arXiv:2603.10810v1 [math.AC] 11 Mar 2026

一致主导局部环的普遍性

TOSHINORI KOBAYASHI 和 RYO TAKAHASHI

Abstract. 设 R 是一个具有无限剩余域 k 的 d 维 Cohen–Macaulay 完备局部环。主导指标 dx(R) 定义为：从每个非零对象出发，在奇点范畴 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 中构造出 k 所需的最少扩张次数，其中允许有限直和、直和项和移位。若局部环 R 的 dx(R) 有限，则称其为一致支配的。本文证明，若 R 的余维为 2 且不是完全交，则 R 是一致支配的，且 dx(R) $\leqslant 6d+5$。此外，我们证明，若 R 是 Burch 环，则 R 是一致支配的，且 dx(R) $\leqslant d+1$；若 R 是拟纤维积环，或其重数至多为 5 且不是 Gorenstein 环，则 R 是一致支配的，且 dx(R) $\leqslant d$。我们重新得到 Ballard、Favero 和 Katzarkov 关于超曲面的一个结果，并对 Takahashi 关于 Burch 环和拟纤维积环的结果作了推广。

Contents

1. 引言 1
2. 基本定义与基本性质 3
3. 支配局部环与支配指标 5
4. Burch 性质的充分条件 6
5. 零因子的精确对 10
6. 支配指标的上界 13
7. 具有几乎最小重数的 Gorenstein 局部环 19
参考文献 22

1. Introduction

通过对模施行取合冲、直和项以及扩张等基本运算，由一个模生成另一个模，这一方法在环上模的同调与范畴研究中一直起着关键作用。Takahashi [53, 54] 利用模的生成，建立了超曲面奇点范畴的厚子范畴的分类。这促使我们寻找比超曲面更广的环类，使类似的模生成技术能够适用。

鉴于 Burch [12], Dao、Kobayashi 和 Takahashi [21] 的一个结果，他们引入了局部环的 *Burch* 理想概念，并证明：对于正则局部环模去一个 Burch 理想所得的商环，任意非自由模都可以通过取合冲、直和项以及仅进行一次扩张来生成剩余域。因此，按照 Avramov、Iyengar、Nasseh 和 Sather-Wagstaff[4]的意义，这样的环是 Tor/Ext 友好的。特别地，如果这样的环不是超曲面，那么按照 Takahashi [52] 的意义，它是 G-正则的，并且 Auslander–Reiten猜想对这样的环成立。已知有许多理想是 Burch 理想，包括$\mathfrak{m}$-主整闭理想，以及形如 $\mathfrak{m}I$ 的非零理想，其中 I是某个理想，$\mathfrak{m}$ 是极大理想。然而，由 Burch 理想定义的局部环必然具有深度零。作为对正深度情形的推广，[21]中也引入了 *Burch* 环的概念。这是一种局部环，其完备化是正则局部环模去一个 Burch 理想所得商环的变形。超曲面是 Burch 环的典型例子。显然，Burch 环是 Tor/Ext 友好的。Dao 和 Eisenbud[19] 最近引入了 *Burch* 指数的概念，并刻画了 Burch 环：它们正是具有正 Burch 指数的局部环。Burch 指数大于一的局部环表现出某种极端

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D09, 13C60, 13H10.*Key words and phrases.* Burch 理想/环/指标，主导环/指标，零因子的精确对，拟纤维积，有限表示型，G-正则，拉伸的，Tor/Ext 友好的。Kobayashi 部分得到日本学术振兴会青年研究者资助金 25K17240 的支持。Takahashi 部分得到日本学术振兴会科学研究补助金 23K03070 的支持。

关于模的合冲的性质；详见 [19, 24] 以了解详情。迄今为止，关于 Burch 理想和 Burch 环的其他许多工作也已完成；例如参见 [14, 18, 26, 28] 。

Freitas、Jorge P´erez、R. Wiegand 和 S. Wiegand[27] 所提出的拟纤维积环 概念，近年来受到多位作者的研究。这个概念与 Nasseh 和 Takahashi [41] 所定义的具有准可分解极大理想的局部环相同。在拟纤维积环上，可以通过取上同调的扩张的直和项，从每个具有无限投射维数的模构造出剩余域的某个合冲。因此，拟纤维积环具有许多与 Burch 环相同的性质，包括 Tor/Ext 友好性。由此，接下来的一个目标是统一 Burch 环与拟纤维积环的理论。

关于支配局部环和一致主导局部环的概念由 Taka- hashi 提出 [55, 56]。支配局部环是指这样一种局部环：其剩余域可以按照 Bondal 和 Van den Bergh 的意义，由奇点范畴中的任意非零对象经典生成 [9] 。局部环 R 的主导指标$\mathrm{dx}(R$是最小的数 n，使得剩余域能够在奇点范畴中由任意非零对象通过有限直和、直和项、移位以及至多 n 次扩张生成。若局部环的主导指标有限，则称其为一致支配局部环。因此，一致支配局部环必为支配局部环，而支配局部环具有 Tor/Ext 友好性。Burch 环和拟纤维积环都是一致支配的。备注5.5介绍了这些环类及其他一些环类之间的层级关系。一个显著的事实是，若在每个素理想处的局部化都是支配局部环，则奇点范畴的厚子范畴可以被完全分类。详情请参阅 [55, 56] 。

*Golod*局部环 是由剩余域的 Poincar´e 级数的极值行为所定义的局部环。关于 Golod 环的基本事实见 [2]。已知 Golod 环是 Tor/Ext 友好的 [4, 33]。Golod局部环的典型例子包括局部超曲面以及具有极小重数的 Cohen–Macaulay局部环，它们同时也是 Burch 环。然而一般而言，Golod局部环既不是 Burch 环，也不是拟纤维积环；见 [25, 36]。这些观察促使我们进一步研究 Golod性与支配性之间的关系。因此，提出以下问题是十分自然的。

问题 1.1. （1）给定的局部环何时是支配的，或者更强地，何时是一致支配的？（2）若给定的局部环是一致支配的，则其主导指标有多大？（3）每个 Golod局部环是否都是支配的，或者更强地，是否都是一致支配的?

对于局部环 R，记 dim R、edim R、codim R、e(R)、 $\ell(R)$ 和 r(R) 分别表示 R的（Krull）维数、嵌入维数、（嵌入）余维、（Hilbert–Samuel）重数、长度和型。对于有限生成的 R-模 M，记 $\nu(M)$ 和 $\mathrm{P}_M(t)$ 分别表示 M 的最小生成元个数和 Poincar´é 级数。以下定理概述了本文主要结果的若干特殊情形，并回答了上述问题 1.1。

定理 1.2。 设 R 是剩余域 k为无限域的 *Cohen–Macaulay* 完备局部环。令 $d = \dim R$、$c = \operatorname{codim} R$ 和 $r = \mathrm{r}(R)$。则下列结论成立。

(1) 在下列每种情形中，局部环 R 均一致支配，且$\mathrm{dx}(R) \leqslant d$：

- R 是拟纤维积环（例如， R 具有极小重数，即 $\mathrm{e}(R) = c + 1$）。
- R 是一个非 *Gorenstein* 环，且 $\mathrm{e}(R) \leqslant 5$。
- R 满足 $\mathrm{e}(R) \leqslant c + 2$ 且 $\mathrm{P}_k(t) \neq (1 + t)^d/(1 - ct + rt^2)$。(2) 在下列每种情形中，局部环 R 都是一致支配的，且 $\mathrm{dx}(R) \leqslant d + 1$：
- R 是 *Burch* 环（例如， R 是超曲面）。
- R 是一个非 *Gorenstein* 的 *G*-正则环，且 $\mathrm{e}(R) \leqslant 6$。
- R 是一个非 *Gorenstein* 环，且 $c = 2$ 和 $\mathrm{e}(R) \leqslant 11$。(3) 假设维数 d 至多为2 ，且剩余域 k 是代数闭的。如果 *Cohen– Macaulay* 局部环 R 具有有限表示型，则 R 是一致支配的，且 $\mathrm{dx}(R) \leqslant \max\{1, d\}$。(4) 假设余维 c 至多为 2。那么 R 要么是一个满足 $c = 2$的局部完全交，要么是一致支配局部环，且 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 6d + 5$。

事实上，在本文中我们将得到定理 1.2中断言（1）和（2）的更一般版本。这些版本不仅重新得到并推广了 Ballard、Favero 和 Katzarkov 在 R为完备局部超曲面时给出的 dx([6]) 的上界 R，还细化了 Takahashi 在 R为 Burch 环以及 [56]为拟纤维积环时给出的 dx(R) 的上界。 R

Scheja 的一个经典结果 [48] 表明，余维至多为二的每个 Cohen–Macaulay 局部环要么是完全交，要么是 Golod 环。因此，定理1.2支持了1.1中的问题（3）

给出了肯定的回答，这一点也在 [56] 定义理想为单项式理想这一附加假设下得到了证明。此外，定理 1.2 告诉我们，一致支配局部环无处不在。

定理 1.2 的断言（1）和（2）刻画了在 R 满足 R且重数较小的情形下局部环的主导指标。这源于我们通过定义理想和一些数值不变量，对长度较小的（阿廷）局部环所作的研究。我们将这些结果总结为以下定理。作为对交换阿廷环的研究，这一定理本身也具有独立的研究价值。

定理 1.3. 设 R 是一个非 *Gorenstein* 局部环。则以下陈述成立。

(1) 若局部环 R 满足以下四个条件之一，则它是一个 *Burch* 环。

- $\ell(R) \leqslant \mathrm{r}(R) + 5$ 且 嵌入维数 $R = 3 \leqslant \mathrm{r}(R)$。
- $\ell(R) < 2\mathrm{r}(R)(\mathrm{r}(R)+1)$（例如，$R$ 是非 *Gorenstein* 的，且 $\ell(R) \leqslant 11$），并且嵌入维数 $R = 2$。
- $\ell(R) \leqslant 5$。
- $\ell(R) \leqslant 6$ 且 R 是 *G*-正则。

(2) 假设 R 是非*Burch*，且 $\ell(R) = 6$。设 $R \cong S/I$，其中 $(S, \mathfrak{n})$ 是正则局部环，$I \subseteq \mathfrak{n}^2$是一个理想。那么 嵌入维数 $R = 3$，$\mathrm{r}(R) = 2$，$\nu(I) = 4$，并且 R中存在一对零因子的精确对。

作为定理 1.3的推论，可得到以下结果：它表明，当重数至多为六时，上述大多数条件实际上彼此等价。重数至多为六这一假设不能省略；详情见备注 5.8 。

推论 1.4。 设 R 是一个剩余域无限的 *Cohen–Macaulay* 非 *Gorenstein* 局部环。若 $\mathrm{e}(R) \leqslant 6$，则下面给出的关于 R 的条件 (2)–(6) 彼此等价；若 维数 $R = 0$，则条件 (1)–(8) 彼此等价。

(1) *Burch*，(2) 一致支配，(3)支配，(4) *Tor* 友好，(5) *Ext* 友好，(6) *G*-正则，(7) 没有嵌入变形，(8) 没有零因子的精确对。

本文结构如下。第 2 节汇集了本文中会用到的局部环定义与基本事实，并回顾 Burch 环和 Burch 指数的定义。第 3 节对局部环的主导指标和奇点范畴作了一些讨论。主导指标的定义基于奇点范畴的三角结构。命题 3.8 可视为主导指标的另一种定义，它仅依赖模范畴的结构。第 4 节主要研究阿廷局部环的 Burch 性质和 Burch 指数。对于嵌入维数为二的阿廷局部环，命题 4.3、命题 4.5、定理 4.7 和推论 4.9 根据极小自由分解、长度和型，给出了多个判据，以判断该环是否为 Burch 环，或其 Burch 指数是否至少为二。由此完成了定理 1.3(1) 的前三种情形。第 5 节讨论零因子的精确对。我们考察长度为六的阿廷局部环何时存在这样的精确对，并证明定理 5.3，其内容与定理 1.3(2) 完全相同。随后，我们研究 Burch 性质、（一致）支配性以及不存在零因子的精确对这几者之间的关系。推论 1.4 的第二个断言在推论 5.7 中得到证明，其中包含定理 1.3(1) 的最后一种情形。第 6 节致力于研究局部环的主导指标上界。对于 Burch 环，前几节所得结果起到了关键作用。命题 6.3 对 Takahashi 的上界 [56, 推论 5.5]作了改进。为处理余维二的非 Burch 环，我们使用 Hilbert–Burch 矩阵。结合命题 6.7、命题 6.10 和定理 6.14，得到定理 1.2。推论 1.4 的第一个断言包含在命题 6.7 中。最后，第 7 节探讨几乎最小重数的 Gorenstein 局部环的奇点范畴中剩余域的生成。定理 7.5 从某个循环模导出剩余域的一种生成过程。为进一步研究 Gorenstein 局部环的一致支配性，我们提出问题 7.1。

2. Basic definitions and fundamental properties

本节将介绍若干定义和性质，这些内容是陈述后续各节结果所必需的。首先说明本文全文采用的约定。

约定 2.1。(1) 假设所有环均为交换诺特环，所有模均为有限生成模，所有复形均为上链复形，所有子范畴均为严格满子范畴。(2) 除非另有说明，设 R 为局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 k。(3) 令 $(-)^* = \mathrm{Hom}_R(-, R)$，并用 $\widehat{R}$ 表示 R 的 $\mathfrak{m}$-进完备化，用 $\mathrm{Soc}\ R$ 表示 R 的底，用 $\mathrm{e}(R)$ 表示 R 的（希尔伯特–塞缪尔）重数，并用 $\mathrm{mod}\, R$ 表示有限生成 R-模所成的范畴。

(4) 对于一个 R-模 M，我们用 $\ell_R(M)$ 表示 M 的长度，用 $\mathrm{pd}_R M$（分别用 $\mathrm{id}_R M$）表示 M 的投射维数（分别为内射维数）。定义在 R-模 M 上的正则序列简称为 M-序列。(5) 若上下文清楚，我们可以省略下标或上标。

我们回顾局部环上模的一些基本概念。

定义 2.2. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个局部环，M是一个 R-模，n 是一个整数。
(1) 对于 $n\geqslant 1$，我们将 M 的第 n 个上同调记为 $\Omega^n M$，定义为 M 的极小自由分解中第 n 个微分映射的像。我们令 $\Omega^0 M = M$，并令 $\Omega^1 M\Omega M =$ 。由于 M 的极小自由分解在同构意义下唯一，因此它在同构意义下也唯一确定。(2) 对于自由 R-模之间的同态 ϕ，用 $\mathrm{I}_n(\phi)$ 表示由 ϕ 的表示矩阵的 n 阶子式生成的 R 的理想。对于一个 R-模 M，取其极小自由表示 $F_1 \xrightarrow{\phi} F_0 \to M \to 0$。于是令 $\mathrm{I}_n(M) = \mathrm{I}_n(\phi)$。详情请参阅 [10, §1.4] 。(3) 对于 $n\geqslant 0$，我们分别用 $\beta_n^R(M)$ 和 $\mu_R^n(M)$ 表示 M 的第 n 个贝蒂数和第 n 个巴斯数，即 $\beta_n^R(M) = \dim_k \mathrm{Tor}_n^R(M,k) = \dim_k \mathrm{Ext}_R^n(k,M)$，以及 $\mu_R^n(M) = \dim_k \mathrm{Ext}_R^n(k,M)$。(4) 我们令 $\nu_R(M) = \beta_0^R(M)$，并令 $\mathrm{r}_R(M) = \mu_R^u(M)$，其中 $u = \mathrm{depth}_R M$。这些整数分别称为 M 的最小生成元个数和型。注意，对于 $n\geqslant 0$，有 $\beta_n^R(M) = \nu_R(\Omega^n M)$。(5) 我们用 $\mathrm{P}_M(t)$ 表示 M 的庞加莱级数，也就是说，$\mathrm{P}_M(t) = \sum_{i\geqslant 0}\beta_i(M)t^i \in \mathbb{Z}[\![t]\!]$。

接下来我们回顾一些关于局部环的术语。

定义 2.3. (1) 对于局部环 $(R,\mathfrak{m},k)$，我们用 $\mathrm{edim}\ R$、$\mathrm{codim}\ R$ 和 $\mathrm{codepth}\ R$ 分别表示 R的嵌入维数、（嵌入）余维和（嵌入）余深，即 $\mathrm{edim}\, R = \nu_R(\mathfrak{m}) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$，$\mathrm{codim}\ R = \mathrm{edim}\ R - \dim\ R$，以及 $\mathrm{codepth}\ R = \mathrm{edim}\ R - \mathrm{depth}\, R$。(2) 若 R 是 Cohen–Macaulay 环，则称 R 具有极小重数，当且仅当 $\mathrm{e}(R) = \mathrm{codim}\, R + 1$。(3) 若满足不等式 $\mathrm{codepth}\, R \leqslant 1$，则称 R 是超曲面。此条件等价于^存在一个正则局部环 S 和一个元素 $f\in S$，使得 $R\cong S/(f)$；见 [2, §5.1]。(4) 我们用 $\mathrm{Sing}\, R$ 表示 R 中满足以下条件的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合：R 在 $\mathfrak{p}$ 处的局部化 $R_\mathfrak{p}$ 不是正则局部环，并称其为 R的奇异轨迹。(5) 若对于除 $\mathfrak{m}$ 以外的任意素理想 $\mathfrak{p}$，局部化 $R_\mathfrak{p}$ 都是正则局部环，则称局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 具有孤立奇点；等价地，$\mathrm{Sing}\ R\subseteq\{\mathfrak{m}\}$。

现在我们回顾 Burch 环和 Burch 指数的定义，以及这些概念的一些基本事实。

定义 2.4. (1) 若理想 I 满足 $\mathfrak{m}(I:\mathfrak{m}) \neq \mathfrak{m}I$，则称 R 的 I 为$Burch$。
(2) 我们称序列 $\boldsymbol{x} = x_1,\dots,x_n$ 是 R 的$Burch$ 正则序列，如果商环 $R/(\boldsymbol{x})$ 有极大理想 S 的一个^Burch 理想 I，使得 $R/(\boldsymbol{x})\cong S/I$。^(3) 假设 R 的深度为零。取一个正则局部环 $(S,\mathfrak{n})$，以及 S 的一个理想 I，满足 $R\cong S/I$。注意，$\mathfrak{n}^2\subseteq \mathfrak{n}I : (I:\mathfrak{n}) \subseteq \mathfrak{n}$。假设 R 不是域。我们定义 $\mathrm{Burch}(R)$ 为 $= \ell_S(\mathfrak{n}/(\mathfrak{n}I : (I:\mathfrak{n})))$，并称其为 R的$Burch$ 指数。该定义与 S, I的选取无关；参见定理 2.3]。

