arXiv:2603.10734v1 [math.NA] 11 Mar 2026

时滞微分代数系统 H^2范数的计算与优化

EVERT PROVOOST 和 WIM MICHIELS

Abstract. 我们提出一种 Lanczos tau 方法，用于逼近并优化由半显式时滞微分代数方程描述的时滞系统的 H^2范数。在强 H^2范数有限的假设下，证明了该方法的可靠性。此外，若离散化所依据的指数函数有理逼近性态良好，且离散化保持稳定性，我们证明了其收敛性。数值结果表明，对于多个时滞，该方法对滞后型系统按离散化次数的三次速率收敛，对中立型系统则线性收敛。在单时滞情形中，当选取对称基时，我们观察到滞后型与中立型系统的 H^2范数均呈几何收敛。

我们推导了该逼近关于系统参数和时滞的梯度的显式公式。由此，我们只需大约两倍于单独逼近 H^2范数的计算时间，即可计算出完整梯度。我们说明了如何利用这些公式来综合鲁棒反馈控制器和稳定近似模型。

文章最后讨论了如何将所提出的结果扩展并改进到基于样条的近似中。我们注意到，采用这种选择时，收敛率提高了约两个数量级。最后，我们证明，采用基于勒让德正交多项式的样条的 Lanczos τ 方法能够保持稳定性，并保证 H^2-范数的收敛。

1. Introduction

衡量鲁棒性的一项实用指标，因此也是鲁棒控制中的一项重要性能准则，是 H^2-范数，

$$\|H\|_{H^2} = \sup_{0<\alpha<\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \|H(\alpha + i\omega)\|_F^2 \, \mathrm{d}\omega \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中，$H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p\times q}$ 是系统的传递函数，i 是虚数单位，$\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)}$ 是弗罗贝尼乌斯范数。当系统的零解指数稳定且系统不存在直通项时，该范数有限，并可化为沿虚轴的积分，即 $\alpha = 0$，也就是说 $\lim_{\omega\to\infty} H(i\omega) = 0$。特别是在控制器综合中，与同样常见的 H^∞-范数相比，该度量在计算上更实用，因为在温和条件下，其平方关于系统参数可微，

Date：2026年3月11日（预印本版本）。2020 *Mathematics Subject Classification.* 65L03、34K06、34K40 和 34K35。*Key words and phrases.* 时滞微分代数方程、H^2-范数、Lanczos τ 方法、鲁棒控制与优化。本研究获得了鲁汶大学项目 C14/22/092 以及弗兰德斯科研基金会项目 G.092.721N 的资助。

从而使优化过程容易处理得多。

众所周知，对于普通的无时滞系统，可以通过求解李雅普诺夫方程来计算该范数（Zhou 等，1995：引理4.6）。此前已有人提出将其推广到时滞系统，这类系统的动力学不仅依赖于当前状态，还依赖于过去的状态。在滞后型情形中，最高阶导数始终只在当前时刻求值，Vanbiervliet、Michiels 等（2011）建议先用无时滞的系统来近似该系统，例如采用 Breda 等（2005）的伪谱配置近似，然后将该系统的精确 H^2范数用作原系统的近似。或者，也可以求解所谓的时滞Lyapunov方程；该方法还适用于中性系统，其中最高阶导数现在也可以以时滞形式出现，如 Jarlebring 等（ 2011 ）所述。这两种方法也都允许计算梯度，从而给出 H^2 最优综合的方法。

尽管 H^2-最优模型降阶可以改写为一个综合问题，但针对目标近似对象为时滞微分代数方程的情况，已经开发出专门的方法。这也是我们将采用的更一般的系统类别；然而，据我们所知，与我们将要提出的方法不同，迄今为止这些方法所考虑的系统类型仍然有限。Pontes Duff 等（2018）将 Gugercin 等（2008）提出的著名迭代有理 Krylov 算法（IRKA）扩展到具有输入和输出时滞的系统。还有一些数据驱动方法采用 Loewner 框架的时滞扩展；与先前的方法及我们的方法不同，这类方法只需要传递函数的采样值，而不需要完整的状态空间表示。Pontes Duff 等（2015）将作为 IRKA 数据驱动对应方法的 TF-IRKA，扩展到其动态仅取决于某个固定时滞时刻的状态（而非当前状态）的系统。Loewner 框架的此类扩展也可以直接用于求取具有多个时滞的系统的降阶模型，但不一定是 H^2-最优的，例如 Schulze 等（2018）所述的方法。

在本文中，我们将 Vanbiervliet、Michiels 等（2011）所采用的方法加以拓展，用于近似由半显式时滞微分代数方程（DDAE）描述的系统的 H^2-范数及其平方的梯度，其中离散状态时滞的数量任意。这类方程尤其适用于对互联系统和网络建模，因为其中往往天然存在时滞，而代数方程则能简化建模。此外，引入代数方程可大大简化固定阶控制器的设计以及稳定近似模型的综合，因为现在无需消去变量便可直接将这些方程纳入其中，同时保留参数以供直接优化。正如我们将看到的，DDAE 还支持远比其表面上的简洁性所暗示的丰富得多的系统类型——无论这究竟是好是坏，其中包括中立型系统。

为实现这一扩展，我们选择采用 Ito 和 Teglas（1986）的 Lanczos τ 方法来构造近似。近年来，这种离散化方法重新受到关注；Scholl 等人（2024年a,b）的研究广泛使用了该方法，Provoost 和 Michiels（2024；2025）的研究也表明，该方法提高了滞后型时滞系统的 H^2-范数的收敛速率。尽管它在数学上等价于伪谱配点法（ Provoost 和 Michiels，2024：定理 4.1），但它所采用的算子表述极大地简化了我们的论证，也更自然地引出使用

对称基函数，从而在单时滞情形下实现更快的收敛，详见第 3.2 小节。

在下文中，我们考虑该系统

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{x}}(t) &= \textstyle\sum_{k=0}^{m} A_k \mathbf{x}(t-\tau_k) + B\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{z}(t) &= C\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

其中首项矩阵 E 允许为奇异， $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m < \infty$为常时滞，$\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n$ 为状态变量，$\mathbf{v}(t) \in \mathbb{C}^p$ 为输入，而$\mathbf{z}(t) \in \mathbb{C}^q$ 为时刻 t的输出。该系统的传递函数为

$$G(s) = C\big(sE - \textstyle\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-\tau_k s}\big)^{-1} B. \tag{2}$$

最后，我们将假定该系统的微分指数为一，即它是半显式的，这可利用 Fridman（2002 年）给出的如下准则轻易验证。

命题 1.1. 设 V 与 U 为具有正交列的矩阵，使得 张成 $V =$核 E且张成 $U^* =$核 E^*，则 VA_0U 非奇异，当且仅当系统(1) 的微分指数至多为一。

Unger（2020年）对这类系统进行了全面论述，其中也包括高指标系统。

如前所述，尽管中立项并未显式出现，但可以很容易地通过松弛变量将其加入。例如，

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{x}(t-1) + v(t), \\ z(t) &= x(t), \end{aligned} \quad \text{and} \quad \begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t-1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v(t), \\ z(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

从输入输出和稳定性的角度来看，两者是等价的。类似地，也可以使用这类松弛变量加入输入和输出时滞。附录 B 中给出了若干这类重构的其他示例。

更棘手的是，直通项也可能隐藏在模型（1）中，同样可以通过松弛变量实现。由于不存在直通项是 H^2-范数有限的必要条件，因此我们还需要额外的工具来检查直通项是否存在。更糟的是，经过无穷小时滞扰动后，也可能出现直通项。例如，系统

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t-\tau_1) - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t-\tau_2) \\ - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t-\tau_3) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t), \\ z(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \end{aligned}$$

例如，这个系统很容易隐藏在一个大型模型中，它等价于

$$z(t) = v(t - (\tau_1 + \tau_2)) - v(t - \tau_3).$$

如果 $\tau_1 + \tau_2 = \tau_3$ 这是一个零输出系统，其 H^2-范数为零。然而，即使是最微小的扰动也显然会引入直通项，从而导致 H^2-范数为无穷大。

概述。 在第 3.1 小节中，我们将 Van-biervliet、Michiels等（2011）提出的基于离散化的方法扩展到时滞微分代数方程的情形，并根据需要处理这一更一般模型类别所带来的额外挑战。具体而言，我们证明，在有限强 -范数的假设下，该

方法是可靠的。接着，我们在第 3.2 小节中证明，在温和的假设下，该方法是收敛的，并展示典型的收敛速率。这些小节所需的预备知识在第 2 节中讨论。第 4 节转而探讨 H^2-最优定阶控制器和稳定近似模型的综合设计。我们采用基于梯度的优化方法，并在第 4.1 小节中推导近似误差平方相对于系统矩阵和时滞的梯度解析表达式。第 4.2 小节通过若干数值示例展示这一方法。第 5 节概述前面各节的结果如何推广到基于样条函数的离散化，有时还会因此得到简化。最后，我们在第 6 节总结研究结果并展望未来的研究方向。

2. Preliminaries

在下一节中，我们将把一种用于近似时滞微分方程的 H^2-范数的现有方法扩展到时滞微分代数方程。本节回顾原有方法，以及关于时滞微分代数方程强 H^2-范数的一些早期结果。强范数是一种经过鲁棒化的度量，它明确考虑了微小的时滞扰动，这将使我们能够确保所提出扩展的可靠性。

2.1. 时滞微分代数方程强 H^2-范数的有限性。 正如引言中所指出的，时滞微分代数方程可用于建模中性系统。对于这类系统，指数稳定性在时滞发生无穷小扰动后未必得以保持（例如参见 Hale 和 Verduyn Lunel，2002 年）。同样，我们从引言中的例子得知，这种扰动可能导致直通项出现。由于不稳定性和直通项都会导致 H^2- 范数为无穷大，因此其有限性无法保证在无穷小扰动下仍然成立。这促使 Gomez、Jungers 等人（2022 年）提出了强 H^2-范数的概念，将此类扰动纳入考量。

令 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots\ldots, \tau_m) \in \mathbb{R}_+^m$ 和 $B_\delta(\boldsymbol{\tau}) = \left\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}_+^m : \ \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\theta}\| < \delta\right\}$ 以 $\boldsymbol{\tau}$ 为中心、半径为 δ的开球。于是我们可以定义以下范数。

定义 2.1。 系统 (1) 的强 H^2-范数定义为

$$\|G\|_{H^2}^{\mathrm{s}} = \limsup_{\delta \to 0^+} \{\|G(\cdot\,; \boldsymbol{\theta})\|_{H^2} : \boldsymbol{\theta} \in B_\delta(\boldsymbol{\tau})\}.$$

先前的研究表明，可以通过两个方面来刻画该范数的有限性：强指数稳定性，以及用于检测无穷小扰动下直通项的代数检验。在本小节余下部分，我们将回顾如何确立这两点。

请记住，当且仅当谱实部上确界 $\alpha < 0$ 时，系统才是指数稳定的，其中 α 是系统特征根实部的上确界。显然，α 是 $\boldsymbol{\tau}$ 的函数，因此，我们可以仿照前文，根据 Hale 和 Verduyn Lunel（2002 年）的结果定义如下。

定义 2.2。 系统 (1) 强指数稳定 当且仅当存在有限的 $\delta > 0$，使得

$$\max_{\boldsymbol{\theta} \in B_\delta(\boldsymbol{\tau})} \alpha(\boldsymbol{\theta}) < 0.$$

数值上，可以使用 Michiels（2011 年：第 4 节 4.3）所述的方法评估强稳定性。我们还可以用以下标准形式给出解析刻画。

令 E 的秩为 $n-\nu$。选取具有正交列的矩阵 V 和 U，使得 span $\bar{V}$ =ker E、span $\bar{U}^*$ =ker E^*、$\bar{U}A_0\bar{V}=-I_\nu$ 以及 $\bar{U}^\perp E\bar{V}^\perp=I_{n-\nu}$，其中 $A^\perp$ 的列张成 span A的正交补。注意，根据命题 1.1，我们知道这些矩阵存在。应用变换 $\mathbf{x}(t)=\bar{V}^\perp\mathbf{x}_1(t)+\bar{V}\mathbf{x}_2(t)$，并左乘 $\begin{pmatrix}\bar{U}^\perp\\ \bar{U}\end{pmatrix}$，得到

$$
(3)\qquad \begin{cases}\dot{\mathbf{x}}_1(t)=\sum_{k=0}^m A_{k,11}\mathbf{x}_1(t-\tau_k)+\sum_{k=0}^m A_{k,12}\mathbf{x}_2(t-\tau_k)+B_1\mathbf{v}(t),\\ \mathbf{x}_2(t)=\sum_{k=0}^m A_{k,21}\mathbf{x}_1(t-\tau_k)+\sum_{k=1}^m A_{k,22}\mathbf{x}_2(t-\tau_k)+B_2\mathbf{v}(t),\\ \mathbf{z}(t)=\mathcal{C}_1\mathbf{x}_1(t)+\mathcal{C}_2\mathbf{x}_2(t).\end{cases}
$$

