arXiv:2603.10729v1 [math.CA] 11 Mar 2026

维数插值邀约

Jonathan M. Fraser

Abstract. 分形 *fractal* 是在任意小尺度上都呈现复杂性的对象。为了研究和刻画分形，人们通常希望量化它们在小尺度上填充空间的程度。这由此引出了各种维数的概念。然而，即使是最简单的例子，不同的维数定义也可能给出截然不同的答案。在这篇综述性文章中，我将探讨这一现象，并借此讨论和阐释 *dimension interpolation*。维数插值将这些经典概念视为连续维数族的边界点，从而把彼此孤立的数值答案转化为连贯的几何图景。

Mathematics Subject Classification：主要分类：28A80；次要分类：28A75、28A78。
Key words and phrases：维数插值、豪斯多夫维数、盒维数、Assouad维数、中间维数、Assouad谱。

Contents

1. 维数理论 1
2. 一个 worked example 4
3. 维数插值 5
4. 我们的 worked example：回顾 7
5. 更多插值 9
参考文献 10

1. Dimension theory

维数是数学中最基本的概念之一。直线是一维的，填满的正方形是二维的，实心立方体是三维的，依此类推。然而，分形使这一图景变得复杂，往往不符合我们对维数的直觉。它们是在任意小的尺度上都呈现复杂性的对象，广泛存在于数学及更广泛的科学领域。分形的定义有些模糊，但它排除了圆和光滑曲线等光滑对象，因为这些对象放大后最终看起来像直线——它们有一条“切线”。而分形在放大后则会不断变化，产生更多复杂性。

我们该如何定义分形的维数?

以理论上严谨且几何意义明确的方式定义“维数”，本身就是一个颇为微妙的问题，也是我最喜欢的数学问题之一。“分形维数”有许多不同的概念，其中许多（但并非全部！）都涉及量化分形对象在小尺度上填满空间的程度。这里我们介绍三种自然且各不相同的做法，

JMF 获得了 *EPSRC Open Fellowship* (EP/Z533440/1)、*A new theory of dimensioninterpolation* 和 *Leverhulme Trust Research Project Grant* (RPG-2023-281) 的经费支持。

在介绍这些做法的过程中，一个表面上的悖论将会浮现：即使是最简单的例子，我们对维数的定义也会给出截然不同的答案！

为了理解分形 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 在小尺度下如何填满空间，我们先固定一个尺度，比如说 $r > 0$，并认为它非常小（之后我们会令它趋于零）。固定尺度有助于将问题离散化，并让我们开始进行计算。

How big is X at scale r?

为了回答这个问题，我们计算需要多少个直径为 r 的球才能包含（或“覆盖”） X。也就是说，我能把 n 取多小，才能使得存在直径为 r 的球 B_1、.....、 B_n（或任意集合），满足

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

这样的集合 $\{B_k\}_k$ 称为 r-覆盖 X，或简称为覆盖。将其中最小的n 记作 $N_r(X)$，以强调它对 r 和 X的依赖。数值 $N_r(X)$由此刻画了 X 在尺度 r下的大小。

How should we expect $N_r(X)$ to behave?

我们关注 $N_r(X)$ 在 $r \to 0$ 时的变化，因为这将产生一种尺度不变的描述，说明 X 在小尺度下如何填满空间。强调我们的维数概念具有“尺度不变性”很重要，因为例如，无论线段有多长，它都是一维的。不同线段的大小由其长度区分，但长度本质上是一种一维的大小概念，因此维数比长度更为根本。

事实证明，要精确计算 $N_r(X)$ 相当困难（而且归根结底并不十分重要）。但我们通常可以推导出 $N_r(X)$ 随 $r \to 0$ 变化的增长率，也就是说，建立如下形式的表达式

$$N_r(X) \lesssim r^{-s} \tag{1.1}$$

对于某个指数 $s > 0$。在（$\lesssim$ 1.1）中使用表示存在一个常数 C（或许取决于 X 和 s，但不取决于 r），使得 $N_r(X) \leqslant Cr^{-s}$。对于这类问题，这是一种极好的记法（本文将始终采用这种记法），因为它省去了不必要的细节，并强调我们关注的是 s，而不是 C。当1.1中的增长估计变得越来越难以满足，而 s越来越小时，我们所能接受的最小 s 可以看作 X的“维数”。例如

$$N_r([0,1]) \lesssim r^{-1}, \qquad N_r([0,1]^2) \lesssim r^{-2}, \qquad N_r([0,1]^3) \lesssim r^{-3}$$

