arXiv:2603.10803v1 [math.AC] 11 Mar 2026

ON 具有有限素因子性质的整环 Y

MOHAMED BENELMEKKI

Abstract. 若每个非零元素仅有有限个非相伴素因子，则称整环 D 为 *prime-divisor-finite domain*（PDF-整环）。若一个整环 D 是 *tightly prime-divisor-finite domain*（TPDF-整环），则它是 PDF-整环，且每个非零非单位元都至少有一个素因子。本文研究 TPDF-整环，探讨这类整环的一些基本性质，并考察 TPDF 性质在局部化、 $D + M$ 构造和多项式环等标准构造下的表现。

1. Introduction

因子分解理论研究整环中的元素如何分解为不可约元，以及这种分解与唯一分解相差多远。尽管唯一分解整环（UFD）提供了最强形式的控制，但许多整环并非唯一分解整环，却仍满足较弱的有限性或整除条件。理解这些介于其间的类别，是现代交换代数中的一个核心问题。

衡量分解复杂性的一种自然方式，是考察因子满足的有限性条件。若整环 D 中每个非零非单位元都只有有限多个相异的不可约因子（相差一个相伴元的因子视为相同） [15]，则称其为*IDF*-整环（不可约因子有限整环）。类似地，若 D 中每个非零非单位元都只有有限多个相异的素因子（相差一个相伴元的因子视为相同） [16]，则称其为*PDF*-整环（素因子有限整环）。这些条件排除了一个元素具有无限多个本质不同的不可约因子或素因子的可能性，从而对整环的整除结构施加了严格限制。

有限性条件限制了因子的数量，却不能保证因子的存在。因此，存在性条件也发挥着重要作用。按照 P.L. Clark [8]，的定义，若整环 D 中每个非零非单位元都存在一个不可约因子，则称其为 *Furstenberg* 整环 。进一步强化这一概念，若 D 中每个非零非单位元都存在一个素因子，则称其为强 *Furstenberg* 整环 。

将存在性条件与有限性条件结合，自然引出了紧素因子有限整环（TPDF-整环）的概念。TPDF-整环是同时也是 PDF-整环的强 Furstenberg 整环。等价地说，每个非零非单位元都有一个素因子，且在相伴关系意义下只有有限个素因子。TPDF-整环是 AP 整环的一个重要子类（参见命题 3.1），即其中每个不可约元都是素元的整环。它自然地推广了唯一分解整环这一类，同时在允许非唯一分解的情况下，仍对分解保持了强有力的结构控制。该性质在 [7]，中首次提出；在环上的希尔伯特不可约性定理的某个版本这一背景下，A. Bodin 等人将我们所称的 TPDF-整环称为“近唯一分解整环”。具体而言，该文证明了，在整环上的希尔伯特不可约性定理的某个版本中，近唯一分解整环满足互素 Schinzel 猜想。

本文旨在研究 TPDF-整环和 AP 整环。我们探讨它们的基本性质，并考察 TPDF性质在局部化、$D + M$ 构造和多项式环等标准构造下的表现。本文其余部分安排如下：第 2 节回顾必要的背景知识，并确立全文使用的符号。我们综述整环中有关分解性质的若干定义和结果，并将幺半群域作为研究中的核心工具。第 3 节引入

Date：2026年3月12日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 13A15, 13F15, 13E05, 13G05。*Key words and phrases.* IDF-整环，TPDF-整环，Furstenberg整环，AP-整环。

TPDF-整环并研究其基本性质。第 4 节考察 TPDF性质在 $D+M$ 构造和局部化下的表现。

2. Background

2.1. 一般记号。 我们分别用 $\mathbb{N}$、 $\mathbb{Z}$、 $\mathbb{Q}$、 $\mathbb{R}$和 $\mathbb{C}$ 表示正整数、整数、有理数、实数和复数。集合 $\mathbb{Z}_+$ 和 $\mathbb{Q}_+$分别表示非负整数和有理数的幺半群。本文中，所有幺半群均假设为具有单位元的交换、可消、无挠半群。

2.2. 整环中的分解。 设 M 为一个幺半群，并采用乘法记号。若存在 $c\in M$ 使得 $bc=1$，则称元素 $b\in M$ 为单位。我们用 $U(M)$表示 M的单位元群，并称 M是约化的，如果 $U(M)$是平凡群。当 M是整环 D的乘法幺半群时， M 的单位元恰好是 D的单位。

设 D 为一个整环。设 $a,b\in D$，如果存在 $c\in D$ 使得 $b=ac$，则称 b 被 a 整除，或称 a 整除 b ；在这种情况下，我们可以写作 $a|b$。如果 $a|b$且 $b|a$，则称 a 和 b 相伴；记作 $a\sim b$。如果对于某个 $b,c\in D$， $a=bc$ 蕴含 $b\in U(D)$或 $c\in U(D)$，则称非单位元 $a\in D$ 为原子（或不可约元）。如果对于所有 $a,b\in D$， $p\mid ab$蕴含 $p\mid a$ 或 $p\mid b$ ，则称非单位元 $p\in D$为素元。我们将 M 的原子集合（分别地，素元集合）记为$\mathscr{A}(D)$（分别地， $\mathscr{P}(D)$）。

根据 Cohn [9], ，如果整环 D 中的每个非单位元 $a\in D$ 都能表示为 D中有限个原子的乘积，则称其为原子性整环。若原子整环 D 满足：对于每个非零非单位元 $a\in D$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得只要 $a=a_1\cdots a_n$是 a 的一个原子分解，就有 $n\le n_0$ [1]，则称其为有界分解整环（BFD）。如果 D 中的每个非零非单位元都只有有限个（分别为非空有限个）非相伴不可约因子 [14,15]，则称 D 为*IDF*-整环（分别为*TIDF*-整环）。如果每个非零元素都只有有限个非相伴素因子，则称整环 D 为素因子有限整环（PDF-整环）；按照 [16], 的术语，也称为 GD(1)。如果 D 中的每个不可约元都是素元，则称整环 D 为*AP*-整环。没有原子的整环称为反物质整环 [10],，它显然是 AP-整环。

沿用 P.L. Clark [8], 的说法，若整环 D 中的每个非零非单位元都至少有一个不可约因子属于 D，则称 D 为 Furstenberg 整环。受上述定义启发，我们引入以下更强的版本，并据此定义 TPDF-整环。