由 Hale 和 Verduyn Lunel（2002 年）的推论2.1 可直接得到以下结论。

定理2.1。系统(3)，因此(1)也一样，当且仅当标称延迟下的谱实部上确界为负时，才是强指数稳定的，即 $\alpha(\boldsymbol{\tau})<0$，并且

$$
\max_{\boldsymbol{\theta}\in[0,2\pi]^m}\rho\big(\textstyle\sum_{k=1}^m A_{k,22}\,e^{i\theta_k}\big)<1,
$$

其中 $\rho(A)$是 A的谱半径。

给定强稳定性后，我们仍需验证不存在直通项，并且无穷小扰动也不会导致直通项出现。为此，定义如下矩阵族。

定义2.3。令 $\mathcal{P}_{k_0\dots k_m}$ 为所有互异矩阵乘积之和，这些乘积由 k_0 个 $A_{0,22}=-I_\nu$、k_1 个 $A_{1,22}$、.....以及 k_m 个 $A_{m,22}$组成。

例如，$\mathcal{P}_{0,\ \dots,\ 0}=I_\nu$, $\mathcal{P}_{1,\ 2,\ 0,\ \dots,\ 0}=-A_{1,\ 22}^2$，以及

$$
\mathcal{P}_{0,1,2,0,\dots,0}=A_{1,22}A_{2,22}^2+A_{2,22}A_{1,22}A_{2,22}+A_{2,22}^2A_{1,22}.
$$

根据定理2.1等结果，这些 $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$ 自然会出现。事实上，以下性质可直接由多项式定理推出。

命题2.2。对于 $r\in\mathbb{N}$ 我们有

$$
\big(\textstyle\sum_{k=0}^m z_kA_{k,22}\big)^r=\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^m\\ \|\mathbf{k}\|_1=r}}\binom{r}{\mathbf{k}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\binom{\|\mathbf{k}\|_1}{\mathbf{k}}^{-1}\mathcal{P}_{\mathbf{k}}=\sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^m\\ \|\mathbf{k}\|_1=r}}\mathbf{z}^{\mathbf{k}}\mathcal{P}_{\mathbf{k}},
$$

其中$\mathbf{z}^{\mathbf{k}}=z_0^{k_0}z_1^{k_1}\cdots z_m^{k_m}$。

利用这些 $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}$，我们现在可以表述以下定理。该定理由 Gomez、Jungers 等人（2020年：推论 9）提出，并经 Mattenet 等人（2022 年：定理 13）加以强化。

定理 2.3。系统(3)（因此也包括(1)）具有有限的强 H^2-范数，即$\|G\|_{H^2}^{\mathrm{s}}<\infty$，当且仅当它强稳定且对所有$\mathbf{k}\in\mathbb{Z}_+^m$均满足 $C_2\mathcal{P}_{\mathbf{k}}B_2=\mathbf{0}$。此外，只需对 $\|\mathbf{k}\|_1<\nu$验证后一条件即可。

2.2. **计算 H^2-范数的时滞微分方程**。在转向代数情形之前，我们先来看由纯滞后型时滞微分方程（RDDEs）描述的系统。将 (1) 中的 $E=I_n$ 置为零，即可得到这样的系统：

$$
(4)\qquad \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\textstyle\sum_{k=0}^m A_k\mathbf{x}(t-\tau_k)+B\mathbf{v}(t),\\ \mathbf{z}(t)&=C\mathbf{x}(t).\end{aligned}
$$

如前所述，我们知道如何实际计算无时滞系统的精确 H^2 范数，即当 $\tau_k\neq0$ 时有 $A_k=\mathbf{0}$。Vanbiervliet、

Michiels 等（2011）提出的方法相当直接：用无时滞近似的 H^2 范数来近似时滞系统的 H^2 范数。Provoost 和 Michiels（2024）最近概述了这种方法，该方法采用 Lanczos tau 方法；与最初使用的切比雪夫极值点上的伪谱配点法相比，这种方法在某些情况下似乎能够实现更快的收敛，其基础工作来自 Ito 和 Teglas（1986）。我们将在本节余下部分详细介绍他们的方法。

时滞系统在时刻 t 的有效状态——即唯一确定其动态所需的最少信息——由函数ξ_t： $[-\tau_m, 0] \to \mathbb{C}^n$给出，其中 $\xi_t(\theta) = \mathbf{x}(t+\theta)$（Bernier 和 Manitius, 1978）。利用这一历史函数 ξ_t，我们可以将式 (4) 改写为以下形式，实质上是将时滞微分方程重述为平流偏微分方程，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\varepsilon_0\\ I\end{pmatrix}\dot{\xi}_t &= \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{m} A_k \varepsilon_{-\tau_k}\\ \mathcal{D}\end{pmatrix}\xi_t + \begin{pmatrix}B\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\mathbf{v}(t),\\ \mathbf{z}(t) &= C\varepsilon_0\xi_t,\end{aligned}$$

为方便后续讨论，我们在此引入算子记号，其中包括求值泛函 $\varepsilon_\theta\xi = \xi(\theta)$、恒等算子 $I\xi = \xi$ 和导数算子 $\mathcal{D}\xi(\theta) = \mathrm{d}\,\xi(\theta)/\mathrm{d}\theta$。

现在，我们可以通过用 $\xi_{tN} \in \mathbb{P}_N^n$ 逼近 ξ_t 来进行离散化，其中 $\mathbb{P}_N^n$ 是从 $[-\tau_m, 0]$ 到 $\mathbb{C}^n$、次数为 N 的多项式空间。由于 $\mathcal{D}$ 会使此类多项式的次数降低一阶，$\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{m} A_k \varepsilon_{-\tau_k}\\ \mathcal{D}\end{pmatrix}$ 输入端的维数与输出端相同；它将 $\mathbb{P}_N^n$ 映射到 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}_{N-1}^n$。然而请注意，左侧的输出空间并未立即与之相同。因此，我们必须用某种投影替换 I。在 Lanczos τ 方法中，这是通过截断 ξ_{tN} 在按次数分级、支撑集为 $[-\tau_m, 0]$ 的正交多项式基 $\{\phi_k\}_{k=0}^N$ 中的展开来实现的。也就是说，这是一组多项式，其定义性质为：ϕ_k 的次数为 k，且 $\langle \phi_j,\ \phi_k\rangle = 0$ 当且仅当 $j \neq k$，其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是定义该序列的内积。于是，截断操作变为

$$(\mathcal{T}_{N-1}\xi)_j = (\xi)_j - \langle (\xi)_j, \phi_N\rangle \frac{\phi_N}{\|\phi_N\|^2}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

由此得到时滞系统 (4) 的如下状态空间近似

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_N'\dot{\mathbf{x}}_N(t) &= \mathcal{A}_N\mathbf{x}_N(t) + \mathcal{B}_N\mathbf{v}(t),\\ \mathbf{z}_N(t) &= \mathcal{C}_N\mathbf{x}_N(t),\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\mathcal{E}_N' = \begin{pmatrix}[\varepsilon_0]\\ [\mathcal{T}_{N-1}]\end{pmatrix}$、$\mathcal{A}_N = \begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{m} A_k[\varepsilon_{-\tau_k}]\\ [\mathcal{D}]\end{pmatrix}$、$\mathcal{B}_N = \begin{pmatrix}B\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$，以及 $\mathcal{C}_N = C[\varepsilon_0]$。这里，$[\cdot]$是该算子的适当分块矩阵表达式，或该泛函的分块向量表达式；而 $\mathbf{x}_N(t)$ 是表示多项式 ξ_{tN} 的系数向量。注意，由于我们将 $\mathcal{T}_{N-1}$ 和 $\mathcal{D}$ 视为从 $\mathbb{P}_N^n$ 映射到 $\mathbb{P}_{N-1}^n$，所得的$\mathcal{E}_N'$ 和 $\mathcal{A}_N$ 是方阵。

重要的是，这种隐式表述可以改写为标准的状态空间表示。注意，$\ker \mathcal{T}_{N-1} =$张成 $I_n\phi_N$。作为正交多项式的一项基本性质，ϕ_N 的零点位于其定义域的内部（Szeg˝o 1975：定理 3.3.1），因此 $\phi_N(0) \neq 0$。由此，$\mathcal{E}_N'$ 以 $\{\mathbf{0}\}$ 为其核，因而是可逆的。

根据Zhou等人（1995）的引理4.6，我们现在可以近似

$$\|G\|_{H^2} \approx \|G_N\|_{H^2} = \sqrt{\mathrm{tr}\left(\mathcal{C}_N P \mathcal{C}_N^T\right)},$$

其中， G_N： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ 是式（5）的传递函数， P 是李雅普诺夫方程 $\mathcal{A}_N P \mathcal{E}_N'^T + \mathcal{E}_N' P \mathcal{A}_N^T = -\mathcal{B}_N \mathcal{B}_N^T$的解。

3. Computing the H^2-norm of a DDAE

现在，我们提出计算系统 (1) 的 H^2 范数的近似方法。在第一个小节中，我们介绍所需的修改，并证明这些修改对于具有有限强 H^2 范数的系统是合理的。接着，我们证明在对近似方法作出温和假设的条件下，所得方法是收敛的，并在第二个小节中展示典型的收敛率。

3.1. 时滞微分代数方程的 Lanczos tau 方法。

将第 2.2 节的方法推广到时滞微分代数方程是相当自然的。我们先将离散化 (5) 顶行左侧乘以 E，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N \dot{\mathbf{x}}_N(t) &= \mathcal{A}_N \mathbf{x}_N(t) + \mathcal{B}_N \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{z}_N(t) &= \mathcal{C}_N \mathbf{x}_N(t), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\mathcal{E}_N = \begin{pmatrix} E[\varepsilon_0] \\ [\mathcal{T}_N - 1] \end{pmatrix}$、 $\mathcal{A}_N = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} A_k[\varepsilon_{-\tau_k}] \\ [\mathcal{D}] \end{pmatrix}$、 $\mathcal{B}_N = \begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 和 $\mathcal{C}_N = C[\varepsilon_0]$。

得到的是一个微分代数方程；在继续进行与上一节相同的处理之前，我们必须先消去其中的代数部分。我们首先将该微分代数方程写成微分部分与代数部分分离的形式，与（3）类似。

设 V 和 U 为具有正交列的矩阵，使得 $\operatorname{span} V = \ker \mathcal{E}_N$ 且 $\operatorname{span} U^* = \ker \mathcal{E}_N^*$。此外，设 $A^\perp$ 的列张成 $\operatorname{span} A$ 的正交补。注意，可以通过对 $\mathcal{E}_N$ 进行秩揭示分解轻松得到这样的 U、 V、 $U^\perp$ 和 $V^\perp$。应用变换 $\mathbf{x}_N(t) = V^\perp \mathbf{x}_{N,1}(t) + V \mathbf{x}_{N,2}(t)$，并左乘 $\begin{pmatrix} U^\perp \\ U \end{pmatrix}$，得到

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathcal{E}_{11} \dot{\mathbf{x}}_{N,1}(t) = \mathcal{A}_{11} \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathcal{A}_{12} \mathbf{x}_{N,2}(t) + \mathcal{B}_1 \mathbf{v}(t), \\ \mathbf{0} = \mathcal{A}_{21} \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathcal{A}_{22} \mathbf{x}_{N,2}(t) + \mathcal{B}_2 \mathbf{v}(t), \end{cases} \\ \mathbf{z}_N(t) = \mathcal{C}_1 \mathbf{x}_{N,1}(t) + \mathcal{C}_2 \mathbf{x}_{N,2}(t), \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{11} = U^\perp \mathcal{E}_N V^\perp, && \mathcal{A}_{11} = U^\perp \mathcal{A}_N V^\perp, && \mathcal{A}_{12} = U^\perp \mathcal{A}_N V, \\ &\mathcal{A}_{21} = U \mathcal{A}_N V^\perp, && \mathcal{A}_{22} = U \mathcal{A}_N V, && \mathcal{B}_1 = U^\perp \mathcal{B}_N, \\ &\mathcal{B}_2 = U \mathcal{B}_N, && \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_N V^\perp, \quad \text{and} && \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_N V. \end{aligned}$$

与（3）不同，我们没有选择 V 和 U 使得 $\mathcal{E}_{11}$ 为单位矩阵。虽然这确实可行，但当 $\mathcal{E}_N$ 的最大与最小非零奇异值相差很大时，可能会导致数值问题。尽管如此，按构造 $\mathcal{E}_{11}$ 是可逆的，这足以支持我们后续的结果。

为了最终从(7)中消去代数部分，我们需要证明 $\mathcal{A}_{22}$ 是可逆的。为此，我们首先需要以下结果，它推广了定理2.1。

引理 3.1. 如果系统(3) 是强指数稳定的，则

$$\max_{\mathbf{z} \in \bar{\mathbb{D}}^m} \rho\left(\sum_{k=1}^{m} A_{k,22}\, z_k\right) < 1,$$