注 2.5. (1) 若极大理想 $\mathfrak{m}$ 满足 $\mathfrak{m}^2 = 0$，则 R 是 Burch 环；见 [21, 例 2.2]。(2) 根据 [21, 命题 5.1]，Gorenstein 局部环 R 是 Burch 环，当且仅当它是超曲面。(3) 若 R 是具有极小重数的 Cohen–Macaulay 环，且 k 是无限的，则根据 [21, 命题 5.2]，R 是 Burch 环。(4) 回忆一下，若存在 J 的一个理想，使得等式$I = J:\mathfrak{m}$成立，则称 R 的理想 I 是弱 $\mathfrak{m}$-满 的。深度为 $R/I = 0$ 的 R 的弱 $\mathfrak{m}$-满理想 I 是 R的 Burch 理想；见 [21, 推论 2.4]。(5) $\mathrm{Burch}(R) > 0$ 当且仅当 R 是 Burch 环。这直接由定义可得。

最后，我们回顾局部环的纤维积及其一些基本性质。

定义 2.6. (1) 设 $(R_1,\mathfrak{m}_1)$ 和 $(R_2,\mathfrak{m}_2)$ 是具有共同剩余域 k 的局部环。令 $\pi_i\colon R_i\to k$为典范满射，且 $i=1$。纤维积 $R := R_1\times_k R_2$，即 R_1 和 R_2 在 k 上的纤维积，定义为直积环 $R_1\times R_2$ 的子环，由满足 $\pi_1(a) = \pi_2(b)$ 的元素 (a,b) 组成。(2) 如果存在两个局部环 $(R_1,\mathfrak{m}_1,k)$ 和 $(R_2,\mathfrak{m}_2,k)$，使得 $R\cong R_1\times_k R_2$ 且 $R_1\neq k\neq R_2$，则称局部环 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个非平凡纤维积（在 k 上）。

注 2.7。 (1) 设 $(R_1,\mathfrak{m}_1),(R_2,\mathfrak{m}_2)$ 是具有共同剩余域 k 的局部环。设 $\rho_i\colon R\to R_i$ 是投影，且 $i=1,2$。于是 $I_1 := \mathrm{Ker}\ \rho_2\cong\mathfrak{m}_1$, $I_2 := \mathrm{Ker}\ \rho_1\cong\mathfrak{m}_2$，并且 R 是极大理想为 $\mathfrak{m} := I_1+I_2$ 的局部环。由于 $I_1\cap I_2 = 0$，存在 R-子模的直和分解 $\mathfrak{m} = I_1\oplus I_2$。

(2) 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个局部环。正如我们刚才在 (1) 中所见，若 R 是非平凡纤维积，则极大理想 $\mathfrak{m}$ 可分解为一个 R-模。反过来，若 $\mathfrak{m}=I\oplus J$，其中 I 和 J 是 R 的理想，则$R\cong R/I\times_k R/J$，因此若 I,J 均非零，则 R 是一个非平凡纤维积。

(3) 当 $R=S\times_k T$是非平凡纤维积时，深度 $R=\min\{1,$深度 $S,$ 深度 $T\}$由 [17,注 3.1]得。(4) 由 (2) 和命题 6.15], 可知，非平凡纤维积 $R_1\times_k R_2$ 是 Burch 环，当且仅当满足以下两个条件之一。(i) 有 min{深度 $R_1,$ 深度 $R_2\}\geqslant 1$。(ii) R_1 或 R_2 是深度零的 Burch 环。

3. Dominant local rings and dominant indices

本节回顾支配局部环、一致主导局部环以及局部环的主导指标的定义。本节的主要目的是给出主导指标的模论描述。首先，我们回顾奇点范畴的定义。

定义 3.1. R的奇点范畴 $\mathrm{D^{sg}}(R)$定义为有界导出范畴 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,R)$（其中 $\mathrm{mod}\,R$ ）关于 R 上的完美复形的 Verdier 商。

根据定义，$\mathrm{D^{sg}}(R)$ 是一个三角范畴。Buchweitz [11] 引入了这一范畴。若局部环 R 是 Gorenstein 的，则 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 与极大 Cohen–Macaulay R-模的稳定范畴作为三角范畴等价；参见 [11, 定理 4.4.1]。Orlov 关于奇点范畴与同调镜像对称之间关系的研究成果颇丰；例如参见 [42, 43, 44] 。以下是关于奇点范畴的一些基本事实；证明请参见 [23, 引理 2.4]。

注 3.2。 (1) 对于所有 $X\in\mathrm{D^{sg}}(R)$，都存在 $M\in$模 R和 $n\in\mathbb{Z}$，使得 $X\cong M[n]$属于 $\mathrm{D^{sg}}(R)$。这个同构蕴含： X 是 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 的非零对象，当且仅当 $\mathrm{pd}_R M=\infty$。
(2) 设 M 是一个 R-模，且 $n\geqslant 0$ 是一个整数。则 $M\cong(\Omega^n M)[n]$ 属于 $\mathrm{D^{sg}}(R)$。

接下来我们回顾任意三角范畴中的一些概念。厚子范畴和层级的概念分别由 Verdier [58]以及 Avramov、Buchweitz、Iyengar 和 Miller [3]引入。

定义 3.3. 设 $\mathcal{T}$是一个三角范畴。
(1) $\mathcal{T}$的厚子范畴 定义为 $\mathcal{T}$的一个对直和项封闭的三角子范畴。(2) 设 T是 $\mathcal{T}$的一个对象。 T在 $\mathcal{T}$中的厚闭包 记作 $\mathrm{thick}_{\mathcal{T}}T$，按定义，它是包含 T的 $\mathcal{T}$的最小厚子范畴。(3) 设 $\mathcal{X}$和 $\mathcal{Y}$是 $\mathcal{T}$的子范畴。我们用 $\langle\mathcal{X}\rangle$ 表示 $\mathcal{T}$中包含 $\mathcal{X}$且对有限直和、直和项和移位封闭的最小子范畴。我们用 $\mathcal{X}*\mathcal{Y}$ 表示 $\mathcal{T}$的子范畴，它由满足以下条件的对象 $T\in\mathcal{T}$组成：在 $\mathcal{T}$中存在一个正合三角 $X\to T\to Y\rightsquigarrow$，使得 $X\in\mathcal{X}$且 $Y\in\mathcal{Y}$。令 $\langle\mathcal{X}\rangle_0^{\mathcal{T}}=0$，并令 $\langle\mathcal{X}\rangle_n^{\mathcal{T}}=\langle\langle\mathcal{X}\rangle_{n-1}^{\mathcal{T}}*\langle\mathcal{X}\rangle\rangle$ 表示 $n\geqslant 1$。(4) 对于 $\mathcal{T}$中的两个对象 X和 Y，我们用 $\mathrm{level}_{\mathcal{T}}^{X}(Y)$ 表示 Y相对于 X的层级，其定义为满足 Y属于 $\langle X\rangle_{n+1}$的整数 $n\geqslant -1$ 的下确界。

现在，让我们回顾支配性、一致支配性和支配指标的概念。

定义 3.4. (1) 若对 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 中所有非零对象 X，都有 R is 支配 if $k\in\mathrm{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R)}X$，则称 R 为支配的。(2) R 的主导指标由下列等式定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{dx}(R)&=\sup\{\mathrm{level}^{X}_{\mathrm{D^{sg}}(R)}(k)\mid 0\neq X\in\mathrm{D^{sg}}(R)\}\\&=\inf\{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant -1}\mid k\in\langle X\rangle_{n+1}\text{ for all nonzero objects }X\text{ of }\mathrm{D^{sg}}(R)\}.\end{aligned}$$

若 $\mathrm{dx}(R)<\infty$，则称局部环 R 是一致支配 的。

注记 3.5. (1) 根据定义，一致支配局部环是支配局部环。(2) 局部环 R 是正则的，当且仅当它满足等式 $\mathrm{dx}(R)=-1$。

在本节余下部分，我们将不借助 R 的奇点范畴来解释 R 的主导指标。为此，我们回顾 Dao 和 Takahashi [22], 引入的 $\mathrm{mod}\,R$ 稳定范畴的斯潘尼尔–怀特海德范畴的定义，以及 $\mathrm{mod}\,R$ 中生成的概念，并建立一个关于它们的引理。

定义 3.6。 (1) 我们将 $\mathrm{mod}\ R$的稳定范畴记为 $\mathrm{mod}\,R$，其定义如下。对象与 $\mathrm{mod}\,R$中的对象相同，即（有限生成的） R-模。对于两个 R-模M和 N，同态集定义为 $\mathrm{Hom}_R(M,N)=\mathrm{Hom}_R(M,N)/\mathrm{P}_R(M,N)$，其中 $\mathrm{P}_R(M,N)$由可分解为 $f\colon M\to F\to N$–的同态 $f\colon M\to N$ 构成，其中 F是某个自由 R-模。

(2) 我们将 mod R的斯潘尼尔–怀特海德范畴记为 SW(mod R)，其定义如下。对象是由 mod R中的对象 $M\in$和整数 m 构成的有序对 (M,m)。对于两个对象 (M,m) 和 (N,n)，同态集定义为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{SW}(\mathrm{mod}\,R)}((M,m),(N,n)) = \varinjlim_{i\geqslant m,n} \mathrm{Hom}_R(\Omega^{i-m}M,\Omega^{j-n}N)$。

(3) 设 $\mathcal{X}$ 与 $\mathcal{Y}$ 为 mod R 的子范畴。我们用 $[\mathcal{X}]$ 表示 mod R 中包含 R 以及 $\mathcal{X}$ 中诸模、且在有限直和、直和项与合冲下封闭的最小子范畴。用 $\mathcal{X}\circ\mathcal{Y}$ 表示 mod R 中由如下 R-模 M 构成的子范畴：它可嵌入 R-模的正合列 $0\to X\to M\to Y\to 0$，其中 $X\in\mathcal{X}$ 与 $Y\in\mathcal{Y}$。令 $[\mathcal{X}]_0=0$，并对 $n\geqslant 1$ 令 $[\mathcal{X}]_n=[[\mathcal{X}]_{n-1}\circ[\mathcal{X}]]$。

引理 *3.7. (1)* 范畴 *SW(mod R)* 为三角范畴。存在三角等价 *SW(mod R)* $\cong D^{\mathrm{sg}}(R)$，它将 (M,m) 映为复形 $(\cdots\to 0\to M\to 0\to\cdots)$，其中 M 位于次数 $-m$。*(2)* 设 (M,m) 与 (N,n) 为 *SW(mod R)* 的两个对象，并设 h 为非负整数。若对象 (M,m) 属于 $\langle(N,n)\rangle_{h+1}$，则对某个非负整数 r，上同调 $\Omega^r M$ 属于 $[N]_{h+1}$。*(3)* 设 M 为 R-模，h 为非负整数。下列陈述等价。*(a)* 对每个非零对象 $X\in D^{\mathrm{sg}}(R)$，R-模 M 作为 $D^{\mathrm{sg}}(R)$ 的对象属于 $\langle X\rangle_{h+1}$。*(b)* 对每个非零对象 $(N,n)\in$ *SW(mod R)*，对象 $(M,0)$ 属于 $\langle(N,n)\rangle_{h+1}$。*(c)* 对每个满足 $\mathrm{pd}\,N=\infty$ 的 R-模 N，存在整数 $r\geqslant 0$，使得 $\Omega^r M$ 属于 $[N]_{h+1}$。

证明。（1）该断言是 [8, 定义 3.1 与定理 38]的直接推论。我们也请读者参阅 [7, 定义 2.4 与定理 3.2(3)]。

（2）我们对 h 作归纳。首先，设 $h=0$。则对象 (M,m) 属于 $\langle(N,n)\rangle$。因此，存在同构 $(M,m)\oplus(L,l)\cong\bigoplus_{i=1}^{s}(N,n+a_i)^{\oplus b_i}$ 于 SW(mod R) 中。对 $t\gg 0$ 应用平移函子 $[-t]$，我们得到同构 $(M,m-t)\oplus(L,l-t)\cong\bigoplus_{i=1}^{s}(N,n+a_i-t)^{\oplus b_i}$，从而整数 $m-t$、$l-t$、$n+a_i-t$ 均为非正。我们在 SW(mod$R$) 中得到同构 $(\Omega^{t-m}M,0)\oplus(\Omega^{t-l}L,0)\cong\bigoplus_{i=1}^{s}(\Omega^{t-n-a_i}N,0)^{\oplus b_i}$，它在 mod R 中诱导出同构 $\Omega^{u+t-m}M\oplus\Omega^{u+t-l}L\cong\bigoplus_{i=1}^{s}(\Omega^{u+t-n-a_i}N)^{\oplus b_i}$，其中对某个 $u\geqslant 0$；见 [8, 推论 3.3(3)]（或 [7, 引理 5.2(2)]）。由此可知，模 $\Omega^{u+t-m}M$ 属于 $[N]$。

接下来，设 $h\geqslant 1$。在 SW(mod R) 中存在正合三角 $(A,a)\to(B,b)\to(C,c)\rightsquigarrow$，其中 $(A,a)\in\langle(N,n)\rangle_h$ 且 $(C,c)\in\langle(N,n)\rangle$，使得 (M,m) 是 (B,b) 的直和项。归纳假设与基蕴含，对某些 $p,q\geqslant 0$，有 $\Omega^p A\in[N]_h$ 与 $\Omega^q C\in[N]$。应用 [7, 引理 5.2(4)]，，我们得到一个在不计自由直和项意义下的 R-模正合列 $0\to\Omega^{v-a}A\to\Omega^{v-b}B\to\Omega^{v-c}C\to 0$，其中 $v\geqslant a,b,c$ 为某些整数。此外，存在整数 $w\geqslant b,m$，使得由 [7, 引理 5.2(3)]，$\Omega^{w-m}M$ 在 mod$R$ 中是 $\Omega^{w-b}B$ 的直和项。令 $r=\max\{p,q\}$ 且 $x=\max\{v,w\}$。我们看到，在不计自由直和项的意义下，存在正合列 $0\to\Omega^{r+x-a}A\to\Omega^{r+x-b}B\to\Omega^{r+x-c}C\to 0$，其中间项 $\Omega^{r+x-b}B$ 以 $\Omega^{r+x-m}M$ 为直和项。注意 $\Omega^{r+x-a}A\in[N]_h$ 与 $\Omega^{r+x-c}C\in[N]$。我们观察到 $\Omega^{r+x-m}M$ 属于 $[N]_{h+1}$。(3) (a)⇔(b)：这一等价是 (1) 中所给三角等价的直接推论

(c)⇒(b)：设 (N,n) 是 SW(mod R) 中的一个非零对象。由 (1)，复形 $(\cdots\to 0\to N\to 0\to\cdots)$（其中 N 位于次数 $-n$）是 $\mathrm{D_{sg}}(R)$ 中的一个非零对象。因此，R-模 N 的投射维数无限。根据假设，存在一个整数 $r\geqslant 0$，使得 $\Omega^r M$ 属于 $[N]_{h+1}$。利用 [7, 引理 5.2(1)]，，得到 $(M,-r)=(\Omega^r M,0)\in\langle(N,0)\rangle_{h+1}=\langle(N,n)\rangle_{h+1}$。因此，对象 $(M,0)$ 属于 $\langle(N,n)\rangle_{h+1}$。

(b)⇒(c)：设 N 是一个满足 $\mathrm{pd}\,N=\infty$ 的 R-模。那么，复形 $(\cdots\to 0\to N\to 0\to\cdots)$（其中 N 位于次数 $-n$）是 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 中的一个非零对象。由 (1)，SW(mod R) 中的对象 (N,n) 非零。根据假设，对象 $(M,0)$ 属于 $\langle(N,n)\rangle_{h+1}$。由 (2) 可知，对某个 $r\geqslant 0$，$\Omega^r M$ 属于 $[N]_{h+1}$。■

应用引理 ⇔中的等价条件 (c)3.7（3）到局部环 R的剩余域上，我们便可得到下面的命题，它使我们能够仅用 R-模来理解 R的主导指标 $\mathrm{dx}(R)$。

命题 3.8。对于具有剩余域 k 的局部环 R，下列等式成立。

$$\mathrm{dx}(R)=\inf\{n\in\mathbb{Z}_{\geqslant -1}\mid\text{对于任意满足 }\mathrm{pd}\,M=\infty\text{ 的 }R\text{-模 }M,\text{存在 }r\in\mathbb{N}\text{ 使得 }\Omega^r k\in[M]_{n+1}\}.$$

特别地，主导指标 $\mathrm{dx}(R)$ 不大于零，当且仅当对于任意满足 $\mathrm{pd}\,M=\infty$ 的 R-模 M，存在 r、s、n_0、…、$n_s\in\mathbb{N}$，使得 $\Omega^r k$ 是 $\bigoplus_{i=0}^{s}\Omega^i M^{\oplus n_i}$ 的直和项。

4. Sufficient conditions for Burchness

本节将给出若干数值不变量（如希尔伯特函数、型和长度）方面的充分条件，以判断一个局部环是否具有正 Burch 指数。我们首先回顾局部环和拉伸阿廷局部环的希尔伯特函数的定义。

定义 4.1. (1) 对于一个局部环 $(R,\mathfrak{m},k)$ 和一个整数 $i\geqslant 0$，令 $h_i=\mathrm{h}_i(R)=\dim_k \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$。函数 $\mathrm{h}_R\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 由 $i\mapsto h_i$ 给出，称为 R 的希尔伯特函数。显然，存在 $n\geqslant 0$，使得对于任意 $i>n$，都有 $h_i=0$，此时我们称 $(h_0,h_1,\ldots,h_n)$ 是 R 的希尔伯特函数。

(2) 阿廷局部环 R 的基座次数是满足 $h_s\neq 0$ 的最大整数 $s=\mathrm{s}(R)$。注意，$\mathfrak{m}^s\subseteq \operatorname{Soc} R$。若 $h_2\leqslant 1$，则称 R 为拉伸的。在这种情形下，我们有 $s(R)=\ell(R)-e$，并且根据麦考莱定理 [10, 定理 4.2.10]，R 的希尔伯特函数为 $(1,e,1,\ldots,1)$，且 $e=$ 嵌入维数 R。

我们给出判据，用以判定正则局部环的理想是否为 Burch，后文将多次用到这些判据.

