.$$

特别地，若 $X \in \mathfrak{g}$ 是伴随 c-实（分别地，强伴随 c-实），则 $\exp X$ 是 c-可逆的（分别地，强 c-可逆的）。

注 3.4. 一般而言，逆命题并不成立。例如，

$$A = \mathrm{diag}(r + 2\pi i,\ -r), \quad r \in \mathbb{R},$$

不是 伴随 c-实的，因为

$$A \not\sim -\overline{A}.$$

然而，

$$\exp(A) = \mathrm{diag}(e^{r},\ e^{-r})$$

其特征值成互为倒数的配对，因此

$$\exp(A) \sim \exp(A)^{-1} = \overline{\exp(A)}^{-1}.$$

因此 $\exp(A)$ 是 c-可逆的。

引理 3.5。 设 $(N,x) \in \mathfrak{aff}(n,\mathbb{C})$，则 (N,x) 是强伴随 c-实的，当且仅当存在 $(B,w) \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$，满足以下条件。

(a) $BNB^{-1} = -\overline{N}$ 和 $B\overline{B} = I_n$;

(b) $Bx + \overline{x} = -\overline{N}w$ 和 $B\overline{w} + w = 0$。

引理 3.5 可以按照与引理 3.2相同的思路加以证明。因此我们在此将其省略 e.

利用引理 3.5，我们可以证明下一个引理。

引理 3.6. 元素 $(\mathrm{J}(0,n)\ x) \in \mathfrak{aff}(n,\mathbb{C})$ 是强伴随 c-实的。

证明。 设 $x = (x_1,\ldots,x_n)^t \in \mathbb{C}^n$，并将 $x_n = r_n e^{i\theta}$ 写成带有 $r_n \in \mathbb{R}^+$ 的形式。令 $a = e^{-2i\theta}$，并定义

$$B = \mathrm{diag}(a,-a,a,-a,\ldots).$$

定义 $w = (w_1,\ldots,w_n)^t$ 为

$$w_k = \begin{cases} -(ax_k + \overline{x}_k), & k \text{ odd}, \\ ax_k - \overline{x}_k, & k \text{ even}. \end{cases}$$

然后一个 di 直接计算表明 $BNB^{-1} = -N$ 与 $Bw + w = 0$。此外，

$$Bx + \overline{x} = -\overline{N}w.$$

因此，引理 3.5 的条件对 $N = \mathrm{J}(0, n)$ 成立。 □

引理 3.7. 设 $g = (A, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$，且 $A = \mathrm{J}(1, n)$。则 g 在 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 中是强 c-可逆的。

证明. 设 $N = J(0, n)$。则 $\exp(N)$ 是一个幺幂矩阵，其 Jordan形为 $J(1, n)$。因此存在 $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$，使得

$$B \exp(N) B^{-1} = A.$$

考虑 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 中的指数映射：

$$\exp(N, x) = (\exp(N), Cx),$$

其中

$$C = I + \frac{N}{2!} + \frac{N^2}{3!} + \cdots + \frac{N^{n-1}}{n!}.$$

由于 C 可逆。因此存在 $x \in \mathbb{C}^n$，使得 $Cx = v$。

现在将 $\exp(N, x)$ 用 $(B, 0)$ 共轭，得到

$$(B, 0) \exp(N, x)(B, 0)^{-1} = (A, v) = g.$$

由于 (N, x) 根据引理 c3.6 是强 3.6-实的，因此 $\exp(N, x)$ 是强 c-可逆的。并且该性质在共轭下保持不变，因此 g 是强 c-可逆的。□

命题 3.8。 设 $g = (U, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$，其中 U 是幂零的。那么 g 是强c-可逆的。特别地，g 可以写成 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 中的两个共合 *involution* 的乘积。

证明。由于 U 是幂零的，它共轭于 Jordan 块 $\mathrm{J}(1, n_i)$ 的直和。根据前一个引理，每个形如 $(\mathrm{J}(1, n_i)\ v_i)$ 的仿射变换都是强 c-可逆的。因此 (U, v) 是强 c-可逆的。于是，g 可以写成 $\mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 中两个共合 involution 的乘积。□

3.1. **定理 1.2 的证明。** 我们先证明 $(i) \Rightarrow (iii)$。令 $g = (A, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$。由于 g 是 c-可逆的，根据引理 3.1 存在 $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 使得

$$BAB^{-1} = \overline{A}^{-1}.$$

这表明 $L(g) = A$ 在 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 中是 c-可逆的。

蕴含关系 $(ii) \Rightarrow (i)$ 由强 c-可逆性的定义立即可得。

最后，我们证明（iii）$\Rightarrow$（ii）。假设线性部分 L（g）$= A$ 是c-可逆的。经过 Aff（n，$\mathbb{C}$）中的共轭，我们不妨假设

$$g = (A, v)$$

具有如下形式

$$A = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0_{n-m} \\ \widetilde{v}_m \end{pmatrix},$$