定义 2.1。

- 若整环 D 中的每个非零非单位元都存在一个素因子，则称该整环为强 Furstenberg 整环。
- 强 *Furstenberg PDF*-整环称为紧 PDF 整环（TPDF-整环）。

请注意，在 [7] 中，作者用“近唯一分解整环”一词指代“TPDF-整环”。

2.3. 多项式的内容与 PSP 整环。 设 D 是一个商域为 K的整环，并令 $\mathscr{F}(D)$表示 D的非零分式理想集合。对于 $A\in\mathscr{F}(D)$，令 A^{-1}表示分式理想

$$(D:_K A)=\{x\in K\mid xA\subseteq D\}.$$

设 $f\in K[T_1,\dots,T_r]$， f的内容记为 A_f，它是由 f的系数生成的 D的分式理想。对于 $0\neq f\in D[T_1,\dots,T_r]$，若多项式 f的系数在 D中没有非平凡公因子，则称其为（在 D上的）本原多项式。若多项式 f 满足 $A_f^{-1}=D$，则称其为超本原多项式。设 D的一个有限生成理想为 I。根据 [5]，若 I 不包含于 D的任何真主理想中，则称其为本原；若 I 满足 $I^{-1}=D$，则称其为超本原。若每个本原多项式 $f\in D[T]$ 都是超本原的，则称整环 D 为*PSP*-整环。注意， D 是 PSP-整环，当且仅当 D 的每个本原理想都是超本原的，参见命题 1. [5, 2]。众所周知，每个最大公因子整环都是 PSP-整环，而每个 PSP-整环又都是 AP-整环 [3, 命题 3.2]。

2.4. **幺半群域**。设 D 为一个整环， S 为一个交换消去无挠幺半群，运算采用加法记号。用 $\prec$表示 S 上的一个全序。 S 在 D 上的幺半群域定义为 $D[S] = \{\sum_i a_i X^{s_i} | a_i \in D$ 和 $s_i \in S\}$。注意， $D[S]$ 是一个整环，并且每个非零元素 $f \in D[S]$ 都有如下形式的唯一表示

$$f = a_1 X^{s_1} + a_2 X^{s_2} + \cdots + a_n X^{s_n},$$

其中 $n \in \mathbb{Z}_+$、 $0 \neq a_i \in D$和 $s_i \in S(i = 1$、.....、 $n)$ 满足 $s_1 \prec s_2 \prec \cdots \prec s_n$。子集 Supp($f$) $= \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$of S 称为 f 的支撑。元素 $s_0 :=$ ord f 称为 f 的阶。 f 的常数项记作 f(0)。元素 s_n（分别为 a_n）称为 f的次数（分别为首项系数），记作 deg f（分别为 lc(f)）。注意， $D[S]$ 的单位是单项式 aX^s，其中 $a \in D$ 和 $s \in S$ 都是单位 [13, 推论 4.2]。关于幺半群域的优秀参考资料见 [12]。

3. Strong Furstenberg PDF-domains

回顾一下，如果整环 D 中的每个非零非单位元都有至少一个素因子，则称其为强 *Furstenberg* 整环。在 Prin(D) 的意义下， D的非零主整理想集合 D 是强 Furstenberg 整环，当且仅当 D 的每个非零真主理想都包含于至少一个素主理想中。显然，强 Furstenberg 整环也是 Furstenberg 整环。然而，Furstenberg 整环未必是强 Furstenberg 整环。例如，考虑一个不是唯一分解整环的原子整环（例如 $K[X^2, X^3]$ ，其中 K 是一个域）；因此，原子整环也未必是强 Furstenberg 整环。

命题 3.1. 整环 D 是强 *Furstenberg* 整环，当且仅当它是 *Furstenberg AP*-整环。

证明。 假设 D 是强 Furstenberg 整环。显然， D 是 Furstenberg 整环。另一方面，设 a是 D中的一个不可约元。由于 D 是强 Furstenberg 整环， a 在 D中有一个素因子 p 。但 a 是 D中的不可约元，因此 a 和 p 在 D中相伴，故 a 在 D中是素元。因此， D 是 AP-整环。反向结论显然成立。□

显然，唯一分解整环是强 Furstenberg 整环。反过来，强 Furstenberg 整环不一定是唯一分解整环。例如，固定一个素数，并令 $D = \mathbb{Z}_{(p)} + T\mathbb{C}[[T]]$。那么， p是 D的唯一素元，且 D 的每个非单位元都被 p整除。因此， D 是强 Furstenberg 整环。然而， D 不具有原子性，因而不是唯一分解整环，见 [14,例 4.4 和 6.3]。一般而言，这些条件之间有如下关系。

推论 3.2. 整环 D 是唯一分解整环，当且仅当它是原子强 *Furstenberg* 整环。

证明. 结论显然成立，因为强 Furstenberg 整环是 AP-整环 . □

下一个命题考察强 Furstenberg 性质从整环到其多项式环的上升。

命题 3.3. 设 D 是商域为 K的整环。那么，以下条件等价。

(1) $D[T]$ 是强 *Furstenberg* 整环。*(2)* D 是强 *Furstenberg* 整环，并且 D 上的每个非常数本原多项式在 $D[T]$中都有素因子分解。*(3)* D 是强 *Furstenberg* 整环， D 是 *PSP*-整环，并且 $D[T]$ 中的每个非常数不可约多项式在 $K[T]$中都是不可约元。

证明。 (1)⇒(2) 假设 D 是强 Furstenberg 整环。显然， D 是强 Furstenberg 整环。设 $f \in D[T] \setminus D$是 D 上的本原多项式。由于 f 是本原的， D 中的非单位不能出现在 f 在 $D[T]$ 中的分解中。因此，根据次数论证， f 在 $D[T]$中具有原子分解，即 $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$，其中每个 f_i在 $D[T]$中都是不可约元。根据命题 3.1，对于每个 $i = 1$、.....、 n，多项式 f_i 在 $D[T]$中是素元。因此， f 在 $D[T]$中具有素因子分解。

(2)⇒(3) 假设 D 是一个强 Furstenberg 整环，且每个 D 上的非恒定本原多项式在 $D[T]$ 中都有素因子分解。下面证明 D 是一个 PSP-整环。因此，