引理 4.2. 设 R 为正则局部环，且 I 是 R的非零理想。

(1) 若 I 是 R的 *Burch* 理想，则局部环 R/I 的深度为零。*(2)* 假设 R/I 的深度为零。以下四个条件等价。*(a)* I是 *Burch*。*(b)* R/I是 *Burch*。*(c)* $\mathrm{r}(R/\mathfrak{m}I)<\mathrm{r}(R/I)+\nu(I)$。*(d)* $\nu(I\colon \mathfrak{m})<\mathrm{r}(R/I)+\nu(I)$。*(3)* 假设 R/I 是一个阿廷拉伸局部环，且 $e:=$ 嵌入维数 $R/I=$ 嵌入维数 R。那么，当 $\mathrm{r}(R/I)<e$时，有 $\nu(I)=\binom{e+1}{2}-1$；当 $\mathrm{r}(R/I)=e$时，有 $\nu(I)=\binom{e+1}{2}$。

证明。第一个断言由 Burch 理想的定义立即得出。第三个断言由[46, 定理 2] 结合 [10, 定理 2.3.2]得出。还需证明第二个断言。

(a)⇒(b)：注意到 IR 是 R的 Burch 理想，因此 R/I 是 Burch 环。

(b)⇒(a)：若 R/I 是域，则 $I=\mathfrak{m}$ 且 $\mathfrak{m}(I\colon \mathfrak{m})=\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}I$，由此 I 是 Burch 环。若 R/I 不是域，则该断言由 [21, 引理 2.11]得出。

(a)⇔(c)：由于 $I\neq 0$ 和 $I/\mathfrak{m}I\subseteq R/\mathfrak{m}I$，我们有深度 $R/\mathfrak{m}I=0$。我们有 $\mathrm{r}(R/\mathfrak{m}I)=\ell((\mathfrak{m}I\colon \mathfrak{m})/\mathfrak{m}I)\leqslant\ell((I\colon \mathfrak{m})/\mathfrak{m}I)=\ell((I\colon \mathfrak{m})/I)+\ell(I/\mathfrak{m}I)=\mathrm{r}(R/I)+\nu(I)$。因此，该断言由 [21, 命题 2.3]得出。

(a)⇔(d)：根据定义，若 I 是 R的 Burch 理想，则 R/I 的深度为零。正合列 $0\to I/\mathfrak{m}I\to(I\colon \mathfrak{m})/\mathfrak{m}I\to(I\colon \mathfrak{m})/I\to 0$ 表明，$\ell((I\colon \mathfrak{m})/\mathfrak{m}I)=\ell((I\colon \mathfrak{m})/I)+\ell(I/\mathfrak{m}I)=\mathrm{r}(R/I)+\nu(I)<\infty$。因此，$I$ 是 R 的 Burch 理想，当且仅当 $\mathfrak{m}I\subsetneq\mathfrak{m}(I\colon \mathfrak{m})$成立；当且仅当$\ell((I\colon \mathfrak{m})/\mathfrak{m}(I\colon \mathfrak{m}))<\ell((I\colon \mathfrak{m})/\mathfrak{m}I)$成立；当且仅当 $\nu(I\colon \mathfrak{m})<\mathrm{r}(R/I)+\nu(I)$成立。■

下面的命题给出了局部环既是 Burch 环又是纤维积的充分条件。命题中的蕴含关系 (c)⇒(d) 对专家而言应是众所周知的，但我们不知道相关参考文献。它可由蕴含关系 (a)⇐(b)⇐(c) 推出，因此我们给出证明。

命题 4.3。 (1) 设$(R,\mathfrak{m})$ 是一个局部环。以下蕴含关系成立：$(\mathrm{a})\Leftarrow(\mathrm{b})\Leftarrow(\mathrm{c})\Rightarrow(\mathrm{d})$，其中

(a) 局部环 R 既是 *Burch* 环，也是非平凡纤维积，(b) 有上同调 $R\not\subseteq\mathfrak{m}^2$ 且嵌入维数 $R\geqslant 2$，(c) 局部环 R 是阿廷、拉伸的且非 *Gorenstein* 的，(d) 有不等式 $\mathrm{r}(R)\leqslant$ 嵌入维数 R。

(2) 假设阿廷局部环 R 满足 $\operatorname{edim} R=3\leqslant\mathrm{r}(R)$ 且 $\ell(R)\leqslant\mathrm{r}(R)+5$。则 R 是 Burch 环。证明。(1) (a)⇐(b)：由于 $\operatorname{Soc} R\not\subseteq\mathfrak{m}^2$，我们得到一个非零合成 $k\to\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$，由此可推出对某个 R-模 X有 $\mathfrak{m}\cong k\oplus X$。假设 $\operatorname{edim} R\geqslant 2$ 保证 X 非零。取相应的理想直和分解 $\mathfrak{m}=I\oplus J$，其中 $I\cong k$ 且 $J\cong X$。我们有 $R\cong R/I\times_k R/J$。由于 R/J 的极大理想同构于 k，局部环 R/J 是一个非域的阿廷超曲面。特别地，根据注释 2.5 和 2.7，R 既是非平凡纤维积，也是 Burch 环。

(b)⇐(c)：设 $t\geqslant 1$ 是满足 $\operatorname{Soc} R\subseteq\mathfrak{m}^t$ 的最大整数。诱导映射 $\varphi\colon \operatorname{Soc} R\to\mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1}$ 非零。假设 $t\geqslant 2$。由于 R 是拉伸的，我们有 $\ell(\mathfrak{m}^t/\mathfrak{m}^{t+1})=1$，这迫使 φ 为满射。因此，$\mathfrak{m}^t=\operatorname{Soc} R+\mathfrak{m}\mathfrak{m}^t$。中山引理表明 $\operatorname{Soc} R=\mathfrak{m}^t$。我们得到 $\mathrm{r}(R)=\nu(\operatorname{Soc} R)=1$，这与 R 不是 Gorenstein 的假设矛盾。因此，我们有 $t=1$，从而 $\operatorname{Soc} R\not\subseteq\mathfrak{m}^2$。

(c)⇒(d)：我们对 $\operatorname{edim} R$ 作归纳。可以假设 $\operatorname{edim} R\geqslant 2$。正如我们已经证明的，(c) 蕴含 (b)，且 (b) 蕴含 (a)，因此局部环 R 是 k 上的非平凡纤维积。存在具有相同剩余域 k 的局部环 S、T，使得 $R\cong S\times_k T$。可以看出，对于任意 $i\geqslant 1$，$\mathrm{r}(R)=\mathrm{r}(S)+\mathrm{r}(T)$，$\operatorname{edim} R=\operatorname{edim} S+\operatorname{edim} T$，且 $\mathrm{h}_i(R)=\mathrm{h}_i(S)+\mathrm{h}_i(T)$。由于 R 是拉伸的，S 和 T 也都是拉伸的。由于 $\operatorname{edim} S$ 和 $\operatorname{edim} T$ 小于 $\operatorname{edim} R$，归纳假设给出 $\mathrm{r}(R)=\mathrm{r}(S)+\mathrm{r}(T)\leqslant\operatorname{edim} S+\operatorname{edim} T=\operatorname{edim} R$。

(2) 设 $\overline{R}=R/\operatorname{Soc} R$。我们有 $\ell(R)=\ell(\overline{R})-\mathrm{r}(R)\leqslant 5$。根据 (1)，不妨设 $\operatorname{Soc} R\subseteq\mathfrak{m}^2$。由于 $\operatorname{edim} R=3$，R的希尔伯特函数为 (1, 3) 或 (1, 3, 1)。因此，$\overline{R}$ 是拉伸的。根据 Cohen 结构定理，$\overline{R}$存在一个维数为三的正则局部环 $(S,\mathfrak{n},k)$ 以及一个 S 的理想 I，使得 $R\cong S/I$。于是 $R\cong S/(I\colon \mathfrak{n})$。由于 R 不是完全交，我们必有 $\nu(I)>3$。由 (1) 得 $\mathrm{r}(R)\leqslant 3$。引理 4.2(3) 表明 $\nu(I\colon \mathfrak{n})\leqslant\binom{3+1}{2}=6\leqslant\mathrm{r}(R)+3<\mathrm{r}(R)+\nu(I)$，并且根据引理 4.2(2)，$R$ 是 Burch。■

下一个引理 a 给出了 Burch 指数的一个不等式，以及等式成立的充分条件 d.

引理 4.4. 设$(R,\mathfrak{m},k)$是一个深度零的局部环。假设 R不是域。以下结论成立。
(1) 有不等式$\mathrm{Burch}(R)\leqslant$嵌入维数$R$.(2) 设存在一个正则局部环$(S,\mathfrak{n})$使得 $R\cong S/I$。则有等式

y

$\mathrm{Burch}(R)=$嵌入维数R，前提是理想 I满足以下条件之一。(a) 存在一个 S的理想 J，使得 $0\neq J\subseteq\mathfrak{n}$且 $I=\mathfrak{n}J$.(b) 存在一个理想 $J\subseteq\mathfrak{n}^2$，使得 S/J是阿廷-戈伦斯坦环，且 $I=J:\ \mathfrak{n}$.(c) 存在一个整数 $s\geqslant 2$，使得 $I:\ \mathfrak{n}\not\subseteq\mathfrak{n}^s\supseteq I$.

证明。(1) 和 (2a) 的断言源自 [19, 命题 2.5]，，而 (2c) 是 [19, 命题 5.3] 的局部类比。剩下要证明 (2b)。由于 S/J是一个阿廷-戈伦斯坦环，因此对某个 $\sigma\in S$，有$\operatorname{Soc}S/J=(\sigma)\cong k$。此外，对正合列 $0\to\mathfrak{n}/J\to S/J\to k\to 0$取 S/J-对偶，可得同构$S/I=(S/J)/\operatorname{Soc}(S/J)\to\operatorname{Hom}_{S/J}(\mathfrak{n}/J,S/J)$，它将 $1\in S/I$映到包含映射 $\theta\colon\mathfrak{n}/J\to S/J$。

我们断言等式 $\mathfrak{n}I:(I:\mathfrak{n})=\mathfrak{n}^2$成立。事实上，假设存在一个元素 $x\in\mathfrak{n}I:(I:\ \mathfrak{n})$，满足 $x\notin\mathfrak{n}^2$。由于 $x\in\mathfrak{n}/J$是某个极小生成元系的一部分，故存在一个满同态 $\alpha:\ \mathfrak{n}/J\to k$，满足 $\alpha(x)=1$。存在一个单同态 $\beta:k\to S/J$，满足 $\beta(1)=\sigma$。我们找到一个元素 $y\in S$，满足$\beta\alpha=y\theta$。由于 $\sigma\in$ 上同调 S/J，我们有 $\mathfrak{n}\beta=0$，从而有 $\mathfrak{n}y\theta=\mathfrak{n}\beta\alpha=0$。于是得到 $\mathfrak{n}y\subseteq$零化子$_S(\theta)=I$，以及 $y\in I:\mathfrak{n}$。 x的选取蕴含 $xy\in\mathfrak{n}I\subseteq J$。我们有 $\sigma=\beta\alpha(x)=y\theta(x)=xy=0$属于 S/J，这与 $0\neq$上同调$S/J=(\sigma)$这一事实矛盾。该断言得证。

由于 $I\neq\mathfrak{n}$，我们有 $I:\ \mathfrak{n}\subseteq\mathfrak{n}$。因此 $I(I:\ \mathfrak{n})\subseteq\mathfrak{n}I$，这意味着 $I\subseteq\mathfrak{n}I:\ (I:\ \mathfrak{n})$。该断言蕴含$I\subseteq\mathfrak{n}^2$。再次使用该断言，我们得到$\operatorname{edim}R=\operatorname{edim}S=\ell(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)=\ell(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}I:\ (I:\ \mathfrak{n}))=\mathrm{Burch}(R)$。■

我们给出嵌入维数为二时判定 Burch 环以及 Burch 指数为二的环的简单准则。第一个断言是对 [21, 定理 6.2]的直接改写。

命题 4.5. 设$(R,\mathfrak{m},k)$是一个维数为二的正则局部环。设 I是 R的一个 $\mathfrak{m}$-一次理想。取 R-模 R/I的一个极小自由分解 $0\to F_2\xrightarrow{\partial}F_1\to F_0\to R/I\to 0$。
(1) 以下四个条件等价。(a) 局部环 R/I 是 *Burch* 环。(b) 存在 R 的一个正则参数系 x,y 以及一个整数 $n\geqslant 1$，使得$\mathrm{I}_1(\partial)=(x,y^n)$。(c) 理想$\mathrm{I}_1(\partial)$不包含于 $\mathfrak{m}^2$。(d) 存在不等式$\mathrm{r}(R/(I:\ \mathfrak{m}))<2\mathrm{r}(R/I)$。

(2) 假设 $I\neq\mathfrak{m}$。等式 $\mathrm{Burch}(R/I)=2$ 成立，当且仅当等式 $\mathrm{I}_1(\partial)=\mathfrak{m}$ 成立。

证明。(1) 根据 [21, 定理 6.2]，条件 (a) 和 (b) 等价，而显然 (b) 蕴含 (c)。假设 $J:=\mathrm{I}_1(\partial)$ 不包含于 $\mathfrak{m}^2$。我们可以选取一个不属于 $\mathfrak{m}^2$ 的元素 $x\in J$，以及一个元素$y\in\mathfrak{m}$，使得 x,y 是 $\mathfrak{m}$ 的一组生成元。由于 $R/(x)$ 是一个带有一致化子 y 的离散赋值环，理想 $J/(x)$ 在 $R/(x)$ 中由 y^n 生成，其中某个 $n>0$。因此 $J=(x,y^n)$。于是 (c) 蕴含 (b)。

只需证明 (a) 和 (d) 等价即可。我们有 $\nu(I)=$秩 $F_1=$秩 F_2+秩 $F_0=\mathrm{r}(R/I)+1$。类似地，我们有 $\nu(I:\ \mathfrak{m})=\mathrm{r}(R/(I:\ \mathfrak{m}))+1$（注意，即使 $I=\mathfrak{m}$，这也成立）。引理 4.2 表明，局部环 R/I 具有 Burch 性质等价于不等式 $\nu(I:\ \mathfrak{m})<\mathrm{r}(R/I)+\nu(I)$，而这又等价于不等式$\mathrm{r}(R/(I:\ \mathfrak{m}))<2\mathrm{r}(R/I)$。

(2) 为证明“当且仅当”中的“仅当”部分，设$\mathrm{Burch}(R/I)=2$。由 (1) 和注 2.5(5)，存在 R 的正则参数系 x,y 以及一个整数 $n>0$，使得$\mathrm{I}_1(\partial)=(x,y^n)$。由于 $\ell_R(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=2$，我们有 $\mathfrak{m}I:(I:\mathfrak{m})=\mathfrak{m}^2$。因此， x 不属于 $\mathfrak{m}I:(I:\mathfrak{m})$。由 [19, 命题 3.2]，， R-模 k 是 I/xI 的一个直和项。将 $R/(x)$ 与 $F_\bullet$ 张量，得到 $R/(x)$-模 I/xI 的一个极小自由表示 $0\to F_2/xF_2\xrightarrow{\partial}F_1/xF_1\to I/xI\to 0$。于是$\mathrm{I}_1(\partial)=\mathrm{I}_1(I/xI)\supseteq\mathrm{I}_1(k)=\mathfrak{m}/(x)$。现在我们得到 $\overline{\mathfrak{m}}=\mathrm{I}_1(\partial)+(x)=\mathrm{I}_1(\partial)$。

为证明“若”部分，假设 $\mathfrak{m}^2\subsetneq\mathfrak{m}I:(I:\mathfrak{m})$。那么存在一个元素 $x\in\mathfrak{m}I:(I:\mathfrak{m})\subseteq\mathfrak{m}$使得 x 不属于 $\mathfrak{m}^2$。将 $R/(x)$ 与 $F_\bullet$张量积，可知 ∂ 给出了 I/xI的极小自由表示。由于$\mathrm{I}_1(\partial)=\mathfrak{m}$，我们有$\mathrm{I}_1(\partial)=\mathfrak{m}/(x)$。因为 $R/(x)$ 是离散赋值环，存在一个元素 $y\in\mathfrak{m}$使得 $\mathfrak{m}/(x)=(y)$。因此，我们可以对 $R/(x)$ 上的矩阵进行初等变换 $\partial\cong\left(\begin{smallmatrix}y&**&*\end{smallmatrix}\right)\cong\left(\begin{smallmatrix}y&0\\0&*\end{smallmatrix}\right)$。由此可知， k 是 I/xI的直和项。利用 [19, 命题 3.2]，，得到 $x\notin\mathfrak{m}I:(I:\mathfrak{m})$。这与 x的选取矛盾，因此得到 $\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}I:(I:\mathfrak{m})$。于是，$\mathrm{Burch}(R/I)=\ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=2$。■

利用命题可以轻易找到 Burch 指数为一的局部环4.5 .