其中 $T \in \mathbf{GL}(n-m,\ \mathbb{C})$ 没有特征值等于 1，而 $U \in \mathbf{GL}(m,\ \mathbb{C})$ 的唯一特征值为 1。这里，0_{n-m}表示 $\mathbb{C}^{n-m}$和 $\widetilde{v}_m \in \mathbb{C}^m$中的零向量。
由于 A 是 c-可逆的，存在 $B \in \mathbf{GL}(n,\ \mathbb{C})$ 使得；

$$BAB^{-1} = \overline{A}^{-1}.$$

Let

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}.$$

Then

$$BA = \begin{pmatrix} B_1T & B_2U \\ B_3T & B_4U \end{pmatrix}, \quad \overline{A}^{-1}B = \begin{pmatrix} \overline{T}^{-1}B_1 & \overline{T}^{-1}B_2 \\ \overline{U}^{-1}B_3 & \overline{U}^{-1}B_4 \end{pmatrix}.$$

因此,

$$B_1T = \overline{T}^{-1}B_1,\ B_2U = \overline{T}^{-1}B_2,\ B_3T = \overline{U}^{-1}B_3,\ B_4U = \overline{U}^{-1}B_4.$$

由于 $\sigma(U) = \{1\}$ 且 $1 \notin \sigma(T)$，西尔维斯特方程

$$B_2U = \overline{T}^{-1}B_2, \quad B_3T = \overline{U}^{-1}B_3$$

推出 $B_2 = 0$ 和 $B_3 = 0$。因此

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}.$$

由于 B 可逆，因此 B_1 和 B_4 可逆。所以

$$B_1TB_1^{-1} = \overline{T}^{-1},$$

因此 T是 c-可逆的。由此，T在 $\mathbf{GL}(n-m,\ \mathbb{C})$ 中是强 c-可逆的。因此

$$T = T_1T_2,$$

其中 T_1 和 T_2 是 $\mathbf{GL}(n-m,\ \mathbb{C})$ 中的共反 involution。

现在，$(U,\ \tilde{v})$ 根据命题 3.8 也是强 c-可逆的。因此

$$(U, \tilde{v}) = (U_1, v_1)(U_2, v_2),$$

其中$(U_1,\ v_1)$和$(U_2,\ v_2)$是共反 involution。

Thus

$$g = (A, v) = (T_1 \oplus U_1,\ 0 \oplus v_1)\,(T_2 \oplus U_2,\ 0 \oplus v_2)$$

因此，g 是两个共合 involution 的乘积。证明完毕。 □

4. Product of three coninvolutions

引理 4.1. 假设 g 是 $(2m+1)$ 个共合 *involution* 在 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$中的乘积。那么， g 的任意共相似元素也可以写成 $(2m+1)$ 个共合 *involution* 的乘积。

证明。设

$$g = g_1 g_2 \cdots g_{2m+1},$$

其中每个 g_i 都是共反 involution。

设 $h \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$。则

$$hg\overline{h}^{-1} = (hg_1\overline{h}^{-1})(\bar{h}g_2h^{-1})\cdots(hg_{2m+1}\overline{h}^{-1}).$$

Set

$$g_i' = hg_i\overline{h}^{-1}, \quad i = 1, \ldots, 2m+1.$$

由于共相似保持共反 involution，每个 g_i' 都是共反 involution。因此

$$hg\overline{h}^{-1} = g_1'g_2'\cdots g_{2m+1}',$$

它是 $(2m+1)$ 个共合 involution 的乘积。

证明至此完成。 □

我们将使用 Horn 和 Johnson 在引理 4. 中的以下结果 3.

引理 4.2 (参见 [HJ，引理 4.6。9])。 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 已给定。那么 $A\bar{A} = I$ 当且仅当存在一个非奇异的 $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 使得 $A = S\bar{S}^{-1}$。

引理 4.3。设 $g \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 为共反 *involution*。那么存在 $h \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 使得

$$g = h\overline{h}^{-1}.$$

证明。如果 $g = \overline{h}h^{-1}$，则

$$g\bar{g} = h\overline{h}^{-1}\,\overline{h}h^{-1} = e.$$

反之，设 $g = (A, v) \in \mathrm{Aff}(n, \mathbb{C})$ 满足 $gg = e$。则

$$A\overline{A} = I \quad \text{and} \quad A\overline{v} + v = 0.$$

由引理 4.2，存在 $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ 使得

$$A = B\overline{B}^{-1}.$$

定义

$$h = \left(B, \frac{v}{2}\right).$$

Then

$$g\overline{h} = (A, v)\left(\overline{B}, \frac{\overline{v}}{2}\right) = \left(A\overline{B},\, A\frac{\overline{v}}{2} + v\right) = \left(B, -\frac{v}{2} + v\right) = \left(B, \frac{v}{2}\right) = h,$$