其中 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 1\}$ 是闭单位圆盘。

证明。 该结果通过反证法加以证明。假设(3)是强指数稳定的，并且确实存在某些 $|z_1|$, $|z_2|$, ..., $|z_m| \leq 1$ 使得

$$\rho(\sum_{k=1}^{m} A_{k,22}\, z_k) \geq 1.$$

那么存在某个 $|\lambda| \geq 1$ ，使得

$$\det\left(a_1 a_2 \cdots a_m \lambda I_\nu - \sum_{k=1}^{m} A_{k,22}\, z_k\right) = 0,$$

其中，目前 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$。根据 Rouch´e 定理，特征值除非趋于无穷远，否则不会消失。通过连续延拓并固定其他变量，我们由此得到映射 $[1, \infty) \ni a_1 \mapsto z_1(a_1)$。由于谱半径不超过任意自然矩阵范数，且当 $a_1 \to \infty$ 时， $|z_1(a_1)| \to \infty$，因此存在某个 $a_1^* \geq 1$ ，使得 $z_1^* = z_1(a_1^*)$ 的模为 1。重复这一过程，我们得到 $|z_1^*| = |z_2^*| = \cdots = |z_m^*| = 1$ 和 a_1^*, a_2^*, ..., $a_m^* \geq 1$ ，使得

$$\det\left(a_1^* a_2^* \cdots a_m^* \lambda I_\nu - \sum_{k=1}^{m} A_{k,22}\, z_k^*\right) = 0.$$

然而，由于 $|\lambda| \geq 1$，这将意味着

$$\rho(\sum_{k=1}^{m} A_{k,22}\, z_k^*) \geq |a_1^* a_2^* \cdots a_m^* \lambda| \geq 1,$$

这与定理2.1相矛盾。 □

正如我们即将看到的，对于我们的离散化，上述引理的 z_k 对应于 $\phi_N(-\tau_k)$、$k = 0$, 1, ..., m。因此，为了使用这一结果，我们对基施加如下假设。

假设 3.1。 选择基 $\{\phi_j\}_{j=0}^{N}$ ，使得对$k = 1$, ..., m有 $|\phi_N(-\tau_k)| \leq |\phi_N(0)|$ 。

这一关于 ϕ_N 的条件对于正交多项式的常见选择均成立。对于许多Jacobi多项式，尤其是我们实验中所用的那些，这一点由关于其极值的著名界限所保证（参见例如Boisvert等，2010年：式18.14.16）。

于是我们可以证明如下结论。

命题3.2。 如果原始*DDAE* (1) 强指数稳定，且ϕ_N 满足假设 *3.1*，那么由(7)定义的 $\mathcal{A}_{22}$ 可逆。

证明。 注意，与多项式 $\xi \in \mathbb{P}_N^n$对应的向量 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^{n(N+1)}$属于 $\mathcal{E}_N$的右零空间（因此属于 span V），当且仅当 $\varepsilon_0 \xi \in \ker E$ 且$\xi \in \ker\ \mathcal{T}_{N-1} = \text{span}\ I_n \phi_N$。元组（$\mathbf{z}\ \boldsymbol{\zeta}$）$\in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{nN}$属于 $\mathcal{E}_N$的左零空间（因此其共轭转置属于 span U^*），当且仅当$\mathbf{z}^* \in \ker\,(E[\varepsilon_0])^* = \ker\ E^*$且 $\boldsymbol{\zeta}^* \in \ker\,[\mathcal{T}_{N-1}]^* = \{\mathbf{0}^*\}$。简而言之

$$\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{span} V \iff \varepsilon_0 \xi \in \ker E \wedge \xi \in \operatorname{span} I_n \phi_N \quad \text{and}$$
$$(\mathbf{z}, \boldsymbol{\zeta})^* \in \operatorname{span} U^* \iff \mathbf{z}^* \in \ker E^* \wedge \zeta = \mathbf{0}.$$

这些结果表明，存在一个基变换，[1] 即一个可逆矩阵，T，使得

$$T\mathcal{A}_{22}T^{-1} = TU\mathcal{A}_N V T^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{U}^* \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}^* \mathcal{A}_N\,[\phi_N \bar{V}] = \sum_{k=0}^{m} A_{k,22}\, \phi_N(-\tau_k),$$

[1]粗略地说， V 和 U 分别投影到 E 的右零空间和左零空间，其中在 V 中信息只能由 ϕ_N “承载”，而在 U 中尾部必须是零函数。

其中 U、 V、 $A_{0,\ 22} = -I_\nu$、 $A_{1,\ 22}$、.....以及 $A_{m,\ 22}$的定义见式 (3)。由于 $\phi_N(0)$（Szeg˝o 1975：定理3.3.1），根据引理 3.1 和假设 3.1，$\phi_N^{-1}(0)\mathcal{A}_{22}$可逆，因此 $\mathcal{A}_{22}$也可逆。□

既已证明 $\mathcal{A}_{22}$ 可逆，我们便可应用舒尔补公式，从 (7) 中消去代数部分，得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{11}\dot{\mathbf{x}}_{N,1}(t) &= \tilde{A}\mathbf{x}_{N,1}(t) + \tilde{B}\mathbf{v}(t), \\ \mathbf{z}_N(t) &= \tilde{C}\mathbf{x}_{N,1}(t) + \tilde{D}\mathbf{v}(t), \end{aligned} \tag{8}$$

with

$$\tilde{A} = \mathcal{A}_{11} - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21}, \qquad \tilde{B} = \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{B}_2,$$
$$\tilde{C} = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21}, \quad \text{and} \qquad \tilde{D} = -\mathcal{C}_2\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{B}_2.$$

时滞微分代数方程所特有的剩余挑战是证明：若系统 (1)˜ 没有直通项，则总有 $D = \mathbf{0}$。幸运的是，以下结果表明确实如此。

定理 3.3。 如果时滞微分代数方程 (1) 具有有限的强 H^2-范数，且 ϕ_N 满足˜假设 *3.1*，那么系统 (8) 没有直通项，即 $D = \mathbf{0}$。

证明。 由于有限的强 H^2-范数意味着强指数稳定性，我们可以继续命题3.2的证明。与其中的论证类似，我们有$T\mathcal{B}_2 = TU\mathcal{B}_N = B_2$和 $\mathcal{C}_2T^{-1} = \mathcal{C}_NVT^{-1} = C_2$，因此

$$\tilde{D} = -\mathcal{C}_2T^{-1}T\mathcal{A}_{22}^{-1}T^{-1}T\mathcal{B}_2 = -C_2\big(\textstyle\sum_{k=0}^m A_{k,22}\,\phi_N(-\tau_k)\big)^{-1}B_2.$$

由于 $\mathcal{A}_{22}$ 可逆，且根据凯莱-哈密顿定理的一个标准推论，存在某个有限次多项式 p，使得

$$\tilde{D} = -C_2\,p\big(\textstyle\sum_{k=0}^m A_{k,22}\,\phi_N(-\tau_k)\big)\,B_2. \tag{9}$$

由命题2.2可知，对于 $r \in \mathbb{N}$,

$$C_2\big(\textstyle\sum_{k=0}^m A_{k,22}\,\phi_N(-\tau_k)\big)^r B_2 = \sum_{\substack{\mathbf{k}\in\mathbb{N}^m \\ \|\mathbf{k}\|_1 = r}} \phi_N(-\tau_0)^{k_0}\cdots\phi_N(-\tau_m)^{k_m}\,C_2\mathcal{P}_{\mathbf{k}}B_2.$$

˜ ˜由于 (9) 表明 D 是此类项的加权和，最终由定理 2.3 可得 $D = \mathbf{0}$ 。□

与滞后型时滞微分方程一样，稳定系统未必会产生稳定的离散化。正如降阶建模中通常采用的做法（例如参见 Conni等人，2024年），如果离散化结果不稳定，可以将不稳定特征值关于虚轴反射。通常，这些虚假极点处于高频区域，因为传递函数在紧集上快速收敛（参见定理 3.6）；因此，反射只会给传递函数以及由此计算出的 H^2-范数带来很小的额外误差。正如下一个小节将更详细讨论的，所用的离散化似乎在 N 足够大时能够保持稳定，因此，如果近似结果不稳定，也可以尝试增大 N 。无论哪种情况，稳定系统的近似结果不稳定的情形都极为罕见。

假设我们有一个稳定离散化，且定理 3.3 的条件成立，那么我们最终可以像之前一样，将强 H^2-范数近似为

$$\|G\|_{H^2}^{\mathrm{s}} \approx \|G_N\|_{H^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(\tilde{C}P\tilde{C}^T)}, \tag{10}$$

其中 P是 $\tilde{A}P\mathcal{E}_{11}^T + \mathcal{E}_{11}P\tilde{A}^T = -\tilde{B}\tilde{B}^T$的解。

由此我们得到如下步骤，用以逼近DDAE系统(1)的强 H^2范数：

（1）使用 Michiels（2011 年：第 4.3 节）所述方法检验强指数稳定性。当该检验失败时，我们有 $\|G\|_{H^2}^{\mathrm{s}} = \infty$。（2）使用定理 2.3 检验无穷小扰动下的直通项。若该检验失败，我们同样可知 $\|G\|_{H^2}^{\mathrm{s}} = \infty$。（3）构造（8），若指数稳定，则用（10）近似 $\|G\|_{H^2}^{\mathrm{s}}$。当该近似不稳定时，首先将不稳定极点关于虚轴翻转。

3.2. **收敛性质**。 在上一小节中，我们提出由 Lanczos tau 近似来近似时滞微分代数方程的 H^2 范数，并在定理 3.3 中讨论了直通项问题，但尚未证明其收敛。据我们所知，针对滞后型时滞系统的 Vanbiervliet、Michiels 等（2011）方法的收敛性尚无证明。在本小节中，我们将证明所提方法收敛，前提是离散化保持稳定性，并且对指数函数具有足够好的底层近似（在假设 3.2 至 3.4 的意义下）。由于时滞微分代数方程是滞后型时滞微分方程的超集，这附带也为滞后型时滞微分方程情形提供了论证。我们将以若干实验结束本小节，用以说明该方法的典型收敛速率。我们从下述结果开始，它是 Provoost 和 Michiels（2024）命题 3.1 的直接推广。

命题 3.4。 (6) 的传递函数可表示为

$$G_N(s) = C(sE - \textstyle\sum_{k=0}^{m} A_k r_N(s, -\tau_k))^{-1} B,$$

其中 $r_N(s,\theta)$ 是关于 $s \in \mathbb{C}$ 的 N, N型有理函数，且关于 $\theta \in [-\tau_m, 0]$的次数为 N 的多项式，使得

$$\begin{cases} r_N(s,0) = 1, \\ \mathcal{D} r_N(s,\cdot) = s\mathcal{T}_{N-1} r_N(s,\cdot). \end{cases}$$

证明。 对 (6) 作拉普拉斯变换，并假设初始条件为零，可得

$$\begin{cases} sE[\varepsilon_0]\hat{\mathbf{x}}_N(s) = \sum_{k=0}^{m} A_k[\varepsilon_{-\tau_k}]\hat{\mathbf{x}}_N(s) + B\hat{\mathbf{v}}(s), \\ s[\mathcal{T}_{N-1}]\hat{\mathbf{x}}_N(s) = [\mathcal{D}]\hat{\mathbf{x}}_N(s), \\ \hat{\mathbf{z}}_N(s) = C[\varepsilon_0]\hat{\mathbf{x}}_N(s), \end{cases} \tag{11}$$

ˆ其中 $f(s)$ 是 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。令 $\mathbf{r}_N(s)$ 为矩阵值多项式的系数，使得

$$\begin{cases} [\varepsilon_0]\mathbf{r}_N(s) = I_n, \\ s[\mathcal{T}_{N-1}]\mathbf{r}_N(s) = [\mathcal{D}]\mathbf{r}_N(s). \end{cases}$$

由此定义可容易看出

$$\hat{\mathbf{x}}_N(s) = \mathbf{r}_N(s)(sE[\varepsilon_0]\mathbf{r}_N(s) - \textstyle\sum_{k=0}^{m} A_k[\varepsilon_{-\tau_k}]\mathbf{r}_N(s))^{-1} B\hat{\mathbf{v}}(s)$$

满足 (11)，因此

$$\begin{aligned} G_N(s) &= C[\varepsilon_0]\mathbf{r}_N(s)(sE[\varepsilon_0]\mathbf{r}_N(s) - \textstyle\sum_{k=0}^{m} A_k[\varepsilon_{-\tau_k}]\mathbf{r}_N(s))^{-1} B \\ &= C(sE - \textstyle\sum_{k=0}^{m} A_k[\varepsilon_{-\tau_k}]\mathbf{r}_N(s))^{-1} B. \end{aligned}$$