令 f 为 D 上的本原多项式。我们可以假设 f 不是常数。则 f 在 $D[T]$ 中有素因子分解，设为 $f=\prod_{i=1}^{n} f_i$，其中每个 f_i 都是 $D[T]$ 中的素元。因此，由[19, 定理 A] 可知，每个 f_i 在 D 上都是超本原的。因此，由 [19, 定理 F] 可知， f 是超本原的，因为它是有限个超本原多项式的乘积。因此， D 是一个 PSP-整环。现在令 f 为 $D[T]$ 中的非恒定不可约多项式。则 f 在 D 上是本原的，因此它在 $D[T]$ 中有素因子分解。由于 f 是不可约的，这个分解必为平凡分解，因此 f 本身是 $D[T]$ 中的素元。于是，由 [19,定理 A]可知， f 在 $K[T]$ 中是不可约的。

(3)⇒(1) 设 f 是 $D[T]$中的一个非零非单位元。由于 D 是强 Furstenberg 整环，我们不妨设 f 在 $D[T]$中不是常数。若 f 在 D上不是本原的，则存在一个非单位$a\in D$，使得对于某个 $f'\in D[T]$, 有 $f=af'$。由于 D是强 Furstenberg 整环， a有一个素因子 $b\in D$。但是，容易看出， b也是 f 的素因子，因而也是 $D[T]$中 f的素因子。因此，在这种情况下， f在 $D[T]$中至少有一个素因子。否则， f是本原的。根据次数论证， f在 $D[T]$中有一个原子分解，即 $f=\prod_{i=1}^{n} f_i$，其中每个 $f_i\in D[T]\setminus D$都是不可约元。特别地，每个 f_i 都是本原的，因此也是超本原的，因为 D 是 PSP-整环。另一方面，根据假设，每个 f_i 在 $K[T]$ 中都是不可约元。于是，由 [19, 定理 A]可知，每个 f_i 都是 $D[T]$中的素元。特别地， f在 $D[T]$中有一个素因子。因此， $D[T]$ 是强 Furstenberg 整环。□

注 3.4。 上一命题中等价关系 $(1)\Leftrightarrow(3)$ 的另一种证明可由命题 *3.1* 以及 *[17,* 命题*]* 和 *[14,* 命题 *4.7]*推出。

回顾一下，若一个整环 D 的每个非零元素都只有有限多个非相伴素因子，则称其为 PDF-整环（或 GD(1)）。注意， D 是 PDF-整环，当且仅当 D 的每个非零主理想都只包含于有限多个 D的主素理想中。显然，唯一分解整环是 IDF-整环，而 IDF-整环是 PDF-幺半群。沿用 [16], 的说法，对于 $D[T]$ 的无常数理想 I（即 $I\cap D=\{0\}$），若 D中只有有限多个素元在 $D[T]/I$中变为单位，则称 D为 *I*-稳健 。若对于每个无常数理想 I， D 都是 *I*-稳健的，则称 D 为稳健 。整环 D 是稳健的，当且仅当它是 GD(1)（即 PDF-整环）整环，见 [4, 命题 1.3]。由此，根据 [16, 命题 1.5] 可知，BFD 也是 PDF-整环。另一方面，D 是稳健的，当且仅当 $D[T]$ 是稳健的，见 [16, 命题 1.4]。因此，D 是 PDF-整环，当且仅当$D[T]$ 是 PDF-整环。显然，这一结论对任意一族不定元 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 也成立。因此，我们列出以下引理，以供后文引用。

引理 3.5. 设 D 是一个整环。以下条件等价 .

(1) D 是 *PDF*-整环。*(2)* $D[T]$ 是 *PDF*-整环。*(3)* 对于每个非空的不定元集合 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$， $D[\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}]$ 都是 *PDF*-整环。

回顾一下，若整环 D 是强 Furstenberg PDF 整环，则称其为 TPDF-整环；等价地， D 的每个非零非单位都有一个非空有限的非相伴素因子集合，该集合属于 D。用 Prin(*D*) 表示， D 是 TPDF-整环，当且仅当 D 的每个非零真主理想仅包含于 D 的一个非空有限主素理想集合中。

推论 3.6. 对于整环 D, 以下条件等价。

(1) D 是 *TPDF*-整环。*(2)* D 是强 *Furstenberg IDF*整环。*(3)* D 是 *AP TIDF*-整环。

证明。 (1) ⇔(2) 由 TPDF-整环的定义可知。(2) ⇔(3) 这是命题 3.1 的直接推论。 □

沿用 [18], , 我们称整环 D 是阿基米德 的，如果对于每个非单位 $a\in D$，都有 $\cap_{n\in\mathbb{N}}\ a^nD=(0)$。

推论 3.7。 对于整环 D, 以下条件等价。

(1) D 是原子*TPDF*整环。*(2)* D 是唯一分解整环。*(3)* D 是阿基米德*TPDF*整环。

(4) D 是*TPDF*整环，且对于每个素元 $p \in D$，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} p^n D = (0)$。

证明。(1) $\Leftrightarrow$ (2) 由命题 3.1 和推论 3.2 得出，而蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 则显然成立。

(4) $\Rightarrow$(2) 由于 D 是 TPDF-整环，推论 3.6 表明 D 是 AP TIDF-整环。根据假设，条件 (d) [14, 推论 4.6] 在 AP-整环 D中成立，因此 D 是唯一分解整环。□

下面的推论考察 TPDF 性质向多项式环的上升。它可直接由命题 3.3 和引理 3.5 得出。

推论 3.8。设 D 是商域为 K的整环。以下条件等价。

(1) $D[T]$ 是 *TPDF*-整环。*(2)* D 是 *TPDF*-整环，且 D 上每个非恒定本原多项式在 $D[T]$ 中都有素因子分解。*(3)* D 是 *TPDF*-整环，D 是 *PSP*-整环，且 $D[T]$ 中每个非恒定不可约多项式在 $K[T]$ 中都是不可约元。

4. The $D+M$ construction and localisation

本节旨在考察 AP 和 TPDF 性质在 $D+M$ 构造与局部化下的表现。设 T是一个整环，可写成 $T = K + M$的形式，其中 K是 T的子域，且 M是 T的非零极大理想。设 D是 K和 $R = D + M$ 的子环。本节首先从 $D + M$ 构造的角度考察 AP 整环。