例 4.6。考虑域 $R=k[x,y]/(x^2,xy^2,y^4$上的多项式环的商 k。则 R是一个阿廷非 Gorenstein Burch 环，且 $\ell(R)=6$, $\mathrm{r}(R)=2$，$\mathrm{Burch}(R)=1$，由 [19, 例 4.5]。

比这更一般地，设 S 是维数为二的正则局部环，具有正则参数系 x,y。设 $r\geqslant 1$ 为整数。令 $I_r=(x,y^2)^r$ 以及 $R=S/I_r$。注意 $I_2=(x^2,xy^2,y^4)$。S的理想 I_r 由$(r+1)\times r$ 矩阵 $\begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0\\ y^2 & x & \cdots & 0\\ 0 & y^2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & x\\ 0 & 0 & \cdots & y^2 \end{pmatrix}$ 的 r-子式极小生成。希尔伯特–伯奇定理[10, 定理1.4.17] 保证$\mathrm{r}(R)=r$。由 [21, 推论6.5] 可知 R 是Burch的。利用注2.5(5)与引理4.4(1)，我们有 $\mathrm{Burch}(R)\in\{1,2\}$。应用命题4.5(2)，我们得到$\mathrm{Burch}(R)=1$。由于 I_1 是完全交，容易验证 $\ell(R)=\ell(S/I_r)=\ell(S/I_1)\binom{r+1}{2}=r(r+1)$。因此我们有 $\ell(R)\not\leqslant \mathrm{r}(R)(\mathrm{r}(R)+1)$以及 $\ell(R)<2\mathrm{r}(R)(\mathrm{r}(R)+1)$。

上述例子可以推广为以下定理。

定理 *4.7.* *设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个嵌入维数为 $R=2$ 的阿廷局部环。那么以下断言成立。(1) 若有等式 $\ell(R)<2r(R)(r(R)+1)$，则 $\mathrm{Burch}(R)\geqslant 1$，即局部环 R 是 Burch。(2) 若不等式 $\ell(R)<r(R)(r(R)+1)$ 成立，则有等式 $\mathrm{Burch}(R)=2$。*

证明。Cohen 结构定理保证 R 同构于某个二维正则局部环 $(S,\mathfrak{n},k)$ 关于理想 $I\subseteq\mathfrak{n}^2$ 的商 S/I。令 $r=\mathrm{r}(R)$。希尔伯特–伯奇定理蕴含，S-模 S/I 有一个极小自由分解 $0\to S^{\oplus r}\xrightarrow{\varphi} S^{\oplus(r+1)}\to S\to S/I\to 0$，且 $I=\mathrm{I}_r(\varphi)$。

(1) 注 2.5(5) 表明 R 是 Burch，当且仅当 $\mathrm{Burch}(R)\geqslant 1$。现在，假设 R 是非Burch。命题4.5(1) 表明 $\mathrm{I}_1(\varphi)$ 包含于 $\mathfrak{n}^2$。因此 $\mathfrak{n}I=\mathfrak{n}\mathrm{I}_r(\varphi)\subseteq\mathfrak{n}\,\mathrm{I}_1(\varphi)^r\subseteq\mathfrak{n}^{2r+1}$，所以 $\mathfrak{n}I\subseteq I\cap\mathfrak{n}^{2r+1}$。我们有

$$\begin{aligned} r+1=\ell(I/\mathfrak{n}I)&\geqslant \ell(I/I\cap\mathfrak{n}^{2r+1})=\ell(I+\mathfrak{n}^{2r+1}/\mathfrak{n}^{2r+1})=\ell(\mathfrak{n}^{2r}/\mathfrak{n}^{2r+1})-\ell(\mathfrak{n}^{2r}/I+\mathfrak{n}^{2r+1})\\ &\geqslant \ell(\mathfrak{n}^{2r}/\mathfrak{n}^{2r+1})-\ell(\mathfrak{n}^{2r}/I)=2r+1+\ell(S/\mathfrak{n}^{2r})-\ell(S/I)=2r+1+\tbinom{2r+1}{2}-\ell(S/I), \end{aligned}$$

并且可得 $\ell(S/I)\geqslant \binom{2r+1}{2}+r=2r(r+1)$。由此，断言的证明完成。

(2) 由 (1)、注 2.5(5) 和引理 4.4(1)，我们有 $\mathrm{Burch}(R)\leqslant 2$。假设 $\mathrm{Burch}(R)\leqslant 1$。命题 4.5(2) 表明，对于某些 $\mathfrak{n}$ 的极小生成元 x、y，$\mathrm{I}_1(\varphi)\subseteq(x,y^2)$。于是 $I=\mathrm{I}_r(\varphi)\subseteq\mathrm{I}_1(\varphi)^r\subseteq(x,y^2)^r$。利用例 4.6 中的结论，我们得到 $\ell(S/I)\geqslant\ell(S/(x,y^2)^r)=r(r+1)$。■

下面这个例子的两个陈述分别说明：定理 4.7中 (1) 的假设不能减弱，并且定理 4.7 中 (1) 与 (2) 的每个逆命题都可能不成立。

例 4.8. 设 S 是维数为二的正则局部环。取 S 的正则参数系 x,y。设 r 为正整数。

(1) 令 $I_r=(x^2,y^2)^r$ 与 $R=S/I_r$。S 的理想 I_r 由 $(r+1)\times r$ 矩阵 $\begin{pmatrix} y^2 & 0 & \cdots & 0\\ x^2 & y^2 & \cdots & 0\\ 0 & x^2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & y^2\\ 0 & 0 & \cdots & x^2 \end{pmatrix}$ 的 r-子式极小生成。通过与例 4.6 中类似的观察，我们得到 $\mathrm{r}(R)=r$ 以及 $\ell(R)=2r(r+1)$。此外，由 [21, 推论 6.5] 可知 R 不是 Burch。

（2）令 $I_r=(x^r,xy,y^r)$ 与 $R=S/I_r$。S 的理想 I_r 由 3×2 矩阵 $\begin{pmatrix} y & 0\\ x^{r-1} & y^{r-1}\\ 0 & x \end{pmatrix}$ 的 2 阶子式极小生成。命题 4.5 表明 R 是 Burch 的，且 $\mathrm{Burch}(R)=2$。通过直接计算，我们得到 $\mathrm{r}(R)=2$ 以及 $\ell(R)=2r-1$。因此，对于 $r\geqslant 7$，我们有 $\ell(R)\geqslant 12=2\mathrm{r}(R)(\mathrm{r}(R)+1)$。

作为上述定理的一个应用，我们得到下面的推论，它给出了给定的阿廷非戈伦斯坦局部环成为 Burch 环的数值充分条件。

推论 4.9. （1）每个满足 嵌入维数 $R=2$ 且 $\ell(R)\leqslant 11$ 的非戈伦斯坦局部环 R 是 *Burch* 环。（2）设 R 为 $\ell(R)\leqslant 5$ 的非 *Gorenstein*。则 $\mathrm{Burch}(R)=$ 嵌入维数 R。特别地，R 是 *Burch* 环。

证明。(1) 由于 $r(R)\geqslant 2$，我们有 $\ell(R)\leqslant 11<12\leqslant 2r(R)(r(R)+1)$。由定理 4.7(1)可得该断言。(2) 我们首先处理嵌入维数为 $R\leqslant 2$的情形。由于 R 是非 Gorenstein的，我们有嵌入维数 $R=2$ 且 $\mathrm{r}(R)\geqslant 2$。由 $\ell(R)\leqslant 5<6=2(2+1)\leqslant\mathrm{r}(R)(\mathrm{r}(R)+1)$，根据定理 4.7(2)可知 $\mathrm{Burch}(R)=2=$ 嵌入维数 R。现在设嵌入维数为 $R\geqslant 3$。由于 $\ell(R)\leqslant 5$，可能的希尔伯特函数为 (1, 3)、(1, 3, 1) 和 (1, 4)。由此可知 R 是拉伸的。命题 4.3(1)和引理 4.4(2)蕴含 $\mathrm{Burch}(R)=$ 嵌入维数 R。■

我们略微　　通过使用长度至多为的情形下的希尔伯特函数，可以得到更详细的观察　　7.

注 4.10. 设 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个满足嵌入维数 $R \geqslant 3$的阿廷局部环。
(1) 假设 $\ell(R) = 6$。则可能的希尔伯特函数为 (1, 3, 2)、(1, 3, 1, 1)、(1, 4, 1) 和 (1, 5)。除 (1, 3, 2) 的情形外，该环 R是拉伸的。在这种情形下，根据命题 4.3(1)， R要么是 Gorenstein 环，要么是 Burch 环。例 5.10 和注 5.11 给出了型为 2、希尔伯特函数为 (1, 3, 2) 的非 Gorenstein 非Burch 局部环的例子。

(2) 假设 $\ell(R) = 7$。则 R 的希尔伯特函数是以下之一。

(a) (1, 3, 3), (b) (1,3, 2,1), (c) (1,3, 1, 1, 1), (d) (1, 4, 2), (e) (1, 4, 1, 1), (f) (1, 5, 1), (g) (1,6).

我们来考察在这些情形中， R 的 Gorenstein 和 Burch 性质。

- 情形 (c)、(e)、(f)、(g)：环 R 是拉伸的，因此根据命题 4.3(1)，它是 Burch 环或 Gorenstein 环。
- 情形 (a)：由于上同调 $R \supseteq \mathfrak{m}^2$，我们得到 $\mathrm{r}(R) \geqslant \ell(\mathfrak{m}^2) =$嵌入维数 $R = 3$。命题 4.3(2) 表明 R是 Burch 环。
- 情形 (d)： R 不一定是 Gorenstein 环或 Burch 环。事实上，阿廷局部环

$$R = k[x, y, z, w]/(x^2, y^2, xz, xw, yz, yw, z^2, w^2) \cong k[x, y]/(x^2, y^2) \times_k k[z, w]/(z^2, w^2)$$

的希尔伯特函数为 (1，4，2)，且根据 [21, 命题 5.1 和 6。15]<style> .
顺便提一下，局部环 R 仍然是一致支配的；参见稍后陈述的命题 6.3。
- 情形 (b)：局部环 R 既非 Gorenstein 环，也非 Burch 环；参见稍后陈述的例子 5.10 。

5. Exact pairs of zero-divisors

本节延续上一节的讨论，主要关注长度为六的阿廷局部环。我们先回顾零因子的精确对的定义。

定义 5.1. $\mathfrak{m}$ 中的两个元素组成的有序对 (x, y) 称为 R 的零因子的精确对，如果等式 $0 :_R x = yR$ 和 $0 :_R y = xR$ 成立。

The 本节主要结果的证明需要以下技术引理。

引理 5.2. 设 R 是一个阿廷局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$ ，剩余域为 k。
(1) 设 R 的希尔伯特函数为 $(1, n, n-1)$，其中 $n \geqslant 2$。设 x, y 是 $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$的元素。那么，$(x, y)$是 R 的零因子的精确对，当且仅当 $xy = 0$ 且 $x\mathfrak{m} = y\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$。(2) 若 $\mathrm{h}_2(R) \leqslant 2$，则存在一个元素 $v \in \mathfrak{m}$ 使得 $v\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$。

证明。 (1) 等价关系中的“若”部分由 [16, 引理 4.3] 得出。我们证明“仅若”部分。假设 (x, y) 是零因子的精确对。由于 $\mathfrak{m}^3 = 0$，我们有 $(x) : y \supseteq 0 : \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2$。因此，$\mathfrak{m}^2 = (x) \cap \mathfrak{m}^2 \subseteq x(\mathfrak{m}^2 : x) \subseteq x\mathfrak{m}$，并且等式 $\mathfrak{m}^2 = x\mathfrak{m}$ 成立。类似地，我们得到等式 $\mathfrak{m}^2 = y\mathfrak{m}$。

(2) 若 $\mathrm{h}_2(R) = 0$，则 $\mathfrak{m}^2 = 0 = 0\mathfrak{m}$。考虑 $\mathrm{h}_2(R) = 1$ 的情形。商 $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 是由 $\{xy \mid x, y \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2\}$ 张成的一维k-向量空间。由于向量空间 V 的每组生成元都包含 V 的一个基，因此存在元素 $x, y \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$，使得 xy 是 $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 的一个基。由中山引理可知 $\mathfrak{m}^2 = (xy) = x\mathfrak{m}$。最后，考虑 $\mathrm{h}_2(R) = 2$ 的情形。此时 $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 是由 $\{xy \mid x, y \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2\}$ 张成的二维 k-向量空间。存在元素 $x, y, z, w \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$，使得 xy, zw 是 $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 的一个基。若 $xw, xy \in \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 是 $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 的一个基，则由中山引理可得 $\mathfrak{m}^2 = (xw, xy) = x\mathfrak{m}$。若对某个 $u \in k^\times$ 有 $xw = uxy$，则 xw, zw 是 $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 的一个基，因此 $\mathfrak{m}^2 = (xw, zw) = w\mathfrak{m}$。因此，我们可以假设 $xw = 0$。同理，我们可以假设 $zy = 0$。则 $(y + w)x$、$(y + w)z$ 是 $\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 的一个基，并且得到 $\mathfrak{m}^2 = (y+w)\mathfrak{m}$。■

以下定理是本节的主要结果。它描述了长度六的非 Gorenstein 非Burch局部环的结构。

定理 5.3。 设$(S, \mathfrak{n}, k)$ 是一个正则局部环，并设 I 是 S 的一个 $\mathfrak{n}$-一次理想，使得 $I \subseteq \mathfrak{n}^2$ 且 $\ell(S/I) = 6$。假设局部环 S/I 既非 *Gorenstein* 也非 *Burch*。那么有嵌入维数 $S = 3$,$\mathrm{r}(S/I) = 2$, $\nu(I) = 4$，并且 S/I 中存在一对零因子的精确对。

证明。令 $R = S/I$ 和 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}/I$。由推论 4.9(1)可知，嵌入维数 $R \geqslant 3$。根据注 4.10(1)， R的希尔伯特函数必为 (1, 3, 2)，因此嵌入维数 $S =$嵌入维数 $R = 3$。由命题 4.3(1)可得， $\mathfrak{m}^2 =$上同调 R，这意味着 $I : \mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2$ 且 $\mathrm{r}(R) = 2$。因此， $\nu(I : \mathfrak{n}) = \nu(\mathfrak{n}^2) = 6$。由于 R 不是 Burch 环，我们有 $\mathfrak{n}I = \mathfrak{n}(I : \mathfrak{n}) = \mathfrak{n}^3$。由于 R 不是完全交，我们有 $\operatorname{ht} I \neq \nu(I)$。应用引理 4.2,

我们得到 $3=\operatorname{ht} I<\nu(I)\leqslant\nu(I:\mathfrak{n})-\mathrm{r}(R)=6-2=4$，从而 $\nu(I)=4$。现在，我们唯一需要证明的是 R 存在一对零因子的精确对。

利用引理 5.2(2)，我们可以选取一个元素 $x\in\mathfrak{m}$，使得 $x\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$。中山引理保证 $x\notin\mathfrak{m}^2$。我们注意到 $\ell((x))=1+\ell(x\mathfrak{m})=1+2=3$。正合列 $0\to 0:x\to R\to(x)\to 0$ 表明 $\ell(0:x)=\ell(R)-\ell((x))=3$，这意味着 $0:x\not\subseteq\mathfrak{m}^2$。取 $y\in(0:x)\setminus\mathfrak{m}^2$。根据引理 5.2(1)，我们可以假设 $y\mathfrak{m}\neq\mathfrak{m}^2$，由此得到 $\ell((y))=1+\ell(y\mathfrak{m})<1+\ell(\mathfrak{m}^2)=3$。此外，$y$ 不属于$\mathfrak{m}^2=$上同调 R，即 $\ell((y))>1$。因此，$\ell((y))=2$。我们还注意到 $\ell(0:y)=\ell(R)-\ell((y))=4$，并且$\ell((0:y)/\mathfrak{m}^2)=\ell(0:y)-\ell(\mathfrak{m}^2)=2$。令 $\pi\colon S\to R$为典范满射，且令 X,Y为 $\mathfrak{n}$ 的极小生成元系的一部分，使得 $\pi(X)=x$ 且 $\pi(Y)=y$。接下来分几种情形讨论。

（1）我们考虑情形 $y^2=0$。将 $\mathfrak{m}=(x,y,z)$ 和 $\mathfrak{n}=(X,Y,Z)$ 写成 $\pi(Z)=z$。我们有 $\mathfrak{m}^2=x\mathfrak{m}=x(x,y,z)=(x^2,xz)$。换言之，$x^2$、$xz$ 构成 $\mathfrak{m}^2=\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ 的 k-基。注意到 $0\neq y\mathfrak{m}=y(x,y,z)=(yz)$。存在 a、b、c、$d\in R$ 使得 $yz=ax^2+bxz$、$z^2=cx^2+dxz$。对于 a、b、c、d 的任意提升 A、B、C、$D\in S$，我们看到

$$J:=(XY,Y^2,YZ-AX^2-BXZ,Z^2-CX^2-DXZ)\subseteq I.$$

注意，上述二次式在 $\mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}^3$ 中的剩余类在 k 上线性无关。由于 $J\subseteq I\subseteq\mathfrak{n}^2$，映射 $J\to\mathfrak{n}^2/\mathfrak{n}^3$ 可经由 $I/\mathfrak{n}I$ 分解。因此，这些二次式在 $I/\mathfrak{n}I$ 中的剩余类也线性无关。于是，它们是 I 的一个极小生成元系的一部分。由于 $\dim_k(I/\mathfrak{n}I)=\ell(I)=4$，它们实际上构成 I 的一个极小生成元系，即 $J=I$。

(1a) 假设 $a\notin\mathfrak{m}$。则 A 是 S 的单位。将 Y 替换为 $A^{-1}Y$，我们可以假设 $A=1$。我们有

$$I+(Y)=(Y,X^2+BXZ,Z^2-CX^2-DXZ)=(Y,X(X+BZ),Z((BC-D)X+Z)).$$

假设 $1-B(BC-D)\in\mathfrak{n}$。则模 $(X+BZ)+\mathfrak{n}^2$ 我们有

$$(BC-D)X+Z\equiv(BC-D)(-BZ)+Z=Z(1-B(BC-D))\equiv 0,$$

从而 $I+(Y)\subseteq(Y,X+BZ)+\mathfrak{n}^3\subseteq(Y,X+BZ)+\mathfrak{n}(I+(Y))$，因为 $\mathfrak{n}I=\mathfrak{n}^3$。中山引理表明 $I+(Y)\subseteq(Y,X+BZ)$，这与 I是 $\mathfrak{n}$-准素的这一事实矛盾。结果是$1-B(BC-D)\notin\mathfrak{n}$，从而 $1-b(bc-d)\notin\mathfrak{m}$。令 $w=(d-bc)x+cy-z$。由于 xz、$yz=x^2+bxz$构成 $\mathfrak{m}^2$ 的一个k-基，我们有 $\mathfrak{m}^2=(xz,yz)=z\mathfrak{m}$。此外，我们有 $z^2=cx^2+dxz=cyz+(d-bc)xz$，由此得到 $zw=0$。矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}d-bc&-1\\-1&-b\end{smallmatrix}\right)$ 可逆，因为 $b(bc-d)-1\notin\mathfrak{m}$。因此 $xw=(d-bc)x^2-xz$与 $yw=-yz=-x^2-bxz$ 构成 $\mathfrak{m}^2$ 的一个 k-基，因为 x^2 与 xz同样如此。于是 $\mathfrak{m}^2=(xw,yw)=w\mathfrak{m}$。引理 5.2(1) 表明 (z,w) 是 R 中零因子的精确对。