由于 $[\varepsilon_\theta]$**实数集**$_N(s) = I_n r_N(s,\ \theta)$，该结论成立。 □

稍后我们需要一个表达式，其中微分部分和代数部分是分离的。利用式 (3) 的标准形式，我们可以将该传递函数改写为

$$G_N(s) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sI_{n-\nu} - A_{N,11}(s) & -A_{N,12}(s) \\ -A_{N,21}(s) & -A_{N,22}(s) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$$

其中 $A_{N,\,ij}(s) = \sum_{k=0}^{m} A_{k,\,ij} r_N(s,\ -\tau_k)$，$A_{0,\,22} = -I_\nu$，其余矩阵同式 (3)。利用 Schur补公式，我们得到以下表达式。为使其更简洁，省略了对 s 的依赖，

$$G_N(s) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_N^{-1} & -D_N^{-1} A_{N,12} A_{N,22}^{-1} \\ -A_{N,22}^{-1} A_{N,21} D_N^{-1} & A_{N,22}^{-1} + A_{N,22}^{-1} A_{N,21} D_N^{-1} A_{N,12} A_{N,22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中 $D_N(s) = sI_{n-\nu} - A_{N,\,11}(s) - A_{N,\,12}(s) A_{N,\,22}^{-1}(s) A_{N,\,21}(s)$。

通过考察 $r_N(s,\ \theta)$ 的定义，我们可以看到，对于每个 $s \in \mathbb{C}$，都有 $[-\tau_m, 0] \ni \theta \mapsto e^{\theta s}$ 的多项式逼近。因此，将 G_N 与式 (2) 比较可知，命题 3.4 也可以理解为用 $s \mapsto r_N(s,\ -\tau_k)$ 逼近 $G(s)$ 中的每个 $s \mapsto e^{-\tau_k s}$。G_N 对 G 的逼近质量，以及由此带来的 H^2-范数收敛性，取决于指数函数的逼近质量。接下来，我们需要对这些 r_N 的收敛性作出以下两个假设。

假设 3.2. 基 $\{\phi_k\}_{k=0}^{N}$ 的选取使得，对任意 $s \in \mathbb{C}$，多项式 $[-\tau_m, 0] \ni \theta \mapsto r_N(s, \theta)$ 随 $N \to \infty$ 一致收敛于 $\theta \mapsto e^{\theta s}$。

假设 3.3. 基 $\{\phi_k\}_{k=0}^{N}$ 的选取使得存在一个阶为 $o(|\omega|^{\frac{1}{4}})$ 的函数f，即 $\lim_{\omega \to \infty} |\omega|^{-\frac{1}{4}} f(\omega) = 0$，它对所有$k = 0, \ldots, m$、$\omega \in \mathbb{R}$ 和 N 给出 $|r_N(i\omega, -\tau_k)|$ 的上界。

这些假设源于一种常见经验：对于良好选取的基，τ 方法的结果（按其定义，例如 $r_N(s, \cdot)$）是拟最优的，即其误差与同次数真解的最佳多项式逼近的误差相差不超过某个因子 $C \geq 1$ （Boyd 2001）。对于切比雪夫多项式，这一观察由导数的谱精度所支持（Tadmor 1986）。

由于 τ 方法与在 ϕ_N 的零点处采用配置法等价（Lanczos 1938），如果与这些零点相关的勒贝格常数次线性增长，即其阶为 $o(N)$，那么 Breda 等（2015）的命题 5.1 就保证假设 3.2 成立。

对于假设 3.3，我们尚未发现此类现成结果。由于指数函数是整函数，$[-\tau_m, 0] \ni \theta \mapsto e^{s\theta}$ 的最佳多项式逼近在上确界范数下超几何收敛（伯恩斯坦，1912年）。在虚轴上，即 $s = i\omega$，零多项式的误差为 1，因此显然且一致地界定了 ω 和 N 中最佳多项式逼近的误差。对于有界目标函数，有界的逼近误差意味着最佳多项式逼近本身在 ω 和 N 中一致有界。然而，准最优因子取决于具体问题，因此可能随 ω 增长。所幸，数值实验表明，这种增长仅为对数级；当 $\omega \sim \frac{1}{\tau_m} N \log(N)$ 时，误差达到最大值，这完全符合假设 3.3 的要求。

—

利用下面的引理，我们将能够把假设 3.2 的收敛性推广到 G_N。

引理 3.5. 若矩阵函数 $F_N(s)$ 的逆在复平面的某个紧子集 Ω 上依谱范数 $\|\cdot\|_2$ 有界，并且 $F_N(s)$ 当 $O(f(N))$ 时在 Ω 上依弗罗贝尼乌斯范数 $\|\cdot\|_F$ 对 $N \to \infty$ 收敛到 $F(s)$，则 $F_N^{-1}(s)$ 在 Ω 上以相同的阶收敛到 $F^{-1}(s)$ 。

证明。 设 $E_N(s) = F_N(s) - F(s)$，则该结果直接由以下得出

$$\begin{aligned} F_N^{-1}(s) &= (F(s) + E_N(s))^{-1} \\ &= F^{-1}(s) - F^{-1}(s)E_N(s)F^{-1}(s) + O(\|E_N(s)\|_F^2) \\ &= F^{-1}(s) + O(\left\|F^{-1}(s)\right\|_2^2 \|E_N(s)\|_F) \\ &= F^{-1}(s) + O(f(N)). \end{aligned}$$

扰动矩阵逆的近似推导可见于 Stewart 和 Sun（1990：第 2.4 节）。倒数第二步是通过对中间项进行向量化得到的。□

于是我们可以证明如下结果。

定理 3.6。 若假设 *3.2* 成立，则当 N 充分大时， G_N 在 $\mathbb{C}$ 中不含奇点的紧集上随 $N \to \infty$ 一致收敛于 G 。

证明。 作为假设 3.2 的直接推论，通过在紧集上综合最大误差与最慢的误差衰减，我们得到函数 $s \mapsto r_N(s, \theta)$ 在该集合上一致收敛于 $s \mapsto e^{\theta s}$ 。由于与常数矩阵相乘以及函数相加不会改变收敛性质，我们最终由命题 3.4 和引理 3.5 得到所需结果。□

证明 H^2-范数的收敛性，将依赖于前一个定理所确立的传递函数的局部收敛性以及对尾部的界定。对于后者，我们需要结合假设 3.3 使用以下条件。

假设 3.4。 若系统 (1) 强指数稳定，则存在一个 M，使得对于所有 N 和 ω，均有界 $\|A_N^{-1}{}_{,22}(i\omega)\|_F \leq M$。

由于奇异矩阵构成零测集，强稳定性和引理 3.1 几乎可以保证这一点，而且数值实验似乎也支持这一结论。

由此足以证明最终的收敛结果。

定理 3.7。 对于具有有限强H^2-范数的强指数稳定系统(1)，第 *3* 节所述方法是收敛的，即当离散化在 N 充分大时保持稳定性，且假设 *3.2* 至 *3.4* 成立时，$\|G_N\|_{H^2} \to \|G\|_{H^2}$ 对于$N \to \infty$。

证明。 我们首先利用方程 (12) 的形式来界定 $G_N(i\omega)$ 的尾部。注意，由于假设 3.4 保证 $A_{N,22}(i\omega)$ 始终可逆，因此通过类似于定理 3.3 证明的论证，我们有 $C_2 A_N^{-1}{}_{,22}(i\omega)B_2 = \mathbf{0}$ 。此外，假设 3.3 意味着，对于 $\omega \to \infty$， $D_N^{-1}(i\omega)$ 至少以线性速度衰减，且该衰减关于 N 一致。利用这一衰减以及假设 3.3 和 3.4，我们可以看出，其余非零项以及由此得到的 $G_N(i\omega)$ 至少以 $|\omega|^{-\frac{1}{2}-\alpha}$ 的速度衰减，其中 $\alpha > 0$ 为某个常数。由于 $G(i\omega)$ 对于 $\omega \to \infty$ 呈线性衰减，因此对于所有 $\gamma > 0$，存在某个 $\omega^* > 0$ ，使得对所有 $|\omega| \geq \omega^*$ ，我们可以得到如下界

$$\max\left\{\|G(i\omega)\|_F, \|G_N(i\omega)\|_F\right\} \leq \gamma|\omega|^{-\frac{1}{2}-\alpha}$$

关于 N 一致。

令 $e_N(\omega) = \|G(i\omega)\|_F^2 - \|G_N(i\omega)\|_F^2$，并取任意小的 $\delta > 0$。对 $G(i\omega)$ 和 $G_N(i\omega)$ 的一致线性衰减界意味着，必存在某个 $\omega^{**} > 0$，使得对所有 N，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\omega^{**}} e_N(\omega)\,\mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega^{**}}^{\infty} e_N(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \le \frac{\delta}{2}.$$

此外，稳定性保持意味着，当 N 充分大时，虚轴上没有奇点。结合假设 3.2，我们便可应用定理 3.6，并有 $e_N \to 0$，其中 $N \to \infty$，在 $[-\omega^{**}, \omega^{**}]$ 上一致成立。因此，存在某个 N^*，使得对所有 $N > N^*$，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega^{**}}^{\omega^{**}} e_N(i\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \le \frac{\delta}{2}.$$

综合这两个界可得，对所有 $N \ge N^*$，

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e_N(i\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \le \delta.$$

再次利用稳定性保持，可知存在某个 $N^{**} \ge N^*$，使得$\|G_N\|_{H^2} < \infty$对所有 $N \ge N^{**}$ 成立。由于 δ 是任意的，并利用范数的正性，对于所有 $\epsilon > 0$，我们可以选取一个 δ，使得对所有 $N \ge N^{**}$，

$$|\|G\|_{H^2} - \|G_N\|_{H^2}| \le \epsilon.$$

□

注意，对于滞后型时滞微分方程，论证会大大简化，因为假设 3.4 不再相关。此时我们还有 $D_N(s) = sI_n - A_{N,\,11}(s)$ 和 $G_N(s) = C_1 D_N^{-1}(s) B_1$，因此假设 3.3 可以放宽为次线性增长。

如果离散化不稳定，那么只要伪极点不在虚轴上，证明仍然表明虚轴上的 L^2-范数会收敛。然而，根据经验，对于 N 足够大的情况，采用大多数经典基时，离散化似乎确实能够保持稳定性。作此假设并非不合理，因为 Ito（1985）以及 Ito 和 Kappel（1992）在使用勒让德基时，已证明了滞后型时滞微分方程的稳定性保持方面的类似结果。

事实上，对于该基，根据 Boisvert 等人（2010）中的公式 18.14.16，我们还满足假设 3.1；又由于勒让德零点的勒贝格常数按 $O(\sqrt{N})$ 增长（Szeg˝o 1975：第 338 页底部），根据 Breda 等（2015）的命题 5.1，我们满足假设 3.2。因此，除了稳定性保持以及假设 3.3 和 3.4 之外，使用这些多项式时，满足定理 3.7 成立所需的所有条件。

由于勒让德多项式在其定义域上对称，因此有

$$|r_N(i\omega, -\tau_m)| = 1$$

对所有 $\omega \in \mathbb{R}$ 均成立（Provoost 和 Michiels，2024年：命题5.4）。因此，在单时滞情形下，我们显然满足假设 3.3；若系统强指数稳定，则由引理 3.1 可知假设 3.4 也成立。接下来需要证明稳定性保持。我们将在下一个结果中针对单时滞情形建立这一结论，部分思路受到 Ito（1985年）论证的启发。

定理 3.8. 对于强指数稳定的单时滞 *DDAE*系统(1)，即 $m = 1$，采用勒让德基时，离散化(6) 在 N 充分大时保持稳定性。

证明. 根据 Provoost 和 Michiels（2024）的定理 4.2 可知，对于这种基的选择，$r_N(s,-\tau_m)$ 是 N次对角 Pad´e 逼近 $s\mapsto e^{-\tau_m s}$。Birkhoff 和 Varga（1965 年：引理 8）证明，这些逼近在闭右半平面上的模不超过 1，即 $|r_N(s,-\tau_m)|\leq 1$对所有 $s\in\mathbb{C}_{\geq 0}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)\geq 0\}$ 均成立。

结合引理 3.1，这个关于 r_N 的界意味着 $A_N^{-1}{}_{,22}(s)$ 有界，适用于 $s\in\mathbb{C}_{\geq 0}$。由方程 (12) 可得，离散化在此半平面内的所有特征根 λ 都满足 $\det(D_N(\lambda))=0$，因此

$$|\lambda|\leq \|A_{N,11}(\lambda)+A_{N,12}(\lambda)A_{N,22}^{-1}(\lambda)A_{N,21}(\lambda)\|_2.$$