引理 4.1。设 T是一个形如 $K + M$的整环，其中 K 是 T的子域，且 M是 T的非零极大理想。设 D是 K和 $R = D + M$的子环。则以下结论成立。

(1) $\mathscr{A}(R) \cap D = \mathscr{A}(D)$。*(2)* $\mathscr{P}(R) \cap D = \mathscr{P}(D)$。*(3)* 对任意理想 $P \subseteq T$以及任意满足 $P \cap R = xR$的 $x \in R$，$P = xT$。

证明。（1）设 $d \in \mathscr{A}(R) \cap D$使得 $d = d_1d_2$对于某些 $d_1, d_2 \in D$。由于 d 是 R中的不可约元，因此 $d_1 \in U(R)$或 $d_2 \in U(R)$。由于 $U(D) = D \cap U(R)$，可知 $d_1 \in U(D)$或 $d_2 \in U(D)$，从而 $d \in \mathscr{A}(D)$。因此 $\mathscr{A}(R) \cap D \subseteq \mathscr{A}(D)$。反之，设 $d \in \mathscr{A}(D)$使得$d = (d_1 + m_1)(d_2 + m_2)$对某些 $d_i \in D$ 和 $m_i \in M$，$i = 1, 2$成立。注意到 $d_1 \neq 0$ 和 $d_2 \neq 0$，否则 $d \in M$。于是，由等式 $d = (d_1 + m_1)(d_2 + m_2)$可得 $d = d_1d_2$ 且$1 = (1 + d_1^{-1}m_1)(1 + d_2^{-1}m_2)$。特别地，元素 $(1 + d_1^{-1}m_1)$和 $(1 + d_2^{-1}m_2)$是 R的单位。由于 d 是 D中的不可约元，因此 $d_1 \in U(D)$或 $d_2 \in U(D)$。例如，设 $d_1 \in U(D)$。那么 $(d_1 + m_1) = d_1(1 + d_1^{-1}m_1) \in U(R)$，因此 $d \in \mathscr{A}(R) \cap D$。于是 $\mathscr{A}(D) \subseteq \mathscr{A}(R) \cap D$。因此，$\mathscr{A}(D) = \mathscr{A}(R) \cap D$。

(2) 设 $p \in \mathscr{P}(R) \cap D$，使得 $d_0p = d_1d_2$，其中 d_0、d_1、$d_2 \in D$。由于 p 是 R中的素元，p 整除 d_1 或 d_2（在 R中）。例如，设 $d_1 = p(d + m)$，其中 $d \in D$ 和 $m \in M$。那么 $d_1 = pd$，因此 p 在 D中整除 d_1。所以，p 是 D中的素元。反过来，假设 p 是 D 中的素元，且 $r_0p = r_1r_2$，其中 $r_i = d_i + m_i$、$d_i \in D$，并且 $m_i \in M$、$i = 0$，1，2。若 $d_i = 0$ 对 $i = 1$ 或 $i = 2$成立，则 $r_i = p(p^{-1}m_i)$且 $p^{-1}m_i \in M \subseteq R$，此时结论成立。否则，$d_0p = d_1d_2$，并且由 p 是 D中的素元可知，p 在 D 中整除d_1 或 d_2。例如，设 $d_1 = pd$，其中某个 $d \in D$。因此$r_1 = pr_1'$，其中 $r_1' := (d + p^{-1}m_1) \in R$。所以 p 是 R中的素元。

(3) 设 P 是 T 和 $x \in R$ 的理想，且满足 $P \cap R = xR$。我们有 $x \in P \cap R$，这意味着$x \in P$。由于 P是 T的理想，因此 $xT \subseteq P$。反过来，设 $y = k + m \in P$，其中 $k \in K$且 $m \in M$。若 $k = 0$，则 $y \in M \subseteq R$。因此 $y \in P \cap R$，从而 $y \in xR$。由于 $xR \subseteq xT$，$y \in xT$。否则，$y = k\,(1 + m')$，其中 $m' = k^{-1}m$。显然，$1 + m' \in P \cap R$，于是 $1 + m' \in xR$。由于 $xR \subseteq xT$，$1 + m' \in xT$。由于 xT 是 T 的理想，$k\,(1 + m') = y \in xT$。因此 $P \subseteq xT$。□

我们首先考虑 D 不是域的情形。

定理 4.2. 设 T 是一个形如 $K+M$ 的整环，其中 K 是 T 的子域，且 M 是 T 的非零极大理想。设 D 是 K 的子环，且 $R=D+M$。假设 D 不是域。则以下结论成立。

(1) 若 D 和 T 是 *AP* 整环，则 R 是 *AP*-整环。*(2)* 若 R 是 *AP*-整环，则 D 是 *AP*-整环。
(3) 若 R 是 *AP*-整环，且 $\mathscr{A}(T)\cap M$ 中的每个元素都是 T 中的素元，则 T 是 *AP*-整环。

证明。(1) 假设 D 和 T 是 AP 整环。设 R 中的 x 是一个不可约元。注意，R 中没有元素是不可约元。事实上，对于任意非零非单位 $d\in D$ 和任意 $m\in M$，都有 $m=d(d^{-1}m)$，其中 $d^{-1}m\in M$。因此，存在 $d\in D^*$ 和 $m\in M$，使得 $x=d(1+m)$。由于 x 在 R 中是不可约元，故 $d\in U(R)$ 或 $1+m\in U(R)$。若 $d\in U(R)$，则 $1+m$ 在 R 中是不可约元，因此根据引理 1.5(2)]，它在 T 中也是不可约元。由于 T 是 AP-整环，$1+m$ 是 T 中的素元。由此，根据引理 1.5(3)] 可得 $1+m$，因此 x 是 R 中的素元。否则，d 是不可约元 R，因此根据引理 4.1(1)，它在 D 中是不可约元。由于 D 是 AP-整环，d 是 D 中的素元，因此根据引理 4.1(2)，它也是 R 中的素元。因此，x 是 R 中的素元。由此，R 是 AP-整环。