而且这些指数无法进一步改进。这与我们的想法一致：直线是一维的，正方形是二维的，立方体是三维的。形式上，有界集 X 的（上）盒维数 $\dim_{\mathrm{B}} X$ 是满足以下条件的 $s \geqslant 0$ 的下确界：存在某个 $C > 0$，且对所有$r > 0$,

$$N_r(X) \leqslant Cr^{-s}.$$

盒维数具有几何意义，定义简洁优雅，并能清晰地描述我们试图捕捉的内容。

问题解决了吗？嗯，也许还不完全。这个定义存在理论上的缺陷。例如，由于我们假设覆盖中的球大小相同，并且只是简单地计算所需的球数，因此没有考虑到所用覆盖可能极其低效的情况。也就是说，使用直径不同 的球，我们或许能找到效率高得多的覆盖。不过，若这样做，就不能只计算覆盖集的数量，而必须根据每个覆盖集的大小对其贡献加权，然后以一种更细致的方式考量覆盖的总‘代价’。

这种方法引出了豪斯多夫维数。形式上， X 的豪斯多夫维数 $\dim_{\mathrm{H}} X$ 定义为满足以下条件的指数 $s \geqslant 0$ 的下确界：对于所有 $\varepsilon > 0$，都存在一个覆盖 $\{B_k\}_k$ （由直径可能不同 、记作 $|B_k|$的球组成），使得

$$\sum_k |B_k|^s < \varepsilon.$$

也就是说，使 X 从 s维视角看起来很小的最小 s 。对于 $s > \dim_{\mathrm{B}} X$，通过大小相同的球进行高效的 r覆盖，可得

$$\sum_{k=1}^{n} |B_k|^s = N_r(X)\, r^s \to 0$$

因此

$$\dim_{\mathrm{H}} X \leqslant \dim_{\mathrm{B}} X$$

这一关系总是成立，但我们将看到，这个不等式可能是严格的！豪斯多夫维数在理论上具有稳健性，并满足许多自然而优雅的性质，而良好的维数概念理应具备这些性质。

问题解决了吗？嗯，也许还没有完全解决。豪斯多夫维数和盒维数都给出了全局的维数概念，用来描述 X 如何平均填充空间。虽然这非常有用，但并不能呈现完整的图景。对于某些特定应用而言，所需的信息往往并非这些，因为应用可能对局部或极端信息十分敏感。这一考量引出了 Assouad 维数。首先，我们在尺度 $R > 0$ 和位置 x 处进行局部化，然后在尺度 $r < R$ 处应用“计盒方法”，但仅针对 $X \cap B(x,\ R)$，其中$B(x,\ R)$是以 x 为中心、半径为 R的球。此时，局部化后的覆盖数取决于“局部化尺度” $R > 0$、位置 x以及“覆盖尺度” $r < R$，对此必须结合这一点加以理解。形式上， X 的*Assouad*维数$\dim_{\mathrm{A}} X$ 定义为满足以下条件的指数 $s \geqslant 0$ 的下确界：存在 $C > 0$ ，使得对于所有 $R > r > 0$ 和 x

$$N_r\Big(X \cap B(x,R)\Big) \leqslant C\left(\frac{R}{r}\right)^s.$$

也就是说，最小的 s ，使得 X 从s维的视角来看，在所有尺度和位置上都显得很小。对于有界的 X，令 R 等于 X的直径，我们立即可知

$$\dim_{\mathrm{B}} X \leqslant \dim_{\mathrm{A}} X$$

这一点始终成立，但我们会再次看到，这个不等式可以是严格的！Assouad维数提供了清晰且易于应用的几何信息。

那么，我们就讲完了吗？没有！维数还有许多细微之处，也有许多其他概念，我们在这里不会讨论；但与我们的讨论更相关的是，现在我们有了三种完全自然、具有几何意义且在理论上重要的分形维数概念，它们都描述了 X 在小尺度上如何填满空间。

How do we decide which dimension to choose?