(1b) 假设 $a\in\mathfrak{m}$。令 $z'=z+x$，则有 $\mathfrak{m}=(x,y,z')$，$yz'=(a-b)x^2+bxz'$以及 $z'^2=(c-d-1)x^2+(d+2)xz'$。由于 $0\neq yz=ax^2+bxz$且 $a\in\mathfrak{m}$，我们必有 $b\notin\mathfrak{m}$，从而$a-b\notin\mathfrak{m}$。论证（1a）保证了在 R 中存在零因子的精确对。

（2）我们考虑 $y^2\neq 0$这一情形。由于 $(0:y)/\mathfrak{m}^2$ 的长度为 2 且不包含 y，所以有 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2=(0:\bar{y})/\mathfrak{m}^2\oplus k\bar{y}$。因此，存在 $z\in\mathfrak{m}\setminus\mathfrak{m}^2$ 使得 $yz=0$，并且 $\{x,y,z\}$ 是 k-基的$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$。于是 $\mathfrak{m}=(x,y,z)$。将 $\mathfrak{n}=(\bar{X},\bar{Y},Z)$ 写成 $\pi(Z)=z$。由于 $\mathfrak{m}^2=x\mathfrak{m}=(x^2,xz)$，存在$a$、$b$、$c$、$d\in R$，使得 $y^2=ax^2+bxz$、$z^2=cx^2+dxz$。对于 a、b、c、$d\in R$的任意提升 A、B、C、$D\in S$，我们有$J:=(XY,YZ,Y^2-AX^2-BXZ,Z^2-CX^2-DXZ)\subseteq I$。与（1）中相同的论证表明 $J=I$。（2a）假设 $a\notin\mathfrak{m}$。那么 A 是 S 的单位。我们有

$$\begin{aligned}I+(Y)&=(Y,AX^2+BXZ,Z^2-CX^2-DXZ)\\&=(Y,X(AX+BZ),Z(Z-(D-A^{-1}BC)X)).\end{aligned}$$

与 (1a) 类似，如果 $A^2-B(BC-AD)\in\mathfrak{n}$，则

$$Z-(D-A^{-1}BC)X\equiv Z-(D-A^{-1}BC)(-A^{-1}BZ)=A^{-2}Z(A^2-B(BC-AD))\equiv 0$$

模掉 $(AX+BZ)+\mathfrak{n}^2$，便可推出矛盾。因此我们得到 $A^2-B(BC-AD)\notin\mathfrak{n}$，这表明 $a^2-b(bc-ad)\notin\mathfrak{m}$。令 $w=ax-y+bz$。注意到 $(x+y)x=x^2$和 $(x+y)z=xz$构成了 $\mathfrak{m}^2$ 的一个 k-基，因此 $(x+y)\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$。此外，$y(x+y)=y^2=ax^2+bxz=ax(x+y)+bz(x+y)$，由此可得 $(x+y)w=0$。最后，条件 $a(bd+a)-b^2c=a^a-b(bc-ad)\notin\mathfrak{m}$确保元素 $xw=ax^2+bxz$和 $zw=bcx^2+(bd+a)xz$构成 $\mathfrak{m}^2$ 的一个 k- 基。因此，$w\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^2$。引理 5.2(1) 表明，$(x+y,w)$ 是 R 中零因子的精确对。

(2b) 假设 $a \in \mathfrak{m}$。令 $z' = z + x$，则有 $\mathfrak{m} = (x, y, z')$、$yz' = 0$、$y^2 = (a-b)x^2 + bxz'$ 以及 $z'^2 = (c-d-1)x^2 + (d+2)xz'$。由于 $0 \neq y^2 = ax^2 + bxz$ 且 $a \in \mathfrak{m}$，我们必有 $b \notin \mathfrak{m}$，从而 $a - b \notin \mathfrak{m}$。(2a)中的论证保证了 R 中存在零因子的精确对。

现在该定理的证明已经完成。 ■

接下来，我们回顾Tor/Ext友好性、嵌入变形以及G-正则性的定义，然后说明局部环的这些性质如何与支配性相关。

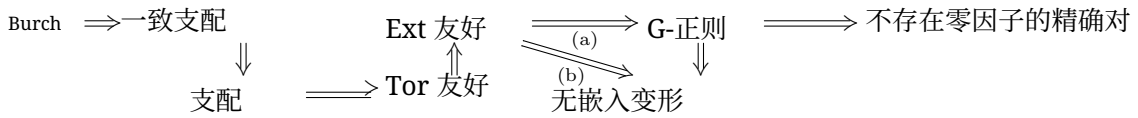
定义5.4.（1）我们称局部环 R 是Tor 友好的，是指若 M 与 N 为 R-模，且对所有 $i \gg 0$均有$\operatorname{Tor}_i^R(M,N) = 0$，则要么$\operatorname{pd}_R M < \infty$，要么$\operatorname{pd}_R N < \infty$。（2）对偶于（1），我们称 R 是Ext 友好的，是指若 M、N为 R-模，且对所有 $i \gg 0$均有$\operatorname{Ext}_R^i(M,N) = 0$，则要么$\operatorname{pd}_R M < \infty$，要么$\operatorname{id}_R N < \infty$。（3）我们称 R 具有嵌入变形，是指存在局部环 S，其极大理想为 $\mathfrak{n}$，以及一个S-正则元 $f \in \mathfrak{n}^2$，使得 $\widehat{R} \cong S/(f)$。（4）按照 [52]，我们称局部环 R 是G-正则的，如果每个全自反 R-模都是自由的。

备注5.5。(1) 如果 R 是 Tor 友好的，那么根据 [4, 命题 5.5]，它就是 Ext 友好的。如果 R 是非 Gorenstein 且 Ext 友好的，那么根据定义，它是 G-正则的。

(2) 如果 $(x,\ y)$ 是 R的零因子的精确对，那么根据 [52, 命题 2.4]，$R/(x)$ 和 $R/(y)$ 是非自由的全反身 R-模，因此 R 不是 G-正则的。

(3) 如果 R 有嵌入变形，那么 R 不是 G-正则的。这由 [52, 命题 4.6 和推论 4.7] 可得（注意，[52, 命题 4.6] 假设局部环是 G-正则的，但在其“仅当”部分的证明中并未用到这一假设）。此外，如果 R 有嵌入变形且是 Ext 友好的，那么它是一个超曲面。这由 [50, 推论 4.4] 可得（注意，[50, 推论 4.4] 假设局部环是 Cohen–Macaulay 的，但在其证明中并未用到这一假设）。

(4) 假设 R 是余维至多为三的 Cohen–Macaulay 环。那么 R 是 Tor 友好的，当且仅当R 是 Ext 友好的；这又当且仅当 R 没有嵌入变形；参见 [40, 定理 3.2 和 3.8]。(5) 根据 (1)、(2)、(3)，[55, 定理 1.1] 和 [56, 推论 5.5]，可得以下层级：



其中假定对于 (a)，该环不是 Gorenstein 环，对于 (b)，该环不是超曲面。

(6) 希尔伯特函数形如 $(1, e, e-1)$ 的阿廷局部环 R未必具有零因子的精确对。事实上，设 $S = k[\![x,y,z]\!]$ 是域 k上的形式幂级数环，且 $\mathfrak{n} = (x,y,z)$ 是 S的极大理想。设 $I = (x^2, xy, xz, y^2, yz^2, z^3)$ 是 S的理想，并令 $R = S/I$。则 R 是一个希尔伯特函数为 (1,3,2) 的阿廷局部 k-代数。由于 $\mathfrak{n}I : \mathfrak{n} \supsetneq z^2 \in I : \mathfrak{n}$，环 R是 Burch 环。由 (5) 可知，R 不具有零因子的精确对。

(7) 关于 (6)，对于无限域 k，每个“泛型”标准分次 k-代数，其希尔伯特函数具有 $(1,\ e,\ e-1)$ 的形式，都有一对零因子的精确对；详见 [16, 推论 8.5]。我们还请读者参阅 [30, 35]，了解对零因子的精确对的进一步研究；并参阅 [59]，了解研究希尔伯特函数具有 $(1,\ e,\ e-1)$ 形式的阿廷局部环的其他方法。

鉴于上述注5.5(5) 中给出的蕴含关系图，自然会提出以下问题。

问题 5.6。无嵌入变形与不存在零因子的精确对之间是否存在蕴含关系?

根据上述定理，我们得到以下结果：当基局部环的长度较小时，迄今讨论的各种条件实际上彼此等价。

推论 5.7. 对于阿廷非戈伦斯坦局部环 R，满足 $\ell(R) \leqslant 6$ 时，以下条件等价。(1) R 是 *Burch*。(2) R 是一致支配的。(3) R 是支配的。(4) R 是 *Tor* 友好的。(5) R 是 *Ext* 友好的。(6) R 是 *G*-正则的。(7) R 没有嵌入变形。(8) R 没有零因子的精确对。

证明。定理 5.3 和推论 4.9(2) 表明 (8) 蕴含 (1)。定理 5.3 指出 R 是 Burch 环，除非嵌入维数 $R = 3$。根据注 5.5(4)，我们有 (7) 蕴含 (4)。其余蕴含关系由注 5.5(5) 给出。 ■

注 5.8。(1) 如果去掉假设$\ell(R) \leqslant 6$，推论 5.7 中的蕴含关系 (3)⇒(1) 就不再成立。事实上，存在一个支配局部环 R 满足 $\ell(R) = 7$，但它不是 Burch 环；参见注 4.10(2)。(2) 如果去掉假设 $\ell(R) \leqslant 6$，推论 5.7 中的蕴含关系 (6)⇒(5) 就不再成立。事实上，令 k 为一个域，并设 $S = k[\![x, y, z, w]\!]$, $R = S/(x^2, xy, y^2, z^2, zw, w^2)$，$T = S/(x^2, xy, y^2)$ 和 $C = \mathrm{Ext}^2_T(R, T)$。那么 R 是一个阿廷非戈伦斯坦局部环，满足 $\ell(R) = 9$，而 C 是一个半对偶化 R-模，具有 $\mathrm{pd}_R C = \mathrm{id}_R C = \infty$；参见 [34, 例 1.2]。因此，$R$ 不是 Ext 友好。另一方面，R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 满足 $\mathfrak{m}^3 = 0$，且 R 的希尔伯特函数为 (1, 4, 4)。由[59, 定理 3.1]可知，R 是 G-正则。因此，(5) 不成立，但 (6) 成立。

环 R 在注 5.8(2) 中具有如下性质：$\ell(R) = 9$，因此自然会问，当 $\ell(R) = 7,8$ 时，推论 (5) 中的蕴含 (6)5.7 是否成立。我们不知道答案，因此提出以下问题。

问题 5.9。设 R 是长度为 7 或 8 的 G-正则非 Gorenstein 局部环。那么 R 是否是 Ext-friently?

现在我们将构造一个具体例子：一个确实具有零因子的精确对的阿廷非 Gorenstein 非 Burch 局部环。注意，这样的环长度可以为 6，希尔伯特函数为 (1,3,2)；也可以长度为 7，希尔伯特函数为 (1, 3, 2,1)。

例 5.10。设 $S = k[\![x, y, z]\!]$ 是域 k上的形式幂级数环，并用 $\mathfrak{n}$ 表示 S的极大理想。取一个整数 $n \geqslant 2$。令 $I = (xy, xz, yz, x^2 + y^2 + z^n)$ 为 S 的一个理想，并设 $R = S/I$。理想 $J = (x^3, xy, y^3, xz, yz, z^{n+1})$ 包含于 I 中。因此，R的希尔伯特函数满足

$$\mathrm{h}_i(R) \leqslant \mathrm{h}_i(S/J) = 1 \text{ for all } 3 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{and} \quad \mathrm{h}_i(R) \leqslant \mathrm{h}_i(S/J) = 0 \text{ for all } i \geqslant n+1.$$

包含关系 $I \subseteq \mathfrak{n}^2$ 表明 $\mathrm{h}_1(R) = 3$。注意到 $I + \mathfrak{n}^3$ 在$n \geqslant 3$时等于 $(xy, xz, yz, x^2 + y^2, z^3)$，而在 $n = 2$时等于 $(xy, xz, yz, x^2 + y^2 - z^2)$，由此可得 $\mathrm{h}_2(R) = 2$。此外，由于 $I + (x, y) = (x, y, z^n)$，因此对于 $3 \leqslant i \leqslant n$，有 $\mathrm{h}_i(R) \geqslant \mathrm{h}_i(S/I + (x, y)) = 1$。总之，以下结论成立。

$$\mathrm{h}_1(R) = 3, \quad \mathrm{h}_2(R) = 2, \quad \mathrm{h}_i(R) = 1 \text{ for all } 3 \leqslant i \leqslant n, \quad \text{and} \quad \mathrm{h}_i(R) = 0 \text{ for all } i \geqslant n+1.$$

因此我们有 $\ell(R) = n + 4$。这里值得列出一些特殊情形：当 $n = 2$ 时，阿廷局部环 R 的长度为 6，希尔伯特函数为 (1，3，2)；当 $n = 3$ 时，其长度为 7，希尔伯特函数为 (1，3，2，1)。

我们断言，$(x + y - z, x + y - z^{n-1})$ 是 R 的零因子的精确对。事实上，包含关系 $(x+y-z) \subseteq \mathrm{Ann}_R(x+y-z^{n-1})$ 显然成立。由于 $R/(x+y-z) \cong k[x, y]/(xy, x^2, y^2)$ 且 $R/(x+y-z^{n-1}) \cong k[x, z]/(xz, x^2, z^n)$，我们有 $\ell(R/(x + y - z)) = 3$ 以及 $\ell(R/(x + y - z^{n-1})) = n + 1$。因此，我们得到

$$\ell(R/(x + y - z^{n-1})) = n + 1 = \ell(R) - \ell(R/(x + y - z)) = \ell((x + y - z)).$$

利用正合列 $0 \to \mathrm{Ann}(x+y-z^{n-1}) \to R \to R \to R/(x+y-z^{n-1}) \to 0$，我们看到等式$\ell(\mathrm{Ann}(x+y-z^{n-1})) = \ell(R/(x+y-z^{n-1})) = \ell((x+y-z))$ 成立。由此可得等式 $(x+y-z) = \mathrm{Ann}_R(x+y-z^{n-1})$。我们 conclude that $(x + y - z, x + y - z^{n-1})$ 是零因子的精确对。另需注意，根据备注5.5(5)，R 不是 Burch；并且 R 不是 Gorenstein，因为其底 (x^2, z^n) 的长度为二。

本节最后指出，应用本节的主要结果，我们可以确定代数闭域上长度六的非 Gorenstein非Burch局部代数的结构。

注 5.11. 设 k 是一个代数闭域。长度至多为六的交换阿廷局部k-代数的同构类已在 [45, 表 1]中完全分类。令 R 为其中一个 k-代数。假设 R 既不是 Gorenstein，也不是 Burch。则由推论 4.9(2)、注 4.10(1)和定理 5.3 可得，$R = k[x, y, z]/I$，$\mathrm{r}(R) = 2$，$\nu(I) = 4$，且 R 的希尔伯特函数为 (1, 3, 2)。因此，I 是下列理想之一，其中最后两个仅在 k 具有特征二时才可能出现。

$$(xy, z^2, xz - yz, x^2 + y^2 - xz), \quad (xy, xz, yz, x^2 + y^2 - z^2), \quad (x^2, xy, yz, xz + y^2 - z^2),$$
$$(x^2, xy, y^2, z^2), \quad (x^2, z^2, y^2 - xz, yz), \quad (x^2, xy, y^2, z^2 - xz).$$

反过来，当 I 是这些理想之一时，k-代数 R 是一个阿廷非 Gorenstein 非 Burch 局部环，其中 $\ell(R) = 6$，$\mathrm{r}(R) = 2$，$\nu(I) = 4$，且希尔伯特函数为 (1，3，2)。

6. Upper bounds for dominant indices

本节将探讨各种情形下主导指标的上界。以下引理有助于通过对正则序列取模来计算主导指标（的一个上界）。该引理的断言 (2b) 可用初等方法证明，这是 [38, 定理 B]的一个特例。该引理的断言 (3) 将被频繁使用，其中第一项引自 [56]。

引理 6.1。 设 R 是一个局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，剩余域为 k。
(1) (a) 假设 $\operatorname{depth} R = 0$ 且 $\operatorname{Burch}(R) \geqslant 2$。那么，对于每个非自由$R$-模 M 以及每个整数 $i \geqslant 5$，k 都是 $\Omega^i M$ 的一个直和项。*(b)* 假设 R 是一个非平凡纤维积。那么，对于每个具有无限投射维数的R-模 M，$\mathfrak{m}$ 都是 $\Omega^3 M \oplus \Omega^4 M$ 的一个直和项。*(2) (a)* 假设 $R = S/I$，其中 $(S, \mathfrak{n})$ 是一个正则局部环，且 I 是 S 的一个 *Burch* 理想。设 M 是一个非自由 R-模。那么存在一个元素 $x \in R$，使得 k 属于 $\langle K(x, M)\rangle_1^{\mathrm{D^{sg}}}(R)$。*(b)* 设 M 是一个 R-模。设 $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ 和 $\boldsymbol{y} = y_1, \ldots, y_m$ 是 R中的元素序列，并假设 $\boldsymbol{x}$ 在 R、M 上是正则的。令 $C = K(\boldsymbol{y}, M/\boldsymbol{x}M)$ 为 *Koszul* 复形。那么不等式 $\operatorname{level}^M_{\mathrm{D^{sg}}}(R)(k) \leqslant (n+m+1)(\operatorname{level}^C_{\mathrm{D^{sg}}}(R/(\boldsymbol{x}))(k) + 1) - 1$ 成立。*(c)* 设 I 是 R 的一个理想，且 $\operatorname{Sing} R \subseteq V(I)$（例如，$I = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Sing} R} \mathfrak{p}$），并令 $h = \dim R/I$。那么，对于 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 中的每个非零对象 X，都存在一个具有无限投射维数的 R-模 M，使得对于所有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \setminus \{\mathfrak{m}\}$，$M_{\mathfrak{p}}$ 都是 $R_{\mathfrak{p}}$-自由的，并且 M 属于 $\langle X\rangle^{\mathrm{D^{sg}}}(R)_{h+1}$。*(3) (a)* 设 $x \in \mathfrak{m}$ 是一个 R-正则元。那么不等式 $\operatorname{dx}(R) \leqslant 2\operatorname{dx}(R/(x)) + 1$ 成立。若 x 不属于 $\mathfrak{m}^2$，则不等式 $\operatorname{dx}(R/(x)) \leqslant 2\operatorname{dx}(R) + 1$ 同样成立。*(b)* 设 $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$ 是一个 R-序列。那么有不等式 $\operatorname{dx}(R) \leqslant (n+1)(\operatorname{dx}(R/(\boldsymbol{x})) + 1) - 1$。