(2) 假设 R 是一个 AP-整环。设 d 是 D中的一个不可约元。由引理 4.1(1)，d 是 R中的不可约元。由于 R 是一个 AP-整环，d 是 R中的素元。由此，根据引理 4.1(2)，d 是 D中的素元。因此，D 是一个 AP-整环。

(3) 假设 R 是一个 AP-整环，并且 $\mathscr{A}(T)\cap M$ 中的每个元素都是 T中的素元。设 $x=k+m$是 T中的一个不可约元，其中 $k\in K$且 $m\in M$。若 $k=0$，则 $x\in M\cap\mathscr{A}(T)$。因此，根据假设，x是 T 中的一个素元。否则，$k\neq 0$，从而可得 $x=k(1+m')$，其中 $m':=k^{-1}m\in M$。由于 $k\in U(T)$，$1+m'$是 T中的不可约元。于是，根据 [11, 引理 1.5(2)],$1+m'$ 是 R中的不可约元。由于 R 是一个 AP-整环，$1+m'$ 是 R中的素元。因此，$(1+m')R$ 是 R的一个素理想。由 [11, 定理 1.3], 可知，要么$(1+m')R=R\cap P$，其中 P是 T的一个素理想；要么$(1+m')R=P_0+M$，其中 P_0 是 D的一个素理想。若后一种情况成立，则会产生矛盾。事实上，等式$(1+m')R=P_0+M$ 意味着 $1+m'\in P_0+M$。于是 $1\in P_0$，因此 $P_0=D$，这不可能，因为 P_0 是 D的一个素理想。因此，对于 T的某个素理想 P，有$(1+m')R=R\cap P$。于是，引理 4.1(3)蕴含 $P=(1+m')T$，从而$(1+m')$是 T中的一个素元。因此，x 是 T中的素元。由此，T 是一个 AP-整环。□

推论 4.3. 设 D 是一个商域为 K 的整环，且 L 是 K 的域扩张。设 $R=D+XL[X]$ 且 $R'=D+XL[\![X]\!]$。假设 D 不是域。那么 R（分别地，R'）是 *AP*-整环，当且仅当 D 是 *AP*-整环。

证明。 正向蕴含由定理 4.2(2) 得出。反向蕴含由定理 4.2(1) 立即得到，因为 $T=L[X]$（分别地，$T'=L[\![X]\!]$）是唯一分解整环，因此也是 AP-整环。□

注 4.4。 若 D 是域，定理 *4.2(1)* 可能不成立。为说明这一点，设 $T=\mathbb{C}[X]$ 且 $R=\mathbb{R}+X\mathbb{C}[X]$。注意到 T 是唯一分解整环，因此也是 *AP*-整环。另一方面，D 显然是 *AP*-整环。然而，由于 $-(iX)^2=X^2$，显然 $iX\in R$ 在 R 中是不可约元但不是素元。因此，R 不是 *AP*-整环。

定理 4.5。 设 T是形如 $K+M$ 的整环，其中 K是 T 的子域，且 M是 T 的非零极大理想。设 D是 K 的子域，且 $R=D+M$。那么，R是 *AP*-整环，当且仅当 T是 *AP*-整环，并且 $\mathscr{A}(R)\cap M$ 的每个元素都是 R 中的素元。

证明。 假设 R 是 AP-整环。显然，$\mathscr{A}(R)\cap M$ 的每个元素都是 R 中的素元。设 $x=k+m$ 是 T 中的一个不可约元，其中 $k\in K$ 且 $m\in M^*$。分两种情况讨论:

情况 *1*: $k=0$。那么 $x=m\in R$。容易看出，x 在 R 中是不可约元。由于 R 是 AP-整环，x是 R 中的素元，因此 xR 是 R 的素理想。由 [11, 定理 1.3],，要么 $xR=R\cap P$，其中 P 是 T 的素理想；要么 $xR=P_0+M$，其中 P_0是 D 的素理想。在第一种情况下，由引理 4.1(3)可得 $P=xT$，因此 x 是 T 的素元。在后一种情况下，由于 D 是域，$P_0=(0)$，所以 $M=xR$ 是 R 的素理想。由于 $x\in M$，$M\subseteq xR\subseteq xT\subseteq M$。因此，$xT=M$。由于 M是 T 的理想，可知 xT是 T 的素理想，因此 x是 T 的素元。

情形 *2*: $k\neq 0$。于是 $x=k(1+k^{-1}m)$。显然，$m':=k^{-1}m\in M$。由于 $k\in U(T)$，$1+m'$ 在 T 中是不可约元。于是，根据 [11, 引理 1.5(1)]，$1+m'$ 在 R 中是不可约元。由于 R 是一个

AP-整环， $1+m'$ 是 R 中的素元。于是 $(1+m')R$ 是 R 的素理想。根据 [11, 定理 1.3], ，要么 $(1+m')R = R\cap P$，其中 P 是 T 的素理想；要么 $(1+m')R = P_0 + M$，其中 P_0 是 D 的素理想。第一种情形根据引理 4.1(3)推出 $P = (1+m')T$，继而 $(1+m')$（因此 x）是 T 中的素元。第二种情形不可能；事实上，由于 D 是一个域， $P_0 = (0)$，因此 $M = (1+m')R$ 是 R 的素理想。特别地， $1 = (1+m') - m' \in M$，由此得到 $M = R$，这与假设矛盾。

总之， x 是 T中的素元。因此， T 是一个 AP-整环。

反过来，假设 T是一个 AP-整环，并且 $\mathscr{A}$（R）的元素 $\cap M$ 在 R中是素元。设x 是 R中的一个不可约元。若 $x = m \in M$，则根据假设， x 是 R 中的素元。否则，如前所见，在乘以一个 $d \in D^* \subseteq U$（R）后， x可写成 $1+m$的形式，其中 $m \in M^*$。此外， $1+m$ 在 T中是不可约元，因为它在 R中不可约，见引理 1.5(2)]。因此，由于T是一个 AP-整环， $1+m$ 是 T中的素元。由引理 1.5(3)] 可得 $1+m$，从而 x是 R中的素元。□