关于 r_N 的界还意味着 $A_{N,\ 11}$，$A_{N,\ 12}$ 和 $A_{N,\ 21}$ 在$\mathbb{C}_{\geq 0}$上有界。因此，$\det(D_N(\lambda))$ 的零点若位于 $\mathbb{C}_{\geq 0}$ 内，其模均不超过某个有限常数 M，因而被限制在半径为 M 的半圆 Ω 内。

由于原始系统是稳定的，因此它在 Ω 内没有特征根。根据定理 3.6 的论证，我们知道 $D_N(s)$ 在紧集上收敛。因此，当 N 足够大时，离散化系统在 Ω 内不可能有任何特征根，因而在整个闭右半平面内也没有特征根。□

利用该定理和前面的讨论，我们最终得到。

推论 3.9. 对于具有有限强 H^2-范数的强指数稳定单延迟系统(1)，使用勒让德多项式作为基时，第 *3* 节中所述的方法收敛，即当 $N\to\infty$ 时，对于 $N\to\infty$，$\|G_N\|_{H^2}\to\|G\|_{H^2}$。

我们之所以能够为这一情形给出完整的论证，主要依赖于 $r_N(s,-\tau_m)$ 的有界性。Provoost 和 Michiels（2025：第3.1小节）证明，对于节点位于时滞处的基于样条的离散化，如果基础多项式在其定义域上对称，则更一般的 $|r_N(i\omega,-\tau_k)|=1$ 对所有时滞 τ_k 和 $\omega\in\mathbb{R}$ 均成立。这表明，采用基于样条的离散化时，该推论可以推广到多个时滞，详情将在第 5 节中说明。

在确立了收敛条件之后，我们以讨论收敛率来结束本小节。对于滞后型系统，Vanbiervliet、Michiels 等（2011）报告了 $\|G_N\|_{H^2}$ 到 $\|G\|_{H^2}$的三阶代数收敛，并为此观察提供了部分论证。尽管对我们的推广很可能可以进行类似推导，但我们仅限于对可建模为系统(1)的不同系统族所呈现的典型收敛速率进行实证研究。

在我们的示例中，我们将采用如下一组系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\begin{pmatrix}-5&1\\3&8\end{pmatrix}\mathbf{x}(t)+\delta_{r_1}\begin{pmatrix}-2&0\\-2&1\end{pmatrix}\mathbf{x}(t-1)-\delta_{r_2}I_2\mathbf{x}(t-1.9)\\&\quad+\delta_{n_1}\begin{pmatrix}-1/5&1/10\\0&-1/10\end{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t-1)-\tfrac{1}{10}\delta_{n_2}I_2\dot{\mathbf{x}}(t-1.9)+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}v(t),\\z(t)&=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{13}$$

其中，$\vec{\delta}=(\delta_{r_1},\ \delta_{r_2};\ \delta_{n_1},\ \delta_{n_2})\in\{0,1\}^4$ 用于确定系统的组成（DDAE 表述见附录 B ）。由于采用这种选择时，单时滞情形已被证明会收敛（见推论 3.9 ），因此我们在离散化中使用经过适当平移和缩放的 N 阶勒让德多项式 P_N^* 作为 ϕ_N。此外，请记住，勒让德多项式在其定义域上具有对称性，这

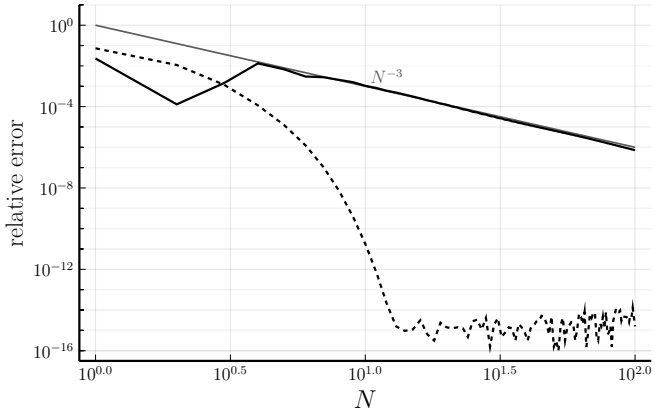


FIGURE 1. 系统 (13) 不同 RDDE 配置的收敛率。虚线对应单时滞情形，$\vec{\delta} = (1,\ 0;\ 0,\ 0)$，实线对应双时滞，$\vec{\delta} = (1,\ 1;\ 0,\ 0)$。

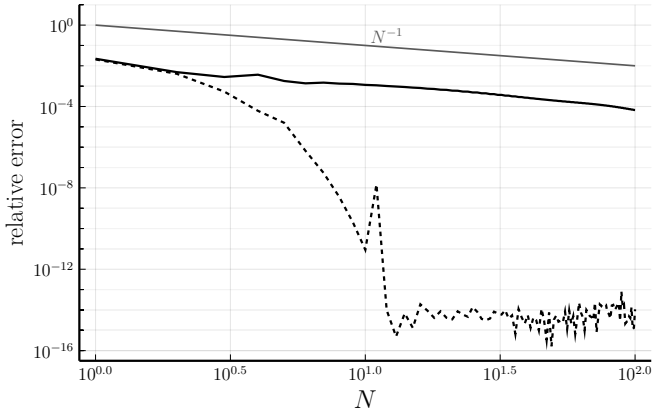


FIGURE 2. 系统 (13) 不同 NDDE 配置的收敛率。虚线对应单时滞，$\vec{\delta} = (0,\ 0;\ 1,\ 0)$，实线对应双时滞，$\vec{\delta} = (0,\ 0;\ 1,\ 1)$。

似乎正是这一性质解释了先前研究（Provoost 和 Michiels，2024年）中观察到的单时滞 RDDE 的 H^2-范数的几何收敛。

因此，对于滞后型系统，我们预计 $m > 1$ 会呈现三阶代数收敛，而 $m = 1$会呈现几何收敛，这一点已在图 1 中得到证实。由于中立型系统具有与虚轴平行的无限多个特征根组成的垂直链，且 H^2-范数涉及沿该轴的积分，因此预计此类系统的收敛率会降低。事实上，在图 2 中，我们看到对于多个时滞，收敛降为一阶代数收敛。令人惊讶的是，在单时滞情形下，我们仍保持了 RDDEs 所呈现的几何收敛。正如 Provoost 和 Michiels（2024年）所述，我们认为这是由于以下事实

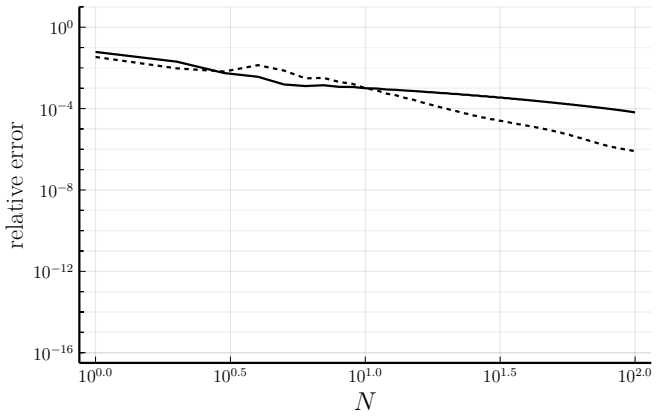


FIGURE 3. 系统 (13) 不同混合配置的收敛率。虚线曲线表示最大时滞上含有中性项，$\vec{\delta} = (1, 0; 0, 1)$；实线曲线表示内部时滞上含有中性项，$\vec{\delta} = (0, 1; 1, 0)$。

对称的 ϕ_N 意味着对于所有 $\omega \in \mathbb{R}$，$|r_N(i\omega, -\tau_m)| = 1 = |e^{-\tau_m i\omega}|$，而在内部时滞处通常并非如此。

即使在 $m > 1$ 的情况下，最大时滞 τ_m 类型所产生的影响减弱、对收敛率的影响降低这一现象似乎仍然成立。图 3 显示，代数收敛率仅由内部时滞的类型决定。如果其中任何一个对应于使方程成为中立型的项，收敛便降为一阶；否则，仍可保持三阶收敛。

4. H^2-OPTIMAL SYNTHESIS

迄今为止，我们工作的目标是提出一种有效方法来计算时滞微分代数方程的 H^2-范数。另一目标是通过直接优化模型参数，综合 H^2-最优定阶反馈控制器和稳定近似模型。对于第一种应用，系统 (1) 源自被控对象与动态或静态反馈控制器的反馈互连。对于第二种应用，系统 (1) 描述了完整模型与近似模型的动力学之间的误差（见例 4.3）。因此，矩阵 A_0、.....、A_m、B 和 C 中的某些元素可能等于控制器或模型的参数，或依赖于这些参数。

这促使我们在第 4.1 小节中研究 H^2-范数对于这些矩阵变化的灵敏度，从而能够使用基于梯度的优化方法。同样，将该方法应用于基于时滞的控制器（例如参见 Villafuerte 等人 2013 ）也促使我们研究时滞灵敏度；在这类控制器中，人为时滞被用于改善控制性能。

最后，在第 4.2 小节中，我们通过多个应用示例阐释了我们的方法，涵盖鲁棒控制以及稳定近似模型的综合。

4.1. 计算梯度。 本小节讨论关于系统参数计算 H^2-范数平方的导数。由于范数始终为正，最小化其平方也会最小化范数。

形式为 (1) 的系统的 H^2-范数关于参数 p 不一定处处可微。不过，如果系统矩阵是 p 的光滑函数，且我们固定 E，并假设该系统的微分指数为 1（参见命题 1.1），且在 p 的某邻域内满足定理 2.3 的条件，那么其平方就是关于 p 的局部光滑函数。如果强H^2-范数有限，那么其平方也是时滞的光滑函数。因此，若参数的某邻域内满足定理 3.3 的条件，则所需的导数均有定义。

采用上述方法计算一次 H^2-范数，若使用李雅普诺夫方程的直接求解器（例如 Hammarling（1982）提出的求解器），需要 $O(n^3N^3)$ 次基本运算。随后，我们可以用有限差分近似相对于自由参数的梯度，以便在优化循环中使用，所需时间为 $O((r+1)n^3N^3)$，其中 r 是参数的数量。

另一种方法的时间复杂度与 r无关，它通过求解对偶李雅普诺夫方程并采用伴随方法，得到导数的解析表达式。因此，计算梯度所需的计算时间略多于单独计算 H^2-范数的两倍。这种方法的一个缺点是，我们计算的是离散化系统的 H^2-范数的导数，而不是原始系统的导数。因此，在优化循环中使用时，必须谨慎拒绝那些会使微分指数增至 1 以上或导致强 H^2-范数爆增的更新。

这种方法与 Vanbiervliet、Vandereycken 等人（2009）中的公式类似，但我们选择采用 Magnus 和 Neudecker（1985年）提出的矩阵微分方法进行另一种推导，这样微积分过程会稍微简便一些。全文中，我们均采用约定 $\left(\frac{\mathrm{d}f}{X}\right)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}$。

设 $\mathcal{L}P = \tilde{A}P\mathcal{E}_{11}^T + \mathcal{E}_{11}P\tilde{A}^T$，则主李雅普诺夫方程和对偶李雅普诺夫方程可分别写为

$$\begin{aligned}\ell_P &\coloneqq \mathcal{L}P + \tilde{B}\tilde{B}^T = \mathbf{0}, \quad \text{and}\\ \ell_Q &\coloneqq \mathcal{L}^T Q + \tilde{C}^T\tilde{C} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

分别为。[2]

设 X 是一个独立于 P 和 Q 的变量。假设除 P 和 X 外的所有量均固定，由上面的方程可得 P 和 X 的无穷小扰动与由此产生的 ℓ_P 的无穷小扰动之间满足如下线性关系；用微分表示为

$$\mathrm{d}\ell_P = \frac{\partial \ell_P}{\partial P}\,\mathrm{d}P + \frac{\partial \ell_P}{\partial X}\,\mathrm{d}X = \mathcal{L}\,\mathrm{d}P + \frac{\partial \ell_P}{\partial X}\,\mathrm{d}X = \mathbf{0},$$

这意味着

$$\mathrm{d}P = -\mathcal{L}^{-1}\frac{\partial \ell_P}{\partial X}\,\mathrm{d}X\,.$$

由于我们只在解 P 和 Q 存在时考虑这一关系，因此可以假定 $\mathcal{L}^{-1}$ 存在。

改写 $\ell_Q = \mathbf{0}$，我们得到 $Q = -\mathcal{L}^{-T}\ \tilde{C}^T\tilde{C}$，因此，使用 $Q = Q^T$，

$$\tilde{C}^T\tilde{C}\,\mathrm{d}P = Q\frac{\partial \ell_P}{\partial X}\,\mathrm{d}X\,.$$

[2]Note that indeed $\mathcal{L}^T Q = \tilde{A}^T Q\mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{11}^T Q\tilde{A}$ as $\mathcal{L}^T \cong \left(\mathcal{E}_{11}\otimes\tilde{A} + \tilde{A}\otimes\mathcal{E}_{11}\right)^T$.