证明。 (1a) 该断言可由 [24, 定理 A]推出；另见 [19, 定理 4。1]。
(1b) 该断言可由 [56,定理 2.9]推出；另见 [41, 定理 A]。
(2a) 由于 I是一个 Burch 理想，我们找到一个元素 $z \in \mathfrak{n} \setminus (\mathfrak{n}I : (I : \mathfrak{n}))$。令 x为 z在 R中的像。存在一个正合列 $0 \to \Omega M \to F \to M \to 0$，其中 F是自由的。 [21, 引理 7.2(1)] 的证明给出一个正合列 $0 \to \Omega M \to N \to M \to 0$，其中 $x \in \mathrm{I}_1(N)$，以及一个同构 $(0 \to N \to F \to 0) \cong \mathrm{K}(x, M)$，该同构位于 $\mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R)$ 中。存在一个正合三角 $F \to \mathrm{K}(x, M) \to N[1] \rightsquigarrow$，它位于 $\mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R)$ 中。转到奇点范畴后，我们得到一个同构 $K(x, M) \cong N[1]$，它位于 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 中。由于 x属于 $\mathrm{I}_1(N)$，由 [19,命题 4.4]可知，k是 $\Omega^2 N$的一个直和项。因此，k属于 $\langle K(x, M)\rangle_1^{\mathrm{D^{sg}}}(R)$。

(2b) 我们可以假设 $l := \operatorname{level}^C_{\mathrm{D^{sg}}}(R/(\boldsymbol{x}))(k)$ 有限，于是 k 属于 $\langle C\rangle^{\mathrm{D^{sg}}}(R/(\boldsymbol{x}))_{l+1}$。正合函子 $-\otimes^{\mathbf{L}}_{R/(\boldsymbol{x})}(R/(\boldsymbol{x}))_R \colon \mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R/(\boldsymbol{x})) \to \mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R)$ 诱导出一个正合函子 $\mathrm{D^{sg}}(R/(\boldsymbol{x})) \to \mathrm{D^{sg}}(R)$，因为 $(R/(\boldsymbol{x}))_R$（右 R-模 $R/(\boldsymbol{x})$）具有有限投射维数。应用此函子可知 k 属于 $\langle C\rangle^{\mathrm{D^{sg}}}(R)_{l+1}$。由于 $\boldsymbol{x}$ 在 M 上正则，R-模 $M/\boldsymbol{x}M$ 与 Koszul 复形 $\mathrm{K}(\boldsymbol{x}, M)$ 准同构。在 $\mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R)$ 中有同构 $C \cong M/\boldsymbol{x}M \otimes^{\mathbf{L}}_R \mathrm{K}(\boldsymbol{y}, R) \cong \mathrm{K}(\boldsymbol{x}, M) \otimes^{\mathbf{L}}_R \mathrm{K}(\boldsymbol{y}, R) \cong \mathrm{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, M)$。Koszul 复形 $\mathrm{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, M)$ 诱导出一系列正合三角 $\{M^{\oplus\binom{n+m}{i}}[i] \to K_i \to K_{i+1} \rightsquigarrow\}_{0 \leqslant i \leqslant n+m}$，其中$K_0 = \mathrm{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, M)$ 且 $K_{n+m+1} = 0$。由归纳法可得 $\mathrm{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, M) \in \langle M\rangle^{\mathrm{D^b}}(\operatorname{mod} R)_{n+m+1}$。由于 $K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, M) \cong C$，可知 k 属于 $\langle M\rangle^{\mathrm{D^{sg}}}(R)_{(n+m+1)(l+1)}$，从而得到所需的不等式 $\operatorname{level}^M_{\mathrm{D^{sg}}}(R)(k) \leqslant (n+m+1)(l+1) - 1$。

(2c) 令 $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_h$ 为 R 中的一列元素，使得 $\boldsymbol{x}$ 在 R/I 中的像构成 R/I 的参数系。那么 $I + (\boldsymbol{x})$ 是 R 的一个 $\mathfrak{m}$-一次理想。将 Koszul 复形 $\mathrm{K}(\boldsymbol{x}, R)$ 分解为正合三角，并应用正合函子 $X \otimes^{\mathbf{L}}_R -$，可得 $Y := X \otimes^{\mathbf{L}}_R \mathrm{K}(\boldsymbol{x}, R) \in \langle X\rangle^{\mathrm{D^{sg}}}(R)_{h+1}$。令 $d = \dim R$。由注 3.2 可知，存在一个 R-模 N 和一个整数 n，使得 $Y \cong (\Omega^d N)[n]$ 属于 $\mathrm{D^{sg}}(R)$。令 $M = \Omega^d N$，则可见 $Y \cong M[n]$ 属于 $\mathrm{D^{sg}}(R)$，且 $M \in \langle X\rangle^{\mathrm{D^{sg}}}(R)_{h+1}$。存在同构

$$Y \otimes^{\mathbf{L}}_R k \cong X \otimes^{\mathbf{L}}_R \mathrm{K}(\boldsymbol{x}, k) \cong X \otimes^{\mathbf{L}}_R \left(\bigoplus\nolimits_{i=0}^{h} k^{\oplus\binom{h}{i}}[i]\right) \cong \bigoplus\nolimits_{i=0}^{h} (X \otimes^{\mathbf{L}}_R k)^{\oplus\binom{h}{i}}[i]$$

在 $\mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R)$ 中，最后一项包含 $X \otimes^{\mathbf{L}}_R k$ 作为直和项。因此，Y 在 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 中非零，所以 $\operatorname{pd}_R M = \infty$。设 $\mathfrak{p}$ 是 R 中不同于 $\mathfrak{m}$ 的素理想。若 $\mathfrak{p}$ 不属于 $\mathrm{V}(I)$，则 $R_{\mathfrak{p}}$ 是正则的，且 $M_{\mathfrak{p}}$ 作为 $R_{\mathfrak{p}}$-模具有有限投射维数。假设 $\mathfrak{p}$ 属于 $\mathrm{V}(I)$。那么 $\mathfrak{p}$ 不包含 $\boldsymbol{x}$，并且在 $\mathrm{D^b}(\operatorname{mod} R_{\mathfrak{p}})$ 中有一个同构 $\mathrm{K}(\boldsymbol{x}, R)_{\mathfrak{p}} \cong 0$。由此可得，$Y_{\mathfrak{p}}$ 在 $\mathrm{D^{sg}}(R_{\mathfrak{p}})$ 中为零，$M_{\mathfrak{p}}$也为零。同样，$M_{\mathfrak{p}}$ 作为 $R_{\mathfrak{p}}$-模具有有限投射维数。由于 $M = \Omega^d N$，我们注意到 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 $R_{\mathfrak{p}}$-自由的。

(3) 第一个断言无非就是 [56, 定理 6.2]。为证明第二个断言，只需验证：若 r是一个整数，且 $\operatorname{dx}(R/(\boldsymbol{x})) \leqslant r$，则 $\operatorname{dx}(R) \leqslant (n+1)(r+1) - 1$。设 M 是 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 中的一个非零对象。根据注 3.2，我们不妨假设 M 是一个 R-模，且 $\boldsymbol{x}$ 是一个 M-序列。应用 (2b)，得到不等式 $\operatorname{level}^M_{\mathrm{D^{sg}}}(R)(k) \leqslant (n+1)(\operatorname{level}^{M/\boldsymbol{x}M} \mathrm{D^{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))(k) + 1) - 1 \leqslant (n+1)(r+1) - 1$。因此，所需的不等式 $\operatorname{dx}(R) \leqslant (n+1)(r+1) - 1$ 由此得证。■

我们为局部环变形为非平凡纤维积这一条件命名 .

定义 6.2. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 为局部环。对于每个 $n\geqslant 0$，我们称 R 是一个关于 k 的非平凡 n-纤维积，当且仅当存在一个 R-序列 $\boldsymbol{x}=x_1,\ldots,x_n$，使得 $R/(\boldsymbol{x})$ 是关于 k 的非平凡纤维积。若存在一个整数 $n\geqslant 0$，使得 R 是关于 k 的非平凡 n-纤维积，则称 R 为拟纤维积环。换言之，R 是拟纤维积环，当且仅当 $\mathfrak{m}$ 按照 [41] 的意义是拟可分解的。

以下命题给出了在某些条件下支配指标的上界。

Prop 命题 6.3。设 $e=$嵌入维数 R, $r=\mathrm{r}(R)$, $u=$深度 R, $I=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\text{奇点集 }R}\mathfrak{p}$，以及 $h=$维数 R/I.

(1) 若下列条件之一成立，则 R 是一致支配的，且 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 0$。*(a)* R 是关于 k的非平凡纤维积。*(b)* 上同调 $R\not\subseteq\mathfrak{m}^2$。*(c)* R 是非 *Gorenstein*、阿廷且拉伸的。*(d)* $\mathfrak{m}^2=0$。*(e)* $u=0$ 且 $\mathrm{Burch}(R)\geqslant 2$。*(f)* $R\cong S/\mathfrak{n}J$，其中 $(S,\mathfrak{n})$ 是一个维数为 $S\geqslant 2$ 的正则局部环，且 J是 S的一个理想。*(g)* $R\cong S/\mathfrak{n}^s$，其中 $(S,\mathfrak{n})$ 是一个维数为 $S\geqslant 2$ 的正则局部环，且 s 是一个正整数。*(h)* $R\cong S/(J:\mathfrak{n})$，其中 $(S,\mathfrak{n})$ 是一个维数为 $S\geqslant 2$ 的正则局部环，且 $J\subseteq\mathfrak{n}^2$ 是 S 的一个理想，使得 S/J 是一个阿廷-戈伦斯坦环。*(i)* $\mathfrak{m}^3=0$ 且 $\mathrm{P}_k(t)\neq\frac{1}{1-et+rt^2}$。*(2)* 假设 $\Omega^{u+1}k$ 属于 $\mathrm{add}(R\oplus\Omega^{u+2}k)$。则 R 是一致支配的，且满足以下条件。*(a)* 若 $u=0$，则 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 2$。*(b)* 若 $u>0$，则 $\mathrm{dx}(R)\leqslant(h+1)(2u+3)-1$。*(c)* 若 R 具有孤立奇点，则 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 2u+2$。*(3)* 假设 $\Omega^u k$ 属于 $\mathrm{add}(R\oplus\Omega^{u+2}k)$。则 R 是一致支配的，且满足以下条件。*(a)* 若 $u=0$，则 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 1$。*(b)* 若 $u>0$，则 $\mathrm{dx}(R)\leqslant(h+1)(2u+4)-1$。*(c)* 若 R 具有孤立奇点，则 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 2u+3$。*(4)* 假设 R 是 *Burch*。则 R 是一致支配的，且满足以下条件。*(a)* 若 $u=0$，则 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 1$。*(b)* $\mathrm{dx}(R)\leqslant u+1$，且 $\mathrm{dx}(R)\leqslant(h+1)(2u+4)-1$。*(5)* 设 $n\geqslant 0$。设 R 是关于 k的非平凡 n-纤维积。则 R 是一致支配的，且 $\mathrm{dx}(R)\leqslant n$。

证明。（1）根据命题 4.3（1），（b）和（c）是（a）的特殊情形，而（d）和（g）分别是（b）和（f）的特殊情形。鉴于备注 2.5（2），我们还可以假设嵌入维数 $R\geqslant 2$。在情形（f）中，我们可以假设 $0\neq J\subseteq\mathfrak{n}$。由于上同调 $S/\mathfrak{n}J=(\mathfrak{n}J:\mathfrak{n})/\mathfrak{n}J$ 包含 $J/\mathfrak{n}J$，且后者非零，因此有深度 $R=0$。根据引理 4.4（2a），只要证明情形（e），情形（f）中的断言便可得证。在情形（h）中，我们可以假设 $J:\mathfrak{n}\neq\mathfrak{n}$，于是只要证明情形（e），该断言便可得证。因此，只需证明情形（a）、（e）和（i）中的断言。

(a) 设 X 是 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R$中的非零对象。取一个整数 n 和一个 R-模 M，使得 $\mathrm{pd}\,M=\infty$ 且$X\cong M[n]$。由引理6.1(1b), 极大理想 $\mathfrak{m}$是 $\Omega^3M\oplus\Omega^4M$的一个直和项。因此，$k[-1]\cong\mathfrak{m}\in\langle M[-3]\oplus M[-4]\rangle_1$在 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R$中。可见 $k\in\langle X\rangle_{1^\circ}$ 我们得到不等式 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 0$。(e) 由

用引理6.1(1a)代替引理6.1(1b)。断言的证明与（a).

(i) 假设 $\mathfrak{m}^3=0$意味着 $\mathrm{Soc}\,R$包含 $\mathfrak{m}^2$。由 (b) 可知，我们可以假设 $\mathrm{Soc}\,R=\mathfrak{m}^2$。设 M 是一个非自由的 R-模。则 $N:=\Omega M\neq 0$ 包含于若干个 $\mathfrak{m}$ 的直和中。因此，N被 $\mathfrak{m}^2$ 消去。由于 $\mathrm{P}_k(t)\neq\frac{1}{1-et+rt^2}$，由 [37, 推论 3.4(2)和引理 3.6] 可知，k 是某个 $n>0$ 的 $\Omega^n N$ 的直和项。因此，k 属于 $\langle M\rangle_1$，从而得到不等式 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 0$。

(2) 断言 (a) 和 (c) 分别由 [56, 推论 5.5(1)] 和断言 (b) 得出。为证明 (b)，令 X 为 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)$ 中的非零对象。引理 6.1(2c) 给出一个 R-模 L，满足 $\mathrm{pd}_R L=\infty$, $L\in\langle X\rangle^{\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)}{}_{h+1}$，且对每个 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}\,R\setminus\{\mathfrak{m}\}$，$L_{\mathfrak{p}}$ 都是 $R_{\mathfrak{p}}$-自由的。[56, 定理 4.7] 的证明表明 $\Omega^{u+1}k\in[\Omega^{u+3}L]_{2u+3^\circ}$ 因此，$\Omega^{u+1}k$ 属于 $\langle X\rangle_{(h+1)(2u+3)}$，从而得到不等式 $\mathrm{dx}(R)\leqslant(h+1)(2u+3)-1$。

(3) 同样，(c) 由 (b) 得出，而 (b) 可用与证明 (2) 类似的论证得到。为证明 (a)，假设 $u=0$。不妨设 R 是奇异的。根据假设，R-模 k 属于 $\mathrm{add}(R\oplus\Omega^2 k)$。利用 [39, 推论 1.10 和 1.15],，可知 k 是 $\Omega^2 k$ 的一个直和项。由 [21, 定理 4.1] 可知，局部环 R 是 Burch 环。因此，该结论归结为 (4) 中的 (a)，其证明紧接在下文。

(4) 为了证明断言 (a)，我们可以假设局部环 R 是奇异的。固定一个非零对象 $X\in\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)$。根据注 3.2(1)，存在一个 R-模 M，其 $\mathrm{pd}_R M=\infty$，使得 X 在 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)$ 中同构于 M 的某个移位。根据引理 7.4],，存在正合列 $0\to(\Omega M)^{\oplus n}\to N\to M^{\oplus n}\to 0$，其中 $n>0$，$\mathrm{I}_1(N)=\mathfrak{m}$ 且 $\mathrm{pd}_R N=\infty$。由命题 4.2]，剩余域 k 是 $\Omega^2 N$ 的一个直和项。因此，k 在 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)$ 中属于 $\langle M\rangle_2=\langle X\rangle_{2^\circ}$ 于是得到 $\mathrm{dx}(R)\leqslant 1$，(a) 得证。

接下来，我们证明 (b)。首先，假设 R 是完备的。根据定义，存在一个 R-序列 $\boldsymbol{x}$，使得 $R/(\boldsymbol{x})\cong S/I$，其中 S 是一个正则局部环，而 I 是 S的 Burch 理想。令 M 为 D 中的一个非零对象$^{\mathrm{sg}}(R)$。利用注记 3.2，我们不妨假设 M 是一个 R-模，且具有无限投射维数，并且

$\boldsymbol{x}$ 是一个 M-序列。由引理 1.3.5]，$R/(\boldsymbol{x})$-模 $M/\boldsymbol{x}M$ 是非自由的。将引理 6.1(2a)应用于 $M/\boldsymbol{x}M$，可得一个元素 $y \in R/(\boldsymbol{x})$，使得 k属于 $\langle C\rangle^{\mathrm{D^{sg}}}(R/(\boldsymbol{x}))$ 1，其中 $C = \mathrm{K}(y, M/\boldsymbol{x}M)$。换言之，我们有层级$\overset{C}{\mathrm{D^{sg}}}(R/(\boldsymbol{x}))(k) \leqslant 0$。将引理 6.1(2b)应用于 R 中的序列 $\boldsymbol{x}, y$，可知层级$\overset{M}{\mathrm{D^{sg}}}(R)(k) \leqslant (u+2)$(层级$\overset{C}{\mathrm{D^{sg}}}(R/(\boldsymbol{x}))(k) + 1) - 1 = u + 1$。这说明不等式 $\mathrm{dx}(R) \leqslant u + 1$。

现在考虑 R 不一定完备的情形。我们可以假设 R 不正则。由 [56,命题 4.3],，模 $\Omega^u k$ 属于 $\mathrm{add}(R \oplus \Omega^{u+2} k)$。应用 (3) 中的 (b)，得到 $\mathrm{dx}(R) \leqslant (h+1)(2u+4) - 1$。(5) 取一个 R-序列 $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_n$，使得 $R/(\boldsymbol{x})$ 是 k 上的非平凡纤维积。断言 (1a) 意味着 $\mathrm{dx}(R/(\boldsymbol{x})) \leqslant 0$。应用引理 6.1(3b)，得到 $\mathrm{dx}(R) \leqslant (n+1)(0+1) - 1 = n$。■

作为命题6.3(4b) 的推论，我们能够重新得到 [6, 引理 4。18]。

推论 6.4(Ball ard–Favero–Katzarkov). 若 R 是完备局部超曲面，则$\mathrm{dx}(R) \leqslant \dim R + 1$.