例 *4.6.* 令 T 表示 *Puiseux* 幺半群 $\mathbb{C}[\mathbb{Q}_+]$在 $\mathbb{C}$上的幺半群代数 $\mathbb{Q}_+$ 。令$M = \{f \in T:\ f(0) = 0\}$ 为 T 中由所有常数项为零（即 *ord* $f > 0$）的元素组成的理想。容易验证， M是 T的一个极大理想，且 $T = \mathbb{C} + M$。考虑 T的子环 $R = \mathbb{Q} + M$。对每个 $f \in M$，在 R中， X^s 整除 f，其中 $s = ord_2{}^f \in \mathbb{Q}_+$。因此， M 中没有元素在 R中是不可约元，进而 $\mathscr{A}(R) \cap M = \emptyset$。另一方面， T是一个反物质整环（参见 *[6,* 推论 *3]*），因此是一个 *AP*-整环。由此，根据定理 *4.5*， R 是一个 *AP*-整环。注意， R 不是反物质整环。这可由观察到 R包含不可约元 $f(X) = X - 2$验证。

接下来，我们考察 $D + M$ 构造下的（强）Furstenberg、PDF 和 TPDF 性质。回顾一下，TPDF-整环是 AP TIDF-整环（见推论 3.6）。

定理 4.7. 设 T是形如 $K + M$的整环，其中 K 是 T的子域，且 M是 T的非零极大理想。设 D 是 K的子环，且 $R = D + M$。假设 D不是域。则下列结论成立。

(1) R 是 *Furstenberg* 整环，当且仅当 D 是 *Furstenberg* 整环，且每个形如 $1+m$的非单位（其中 $m \in M$）在 R中至少有一个不可约因子。*(2)* 若 R 是（强）*Furstenberg* 整环，则 D 是（强）*Furstenberg* 整环。*(3)* 若 D 和 T 是（强）*Furstenberg* 整环，则 R 是（强）*Furstenberg* 整环。*(4)* 若 R 是 *PDF*-整环，则 $\mathscr{P}(D)$ 模相伴元关系有限。*(5)* 若 T 是 *PDF*-整环，且 $\mathscr{P}(D)$ 模相伴元关系有限，则 R 是 *PDF*-整环。*(6)* 若 R 是 *TPDF*-整环，则 D 是 *TPDF*-整环，且 $\mathscr{P}(D)$模相伴元关系有限。*(7)* 若 T 和 D 是 *TPDF*-整环，且 $\mathscr{P}(D)$ 模相伴元关系（非空）有限，则 R 是 *TPDF*-整环。

证明。 (1) 假设 R 是一个 Furstenberg 整环。令 d 为 D中的非零非单位元。由于 d 是 R中的非单位，它有一个不可约因子 r_1 属于 R。于是存在 $r_2 \in R$ 使得$d = r_1r_2$。设 $r_i = d_i + m_i$，其中 $d_i \in D$ 且 $m_i \in M$, $i = 1,\ 2$。注意 $d_i \neq 0$，否则$d \in M$。因此 $d = d_1d_2$，从而$(1 + d_1^{-1}m_1),\ (1 + d_2^{-1}m_2) \in U($ $R)$。由于 r_1是 R中的不可约元，且$r_1 = d_1(1 + d_1^{-1}m_1)$，由$(1 + d_1^{-1}m_1) \in U(R)$可知 $d_1 \in \mathscr{A}(R) \cap D$。于是由引理 4.1(1)可得， d_1 是 D中 d 的一个不可约因子。因此， D 是一个 Furstenberg 整环。第二个条件显然成立。

反之，设 D 是一个 Furstenberg 整环，并且形如 $1+m$ 的每个非单位元（其中 $m \in M$）在 R 中至少有一个不可约因子。设 $x = d + m$ 是 R 中的一个非零非单位元，其中 $d \in D$ 且 $m \in M$。若 $d \neq 0$, 则 $x = d(1+m')$，其中 $m' = d^{-1}m \in M$。根据假设，元素 $(1+m')$，从而 x，在 R 中至少有一个不可约因子。否则，设 l 是 D 中的一个非零非单位元，则 $x = l(l^{-1}m)$，其中 $l^{-1}m \in M$。由于 D 是一个 Furstenberg 整环， l 在 D 中有一个因子 $l_1 \in \mathscr{A}(D)$。由引理 4.1 可知， $l_1 \in \mathscr{A}(R) \cap D$，因此 l_1 是 x 在 R 中的一个不可约因子。

(2) 由 (1) 部分、命题 3.1 和定理 4.2(2) 得出。

（3）假设 D 与 T 是 Furstenberg 整环。由第（1）部分可知，只需证明每一个形如 $1+m$ 的非单位（其中 $m \in M$）在 R 中至少有一个不可约因子。设 $m \in M$ 使得

使得 $1+m$ 是 R 的一个非单位。由于 T 是 Furstenberg 整环，$1+m$ 在 T 中有一个不可约因子 t_1。注意，t_1（以及 $1+m$ 在 T 中的每一个因子）都具有形式 $u_1(1+m_1)$，其中 $u_1 \in K^*$ 且 $m_1 \in M$。因此，存在 $t_2 = u_2(1+m_2) \in R$，使得 $1+m = u_1(1+m_1)u_2(1+m_2)$。从而 $1 = u_1u_2$ 且 $1+m = (1+m_1)(1+m_2)$。由于 $(1+m_1)$ 在 T 中是不可约元，由 [11, 引理 1.5(1)] 可知，它在 R 中也是不可约元。因此，$1+m$ 在 R 中有一个不可约因子，从而 R 是 Furstenberg 整环。

如果 D 和 T 是强 Furstenberg 整环，那么由命题 3.1 和定理 4.2(1)可知，R 是一个 AP-整环。因此，根据第一部分和命题 3.1，D 是一个强 Furstenberg 整环。

(4) 假设 R 是一个 PDF-整环。固定 $0 \neq m_0 \in M$。那么，对于每个 $p \in \mathscr{P}(D)$，都有$m_0 = p(p^{-1}m_0)$，其中 $p^{-1}m_0 \in M$。由引理 3.7，每个 $p \in \mathscr{P}(D)$ 都是 m_0 在 R中的一个素因子。由于 $U(D) = D \cap U(R)$，$\mathscr{P}(D)$ 在相伴元意义下必为有限集。