这个问题的答案不是二选一！我们应该把它们都纳入考虑，并结合定义试图捕捉的内容，仔细加以解读。有关盒维数和豪斯多夫维数的更多背景信息，请参阅 [Fa14] ；有关 Assouad维数的更多信息，请参阅 [Fr21a、Ro11]。

2. A worked example

在本节中，我们考虑一个简单但极具启发性的例子。事实上，这个例子将是人们所能想到的最简单的分形对象。设

$$X = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}.$$

也就是说， X 是正整数倒数构成的集合。它是一个可数离散集，仅在0处有一个聚点，而且一切都非常明确。还有什么能比这更简单呢?

我们依次考虑每一种维数概念，从最小的开始。首先， X 的豪斯多夫维数尽可能小，即

$$\dim_{\mathrm{H}} X = 0.$$

这一点可以通过取如下给出的覆盖 $\{B_k\}_k$ 看出

$$B_k = B\big(1/k, 2^{-k-1}\delta\big)$$

对于某个较小的 $\delta > 0$，也就是说， B_k 是一个以点 $1/k \in X$为中心、直径为 $2^{-k}\delta$ 的区间。那么，对于所有正的 $s > 0$,

$$\sum_k |B_k|^s = \sum_k 2^{-ks}\delta^s = \frac{2^{-s}\delta^s}{1-2^{-s}}$$

通过将 δ 取足够小，可以使其任意小。事实上，这个论证适用于任意 可数集 X，这说明所有可数集的豪斯多夫维数都为零。

接下来我们将证明盒维数不同于豪斯多夫维数，而且事实上 t,

$$\dim_{\mathrm{B}} X = 1/2.$$

给定 $0 < r < 1/2$，选择 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant r < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

这将 X 中的点分成两个不同的类别。前 k 个点彼此间的距离大于 r，这意味着每个点都需要单独的覆盖集。因此,

$$N_r(X) \geqslant k \gtrsim r^{-1/2}$$

因此，盒维数至少为 *1/2*。另一方面，直接分别覆盖前 k个点，再粗略覆盖其余部分，可得

$$N_r(X) \leqslant k + N_r(X \cap [0, 1/k]) \lesssim k + \frac{1/k}{r} \lesssim r^{-1/2}, \tag{2.1}$$

这表明盒维数至多为 1/2，从而证明了这一结论。

最后，考虑 Assouad维数。设 $x = 0$ 和 $r = R^2$ 满足 R 很小。那么， X 中距离 $x = 0$ 不超过 R 的所有点，与其邻点的距离都不超过 $r = R^2$，因此

$$N_r(X \cap B(0, R)) \gtrsim N_r([0, R]) \approx \frac{R}{r}$$

因此，Assouad维数至少为 1，但事实上

$$\dim_{\mathrm{A}} X = 1$$

因为 X 位于直线上，而直线本身的 Assouad维数显然为 1。事实上，我们总可以直接应用以下界

$$N_r(X \cap B(x, R)) \lesssim N_r([x - R, x + R]) \lesssim \frac{R}{r}$$

以得到 1 的上界。

我们现在处于一种相当引人注目的情形。即便对于最简单的分形，这里所考虑的三种维数概念也完全不一致 于彼此。它们不仅给出三个互不相同的维数候选值，而且在 X 是直线的子集这一前提下，这些候选值已经尽可能均匀地分布并彼此分离。

我们该如何理解这种显著的分歧？

关键在于，这是三种不同的视角，而且每一种都能对 X给出清晰的几何解释。豪斯多夫维数认为 X 尽可能小，因为通过考虑高度不均匀的覆盖，可以用微不足道的代价覆盖该集合。另一方面，盒维数认为 X 的大小居于中间，因为它认识到，在尺度 r上， X 粗略地占据了相当大的空间，同时也注意到该集合中远离原点处存在着显著的“空洞”。最后，Assouad维数认为 X 尽可能大，因为在聚点附近进行局部化时， X 在由局部化尺度的平方所确定的尺度上最大限度地填满空间：直线本身也不会更大！