其中我们使用了 $\overline{A}B = B$ 和 $Av = -v$。因此 $g = \overline{h}h^{-1}$。 □

4.1. **定理 1.4 的证明。** 设 $g = g_1g_2g_3$，其中每个 g_i 都是共反 involution。根据引理 4.3，存在 $h \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$ 使得

$$g_1 = h\overline{h}^{-1}.$$

因此，

$$h^{-1}g\overline{h} = (\overline{h}^{-1}g_2h)(h^{-1}g_3\overline{h}) = g_2'g_3'.$$

由于共相似变换保持共合 involution，因此 g_2' 和 g_3' 都是共合 involution。因此，g 与两个共反 invol 仿射变换的乘积共相似。

反之，假设存在 $h \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$，使得

$$hg\overline{h}^{-1} = g_1g_2,$$

其中 g_1, g_2 是共合 involution。于是

$$g = h^{-1}g_1g_2\overline{h} = (h^{-1}g_1h)\,(h^{-1}g_2h)\,(h^{-1}\overline{h}).$$

Set

$$g_1' = h^{-1}g_1h, \quad g_2' = h^{-1}g_2h, \quad g_3' = h^{-1}\overline{h}.$$

每个 g_i' 都是共合 involution。因此

$$g = g_1'g_2'g_3',$$

因此 g 是三个共合 involution 的乘积。

证明完毕。 □

5. Product of four coninvolutions

引理 5.1。 设 $g \in \mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$ 是 $2m$ 个共反 *involution* 的乘积。那么，在 $\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$ 中，g 的任意共轭元也是 $2m$ 个共反 *involution* 的乘积。

证明。设

$$g = (a_1a_2)(a_3a_4)\cdots(a_{2m-1}a_{2m}),$$

其中每个 h a_i 是一个共反 involution。因此，每个乘积 $a_{2i-1}a_{2i}$ 都是强 c可逆的 .

设 $h \in \mathrm{Aff}(n,\ \mathbb{C})$。那么

$$hgh^{-1} = (ha_1a_2h^{-1})\cdots(ha_{2m-1}a_{2m}h^{-1}).$$

由于强 c可逆性是共轭不变的，每个

$$ha_{2i-1}a_{2i}h^{-1}$$

又是两个共合 involution 的乘积。因此 hgh^{-1} 是 $2m$ 个共合 involution 的乘积。 □

注 5.2. 对于奇数个因子的乘积而言，成为共反 involution 的乘积一般不是共轭不变的；而对于对合，这一性质在共轭下总是保持不变。

例 5.3. 本例表明，共合 involution 在 Aff$(n,\mathbb{C})$ 中不是共轭不变的。考虑 $g=(I,v)\in$ Aff$(n,\mathbb{C})$。那么

$$g\overline{g}=(I,v)(I,\overline{v})=(I,v+\overline{v}),$$

因此，g 是共反 involution，当且仅当 $v+\overline{v}=0$。

现在取 $h=(A,\ 0)$，其中 $A\in$ GL$(n,\ \mathbb{C})$。那么

$$hgh^{-1}=(I,Av).$$

此外，

$$(Av)+\overline{(Av)}=Av+\overline{A}\,\overline{v}.$$

由于 $v+\overline{v}=0$，我们有 $\overline{v}=-v$，因此

$$(Av)+\overline{(Av)}=(A-\overline{A})v,$$

除非 $v\in$ ker$(A-A)$，否则一般而言这不为零。因此，hgh^{-1} 不一定是共反 involution，这说明共合 involution 在共轭下不保持。

5.1. **定理 1.5 的证明。** 在此定理中，我们旨在证明每个仿射变换 $g=(A,v)\in\mathrm{Aff}(n,\mathbb{C})$，只要 $|\det A|=1$，就都可以写成至多四个共合 involution 的乘积。

根据前述引理，只需考虑这样一种情形：在共轭意义下，

$$A=\begin{pmatrix}T & 0\\ 0 & U\end{pmatrix},\qquad v=\begin{pmatrix}0_{n-m}\\ \widetilde{v}_m\end{pmatrix}.$$