现在注意到 $\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2 = \mathbf{tr}\Big(\tilde{C}\,\mathrm{d}P\,\tilde{C}^T\Big) = \mathbf{tr}\Big(\tilde{C}^T\tilde{C}\,\mathrm{d}P\Big)$，因此

$$\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2 = \operatorname{tr}\left(Q\frac{\partial \ell_P}{\partial X}\,\mathrm{d}X\right).$$

采用类似的推理，我们由 $\|G_N\|_{H^2}^2 = \mathbf{tr}\Big(\tilde{B}^T Q \tilde{B}\Big)$ 得到

$$\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2 = \operatorname{tr}\left(P\frac{\partial \ell_Q}{\partial X}\,\mathrm{d}X\right).$$

最后，通过附录 A 中详述的简单但繁琐的计算，以及由 $\mathrm{d}f = \operatorname{tr}\big(Y^T\mathrm{d}X\big)$ 可知 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X} = Y$ 这一事实，得到所需的导数。我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2}{\mathrm{d}A_k} &= 2\left(\begin{smallmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)^T \mathcal{D}_{\mathcal{S}}^T [\varepsilon_{-\tau_k}]^T,\\
\frac{\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2}{\mathrm{d}\tau_k} &= -2\operatorname{tr}\big(A_k[\varepsilon_{-\tau_k}\mathcal{D}]\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\left(\begin{smallmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)\big) \quad \text{for} \quad k<m,\\
\frac{\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2}{\mathrm{d}\tau_m} &= -2\operatorname{tr}\Big(\tfrac{1}{\tau_m}[\mathcal{D}]\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} \\ I_{nN}\end{smallmatrix}\right)\Big) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\tau_k}{\tau_m}\frac{\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2}{\mathrm{d}\tau_k},\\
\frac{\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2}{\mathrm{d}B} &= 2\left(\begin{smallmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)^T Q_U^T\tilde{B}, \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{d}\|G_N\|_{H^2}^2}{\mathrm{d}C} = 2\tilde{C}P_V^T[\varepsilon_0]^T,
\end{aligned}$$

其中 $Q_U = Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)$、$P_V = (V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P$、$W_{\mathcal{A}} = V\mathcal{A}_{22}^{-1}U$ 和 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = P_V\mathcal{E}_{11}^T Q_U - W_{\mathcal{A}}\mathcal{B}_N\tilde{B}^T Q_U - P_V\tilde{C}^T\mathcal{C}_N W_{\mathcal{A}}$。

4.2. **数值示例**。本节最后，我们通过示例说明迄今所提出的方法如何用于综合鲁棒控制器和H^2-最优降阶模型。作为优化策略，我们采用 Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno 拟牛顿法（参见 Nocedal 和 Wright 2006：第 6.1 节），并使用 Hager 和 Zhang（2006）的线搜索算法。我们使用上一小节中的公式计算梯度。对于会导致第 4.1 小节中概述的梯度存在条件失效的步长，我们将代价函数设为无穷大，从而使线搜索算法自然地确保这些条件得到满足。出于与第 3.2 小节相同的原因，我们选择 $\phi_N = P_N^*$（经过适当缩放和平移的勒让德多项式的第 N 阶）进行离散化，并取 $N = 40$。

为简便起见，我们将以原始形式介绍这些示例；将其（大多为机理性的）变换为时滞微分代数方程的方法见附录 B。我们首先依次重现 Gomez、Egorov 等人（2019）的示例 1–3，以验证我们的方法。

示例 4.1。考虑 Vanbiervliet、Verheyden 等人（2008）给出的以下闭环系统：

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -0.08 & -0.03 & 0.2 \\ 0.2 & -0.04 & -0.005 \\ -0.06 & -0.2 & -0.07 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -0.1 \\ -0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t-5) + \mathbf{v}(t),\\
\mathbf{z}(t) &= \mathbf{x}(t).
\end{aligned}$$

从稳定参数 $p_1 = 0.472$、$p_2 = 0.505$ 和 $p_3 = 0.603$ 出发，它们对应的 H^2-范数约为 8.91，我们得到 $p_1^* \approx 0.538$、$p_2^* \approx 0.338$ 和

$p_3^* \approx 0.226$ 对应的 H^2-范数显著降低，约为 5.70。所有数值均与 Gomez、Egorov 等人（2019）报告的结果完全一致。

例 4.2. 下一个例子涉及为直流伺服机构设计比例-时滞控制器（Villafuerte 等人，2013）：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & -2\delta\nu \end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bk_r & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t-\tau) + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}v(t),\\ z(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

其中 $\nu = 17.6$、$\delta = 0.0128$ 和 $b = 31$，将 τ、k_p 和 k_r 留作控制参数。

与 Gomez、Egorov 等人（2019）一样，对全部三个参数进行优化不会得到有限的最优解，正如我们从 $\tau \to 0$、$k_p \to -\infty$ 和 $k_r \to \infty$ 可以看到的。按建议固定 $k_p = 22.57$，并从 $\tau = 0.03$ 和 $k_r = 3$ 开始优化，得到 $\tau^* \approx 0.0519$ 和 $k_r^* \approx 17.964$，使 H^2-范数从约 0。465 降至 0。223，与 Gomez、Egorov 等人（2019）得到的数值完全相同。

请注意，由于我们可以直接对时延进行优化，因此我们的方法使问题的表述大大简化，因为我们不需要通过变量代换来优化 τ。

例 4.3. 考虑 Ross（1971）给出的精炼装置的以下指数稳定线性化模型：

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-0.1) + B\mathbf{u}(t),\\ y(t) &= C\mathbf{x}(t),\end{aligned}$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4.93 & -1.01 & 0 & 0 \\ -3.20 & -5.30 & -12.8 & 0 \\ 6.40 & 0.347 & -32.5 & -1.04 \\ 0 & 0.833 & 11 & -3.96 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1.92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.92 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.87 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.724 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们希望找到一个二维稳定近似模型，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r(t) &= A_{0r}\mathbf{x}_r(t) + A_{1r}\mathbf{x}_r(t-0.1) + B_r\mathbf{u}(t),\\ y_r(t) &= C_r\mathbf{x}_r(t),\end{aligned}$$

使其传递函数在虚轴上的 L^2-误差最小。我们可以通过最小化以下系统的 H^2-范数来实现，并对 A_{0r}、A_{1r}、B_r 和 C_r 进行优化，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_e(t) &= \begin{pmatrix} A_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{0r} \end{pmatrix}\mathbf{x}_e(t) + \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{1r} \end{pmatrix}\mathbf{x}_e(t-0.1) + \begin{pmatrix} B \\ B_r \end{pmatrix}\mathbf{u}(t),\\ y_e(t) &= \begin{pmatrix} C & -C_r \end{pmatrix}\mathbf{x}_e(t).\end{aligned}$$

从稳定化矩阵开始

$$A_{0r} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_{1r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.3 \\ 0.15 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad C_r = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.7 \end{pmatrix},$$

优化后的 H^2-范数约为 $5.91 \cdot 10^{-3}$，这与 Gomez、Egorov 等人（2019）所获得模型的误差几乎完全相同。

接下来，我们来看两个复杂程度逐渐增加的中性系统。

例 4.4. 我们考虑以下示例，其灵感源自 Byrnes 等人（1984）的例 6.2.2：

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + x(t-1) + p_1\dot{x}(t-1) + p_2x(t-1) + v(t),\\ z(t) &= x(t).\end{aligned}$$

对于 $p_1 = 0$ 和 $p_2 = -1$，作者证明该系统是稳定的。对于这组参数，H^2-范数约为 0.71。使用我们的方法，可以找到一个替代控制器，其参数为 $p_1^* \approx -0.27$ 和 $p_2^* \approx -1.50$，对应的 H^2-范数约为 0.66。

例 4.5。 一个更有趣的系统——同时也说明了如何在微分代数延迟方程表述中使用松弛变量来获得高阶导数——源自一个在线性振子上施加延迟加速度导数反馈、并在测量加速度及其导数中加入加性噪声的系统：

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) + 2\xi\dot{x}(t) + x(t) &= p_1(\ddot{x}(t-\tau_1) + v_1(t)) + p_2(\dot{x}(t-\tau_2) + v_2(t)),\\ z(t) &= x(t).\end{aligned}$$

从 Wang 等人（2017）图 1 的稳定性图可知，对于 $\xi = 0.2$、$p_1 = 0.5$、 $p_2 = -20$、$\tau_1 = 0.2$ 和 $\tau_2 = 0.1$，零解是指数稳定的；由于 $|p_1| < 1$，它也强稳定。对于这一设置，我们得到约为 3.23 的 H^2-范数。针对 p_2 进行优化，可将其改善至约 0.57，取值为 $p_2^* \approx -0.33$。此外，进一步针对 τ_1进行优化，并将其下界设为 $\tau_2 = 0.1$，可得到 $p_2^{**} \approx -0.28$ 和 $\tau_1^{**} \approx 0.1$，其 H^2-范数略有改善，约为 0.53。

5. Spline based Lanczos tau methods

在第 3.2 小节末尾，我们证明了一个特定情形下的收敛性：对于采用勒让德多项式离散化的单时滞系统（推论 3.9）。论证主要依赖于这样一个事实：对于单时滞，支撑该离散化的指数函数有理逼近在虚轴上的模为 1。我们指出，Provoost 和 Michiels（2025）的结果表明，采用基于样条的离散化时，所有离散时滞均具有这一性质。

本节概述如何利用这一性质，将前几节中建立的理论推广到样条。最后，我们将说明，在滞后型系统中促使我们采用样条的收敛率加速，在我们更一般的情形下同样成立。

设 Ξ_{tN}为一组多项式 $\{\xi_{tN}^{(k)} : \ [-\tau_k, -\tau_{k-1}] \to \mathbb{C}^n\}_{k=1}^m$，每个的次数为$N$，即一个节点位于时滞处的样条函数。类似于第3.1小节，我们可以通过将每个 $\xi_{tN}^{(k)}$ 在正交的、按次数分级的基 $\{\phi_j^{(k)} : \ [-\tau_k, -\tau_{k-1}] \to \mathbb{C}\}_{j=0}^N$中展开来离散化系统(1)。但请注意，这会留下一个欠定系统。我们通过要求连续性于

节点处，即对 $k=1$，……，$m-1$而言的 $\xi_{tN}^{(k)}(-\tau_k)=\xi_{tN}^{(k+1)}(-\tau_k)$，从而得到

$$\begin{pmatrix} E\varepsilon_0^{(1)} \\ \left(\mathcal{T}_{N-1}^{(k)}\right)_{k=1}^{m} \\ (\mathbf{0})_{k=1}^{m-1} \end{pmatrix} \dot{\Xi}_{tN} = \begin{pmatrix} A_0\varepsilon_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{m} A_k\varepsilon_{-\tau_k}^{(k)} \\ \left(\mathcal{D}^{(k)}\right)_{k=1}^{m} \\ \left(\varepsilon_{-\tau_k}^{(k)} - \varepsilon_{-\tau_k}^{(k+1)}\right)_{k=1}^{m-1} \end{pmatrix} \Xi_{tN} + \begin{pmatrix} B \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{v}(t), \tag{14}$$

$$\mathbf{z}_N(t) = C\varepsilon_0^{(1)}\Xi_{tN},$$

其中，$\mathcal{P}^{(k)}$ 表示将 $\mathcal{P}$ 应用于第 $\xi_{tN}^{(k)}$ 段，而 $(\mathcal{P}_k)_{k=1}^{m}$ 是 $\{\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_m\}$的纵向拼接。

遵循 Provoost 和 Michiels（2025）的做法，我们可以很容易地将命题 3.4 推广，从而得到式 (14) 的传递函数为

$$G_N^{\mathrm{spl}}(s) = C\Big(sE - A_0 - \textstyle\sum_{k=1}^{m} A_k r_N^{(k)}(s,-\tau_k)\Big)^{-1}B,$$

其中 $r_N^{(k)}(s,\ \theta)$ 是 s 的有理函数，且关于 $\theta\in[-\tau_k,-\tau_{k-1}]$为多项式，使得

$$\begin{cases} r_N^{(1)}(s,0)=1, \\ \mathcal{D}r_N^{(k)}(s,\cdot) = s\mathcal{T}_{N-1}r_N^{(k)}(s,\cdot), & k=1,\ldots,m, \\ r_N^{(k)}(s,-\tau_{k-1}) = r_N^{(k-1)}(s,-\tau_{k-1}), & k=2,\ldots,m. \end{cases}$$

如同一篇文章的第3.1小节所示，我们有

$$|r_N^{(k)}(i\omega,-\tau_k)| = 1, \quad k=1,\ldots,m, \tag{15}$$

对于所有 $\omega\in\mathbb{R}$，若基础多项式在其定义域上对称。此外，每个 $r_N^{(k)}(s,\ -\tau_k)$ 都以此前的有理逼近（即次数较低的有理逼近）为因子。更具体地，我们有 $r_N^{(1)}=\rho_N^{(1)}$ 并且

$$r_N^{(k)}(s,\theta) = r_N^{(k-1)}(s,-\tau_{k-1})\rho_N^{(k)}(s,\theta), \quad k=2,\ldots,m, \tag{16}$$