关于上述命题与推论，这里有几点事实需要提及。 .

注 6.5. (1) Sj¨odin [51] 证明，若 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Gorenstein 局部环，且满足 $\mathfrak{m}^3 = 0 \neq \mathfrak{m}^2$ 与 $e =$嵌入维数 $R \geqslant 2$，则 $\mathrm{P}_k(t) = \frac{1}{1-et+t^2}$；这也可由 Avramov、Iyengar 和 Sˌega [5,定理 4.1 与 4.6], 推出，这些结果说明这样的环 R 在 Herzog 与 Iyengar [31]的意义下是 Koszul 的。因此，在命题 6.3(1i) 的情形下，若 R 是 Gorenstein 的，则 R 是超曲面或 $\mathfrak{m}^2 = 0$。

(2) 命题 [56, 6.3的 (2) 和 (3) 改进了推论 5中得到的支配指标上界。请注意，正如我们在引言中所解释的，已知 Burch 环和拟纤维积环是一致支配的，而推论 [56, 5给出了明确的上界。命题 6.3 的 (4) 和 (5) 改进了这些上界。

(3) 推论 6.4 与 [6, 引理 418]相同，只是后者假设该环包含一个特征零的代数闭域，而这一假设似乎并未在其中用到。

我们记录一个例 子：一个阿廷非 Gorenstein Burch 环，其主导指标恰为一 .

例 6.6。令 k 为一个域，并取 $R = k[x, y]/(x^2, xy^2, y^4)$。那么 R 是一个阿廷非 Gorenstein Burch 环，且由例 4.6 可知 $\mathrm{Burch}(R) = 1$。考虑循环 R-模 $M = R/(x, y^2)$。我们看到 $\Omega M \cong M^{\oplus 2}$，并且对于所有 $i \geqslant 0$，k 都不是 $\Omega^i M$ 的直和项；参见例 4.5] 。由于嵌入维数 $R > 1$，理想 $\mathrm{I}_1(\Omega^r k)$与极大理想 $\mathfrak{m}$重合，这归功于 Tate [57] 和 Gulliksen [29]构造的 k 的极小自由分解；参见 [13, 第 5–6] 页。由 [21, 命题 4.2] 可知，剩余域 k 是 $\Omega^2(\Omega^r k)$ 的直和项。鉴于此以及 k 不可分解这一事实，我们注意到，对于所有 r、s、n_0、……、$n_s \geqslant 0$，$\Omega^r k$都不是 $\bigoplus_{i=0}^{s} \Omega^i M^{\oplus n_i}$的直和项。由该断言和命题 3.8 可知，$\mathrm{dx}(R) > 0$。利用命题 6.3(4a)，得到 $\mathrm{dx}(R) = 1$。

下一个命题包含具有小重数的 Cohen–Macaulay 局部环之主导指标的上界。下面命题的断言 (4) 对 [55, 问题 9。2] 给出肯定支持，该问题询问 Tor/Ext友好性是否蕴含支配性。

命题 6.7. 令 $d = \dim R$、$c = \mathrm{codim}\ R$ 以及 $r = \mathrm{r}(R)$。假设或者 $d = 0$，或者 R 是 *Cohen–Macaulay* 的且 k 为无限。则下列陈述成立。
(1) 局部环 R 在下列每一情形中都是满足 $\mathit{dx}(R) \leqslant d$ 的 *Burch* 环：*(a)* $\mathit{e}(R) \leqslant 3$。*(b)* R 具有极小重数（即 $\mathit{e}(R) = c + 1$）。*(c)* $c = 2$ 且 $\mathit{e}(R) < r(r+1)$。*(d)* R 为非 *Gorenstein* 且 $\mathit{e}(R) \leqslant 5$。*(2)* 局部环 R 在下列每一情形中都是满足 $\mathit{dx}(R) \leqslant d + 1$ 的 *Burch* 环：*(a)* R 为非 *Gorenstein* 且 *G*-正则，并满足 $\mathit{e}(R) = 6$。*(b)* $c = 2$ 且 $\mathit{e}(R) < 2r(r+1)$。*(c)* R 为非 *Gorenstein*，满足 $c = 2$ 且 $\mathit{e}(R) \leqslant 11$。*(3)* 若 $\mathit{e}(R) \leqslant c + 2$ 且 $P_k^R(t) \neq \left(\frac{}{1+t^{\,d}}\right)$，则局部环 R 是一致支配的，且 $\mathit{dx}(R) \leqslant d$。*(4)* 若 R 为非 *Gorenstein* 且 $\mathit{e}(R) \leqslant 6$，则关于 $\frac{R}{1-ct+rt^2}$ 的下列条件等价：*(a)* 一致支配，*(b)* 支配，*(c) Tor* 友好，*(d) Ext* 友好，*(e) G*-正则。

证明。令 $e =$嵌入维数 R，我们有 $c = e - d$。由假设，存在 R 的参数系 $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots\ldots, x_d$，使得 $(\boldsymbol{x})$ 为 $\mathfrak{m}$ 的约化。于是由 [32, 命题 8.3.3(2)], $\mathrm{e}(R) = \ell(R/(\boldsymbol{x}))$ 且余维数 $R/(\boldsymbol{x}) = c$。

(1) 根据 Burch 环的定义可知，若 $R/(\boldsymbol{x})$ 是 Burch 环，则 R也是如此。根据引理6.1(3)，将 R 替换为 $R/(\boldsymbol{x})$，可假设 $d = 0$，因此 $\mathrm{e}(R) = \ell(R)$。若 R 是域，则它是 Burch 环，且 $\mathrm{dx}(R) = -1$。以下假设 R 不是域。在情形 (b) 中，有 $\mathfrak{m}^2 = 0$,

因此，根据注 2.5(1) 和命题 6.3(1d)， R 是 Burch 环，且 $\mathrm{dx}(R) = 0$。情形 (c) 和 (d) 是定理 4.7(2)、推论 4.9(2) 和命题 6.3(1e) 的推论。现在考虑情形 (a)。由于$\ell(R) \leqslant 3$，可知 R 同构于 $A/(z^3)$、 $A/(z^2)$ 或 $B/(v^2, vw, w^2)$，其中 A 是一个带有一致化子 z的离散赋值环，而 B 是一个带有正则参数系 v, w的正则局部环。在第一种和第二种情形中，环 R 是超曲面；而在第二种和第三种情形中， R 具有极小重数。注 2.5 表明 R是 Burch 环。此外，在第一种情形中， R、$R/zR = k$和 $R/z^2R = R/$上同调 R是所有互不同构的不可分解 R-模。我们看到，对所有 $0 \neq X \in \mathrm{D^{sg}}(R)$，都有 $k \in \langle X \rangle_1$ 属于 $\mathrm{D^{sg}}(R)$，因此 $\mathrm{dx}(R) = 0$。在第二种和第三种情形中，有 $\mathfrak{m}^2 = 0$。命题 6.3(1d) 表明 $\mathrm{dx}(R) = 0$。

(2) 推论 4.9(1)、5.7以及定理 4.7(1) 表明 $R/(\boldsymbol{x}) \cong S/I$，其中 S 是正则局部环，而 I 是一个 Burch 理想。因此， R是 Burch 的。此外，命题 6.3(4b) 的证明同样适用，从而得到 $\mathrm{dx}(R) \leqslant d+1$。

(3) 有 $\mathrm{e}(R) + d = \ell(R/(\boldsymbol{x})) + \ell((\boldsymbol{x})/\boldsymbol{x}\mathfrak{m}) = \ell(R/\mathfrak{m}) + \ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) + \ell(\mathfrak{m}^2/\boldsymbol{x}\mathfrak{m}) = 1 + e + \ell(\mathfrak{m}^2/\boldsymbol{x}\mathfrak{m})$。由于 $\mathrm{e}(R) \leqslant c + 2 = e - d + 2$，我们得到 $\ell(\mathfrak{m}^2/\boldsymbol{x}\mathfrak{m}) \leqslant 1$，因此 $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^2/\boldsymbol{x}\mathfrak{m}) = 0$ 且 $(\mathfrak{m}/(\boldsymbol{x}))^3 = 0$。根据 [32,命题 8.3.3(2)]，，存在元素 y_1、……、 $y_{e-d} \in \mathfrak{m}$，使得 $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_{e-d})$。我们注意到，对于每个 $0 \leqslant i \leqslant d$，都有嵌入维数 $R/(x_1, \ldots, x_i) = e - i$，且 $x_{i+1} \notin (\mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_i))^2$。反复应用 [2, 命题 3.3.5(1)]，可得 $\mathrm{P}_k^{R/(\boldsymbol{x})}(t) \neq \frac{1}{1-ct+rt^2}$。注意，嵌入维数 $R/(\boldsymbol{x}) = c$ 且 $\mathrm{r}(R/(\boldsymbol{x})) = r$。由命题 6.3(1i)可得不等式 $\mathrm{dx}(R/(\boldsymbol{x})) \leqslant 0$。最后，利用引理 6.1(3b)，得到所需的不等式 $\mathrm{dx}(R) \leqslant (d+1)(0+1) - 1 = d$。

(4) 蕴含关系 (a)⇒(b) 和 (d)⇒(e) 显然。蕴含关系 (b)⇒(c)⇒(d) 由 [55,定理1.1(5)] 和 [4, 命题55]得出。蕴含关系 (e)⇒(a) 由 (2) 和 (3) 得出。■

注记6.8。 命题6.7(1a) 中的假设，即 $\mathrm{e}(R) \leqslant 3$ 以及 R 分别不是 Gorenstein $R = k[x, y]/(x^2, y^2)$ 的假设是必要的，其中 k是一个域。于是 $\mathrm{e}(R) = \ell(R) = 4$。由于 R 是一个非超曲面的完全交，因此根据 [55,定理1.1(4)]，它不是支配的。

在回顾下文给出的命题中定义之后，我们将寻找有限表示型 Cohen–Macaulay 局部环的主导指标的上界。

定义6.9. (1) Cohen–Macaulay 局部环 R 称为具有有限表示型，如果不可分解极大 Cohen–Macaulay R-模的同构类只有有限多个。
(2) 对于 R-模 M，我们用 $\operatorname{add} M$表示 $\operatorname{mod} R$中由 M的拷贝的有限直和的直和项所构成的子范畴。(3) 当 R 为 Cohen–Macaulay 时，$\Omega\mathrm{CM}(R)$表示 $\operatorname{mod} R$ 中由如下模 M 构成的子范畴：这些模可放入 $\operatorname{mod} R$ 中的正合列 $0 \to M \to F \to N \to 0$，其中 F为自由模， N 为极大 Cohen–Macaulay 模。

命题6.10. 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 为 d维 *Cohen–Macaulay* 局部环。下列断言成立。
(1) (a) 设 $d = 0$。若 R 具有有限表示型，则 R 是一致支配的，且$\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$。(b) 设 $d = 1$ 与 $|k| = \infty$。若 R 具有有限表示型，则 R 是一致支配的，且$\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$。(c) 设 $d = 2$，并假设 k 是代数闭的。设 R 为优亨泽尔正规整环。假设存在 R-模 M，使得$\Omega\mathrm{CM}(R) = \operatorname{add} M$ （若 R 具有有限表示型，则该假设成立）。则 R 是一致主导局部环，且满足$\mathrm{dx}(R) \leqslant 2$。
(2) 假设 R 是一个优亨泽尔局部环，具有 $d \leqslant 2$，并且使得 k 是代数闭的。若R 具有有限表示型，则 R 是一个一致主导局部环，使得$\mathrm{dx}(R) \leqslant 2$。

证明。(1a) 由 [39, 定理 3.3] 可知，环 R 是一个超曲面。应用命题 6.3(4a) 与注 2.5(2)。(1b) 由 [39, 命题 4.15], 可知，环 R 是解析无分歧的，特别地， R 是约化的。 R 在其全分式环中的整闭包R 依 [39, 定理 4.6(i)]在 R 上是模有限的。由 [39, 定理 A.29(iv)] 可得 $\mathrm{e}(R) = \nu_R(R)$。若 $\nu_R(R) \geqslant 4$，则由[39, 定理 4.2], 可知 R 具有无限表示型，矛盾。我们必须有 $\mathrm{e}(R) \leqslant 3$。命题 6.7(1a) 蕴含 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$。

(1c) 在此假设下， R 由 [20, 推论 33], 可知有理奇点， R 因此由 [1, 推论 6]可知具有极小重数；另见 [47, 命题 3。8]。命题6.7(1b) 给出 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 2$。

(2) 当 $d = 0$时，由 (1a) 可得不等式 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$ 成立。由于 R 具有有限表示型，由 [39, 定理 7.12]可知其具有孤立奇点。因此，当 $d = 2$时，环 R 是正规环，而该断言是 (1c) 的一个特例。由于 R 是优良的，完备化 R 也具有孤立奇点。因此，当 $d = 1$时，环 R 是解析无分歧的，由 (1b) 可得不等式 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$。■

问题 6.11。 在命题 6.10(1c) 的情形下，能否证明不等式 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$成立？若能，命题 6.10(2) 结论中的不等式也可以进一步改进为 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$。

注记 6.12。 Eisenbud–Herzog 猜想 [39, 猜想 7。21] 断言，若 R 是一个维数为 $\dim R \geqslant 2$ 且具有有限表示型的 Cohen–Macaulay 局部环，那么 R 具有极小重数。因此，若该猜想成立，将其与命题 6.10(2) 和 6.7(1b) 结合，可得每个剩余域为代数闭域且具有有限表示型的优良 Hensel Cohen–Macaulay 局部环，都是一致支配的，且主导指标至多为 $\dim R$。

事实上，目前已知的有限表示型 Cohen–Macaulay 非超曲面局部环只有两个例子，它们的维数都是三，并且都满足 Eisenbud–Herzog 猜想（即具有极小重数）；见 [49, §7.1]因此，所有已知的有限表示型 Cohen–Macaulay 局部环 R都是一致支配的，且主导指标至多为 $\dim R$。

本节余下部分，我们考察一个余维二且不必为 Burch 的 Cohen–Macaulay 局部环的主导指标。我们先准备一个引理，以证明某个一般元的存在性。

引理 6.13. 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个局部环。那么以下陈述成立 $e.$

(1) 设 U 是 R 的一个子集，使得对于任意两个不同的元素 $u, v \in U$，元素 $u-v$ 是 R 的单位。设 a, $b \in R$，并假定 a 是 R-正则的。令 $f(t) = a - bt \in R[\![t]\!]$。设 $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ 是 R 的相联素理想。对于每个 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$，都有 $\#\{u \in U \mid f(ux) \in \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i\} \leqslant n$。(2) 假设 k 是无限集。那么存在 R 的一个无限单位元集合，使得对于任意两个不同的元素 $u, v \in U$，元素 $u-v$ 仍是 R 的单位。

证明。(1) 固定 $1 \leqslant i \leqslant n$。令 $u \in U$并假设 $f(ux) \in \mathfrak{p}_i$。我们有 $f(ux) = a - bux$，而 $a \notin \mathfrak{p}_i$，因为 a 是 R-正则的。因此 $bx \notin \mathfrak{p}_i$。对于每个满足 $v \neq u$的元素 $v \in U$，我们得到 $f(vx) - f(ux) = (u-v)bx \notin \mathfrak{p}_i$，因为根据关于 U 的假设，$u-v$ 是一个单位。由此可得 $f(vx) \notin \mathfrak{p}_i$。这个论证表明 $\#\{u \in U \mid f(ux) \in \mathfrak{p}_i\} \leqslant 1$，并且我们注意到 $\#\{u \in U \mid f(ux) \in \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i\} \leqslant n$。

(2) 令 U 为 S 中剩余域 $S/\mathfrak{n} = k$ 的非零元素的完备代表元集合。由 k 是无限集这一假设可知，U 是断言中所述的这类集合。■

以下定理是本节的主要结果。除此之外，它还表明：余维二且剩余域无限的 Cohen–Macaulay 局部环是一致支配的，除非它是完全交。

定理 6.14。 (1) 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个嵌入维数为 $R \leqslant 2$ 且 k 无限的阿廷局部环。那么 R 要么是嵌入维数为 $R = 2$的完全交，要么是一致支配环，且$\mathrm{dx}(R) \leqslant 5$。
(2) 设$(R, \mathfrak{m}, k)$ 是一个维数为 $R = d$、余维为 $R \leqslant 2$ 且 $|k| = \infty$的 *Cohen–Macaulay* 局部环。那么 R 要么是余维为 $R = 2$的完全交，要么是一致支配的，且$\mathrm{dx}(R) \leqslant 6d + 5$。