(5) 假设 T 是一个 PDF-整环，且 $\mathscr{P}(D)$ 是有限的（在相伴元意义下）。令 $x = d+m$为 R中的一个非零非单位元，其中 $d \in D$ 且 $m \in M$。由于 M 中的任何元素在 R中都不是不可约元，因此 x 在 R 中的每个素因子，在乘以一个 $u \in U(R)$ 后，具有 d_0或 $1+m_0$的形式，其中 $d_0 \in D$且 $m_0 \in M$。由于 $\mathscr{P}(D)$ 是有限的，且 $U(D) = D \cap U(R)$，引理 4.1 表明，第一种形式的 x 的非相伴素因子只有有限多个（即 $d_0 \in D$）。仿照定理 4.2 的证明，形式为 $(1+m_0)$ 的 x 的每个素因子都是 T中的素元。对于每个 m_0，$m_0' \in M$，元素 $(1+m_0)$ 和 $(1+m_0')$ 在 R 中相伴，当且仅当它们在 T 中相伴；结合 T 是一个 PDF-整环这一事实，可知 x 只有有限多个第二种形式的非相伴素因子。因此，R 是一个 PDF-整环。

第 (6) 部分（分别地，第 (7) 部分）由第 (2) 和第 (4) 部分（分别地，第 (3) 和第 (5) 部分）推出，因为 TPDF-整环是强 Furstenberg PDF-整环。□

注释 4.8. 在定理 *4.7* 的假设下，如果 *T* 是准局部整环，那么对于每个 $m \in M$，形如 $1+m$ 的每个元素都是 R（分别地，T）的单位。于是，在这种情况下，我们得到以下更强的结果。

(1) R 是 *Furstenberg* 整环，当且仅当 D 是 *Furstenberg* 整环。*(2)* R 是 *PDF*-整环，当且仅当 $\mathscr{P}(D)$ 在相伴意义下是有限的。

此外，如果 T 是 *AP*-整环，那么以下陈述成立。

(3) R 是强 *Furstenberg* 整环，当且仅当 D 是强 *Furstenberg* 整环。*(4)* R 是 *TPDF*-整环，当且仅当 D 是 *TPDF*-整环，且 $\mathscr{P}(D)$在相伴意义下是（非空）有限的。

推论 4.9. 设 D 是商域为 K 的整环，且 L 是 K 的域扩张。设 $R = D + XL[X]$ 且 $R' = D + XL[\![X]\!]$。假设 D 不是域。那么，R（分别地，R'）是 *TPDF*-整环，当且仅当 D 是 *TPDF*-整环，且 $\mathscr{P}$（D）在相伴意义下有限。

证明。正向蕴含由定理 4.7 的第 (6) 部分得出。反向蕴含由定理 4.7(7) 得出，因为 $T = L[X]$（分别地，$T' = L[\![X]\!]$）是 TPDF-整环（因为它是唯一分解整环）。□

推论 4.10. 设 T 是形如 $K+M$ 的整环，其中 K 是 T 的子域，且 M 是 T 的非零极大理想。设 D 是 K 的子域，且 $R = D + M$。则以下陈述成立。

(1) 若 $\mathscr{A}(R) \cap M \neq \emptyset$，则 R 是 *TPDF*-整环，当且仅当 T 是 *TPDF*-整环，$\mathscr{A}(R) \cap M$ 的每个元素在 R 中都是素元，并且 $|K^*/D^*| < \infty$。*(2)* 若 $\mathscr{A}(R) \cap M = \emptyset$，则 R 是 *TPDF*- 整环，当且仅当 T 是 *TPDF*-整环。

证明。由定理 4.5 和 [14, 定理 5.3] 可得。□

接下来，我们考察 TPDF性质在局部化下的表现。整环 D 的饱和乘法子集 S 称为分裂，如果每个 $x \in D$ 都可以写成 $x = as$，其中某些 $a \in D$ 和 $s \in S$ 满足对所有 $t \in S$ 都有 $aD \cap tD = atD$。注意，当 S 是一个分裂乘法集合时，扩张 $D \subseteq D_S$ 是惰性的，参见 [2, 命题 1.5]。

命题 4.11. 设 D 是一个整环，且 S 是由素元生成的 D 的分裂乘法子集。那么，D 是 *AP*-整环（分别为 *PDF*-整环）当且仅当 D_S 是 *AP*-整环（分别为 *PDF*-整环）。

证明。假设 D 是一个 AP-整环。设 x 是 D_S 的一个不可约元。我们可以假设对所有 $s \in S$， $x \in D$ 和 $xD \cap sD = xsD$。于是由 [2, 推论 1.4(c)] 可知， x 在 D 中是不可约元。由于 D 是一个 AP-整环， x 是 D 中的素元。因此，再由 [2, 推论 1.4(c)] 可得， x 是 D_S 中的素元。故 D_S 是一个 AP-整环。反之，假设 D_S 是一个 AP-整环。设 x 是 D 的一个不可约元。注意，每个元素 $r \in D$ 都可以写成 $r = as$，其中 $a \in D$ 和 $s \in S$ 满足：没有素元 $p \in S$ 在 D 中整除 a。若 $x \in S$，则 x 与一个素元$p \in S$相伴，因此 x 是 D 中的素元。否则， $x \notin S$，因此根据 [2, 引理 1.1]， x 在 D_S 中是不可约元。由于 D_S 是一个 AP-整环， x 是 D_S 中的素元。于是，我们可以假设对所有$s \in S$， $xD \cap sD = xsD$。因此，由 [2, 推论 1.4(c)] 可知， x 是 D 中的素元。故 D 是一个 AP- 整环。

PDF 情形与 IDF 情形类似；参见 [2, 定理 3.1] 和 [2, 定理 2.4(a)] . □

推论 4.12. 设 D 是一个整环，且 S 是由素元生成的 D的分裂乘法子集。那么， D 是强 *Furstenberg* 整环（分别为 *TPDF*-整环），当且仅当 D_S 是强 *Furstenberg* 整环（分别为 *TPDF*-整环）。

证明. 由 [14,命题 6.4]的证明可知， D 是 Furstenberg 整环，当且仅当 D_S 是 Furstenberg 整环。另一方面，强 Furstenberg 整环是 Furstenberg AP-整环（见命题 3.1）。因此，由命题 4.11 可得， D 是强 Furstenberg 整环，当且仅当 D_S 是强 Furstenberg 整环。TPDF-整环的情形由命题 4.11 和 [14, 命题 6.4] 得出，因为根据推论 3.6，TPDF-整环是 AP TIDF-整环。□