其中 $\rho_N^{(k)}(s,\ \theta)$ 是关于 s 的有理函数，且关于 $\theta\in[-\tau_k,-\tau_{k-1}]$ 是多项式，使得

$$\begin{cases} \rho_N^{(k)}(s,-\tau_{k-1})=1, \\ \mathcal{D}\rho_N^{(k)}(s,\cdot) = s\mathcal{T}_{\phi_{k,N}}\rho_N^{(k)}(s,\cdot). \end{cases}$$

这两个性质使第 3 节中多项式情形所需的论证多少变得简单了一些。首先，利用 (12)，在强稳定性条件下直通项的缺失变得相当显然；经适当修改后，该结论同样适用于 G_N^{spl}。利用 (15) 和定理2.1，可以很容易看出，对于所有 $\omega\in\mathbb{R}$，$A_{N,\ 22}(i\omega)$ 都是可逆的。由于当 $\omega\to\infty$ 时，$D_N^{-1}(i\omega)\to 0$，直通项为

$$\lim_{\omega\to\infty} G_N^{\mathrm{spl}}(i\omega) = -\lim_{\omega\to\infty} C_2A_{N,22}^{-1}(i\omega)B_2.$$

运用定理 3.3 的论证，我们很容易得到 $C_2A_{N\ ,22}^{-1}(i\omega)B_2=\mathbf{0}$ 对所有 ω均成立，在无穷远处也同样成立。

我们在第 3.2 小节中关于 H^2-范数逼近收敛性的定理也可以直接推广到样条。更好的是，现在所需的大多数假设都可以直接成立。假设 3.3 的界只需在

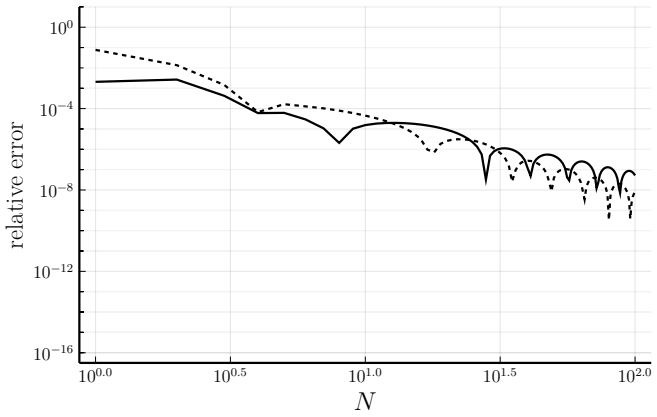


FIGURE 4. 与图 3 中相同的实验，但采用样条离散化。虚线表示中性项位于最大时滞处，实线表示中性项位于内部时滞处。

时滞上成立；由于式 (15)，当基础多项式为对称多项式时，这一点显然成立。根据同一性质和定理2.1，假设 3.4 成立。

因此，剩下要证明的只有 $r_N^{(k)}$ 的收敛性，即假设 3.2，以及稳定性保持。与第 3.2 小节一样，采用基于勒让德多项式的样条时，我们可以证明这些结论。利用证明 r_N 收敛性的论证，我们可以证明 $\rho_N^{(k)}(s,\ \theta) \to e^{(\theta-\tau_{k-1})s}$ 当 $N \to \infty$ 时成立。由式 (16) 和 $e^a e^b = e^{a+b}$ 可进一步推出 $r_N^{(k)}$ 的收敛性。关于稳定性保持，注意到对于这一基的选择，式 (16) 意味着 $r_N^{(k)}(i\omega,\ -\tau_k)$ 是若干不同衰减指数函数的 k 对角 Padé 逼近的乘积。因此，定理 3.8 的论证和结论可直接推广到这种情形，得到以下结果。

定理5.1. 对于强指数稳定的*DDAE*系统(1)，当 N 充分大时，基于勒让德基的样条函数离散化(14) 保持稳定性。

由前述讨论，我们由此得到推论 3.9的如下推广。

推论5.2. 对于具有有限强 H^2范数的强指数稳定*DDAE*系统(1) ，当使用基于勒让德基的样条函数离散化(14) 时，第 *3* 节所述方法收敛，即对 $N \to \infty$有 $\|G_N^{\mathrm{spl}}\|_{H^2} \to \|G\|_{H^2}$。

最后，Provoost 和 Michiels（2025）证明，采用这类近似方法，可以将具有多个时滞的时滞微分方程的收敛率从三阶代数收敛加快到约五阶。单时滞情形下的几何收敛似乎在文中所述推广到时滞微分代数方程后仍得以保持（见第 3.2 小节），而这被认为是加速收敛的原因，因此我们预计此处也会有类似的改进。事实上，比较图 4 和图 3 可以看出，类似的改进幅度约为两个数量级，似乎

适用于时滞微分代数方程。对于最坏情形，即内部时滞上带有中性项的中性型时滞微分方程，收敛阶数由一阶提高到约三阶。

6. Conclusions

我们提出了一种使用 Lanczos tau 离散化作为代理来近似 DDAE 系统 (1) 的 H^2-范数的方法。我们证明，在有限强 H^2-范数的假设下，该方法是可靠的（定理 3.3 ）。此外，我们还在合理假设下证明了收敛性；据我们所知，即使在限制性更强的滞后型系统情形下，这一结果也是新的（定理 3.7）。对于单时滞系统的基于 Legendre 的离散化这一特定情形，我们严格证明了稳定性保持（定理 3.8）及其他要求（推论 3.9）。 H^2-范数的收敛性建立在定理 3.6 所确立的传递函数收敛性之上。

在第 4 节中，我们推导出了离散系统的 H^2-范数平方关于系统矩阵和时滞的梯度解析表达式。这些表达式与 H^2-范数一起计算时，所需的计算成本略高于单独计算 H^2-范数的两倍。因此，我们能够高效地综合 H^2-最优定阶控制器和稳定近似模型。在第 4.2 小节中，我们通过复现三个已知的滞后型系统示例以及两个涉及中立项的新示例对此进行了说明。

最后，我们讨论了在离散化中使用样条函数代替单个多项式。我们看到，这往往可以简化理论；并且当使用基于勒让德基的样条函数时，可以证明具有多个时滞的时滞微分代数方程的稳定性保持（定理5.1）和收敛性（推论5.2）。

尽管本文没有对此进行明确处理——因为我们不知道定理2.1和定理2.3是否存在任何类似结果——但通过将$\sum_{k=0}^{m} A_k[\varepsilon_{-\tau_k}]$ 替换为式（6）中的离散化泛函，可以直接将所介绍的方法扩展到更一般的半显式泛函微分代数方程。

致谢。 作者谨此感谢 Nick Dewaele 提供引理 3.5 的证明。

Appendix A. Intermediate steps to compute the derivatives

为便于阅读，记 $\gamma^2 = \|G_N\|_{H^2}^2$。从以下关系出发

$$\mathrm{d}\gamma^2 = \operatorname{tr}\big(Q\tfrac{\partial \ell_P}{\partial X}\,\mathrm{d}X\big) \quad \text{and} \quad \mathrm{d}\gamma^2 = \operatorname{tr}\Big(P\tfrac{\partial \ell_Q}{\partial X}\,\mathrm{d}X\Big),$$

利用第 4.1 小节中得到的结果，我们可以直接得到该表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\gamma^2 &= \operatorname{tr}\Big(Q(\mathrm{d}\tilde{A}\,P\mathcal{E}_{11}^T + \mathcal{E}_{11}P\,\mathrm{d}\tilde{A}^T)\Big) + \operatorname{tr}\Big(Q(\mathrm{d}\tilde{B}\,\tilde{B}^T + \tilde{B}\,\mathrm{d}\tilde{B}^T)\Big)\\ &\quad + \operatorname{tr}\Big(P(\mathrm{d}\tilde{C}^T\,\tilde{C} + \tilde{C}^T\,\mathrm{d}\tilde{C})\Big)\\ &= 2\operatorname{tr}\Big(P\mathcal{E}_{11}^T Q\,\mathrm{d}\tilde{A} + \tilde{B}^T Q\,\mathrm{d}\tilde{B} + P\tilde{C}^T\,\mathrm{d}\tilde{C}\Big).\end{aligned}$$

接下来，我们将微分表示为原始系统的形式，实际上就是重走一遍第3.1小节的步骤。根据舒尔补

公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{A} &= \mathrm{d}\mathcal{A}_{11} - \mathrm{d}\mathcal{A}_{12}\,\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_{22}\,\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21} - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_{21}\,,\\
\mathrm{d}\tilde{B} &= \mathrm{d}\mathcal{B}_1 - \mathrm{d}\mathcal{A}_{12}\,\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{B}_2 + \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_{22}\,\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{B}_2 - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{B}_2\,, \quad \text{and}\\
\mathrm{d}\tilde{C} &= \mathrm{d}\mathcal{C}_1 - \mathrm{d}\mathcal{C}_2\,\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21} + \mathcal{C}_2\mathcal{A}_{22}^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_{22}\,\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21} - \mathcal{C}_2\mathcal{A}_{22}^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{A}_{21}\,.
\end{aligned}$$

对标准形式的构造过程求导，得到

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{A}_{11} & \mathrm{d}\mathcal{A}_{12} \\ \mathrm{d}\mathcal{A}_{21} & \mathrm{d}\mathcal{A}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\perp \\ U \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{A}_N \begin{pmatrix} V^\perp & V \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{B}_1 \\ \mathrm{d}\mathcal{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^\perp \\ U \end{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{B}_N\,, \quad \text{and}$$
$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{C}_1 & \mathrm{d}\mathcal{C}_2 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathcal{C}_N \begin{pmatrix} V^\perp & V \end{pmatrix}.$$

最后，离散化 (6) 使我们回到系统参数

$$\mathrm{d}\mathcal{A}_N = \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{m} \left(\mathrm{d}A_k\,[\varepsilon_{-\tau_k}] + A_k\,\mathrm{d}[\varepsilon_{-\tau_k}]\right) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ I_{nN} \end{pmatrix} \mathrm{d}[\mathcal{D}]\,,$$
$$\mathrm{d}\mathcal{B}_N = \begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathrm{d}B\,, \quad \text{and} \quad \mathrm{d}\mathcal{C}_N = \mathrm{d}C\,[\varepsilon_0],$$

其中 $\mathbf{d}[\varepsilon_{-\tau_k}] = -[\varepsilon_{-\tau_k}\mathcal{D}]\Big(\mathbf{d}\tau_k - \underline{\tfrac{\tau_k}{\tau_m}\mathbf{d}\tau_m}\Big)$ 和 $\mathbf{d}[\mathcal{D}] = -\underline{\tfrac{1}{\tau_m}\,[\mathcal{D}]}\,\mathbf{d}\tau_m$。

由此，我们可以分别推导出 $k < m$、$\mathbf{d}\tau_m$、$\mathbf{d}B$ 和 $\mathbf{d}C$ 时，$\mathbf{d}\gamma^2$ 关于 $\mathbf{d}A_k$、$\mathbf{d}\tau_k$ 的函数

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\gamma^2 &= 2\,\mathrm{tr}\Big([\varepsilon_{-\tau_k}]\big((V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P\mathcal{E}_{11}^T Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)\\
&\qquad - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{B}_2\tilde{B}^T Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)\\
&\qquad - (V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P\tilde{C}^T\mathcal{C}_2\mathcal{A}_{22}^{-1}U\big)\begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathrm{d}A_k\Big),\\
\mathrm{d}\gamma^2 &= -2\,\mathrm{tr}\Big(\big((V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P\mathcal{E}_{11}^T Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)\\
&\qquad - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{B}_2\tilde{B}^T Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)\\
&\qquad - (V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P\tilde{C}^T\mathcal{C}_2\mathcal{A}_{22}^{-1}U\big)\begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}A_k[\varepsilon_{-\tau_k}\mathcal{D}]\Big)\,\mathrm{d}\tau_k\,, \quad k < m,\\
\mathrm{d}\gamma^2 &= -2\,\mathrm{tr}\Big(\big((V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P\mathcal{E}_{11}^T Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)\\
&\qquad - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{B}_2\tilde{B}^T Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)\\
&\qquad - (V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P\tilde{C}^T\mathcal{C}_2\mathcal{A}_{22}^{-1}U\big)\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ I_{nN} \end{pmatrix}\tfrac{1}{\tau_m}[\mathcal{D}]\Big)\,\mathrm{d}\tau_m\\
&\qquad - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\tau_k}{\tau_m}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}\tau_k}\,\mathrm{d}\tau_m\,,\\
\mathrm{d}\gamma^2 &= 2\,\mathrm{tr}\Big(\tilde{B}^T Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)\begin{pmatrix} I_n \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathrm{d}B\Big), \quad \text{and}\\
\mathrm{d}\gamma^2 &= 2\,\mathrm{tr}\Big([\varepsilon_0](V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P\tilde{C}^T\,\mathrm{d}C\Big).
\end{aligned}$$