不同维数概念给出的答案没有一个是错的；相反，每一种从自身视角来看都有其道理。理解这种“分歧”，即使在数学之外，也大有裨益。

3. Dimension interpolation

维数插值 是分形几何中一个相对新颖的研究方向，旨在处理并解释我们在上一节中观察到的情形。它提出了一种思考维数的全新整体性方式：我们不应孤立地看待不同的维数概念，而应尝试将它们视为同一个对象的不同侧面。其思想是定义维数的插值族 ，使其从一种维数概念连续变形为另一种。如果能够做到这一点，我们就可以看到一种视角如何转变为另一种视角，并调和不同维数概念所表达的观点差异。此外，我们还将发掘有关所讨论分形集的更丰富、更细致的几何信息，并能够在各种应用中利用这些信息，包括分形几何特有的应用以及更广泛的数学领域。

这里我们讨论维数插值实际应用中的两个例子。第一个例子是中间维数 ，由 Falconer、Fraser 和 Kempton 在 [FFK20]中引入，用于在豪斯多夫维数和盒维数之间进行插值。牢记插值这一目标，首先注意到豪斯多夫维数和盒维数的定义之间的差异在于：对于豪斯多夫维数，用于覆盖的集合的直径之间没有限制 相对大小的要求；而对于盒维数，所有覆盖集都必须具有相同的直径。因此，中间维数通过使用插值参数 $\theta \in [0,1]$ 来限制覆盖中所用直径的允许范围。事实证明，最有趣的做法是要求：对于覆盖中的任意两个集合 U和 V，都有 $|U| \leqslant |V|^{\theta}$；也就是说，所有覆盖集的直径都处于范围 $[\delta^{1/\theta}, \delta]$ ，其中 $\delta \in (0,1)$。

更精确地说，（上）中间维数$\dim_{\theta} X$ 定义为满足以下条件的指数 $s \geqslant 0$ 的下确界：对所有 $\varepsilon > 0$ ，都存在一个覆盖 $\{B_k\}_k$ ，使得

$$\sum_k |B_k|^s < \varepsilon$$

并且对所有 k， l, $|B_k| \leqslant |B_l|^{\theta}$ 都成立。也就是说，最小的 s ，使得 X 从一个 s 维且受 θ 限制的视角来看显得很小。如果 $\theta = 0$，那么直径不受任何限制，此定义便还原为豪斯多夫维数。另一方面，如果 $\theta = 1$,

then 所有覆盖集都被迫具有相同的直径，且代价可简化为

$$\sum_k |B_k|^s = N_r(X)\, r^s$$

而且，该定义在此时还原为盒维数。

文献 [FFK20]建立了中间维数的多种性质。特别地，$\dim_\theta X$关于 $\theta \in [0,1]$单调递增，在 $\theta = 0$处可能不连续，在双利普希茨映射下保持不变，并且满足

$$\dim_{\mathrm{H}} X \leqslant \dim_\theta X \leqslant \dim_{\mathrm{B}} X$$

对于所有 θ。文献 [BR22]完整分类了所有可能作为某个集合的中间维数实现的函数。结果表明，可能性极其丰富！

中间维数已找到许多应用，包括布朗图像的维数理论 [Bu22], 、双利普希茨分类问题和多重分形分析 [BK24], 、索博列夫映射问题 [FT26], 以及正交投影的维数理论 [BFF21]。

维数插值的第二个实际例子是*Assouad*谱，由 Fraser 和 Yu 于 [FY18] 中提出，用于在盒维数和 Assouad 维数之间进行插值。这是“维数插值”首次出现。同样，着眼于插值这一目标，首先注意到 Assouad 维数的定义使用了两个尺度（“局部化尺度” R 和“覆盖尺度” r），而盒维数只使用一个尺度（“覆盖尺度” r）。如果覆盖尺度相对于局部化尺度极小，那么覆盖一个小部分与覆盖整个集合并没有太大区别，因此人们预期盒维数会显现出来。此外，见证 Assouad 维数的尺度对往往比预想的更接近（显然， $R/r \to \infty$这一点除外）。Assouad 谱通过使用插值参数 $\theta \in$ （0，1）来确定这两个尺度之间的关系。事实证明，最有趣的设定方式是令 $R = r^\theta$。