我们以如下命题结束本文。该命题给出了一类 TPDF-整环的例子，并表明即使唯一分解不成立，也可以构造出含有预定数量素元的此类整环。

命题 4.13。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个不是唯一分解整环且在相伴意义下恰有n 个素元的 *TPDF*-整环。

证明。 考虑一个不是域且恰有 n 个两两不相伴素元 $\{p_1, \ldots, p_n\}$的唯一分解整环 D。例如，令 $p_1, p_2, \ldots, p_n$为 $\mathbb{Z}$ 中的互异素数，并定义乘法集合

$$S = \left\{ m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \gcd\left(m, \prod_{i=1}^{n} p_i\right) = 1 \right\}.$$

现在考虑局部化 $D = \mathbb{Z}_S$。那么 D 是 $\mathbb{Q}$ 的子环，因此是一个整环。此外， D 的单位群为 $U(D) = S$。由 [2, 推论 2.2] 可知， D 是一个唯一分解整环。此外，对每个 $i = 1,\ldots, n$，元素 p_i在该局部化中没有被求逆，因此仍是 D的一个素元。另一方面，若 q是一个不同于 $p_1, \ldots, p_n$的素数，那么 $q \in S$，因此在 D中成为单位。因此， D中在相伴意义下唯一的素元是 $p_1, \ldots, p_n$。

令 K 为 D 的商域，并设 $R := D + XK[[X]]$。由于 $T := K[[X]]$ 是唯一分解整环，且是极大理想为 $M :=(X)$ 的准局部整环，根据注 4.8(4)，可知 R 是 TPDF-整环。然而， D 不是域，因此由 [1, Proposition 1.2] 可知， R 不具有原子性。为完成证明，我们需要证明 R 恰有 n 个互不相伴的不可约元（素元），即 $p_1, \ldots, p_n$。由引理 4.1(1)，对于 $i = 1, \ldots, n$，每个 $p_i \in \mathscr{A}(R)$。另一方面，由[4, 引理 4.17]， $U(R) = U(D) + XK[\![X]\!]$。于是容易看出， M 的每个非单位都能被 R 中的每个 p_i 整除，特别是 $\mathscr{A}(R) \cap M = \emptyset$。因此， R 的每个不可约元都具有 $r = d + m$ 的形式，其中 $0 \neq d \in D \setminus U(D)$ 且 $m \in M$。由于 $r = d(1 + d^{-1}m)$，且 $1 + d^{-1}m \in U(R)$，所以r 在 R 中不可约，当且仅当 d 在 D 中不可约。因此，

$$\mathscr{A}(R) = \{up_i : u \in U(R) \text{ and } i = 1, \ldots, n\}.$$

由于 R 是 AP-整环，因此结论成立。 □

References

[1] D. D. Anderson、D. F. Anderson 和 M. Zafrullah， *Factorization in integral domains*，Journal of Pure and Applied Algebra **69** (1990) 1–19。[2] D. D. Anderson、D. F. Anderson 和 M. Zafrullah， *Factorization in integral domains II*，Journal of Algebra **152** (1992) 78–93。[3] D. D. Anderson 和 M. Zafrullah， *The Schreier property and Gauss Lemma*，Bollettino dell'Unione Matematica Italiana，第 8 辑，**10-B** (2007) 43–62。

[4] D.F. Anderson 和 F. Gotti, *Bounded and finite factorization domains*, 载于《国际数学与统计学会议》, Springer, 新加坡, 2020 年, 第 7-57 页。[5] J. T. Arnold 和 P. B. Sheldon, *Integral domains that satisfy Gauss's lemma*, 《密歇根数学杂志》22 (1975) 39–51。[6] M. BENELMEKKI 和 S. El Baghdadi, 群代数何时是反物质?, 载于 *Algebraic Number Theoretic and* , , 编者 *Topological Aspects of Ring Theory* 2023, 87 98 J.L. Chabert 等, Springer, 第 – 页。[7] A. Bodin、P. Deb`es、J. K¨onig 和 S. Najib, *The Hilbert-Schinzel specialization property*, 《纯粹与应用数学杂志》785 (2022) 55–79。[8] P.L. Clark, *The Euclidean criterion for irreducibles*, 《美国数学月刊》124 (2017) 198–216。[9] P. M. Cohn, *Bezout rings and their subrings*, 《剑桥哲学学会会刊》64 (1968) 251–264。[10] J. Coykendall、D. E. Dobbs 和 B. Mullins, *On integral domains with no atoms*, 《通信代数》27 (12) (1999) 5813–5831。[11] D. Costa、J. L. Mott 和 M. Zafrullah, *Overrings and dimensions of general D + M constructions*, J. Natur. Sci.Math. 26 (1986) 7–14。[12] R. Gilmer, *Commutative Semigroup Rings*, 芝加哥大学出版社, 芝加哥, 1984 年。

[13] *Divisibility properties in semigroup rings* **21** 1974 65 86 R. Gilmer 和

[14] *Integral domains and the IDF property* **614** 2023 564 591 T. Parker, ,《密歇根数学杂志》, ( ) – F. Gotti 和 M. Zafrullah, , Journal of Algebra ( ) – 。[15] A. Grams 和 H. Warner, *Irreducible divisors in domains of finite character*, 《杜克数学杂志》42 (1975) 271–284。[16] P. Malcolmson 和 F. Okoh, *Expansions of Prime Ideals*, 《落基山数学杂志》35 (2005) 1689-1706。[17] S. McAdam 和 D. E. Rush, *Schreier rings*, 《伦敦数学学会通报》第 10 期 (1978) 77–80。[18] P. B. Sheldon, *How changing $D[[X]]$ changes its quotient field*, 《美国数学学会汇刊》159(1971) 223–244。[19] H. T. Tang, *Gauss' Lemma*, 《美国数学学会会刊》35 (1972) 372–376。

Department of Mathematics, Faculté des Sciences et Techniques, Beni Mellal University, P.O. Box 523, Beni Mellal, Morocco*Email address*: Mohamed Benelmekki: med.benelmekki@gmail.com