使用缩写 $Q_U = Q(U^\perp - \mathcal{A}_{12}\mathcal{A}_{22}^{-1}U)$、$P_V = (V^\perp - V\mathcal{A}_{22}^{-1}\mathcal{A}_{21})P$、$W_{\mathcal{A}} = V\mathcal{A}_{22}^{-1}U$ 和 $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = P_V\mathcal{E}_{11}^T Q_U - W_{\mathcal{A}}\mathcal{B}_N\tilde{B}^T Q_U - P_V\tilde{C}^T\mathcal{C}_N W_{\mathcal{A}}$，我们得到

更紧凑的

$$\mathrm{d}\gamma^2 = 2\,\mathrm{tr}\big([\varepsilon_{-\tau_k}]\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\left(\begin{smallmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)\mathrm{d}A_k\big),$$
$$\mathrm{d}\gamma^2 = -2\,\mathrm{tr}\big(\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\left(\begin{smallmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)A_k[\varepsilon_{-\tau_k}\mathcal{D}]\big)\,\mathrm{d}\tau_k\,, \quad k<m,$$
$$\mathrm{d}\gamma^2 = -2\,\mathrm{tr}\Big(\mathcal{D}_{\mathcal{S}}\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} \\ I_{nN}\end{smallmatrix}\right)\tfrac{1}{\tau_m}[\mathcal{D}]\Big)\,\mathrm{d}\tau_m - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\tau_k}{\tau_m}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}\tau_k}\,\mathrm{d}\tau_m\,,$$
$$\mathrm{d}\gamma^2 = 2\,\mathrm{tr}\Big(\tilde{B}^T Q_U\left(\begin{smallmatrix} I_n \\ \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)\mathrm{d}B\Big), \quad \text{and} \quad \mathrm{d}\gamma^2 = 2\,\mathrm{tr}\Big([\varepsilon_0]P_V\tilde{C}^T\,\mathrm{d}C\Big).$$

由 $\mathrm{d}f = \mathrm{tr}\big(Y^T\mathrm{d}X\big)$ 蕴含 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X} = Y$ 这一事实，我们得到第 4.1 小节的最终结果。

Appendix B. Full system matrices of the numerical examples

我们详细给出传入 H^2-范数优化程序的第 3.2 小节和第 4.2 小节中各示例的时滞微分代数方程表述。其中不包括例 4.2，因为在该例中，系统可按正文所写直接使用。

第 *3.2* 小节。 利用松弛变量 $x_3(t) = \dot{x}_1(t)$ 和 $x_4(t) = \dot{x}_2(t)$，我们得到

$$\left(\begin{smallmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ I_2 & \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\begin{smallmatrix} \left(\begin{smallmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 8\end{smallmatrix}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t) + \left(\begin{smallmatrix} \delta_{r_1}\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1\end{smallmatrix}\right) & \delta_{n_1}\left(\begin{smallmatrix} -1/5 & 1/10 \\ 0 & -1/10\end{smallmatrix}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t-1)$$
$$- \left(\begin{smallmatrix} \delta_{r_2} I_2 & \frac{1}{10}\delta_{n_2} I_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t-1.9) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0\end{smallmatrix}\right)v(t),$$
$$z(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t).$$

示例 *4.1.* 引入对应于开环系统中控制信号的松弛变量 x_4，使我们能够将参数保持为相互独立的矩阵元素，从而得到

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\begin{smallmatrix} -0.08 & -0.03 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.04 & -0.005 & 0 \\ -0.06 & -0.2 & -0.07 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & -1\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t)$$
$$+ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t-5) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{v}(t),$$
$$\mathbf{z}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t).$$

例 *4.2*。 与前一个例子一样，我们可以通过将控制信号引入为松弛变量 x_3，将待优化参数作为独立的矩阵元素保留，从而得到

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\nu^2 & -2\delta\nu & b \\ -k_p & 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_r & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t-\tau) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b \\ 0\end{smallmatrix}\right)v(t),$$
$$z(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t).$$

例 *4.4*。 这里我们添加代数方程 $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$，以捕捉中立项。控制信号作为 x_3 添加。由此得到

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_2 & p_1 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t-1) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{smallmatrix}\right)v(t),$$
$$z(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\mathbf{x}(t).$$

例 *4.5.* 我们从代数方程 $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ 和 $x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t)$ 中得到时滞导数和加速度。松弛变量 $x_4(t) =$

$\ddot{x}_1(t-\tau_1)+v_1(t)$ 和 $x_5(t) = \dot{x}_1(t-\tau_2) + v_2(t)$ 是测量值。综合起来可得

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1&-2\xi&0&p_1&p_2\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t-\tau_1)$$
$$+ \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t-\tau_2) + \begin{pmatrix} 0&0\\ 0&0\\ 0&0\\ 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}\mathbf{v}(t),$$
$$z(t) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t).$$

References

Beattie, C., and Gugercin, S. (2012), “与实现无关的 $\mathcal{H}_2$逼近”，载于第*51*届*IEEE*决策与控制会议论文集, 4953–8. Bernier, C., and Manitius, A. (1978), “关于与时滞微分方程相对应的 $R^n \times L^p$ 中的半群”，加拿大数学杂志 30/5: 897–914. Bernstein, S. (1912), “论用次数为´e ´e 的多项式对连续函数进行最佳逼近的阶”, *Acad´emie Royale de Belgique,M´emoires de la Classe des Sciences, Collection in-4º* 2nd ser., 4: 1–103. Birkhoff, G., and Varga, R. S. (1965), “适定柯西问题 I 的离散化误差”，数学与物理学杂志 44/1: 1–23. Boisvert, R. F., Lozier, D. W., and Olver, F. W. J. (2010) (编), *NIST* 数学函数手册 (纽约). Boyd, J. P. (2001),切比雪夫与傅里叶谱方法 (第2版，修订版，Mineola). Breda, D., Maset, S., and Vermiglio, R. (2005), “用于求解时滞微分方程特征根的伪谱微分方法”，*SIAM* 科学计算杂志 27/2: 482–95. —(2015), 线性时滞微分方程的稳定性：*MATLAB* 数值方法 (纽约). Byrnes, C. I., Spong, M. W., and Tarn, T. (1984), “一种利用多个复变量研究线性中立型时滞微分系统反馈稳定化的方法”，数学系统理论 17/1: 97–133. Conni, G., Naets, F., and Meerbergen, K. (2024), “用于时域模型降阶的 AAA 有理逼近”，应用数学快报 157: 109188. Fridman, E. (2002), “含时滞线性描述系统的稳定性：一种基于李雅普诺夫的方法”，数学分析与应用杂志 273/1: 24–44. Gomez, M. A., Egorov, A. V., et al. (2019), “单时滞系统的 $\mathcal{H}_2$ 范数优化及其在控制设计和模型近似中的应用”，*IEEE*自动控制汇刊 64/2: 804–11. Gomez, M. A., Jungers, R. M., and Michiels, W. (2020), “关于 m维凯莱-哈密顿定理及其在由时滞系统 $\mathcal{H}_2$ 范数分析引出的代数判定问题中的应用”，$Automatica$ 113: 108761. —(2022), “具有多个时滞的微分代数系统的强 $\mathcal{H}_2$ 范数：有限性判据、正则化与计算”，*IEEE*自动控制汇刊 67/1: 121–33.

Gugercin, S., Antoulas, A. C., and Beattie, C. (2008), “大规模线性动力系统的$\mathcal{H}_2$模型降阶”，*SIAM*矩阵分析与应用杂志 30/2: 609–38. Hager, W. W., and Zhang, H. (2006), “算法851：CG DESCENT，一种保证下降的共轭梯度法”，*ACM*数学软件汇刊 32/1: 113–37. Hale, J. K., and Verduyn̄ Lunel, S. M. (2002), “中立型泛函微分方程的强稳定化”，*IMA*数学控制与信息杂志 19/1: 5–23. Hammarling, S. J. (1982), “稳定半正定李雅普诺夫方程的数值解”，*IMA*数值分析杂志 2/3: 303–23. Ito, K. (1985), “泛函微分方程的 Legendre-tau 逼近 III：特征值逼近与一致稳定性”，载于分布参数系统，编者 F. Kappel, K. Kunisch, and W. Schappacher，191–212. Ito, K., and Kappel, F. (1992), “时滞系统的两类逼近格式”，数学进展 21/1: 93–137. Ito, K., and Teglas, R. (1986), “泛函微分方程的 Legendre–tau 逼近 ”，*SIAM* 控制与优化杂志 24/4: 737–59. Jarlebring, E., Vanbiervliet, J., and Michiels, W. (2011), “通过求解时滞Lyapunov方程刻画并计算时滞系统的 $\mathcal{H}_2$ 范数”，*IEEE*自动控制汇刊 56/4: 814–25. Lanczos, C. (1938), “经验函数与解析函数的三角插值”，数学与物理学杂志 17/1–4: 123–99. Magnus, J. R., and Neudecker, H. (1985), “矩阵微分学及其在简单积、Hadamard积和 Kronecker 积中的应用”，数学心理学杂志 29/4: 474–92. Mattenet, S. M., et al. (2022), “改进的有限性检验以及计算具有多个时滞的微分代数系统强 $\mathcal{H}_2$ 范数的系统化流程”，$Automatica$ 144: 110495. Michiels, W. (2011), “基于谱的稳定性分析以及由时滞微分代数方程描述的系统的稳定化”，*IET*控制理论与应用 5/16: 1829–42. Nocedal, J., and Wright, S. J. (2006), 数值优化 (第2版，纽约). Pontes Duff, I., Poussot-Vassal, C., and Seren, C. (2015), “与实现无关的单时滞动力学模型插值与 $\mathcal{H}_2$最优逼近”，载于第*54*届*IEEE*决策与控制会议论文集, 4662–7. —(2018), “通过输入/输出时滞结构化降阶模型实现$\mathcal{H}_2$最优模型近似”，系统与控制快报 117: 60–7. Provoost, E., and Michiels, W. (2024), “时滞系统的 Lanczos tau 框架：重新审视 Pad´e 逼近与配置法”，*SIAM*数值分析杂志 62/6: 2529–48. —(2025), “具有离散时滞的时滞系统的加速 H^2范数逼近”，$IFAC\text{-}PapersOnLine$ 59/13: 93–8. Ross, D. (1971), “基于二次准则的时滞系统控制器设计”，*IEEE*自动控制汇刊 16/6: 664–72.

Scholl, T. H., Hagenmeyer, V., 和 Gr¨oll, L.（2024a），“鲁棒型 Lyapunov–Krasovskii 泛函及其基于Legendre-tau的近似”，$IFAC\text{-}PapersOnLine$ 58/27：219–24。—（2024b），“时滞系统的常微分方程近似方案揭示了 Lyapunov–Krasovskii 泛函的哪些特征”，电气与电子工程师学会自动控制汇刊 69/7：4614–29。Schulze, P. 等（2018），“数据驱动的结构化实现”，线性代数及其应用 537：250–86。Stewart, G. W. 和 Sun, J.（1990），矩阵扰动理论 （波士顿）。Szeg″o, G.（1975），正交多项式 （第4版，普罗维登斯）。Tadmor, E.（1986年），“傅里叶和切比雪夫差分方法的指数精度”，*SIAM*数值分析杂志 23/1：1–10。Unger, B.（2020年），“时滞微分代数方程的适定性与实现理论”，博士论文（柏林工业大学）。Vanbiervliet, J., Michiels, W. 和 Jarlebring, E.（2011 年），“利用谱离散化优化设计时滞系统”，国际控制杂志 84/2：228–41。Vanbiervliet, J., Vandereycken, B. 等（2009），“用于鲁棒稳定性优化的平滑谱实部上确界”，*SIAM*优化杂志 20/1：156–71。Vanbiervliet, J., Verheyden, K. 等（2008），“一种用于时滞系统稳定化的非光滑优化方法”，*ESAIM*：控制、优化与变分法 14/3：478–93。Villafuerte, R., Mondi´e, S. 和 Garrido, R.（2013），“比例时滞控制器的调节：理论与实验”，电气与电子工程师学会控制系统技术汇刊 21/3：983–90。Wang, Z. 等（2017），“加速度-导数反馈对振荡器稳定性和Hopf分岔的时滞组合效应”，国际非线性力学杂志 94：392–99。Zhou, K., Doyle, J. C. 和 Glover, K.（1995），鲁棒与最优控制 （恩格尔伍德克利夫斯）。

Email address: evert.provoost@kuleuven.be, wim.michiels@kuleuven.be

KU Leuven, Department of Computer Science, NUMA Research Unit, B-3001 Leuven,Belgium