更准确地说，*Assouad* 谱 $\dim_{\mathrm{A}}^\theta X$ of X 定义为满足以下条件的指数$s \geqslant 0$ 的下确界：存在 $C > 0$，使得对于所有 $0 < r < 1$ 和 x

$$N_r\left(X \cap B\left(x, r^\theta\right)\right) \leqslant C\left(\frac{r^\theta}{r}\right)^s.$$

也就是说，最小的 s，使得从s维且受 θ限制的视角观察时， X 在所有尺度和位置上 都显得很小。如果 $\theta = 0$ 且 X 有界，那么立即可得 $\dim_{\mathrm{A}}^0 X = \dim_{\mathrm{B}} X$；当 $\theta \to 1$ 时，局部化尺度与覆盖尺度彼此相对接近，这正是通常见证 Assouad 维数的方式。在许多情况下（但并非所有情况！），我们有

$$\dim_{\mathrm{A}}^\theta X \to \dim_{\mathrm{A}} X$$

当 $\theta \to 1$时。关于 Assouad 谱的各种性质已在 [FY18] 中得到确立，其中包括它关于 $\theta \in [0,1$连续、在双利普希茨映射下保持不变，并且满足

$$\dim_{\mathrm{B}} X \leqslant \dim_{\mathrm{A}}^\theta X \leqslant \dim_{\mathrm{A}} X$$

当 $\theta \in (0,$ 1) 时。某个集合的 Assouad 谱可能实现的函数已在 [Ru24]中得到完整分类。再一次，结果表明可能性极为丰富！

Assouad谱已在许多领域得到应用，其中一些应用出现在令人意想不到的领域。这些应用包括 $L^p \to L^q$ 调和分析中某些算子的映射性质 [RS23、BRRS25], 弱嵌入问题 [CGT24], 拟共形映射问题 [CGT23], 以及共形动力系统中的 Sullivan 字典 [FS24]。

4. Our worked example: revisited

回想一下上文描述的那个简单例子：我们提出的三种维数概念对此给出了截然不同的判断。也就是说，这个典型的分形，

$$X = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

当然，读者现在一定想知道维数插值如何处理这个例子。我们或许会期待，在三个不同的维数概念之间存在连续的插值，而这种插值的形式能够揭示各个概念本身无法提供的几何信息——事实确实如此！稍加推导便可证明，对所有 $\theta \in (0,\ 1)$

$$\dim_\theta X = \frac{\theta}{1+\theta} \qquad \text{and} \qquad \dim_{\mathrm{A}}^{\theta} X = \min\left\{\frac{1/2}{1-\theta}, 1\right\}.$$

因此，中间维数从 0 平滑地增加到 $1/2$，而 Assouad谱从 $1/2$ 增加到 1，并在 $\theta = 1/2$处发生相变。怀疑维数理论的人或许会看到这个简单的例子，便断言它是可数集，因此豪斯多夫维数为零；它不是分形，也就没什么可说的。但这种看法并不正确：即使在这个非常简单的例子中，理解维数及维数插值的不同视角，也揭示了关于 X的更多几何信息。此外，我们还发现了 0 与 1 之间完整的插值过程，其中依次呈现了三个彼此孤立的分形维数概念。我们也因此提出了许多关于 X更精细几何特征的问题：为什么中间维数严格凹？为什么 Assouad谱会在 $\theta = 1/2$处发生相变？为什么当 $\theta < 1$时，Assouad谱会达到 Assouad维数？这些行为在其他例子中也普遍存在吗？诸如此类。