由于 U是幂零的，det $U=1$，因此 $|\det T|=1$。由 Ba，定理 5]，T可以写成四个共合 involution 的乘积：

$$T=T_1T_2T_3T_4.$$

由命题 3.8，$(U,\widetilde{v})$ 是强 c-可逆的。因此存在 (U_1,v_1)，$(U_2,v_2)\in$Aff$(n,\mathbb{C})$，使得

$$(U,\widetilde{v})=(U_1,v_1)(U_2,v_2),$$

其中 (U_1,v_1) 和 (U_2,v_2) 是共反 involution。

$$g_1=(T_1\oplus U_1,\ 0_{n-m}\oplus v_1),\quad g_2=(T_2\oplus U_2,\ 0_{n-m}\oplus v_2),$$

$$g_3=(T_3\oplus I_m,\ 0),\quad g_4=(T_4\oplus I_m,\ 0).$$

Then

$$g=g_1\,g_2\,g_3\,g_4,$$

其中每个 g_i 都是共反 involution。证明至此完成。 □

Acknowledgments

Dutta感谢米佐拉姆大学提供的研究与促进基金，基金编号为F.No.A.1-1/MZU(Acad)/14/25-26。Gongopadhyay感谢ANRF研究基金CRG/2022/003680和ANRF/ARGM/2025/000122/MTR。Mondal在开展本研究期间感谢CSIR基金，编号为09/0947(12987)/2021-EMR-I。

References

[AMP] M.N.M. Abara、D.I. Merino、A.T. Paras，斜共合 involutory 矩阵，《线性代数及其应用》426（2007），第540–557页。[Ba] C. S. Ballantine，复杂 cosquare 与伪 involutory 矩阵的乘积，《线性与多重线性代数》8(1)（1979），第73-78页。[BHH] J.H. Bevis、F.J. Hall、R.E. Hartwig，矩阵方程 $AX - XB = C$ 及其特殊情形，SIAM《矩阵分析与应用杂志》9（1988）348–359。[Dj] D. ˇZ. Djokovi´c。两个对合的乘积。《数学文献》18（1967），第582-584页。[GLM] K. Gongopadhyay、T. Lohan、C. Maity。仿射变换的可逆性。《爱丁堡数学会会刊》66(4)（2023），第1217-1228页。[GL] K. Gongopadhyay、T. Lohan，厄米等距变换的可逆性，《线性代数及其应用》639（2022），第159–176页。[GM23] K. Gongopadhyay、C. Maity。经典李群中幺幂元的实性。Bulletin des Sciences Math´ematiques 185（2023），103261。[GM] K. Gongopadhyay、R. Mondal，复特殊线性群中的共轭可逆性。《匈牙利数学期刊》92(1)（2026），第1217-1228页。[Gr] Daryl Q. Granario，论共合 involutive 矩阵的积与和，《线性代数及其应用》735（2026），第175-187页。[GHR] W. H. Gustafson、R. Halmos、H. Radjavi。对合的乘积。《线性代数及其应用》13，（1976）：157–162。[HH88] Y. Hong、R.A. Horn。共相似下矩阵的标准形，《线性代数及其应用》102（1988），第143-168页。[HH86] Y. P. Hong、R. A. Horn，论通过共相似将矩阵化为三角形或对角形，SIAM《代数与离散方法杂志》7(1)（1986），第80-88页。[HJ] Roger A. Horn 与 Charles R. Johnson。矩阵分析。剑桥大学出版社，2012。[HM] R.A. Horn、D.I. Merino，极分解的实共合 involutory 类比，《线性代数及其应用》190（1993），第209–227页。[Ik] Khakim D. Ikramov，论共对角化矩阵，《线性代数及其应用》424（2007），第456-465页。[KN] F. Kn¨uppel、K. Nielsen，SL(V)是4-反射的，《几何学献礼》38(3)（1991），第301–308页。[Li] Kang-Man Liu。将矩阵分解为三个对合。《线性代数及其应用》111（1988），第1-24页。[OS] Anthony G. O'Farrel 与 Ian Short。动力系统与群论中的可逆性。第416号。剑桥大学出版社，2015。[Ro] L. Rodman。四元数线性代数专题。普林斯顿应用数学丛书。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，2014。[Sh] I. Short。球面、欧氏与双曲空间等距变换群中的可逆映射。《爱尔兰皇家科学院数学汇刊》108(1)（2008），第33–46页。

[Wo] M. J. Wonenburger，作为两个对合之积的变换，《数学与力学杂志》，16，（1966年），第327-338页。

Mizoram University, Tanhril, Aizawl 796004, Mizoram, India电子邮箱地址：sandipandutta98@gmail.com, mzut330@mzu.edu.in

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali, Knowledge City, Sector 81, S.A.S. Nagar 140306, Punjab, India电子邮箱地址：krishnendu@iisermohali.ac.in

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali, Knowledge City,Sector 81, S.A.S. Nagar 140306, Punjab, India电子邮箱地址：canvas.rahul@gmail.com