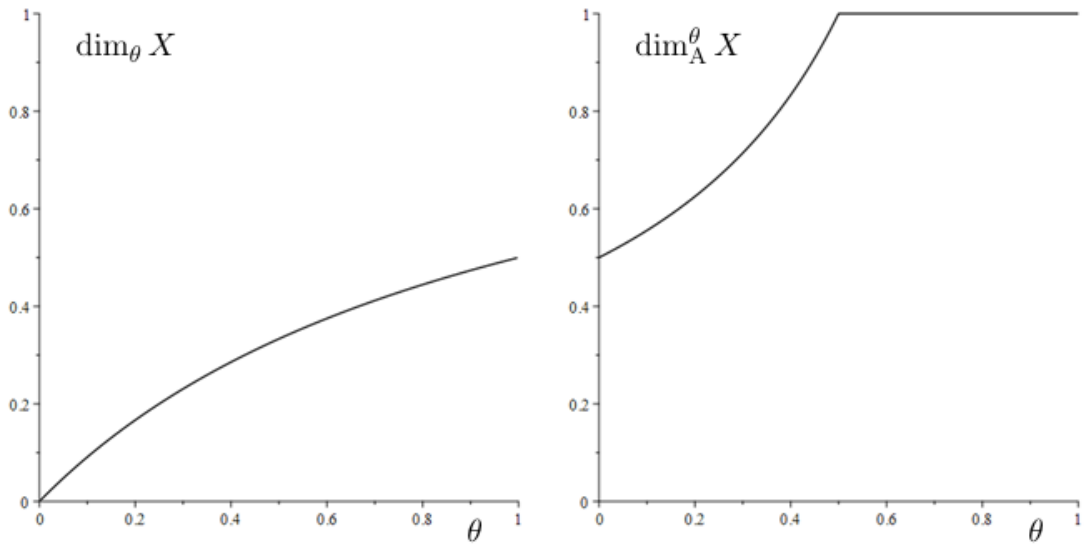


Figure 1. 插值实践：简单例子$X = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$的中间维数（左）与Assouad谱（右）作为 $\theta \in (0,1)$的函数的图像。

我们通过证明上文针对这一简单例子所给出的中间维数与Assouad谱公式来结束本文。这些证明是直接的，并且

自成一体，但需要一些细致的观察。更一般的结果分别见于[FFK20，FY18]。

让我们从中间维数开始。首先，我们给 $\dim_\theta X$ above 一个上界，方法是构造显式覆盖，其直径符合定义中的 θ-限制。事实上，我们只使用两个不同尺度： r 和 r^θ。暂且令 $s>0$ 任意，$0<r<1$ 并令 $M=\lceil r^{-(s+\theta(1-s))/2}\rceil$。取 $\{B_k\}_k$ 对 X 的一个覆盖，其中包含 M 个长度为 r 的区间$B_k=B\left(k^{-1},\ r/2\right)$，其中 $1\leqslant k\leqslant M$，以及 $\lesssim M^{-1}/r^\theta$ 个长度为 r^θ 的区间，它们覆盖$[0,M^{-1}]$.。然后

$$\begin{aligned}\sum_k |B_k|^s &\lesssim Mr^s+\frac{r^{\theta s}}{Mr^\theta} \\ &\lesssim r^{-(s+\theta(1-s))/2}r^s+r^{\theta(s-1)}r^{(s+\theta(1-s))/2} \\ &= 2r^{(s(\theta+1)-\theta)/2}\ \to\ 0\end{aligned} \tag{4.1}$$

因为 $r\to 0$ 如 $s(\theta+1)>\theta$。因此 $\dim_\theta X\leqslant\theta/(1+\theta)$。如果读者想知道 M 是如何选出来的，可以先取任意的 M，然后设法平衡（4.1）右端的两项。

对于下界，我们证明 X 很大，方法是证明我们可以将质量稀疏地铺展在 X上，且在适当的意义下。这是众所周知的质量分布原理 的中间维数类比，用于研究豪斯多夫维数，参见 [Fa14]。

固定 $s=\theta/(1+\theta)$。令 $0<r<1$，并再次令 $M=\lceil r^{-(s+\theta(1-s))/2}\rceil$，它现在简化为$M=\lceil r^{-s}\rceil$。定义质量分布 μ_r 于 X 上，作为点质量之和，其中

$$\mu_r\big(\{1/k\}\big)\ =\ \begin{cases} r^s & \text{if } 1\leqslant k\leqslant M \\ 0 & \text{if } M+1\leqslant k<\infty\end{cases}.$$

Then

$$\mu_r(X)=Mr^s\geqslant 1.$$

我们现在要证明 μ_r 是“稀疏铺开的”，方法是证明 μ_r（B）对于集合 B（满足 $r\leqslant|B|\leqslant r^\theta$）很小。为此，注意到对于 $k\leqslant M$,

$$\frac{1}{(k-1)}-\frac{1}{k}\ \geqslant\ \frac{1}{k^2}\ \geqslant\ \frac{1}{M^2},$$

因而 X 中任意两个承载质量的点之间的间隙至少为 $1/M^2$。于是这样的集合B至多相交于 $1+|B|/(1/M^2)\ =1+|B|M^2\lesssim|B|r^{-2s}$个 X中质量为r^s的点。因此

$$\mu_r(B)\lesssim r^s|B|r^{-2s}\leqslant|B|^s$$

其中我们用到了 $|B|\leqslant r^\theta=r^{s/(1-s)}$。这就是我们的质量分布估计。现在，令 $\{B_k\}_k$成为 X 的一个覆盖，使得对所有 k都有 $r\leqslant|B_k|\leqslant r^\theta$。于是

$$1\ \leqslant\ \mu_r(X)\ \leqslant\ \mu_r\Big(\bigcup_k B_k\Big)\ \leqslant\ \sum_k\mu_r(B_k)\ \lesssim\ \sum_k|B_k|^s,$$

因此，对每个可容许覆盖都有 $\sum_k|B_k|^s\gtrsim 1$，从而 $\dim_\theta X\geqslant s$。

最后，考虑 Assouad谱。通过朴素地用整个空间的覆盖数来界定小球的覆盖数，然后应用盒维数估计式（2.1），对于 $0<r<1$ 和 x，我们得到

$$N_r\left(X\cap B\big(x,r^\theta\big)\right)\leqslant N_r(X)\lesssim r^{-1/2}=\left(\frac{r^\theta}{r}\right)^{\frac{1/2}{1-\theta}}$$

这证明了

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} X \leqslant \frac{1/2}{1-\theta}.$$

上界 $\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} X \leqslant 1$ 很容易得到，因为 X 位于直线上，因此

$$N_r\left(X \cap B\left(x, r^{\theta}\right)\right) \lesssim \frac{r^{\theta}}{r}.$$

对于下界，我们已经证明了

$$\dim_{\mathrm{A}}^{1/2} X = 1$$

因为在上文证明 $\dim_{\mathrm{A}} X = 1$ 时，我们用尺度 $r = R^2$验证了这一点，也就是说，我们使用了 $\theta = 1/2$。因此很容易看出，对于所有 $\theta \in [1/2, 1)$，$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} X \geqslant 1$。对于$\theta \in (0,\ 1/2)$，令 $r \in (0,\ 1/2)$，$x = 0$，并唯一选取 $k \in \mathbb{N}$，使得

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant r < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

注意到 $k \approx r^{-1/2}$，因此 $1/k < r^{\theta}$。$X \cap [0, 1/k] \subseteq B(0,\ r^{\theta})$ 中的点与其邻点的距离都小于 r，因此在尺度 r 下覆盖 $X \cap [0, 1/k]$ 并不比在尺度 r下覆盖 $[0, 1/k]$容易。所以

$$N_r\left(X \cap B\left(0, r^{\theta}\right)\right) \gtrsim \frac{1/k}{r} \approx r^{-1/2} = \left(\frac{r^{\theta}}{r}\right)^{\frac{1/2}{1-\theta}}$$

这就证明了

$$\dim_{\mathrm{A}}^{\theta} X \geqslant \frac{1/2}{1-\theta}$$

如要求的那样。

5. More interpolation

对于希望更详细了解维数插值处理的读者，我们推荐综述文章 [Fr19、Fr25]。当然，在各种分形维数概念之间进行插值还有许多其他方式；对于我们在这篇短文中讨论的这些概念，也可以提出许多不同的问题。例如，傅里叶谱 由 [Fr24] 引入，它在傅里叶维数和豪斯多夫维数之间进行插值。有关傅里叶维数的更多背景，以及它与豪斯多夫维数之间的诸多联系，参见 [Ma15]。傅里叶谱维数$\dim_{\mathrm{F}}^{\theta} X$ 对于 $\theta \in [0, 1]$是非递减且连续的，并且在端点处分别精确恢复傅里叶维数和豪斯多夫维数。此外，它还被用于研究调和分析中广为人知的 傅里叶限制问题 [CFdO24+]以及几何测度论中的 ***Falconer*** 距离问题 [Fr24]。

维数插值仍处于起步阶段。然而，这一理论日益丰富的内涵及其常常令人意外的应用表明，它并非只是对现有概念的细化，而是一种全新的视角，可借以研究几何现象。展望未来，我们或许会逐渐认识到，经典维数概念只是更丰富的维数族的边界点。此外，这些维数族所揭示的额外几何信息，或许对于越来越多领域中的应用至关重要。

References

[BK24] A. Banaji 和 I. Kolossv´ary. Bedford–McMullen 地毯的中间维数及其在 Lipschitz 等价中的应用，《Adv. Math.》，449, (2024), 109735.[BR22] A. Banaji 和 A. Rutar. 中间维数的可实现形式，《Annales Fennici Mathematici》，47, (2022), 939–960.[BRRS25] D. Beltran, J. Roos, A. Rutar 和 A. Seeger. 波动方程的分形局部平滑问题，《Bull. Lond. Math. Soc.》，57, (2025), 3667–3690[Bu22]S. A. Burrell. 分数布朗像的维数，《J. Th. Probab.》，35, (2022), 2217–2238.[BFF21] S. A. Burrell, K. J. Falconer 和 J. M. Fraser. 中间维数的投影定理，《J. Fractal Geom.》，8, (2021), 95–116.[CFdO24+] M. Carnovale, J. M. Fraser 和 A. E. de Orellana. L^2 基于傅里叶谱的限制估计。预印本：arXiv:2412.14896, (2024).[CGT24] E. K. Chrontsios Garitsis 和 S. Troscheit. 闵可夫斯基弱嵌入定理，《Houston J. Math.》，50, (2024), 259–273.[CGT23] E. K. Chrontsios Garitsis 和 J. T. Tyson. Assouad谱的拟共形畸变与多项式螺旋的分类，《Bull. Lond. Math. Soc.》，55, (2023), 282–307.[Fa14] K. J. Falconer.《分形几何：数学基础与应用》。John Wiley and Sons，新泽西州霍博肯，第 3 版，(2014).[FFK20] K. J. Falconer, J. M. Fraser 和 T. Kempton. 中间维数，《Math. Z.》，296, (2020), 813–830.[Fr19] J. M. Fraser.《维数之间的插值》。《分形几何与随机性 VI》。《概率论进展》，Birkh¨auser, (2021).[Fr21a] J. M. Fraser.《Assouad 维数与分形几何》，剑桥大学出版社，《数学专题丛书》，2021.[Fr24] J. M. Fraser. 傅里叶谱与和集型问题。《Math. Ann.》，390, (2024), 3891–3930.[Fr25]J. M. Fraser. 维数插值在正交投影中的应用，《Res. Math. Sci.》，12, (2025), 23 pp.[FS24] J. M. Fraser 和 L. Stuart. 通过 Assouad 型维数与谱重新审视 Sullivan 字典。《Bull. Amer. Math. Soc.》，61, (2024), 103–118.[FT26] J. M. Fraser 和 J. T. Tyson. 中间维数的拟共形畸变与 Sobolev 畸变，《J. Lond. Math. Soc.》，113, (2026), Paper No. e70445.[FY18] J. M. Fraser 和 H. Yu. 新的维数谱：关于尺度缩放与齐次性的更精细信息，《Adv. Math.》，329, (2018), 273–328.[Ma15] P. Mattila. 傅里叶分析与豪斯多夫维数。《剑桥高等数学研究》，150，剑桥，(2015).[Ro11] J. C. Robinson.《维数、嵌入与吸引子》，剑桥大学出版社，2011.[RS23] J. Roos 和 A. Seeger. 球面极大函数与膨胀集的分形维数，《Amer. J. Math.》，145, (2023), 1077–1110.[Ru24]A. Rutar. Assouad 谱的可实现形式，《Indiana Univ. Math. J.》，73, (2024), 1331–1356

J. M. Fraser，圣安德鲁斯大学，苏格兰
Email address: jmf32@st-andrews.ac.uk