证明。(1) 若嵌入维数 $R \leqslant 1$，则 R 是阿廷超曲面，因此由命题 6.3(4a)和注 2.5(2)可得 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 1$。我们可以假设嵌入维数 $R = 2$，并且也可以假设 R 不是完全交。存在一个维数为二的完全正则局部环$(S, \mathfrak{n}, k)$，其 k 无限，以及一个 S 的理想 I，使得 $R \cong S/I$。于是 $\mathrm{ht}\, I = \mathrm{grade}\, I = 2$ 且 $\mathrm{pd}\, I = 1$。希尔伯特–伯奇定理 [10, 定理 1.4.17]蕴含 S-模 I 有一个极小自由分解 $0 \to S^{\oplus r} \xrightarrow{A} S^{\oplus(r+1)} \to I \to 0$，其中 $A = (a_{ij})$是一个以 S 为元素的$(r+1) \times r$ 矩阵，满足 $\mathrm{I}_r(A) = I$。由于 R 不是完全交，我们有 $r \geqslant 2$。若 $\mathrm{I}_1(A)$不包含于 $\mathfrak{n}^2$，则由命题 4.5(1)，阿廷局部环 R 是 Burch，因此由 [56, 推论 5.5(2)]可得 R 是一致支配的，且 $\mathrm{dx}(R) \leqslant 3$。我们可以假设 $\mathrm{I}_1(A)$包含于 $\mathfrak{n}^2$，因此对所有 i, j，都有 $a_{ij} \in \mathfrak{n}^2$。

对于 $1 \leqslant i \leqslant r+1$，令 Δ_i 为矩阵 A 删除第 i 行后所得 $r \times r$ 矩阵的行列式。由于 $\mathrm{I}_r(A) = I \neq 0$，我们有 $\Delta_l \neq 0$，其中 $1 \leqslant l \leqslant r+1$。如有必要，对矩阵 A 施行适当的初等变换后，可假设 $l = 1$。于是 $f := \Delta_1 \in I$ 是 S-正则的。选取元素 $g \in I$，使得 f, g 构成一个 S-序列。记 $g = \sum_{i=1}^{r+1} g_i \Delta_i$。令 $S[\![t]\!]$ 为形式幂级数环。对所有 $(i, j) \neq (1, 1)$，令 $a_{11}(t) = a_{11} - t$，并令 $a_{ij}(t) = a_{ij}$。令 $A(t) = (a_{ij}(t))$ 为 $S[\![t]\!]$ 上的 $(r+1) \times r$ 矩阵。对于 $1 \leqslant i \leqslant r+1$，令 $\Delta_i(t)$ 为 $A(t)$ 删除第 i 行后所得 $r \times r$ 矩阵的行列式。注意，$\Delta_1(t) = \Delta_1 = f$。设 $g(t) = \sum_{i=1}^{r+1} g_i \Delta_i(t)$。注意，对每个 $2 \leqslant i \leqslant r+1$，我们都有

$$\Delta_i(t) = \Delta_i - t\,\Gamma_i, \qquad \text{where } \Gamma_i = \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,r} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r+1,2} & \cdots & a_{r+1,r} \end{vmatrix}.$$

令 $\xi = \sum_{i=2}^{r+1} g_i \Gamma_i \in S$，则有 $g(t) = g - t\xi$。对任意 $1 \leqslant i \leqslant r+1$，有 $\Delta_i(t) = \Delta_i(0) = \Delta_i$，且 $g(t) = g(0) = g$ 属于 $S[\![t]\!]/(t) = S$。由于 f, g是一个 S-序列，可见 $t, f, g(t)$ 是一个 $S[\![t]\!]$-序列，从而

$f, g(t)$ 是一个 $S[\![t]\!]$-序列（因为环 $S[\![t]\!]$ 是局部环）。因此等级$\mathrm{I}_r(A(t)) \geqslant 2$。再次由希尔伯特–伯奇定理， $S[\![t]\!]$ 的理想 $\mathrm{I}_r(A(t))$ 具有极小自由分解 $0 \to S[\![t]\!]^{\oplus r} \xrightarrow{A(t)} S[\![t]\!]^{\oplus(r+1)} \to \mathrm{I}_r(A(t)) \to 0$，且 $\mathrm{I}_r(A(t))$ 是等级为二的完全理想。因此，环 $T = S[\![t]\!]/\mathrm{I}_r(A(t))$ 是维数为一的 Cohen–Macaulay 局部环。由于 $T/(t) = S/\mathrm{I}_r(A) = R$是一个阿廷环，元素 t是 T-正则的。

我们断言存在一个元素 $c \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}^2$，使得 $f, g(c)$ 是一个 S-序列。事实上，根据引理 6.13(2)，存在 S 的一个无限单位集 U，使得对于任意两个不同的元素 $u, v \in U$，元素$u - v$仍是 S 的单位。令 $x \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}^2$。集合 $X = \{u \in U \mid g(ux) \in \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_S S/(f)} \mathfrak{p}\}$ 根据引理 6.13(1) 是有限的。由于 U 是一个无限集，我们可以选取一个元素 $u \in U$，使得 $g(ux) \notin \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_S S/(f)} \mathfrak{p}$。元素 $g(ux)$ 是 $S/(f)$-正则的，因此 $f, g(ux)$ 是一个 S-序列。由此断言得证。

取上述断言中的元素 c，我们得到 $I' := \mathrm{I}_r(A(c))$ 中的一个 S-序列 $f, g(c)$。将希尔伯特–伯奇定理应用于 I'，可得 S 上 I' 的极小自由分解 $0 \to S^{\oplus r} \xrightarrow{A(c)} S^{\oplus(r+1)} \to I' \to 0$。由于 $\dim S = 2$，局部环 $R' := S/I'$ 是阿廷的。因为 $a_{11} - c$ 属于 $\mathrm{I}_1(A(c)) \setminus \mathfrak{n}^2$，命题 4.5(1) 表明阿廷局部环 R' 是 Burch。由同构 $R' \cong T/(t - c)$ 可知，完全局部环 T 也是 Burch。因此，我们可以应用命题 6.3(4b)，得到不等式 $\operatorname{dx}(T) \leqslant$ 深度 $T + 1 = 2$。由于 $T/(t) \cong R$，由引理 6.1(3a) 可得 $\operatorname{dx}(R) \leqslant 2\operatorname{dx}(T) + 1 \leqslant 5$。

(2) 根据素理想避让，我们选取 R 的一个参数系 $\boldsymbol{x} = x_1, \ldots, x_d$，使得对每个 $1 \leqslant i \leqslant d$ 都有$\overline{x}_i \in \overline{\mathfrak{m}} \setminus \overline{\mathfrak{m}}^2$，其中 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_{i-1})$。于是， $R/(\boldsymbol{x})$ 是一个阿廷局部环，其嵌入维数为 $R/(\boldsymbol{x})$ =嵌入维数 $R - d$ = 余维 $R \leqslant 2$，且剩余域 k 是无限的。由 (1) 可知， $R/(\boldsymbol{x})$ 要么是满足嵌入维数 $R/(\boldsymbol{x}) = 2$ 的完全交，要么是一致支配环，并且 $\operatorname{dx}(R/(\boldsymbol{x})) \leqslant 5$。在前一种情形下， R 是一个完全交，其余维为 R = 嵌入维数 $R/(\boldsymbol{x}) = 2$。在后一种情形下，应用引理 6.1(3b)，得到 $\operatorname{dx}(R) \leqslant (d+1)(\operatorname{dx}(R/(\boldsymbol{x})) + 1) - 1 \leqslant (d+1)(5+1) - 1 = 6d + 5$。■

注记 6.15. 定理 6.14 的第一个断言在剩余域为无限时恢复并改进了 [56, 推论 6.5]。设 S 为正则局部环， I 为 S 的理想，满足 $\nu(I) \leqslant 2$ 且 $R = S/I$。则 $\operatorname{codim} R = \operatorname{edim} R - \dim R \leqslant \dim S - (\dim S - \operatorname{ht} I) = \operatorname{ht} I \leqslant \nu(I) \leqslant 2$。因此，当 R 是剩余域为无限的 Cohen–Macaulay 局部环时，定理 6.14 的第二个断言恢复并改进了 [56, 推论 6.11]。

7. Gorenstein local rings with almost minimal multiplicity

本节的目的是提出并考察下述问题。

问题 7.1. 设 R 为具有极大理想 $\mathfrak{m}$的 Gorenstein 局部环。假设 R 不是完全交。若 $\mathfrak{m}^3 = 0$ 或 $\mathsf{e}(R) \leqslant \operatorname{codim} R + 2$成立，则 R 是否必然支配?

问题 7.1 的第二种情形被视为第一种情形的高维版本。注意，问题7.1 和 [55, 问题 9。6] 的方向相反；后一个问题询问每个 Gorenstein 支配局部环是否都是超曲面。我们从一个专家们应当熟知的引理开始。

引理 7.2。(1) 设 R 是一个 *Gorenstein* 局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}$。假设 $\mathfrak{m}^3 = 0$，且 R 不是完全交。则有嵌入维数 $R \geqslant 3$ 以及 上同调 $R = \mathfrak{m}^2 \cong k$。
(2) 设 R 是一个 *Cohen–Macaulay* 局部环，其维数为 d。设 $\boldsymbol{x} = x_1$、……、x_d 是 R 的一个参数系。设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))$ 的一个子范畴。那么， $\eta(\mathit{thick}_{\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))}\mathcal{X})$ 包含于 $\mathit{thick}_{\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R)}\eta(\mathcal{X})$ 中，其中 $\eta : \mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x})) \to \mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R)$ 表示自然正合函子。

证明。 (1) 如果 $\operatorname{edim} R \leqslant 2$，那么 R是余维为 $R \leqslant 2$的 Gorenstein 局部环，因此是完全交。所以 $\operatorname{edim} R \geqslant 3$。如果 $\mathfrak{m}^2 = 0$，那么 R 具有极小重数，因此是一个满足 $\mathsf{e}(R) = 2$ 的超曲面。所以 $\mathfrak{m}^2 \neq 0$。由于 $\mathfrak{m}^3 = 0$，我们有 $0 \neq \mathfrak{m}^2 \subseteq$ 上同调$R \cong k$。因此，上同调 $R = \mathfrak{m}^2 \cong k$。

(2) 令 $\mathcal{Y} =$ 厚子范畴$_{\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R)}\eta(\mathcal{X})$。设 $\mathcal{Z} = \eta^{-1}(\mathcal{Y})$，即 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))$ 的子范畴，由满足 $\eta(Z) \in \mathcal{Y}$ 的对象Z 组成。由于 $\eta(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$，我们有 $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$。设 $L \to M \to N \rightsquigarrow$ 是 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))$ 中的一个正合三角。于是得到 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R)$ 中的一个正合三角 $\eta(L) \to \eta(M) \to \eta(N) \rightsquigarrow$。令 $\{A, B, C\} = \{L, M, N\}$。如果 $A, B \in \mathcal{Z}$，那么 $\eta(A)\ \eta(B) \in \mathcal{Y}$，且 $\eta(C) \in \mathcal{Y}$，因此 $C \in \mathcal{Z}$。另外，如果 $D \oplus E \in \mathcal{Z}$，那么 $\eta(D) \oplus \eta(E) = \eta(D \oplus E) \in \mathcal{Y}$，且 $\eta(D)\ \eta(E) \in \mathcal{Y}$，因此 $D, E \in \mathcal{Z}$。因此， $\mathcal{Z}$是 $\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))$ 的一个厚子范畴，且包含 $\mathcal{X}$。于是， $\mathcal{Z}$包含厚子范畴 $\mathrm{thick}_{\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))}\mathcal{X}$，这意味着 $\eta(\mathrm{thick}_{\mathrm{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))}\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$。■

我们需要回顾　　负次数下极小完全分解和 Betti 数的定义　　.

定义 7.3。 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个阿廷 Gorenstein 局部环。设 M 是一个 R-模。那么存在 M的极小完全分解，其定义为一个正合列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_4} F_3 \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} F_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} F_{-2} \xrightarrow{\partial_{-2}} F_{-3} \xrightarrow{\partial_{-3}} F_{-4} \xrightarrow{\partial_{-4}} \cdots$$

自由 R-模，使得对所有 $i\in\mathbb{Z}$，$\operatorname{Im}\partial_i\subseteq\mathfrak{m}F_{i-1}$ 且 $\operatorname{Im}\partial_0=M$。对于所有 $i\in\mathbb{Z}$，我们将 ith 贝蒂数 $\beta_i^R(M)$ 定义为 M 的自由 R-模 F_i的秩，并将 ith 上同调Ω_R^iM 定义为 M 的微分映射 ∂_i的像。显然，对于每个非负整数 i，M 的 ith 贝蒂数和上同调，分别与通常的 M 的 ith 贝蒂数和上同调相同，因此不会产生混淆。

以下命题肯定地回答了问题7.1 的第一种情形。第三个断言指出，没有任何上同调包含剩余域作为直和项的情况相当罕见。

命题 7.4。设$(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个具有 $\mathfrak{m}^3=0$ 的 *Gorenstein* 局部环，且它不是完全交。
(1) 设 I 是 R 的非零真理想。则以下两个陈述成立。*(a)* 有 $\mathit{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}\{R/I,(R/I)^*\}=\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$。*(b)* 若 I 是主理想，或 R 的嵌入维数至多为 *3*，则有 $\mathit{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}R/I=\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$。*(2)* 在以下三种情形中，$\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$ 的厚子范畴 $\mathcal{X}$ 均与 $\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$ 重合。*(a)* 子范畴 $\mathcal{X}$ 对 $(-)^*$（即 $\mathcal{X}^*\subseteq\mathcal{X}$）封闭，并且包含 R 的一个非零真理想。*(b)* 子范畴 $\mathcal{X}$ 包含 R 的一个非零真主理想。*(c)* 局部环 R 的嵌入维数至多为 *3*，且 $\mathcal{X}$ 包含 R 的一个非零真理想。*(3)* 设 $M\neq0$ 是一个没有非零自由直和项的 R-模，并且对于所有 $i\in\mathbb{Z}$，k 都不是 Ω^iM 的直和项。令 $p=\frac{e-\sqrt{e^2-4}}{2}$、$q=\frac{e+\sqrt{e^2-4}}{2}$*(M)* 和 $b=\mathsf{r}_R(M)$。则对于所有 $i\in\mathbb{Z}$，有

$$\beta_i^R(M)=\frac{a(q^{i+1}-p^{i+1})-b(q^i-p^i)}{q-p}\geqslant 2\sqrt{\frac{eab-a^2-b^2}{e^2-4}}\quad \textit{and}\quad p<\frac{a}{b},\frac{b}{a}<q.$$

证明。 (1a) 引理 7.2(1) 表明，$\operatorname{edim}R\geqslant3$和 $\operatorname{Soc}R=\mathfrak{m}^2\cong k$。由于 I是 R的非零理想，它包含 $\operatorname{Soc}R=\mathfrak{m}^2$。因此 $(\mathfrak{m}/I)^2=0$，从而阿廷局部环 R/I 具有极小重数。注意，$(R/I)^*$ 同构于 R/I-模 k的内射包络 $\mathrm{E}^{R/I}(k)$。只要证明 $k\in$ 属于厚子范畴$_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}\{R/I,(R/I)^*\}$，即可得出该命题的结论。

首先，考虑因子局部环 R/I 不是 Gorenstein 的情形。在这种情形下，$\mathrm{E}^{R/I}(k)$ 不是 R/I-自由的。由于 $\mathrm{E}^{R/I}(k)$ 作为 R/I-模是不可分解的，$\Omega^{R/I}\mathrm{E}^{R/I}(k)$ 是 $\mathfrak{m}/I$的有限个副本的有限直和的子模，而该直和被 $\mathfrak{m}/I$湮灭。因此，$\Omega^{R/I}\mathrm{E}^{R/I}(k)$ 是一个非零的 k-向量空间。于是我们得到一个由 R/I-模构成的正合列 $0\to k^{\oplus a}\to(R/I)^{\oplus b}\to(R/I)^*\to0$，其中 a，$b>0$；这表明 k 属于厚子范畴$_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}\{R/I,(R/I)^*\}$。

接下来我们考虑 R/I 为 Gorenstein 的情形。存在同构 $R/I\cong\mathrm{E}^{R/I}(k)\cong(R/I)^*\cong0:I$。设 $x\in0:I$ 为$1\in R/I$ 在这些同构的合成下的像。由此可得 $0:I=(x)\neq0$。由于 $I\neq0$，理想(x)是真理想。我们有 $I=0:(0:I)=0:x\cong(R/(x))^*$ 以及 $I^*\cong R/(x)$。

假设 $R/(x)$不是 Gorenstein 的。将上述关于 I 的论证应用于(x)，我们得到一个正合列 $0\to k^{\oplus a}\to(R/(x))^{\oplus b}\to(R/(x))^*\to0$，其中 $a,b>0$。因此 k属于 $\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}\{I,I^*\}=\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}\{R/I,(R/I)^*\}$。

假设 $R/(x)$ 是一个 Gorenstein 局部环。然后将开头给出的关于 I 的论证应用于 (x)，我们观察到 Gorenstein 局部环 $R/(x)$ 具有极小重数。因此 $R/(x)$ 是重数为二的超曲面局部环，这意味着其极大理想 $\mathfrak{m}/(x)$ 同构于 k。由此可得$\nu_R(\mathfrak{m})\leqslant2$，这与嵌入维数 $R\geqslant3$这一事实相矛盾。

(1b) 我们首先考虑 I 为主的情形。记 $I=(x)$，则有 $(R/I)^*\cong0:I=0:x$。存在正合列 $0\to0:x\to R\xrightarrow{x}R\to R/(x)\to0$，这表明 $0:x=R/(x)[-2]\in\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}R/(x)$。因此 $(R/I)^*$ 属于 $\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}R/I$，从而该断言由 (1a) 得出。

接下来考虑 $\operatorname{edim}R\leqslant3$ 的情形。引理 7.2(1) 蕴含 $\operatorname{edim}R=3$ 且 $\operatorname{Soc}R=\mathfrak{m}^2\cong k$。我们有 $\ell(R)=\ell(R/\mathfrak{m})+\ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)+\ell(\mathfrak{m}^2)=1+3+1=5$。注意，$0:I$ 也是一个非零真理想。

(i) 若 $\mathfrak{m}I=0$，则对于某个 $n>0$ 有 $I\cong k^{\oplus n}$；将 $\operatorname{Hom}_R(k,-)$ 作用于正合列 $0\to I\to R$，可得 $n=1$，因此该断言由前一种情形推出。

(ii) 我们不妨假设 $\mathfrak{m}I\neq0$。由于 $\mathfrak{m}I\subseteq\mathfrak{m}^2\cong k$，我们得到 $\mathfrak{m}I=\mathfrak{m}^2\cong k$。因此 $\nu(I)=\ell(I)-\ell(\mathfrak{m}I)=\ell(I)-1$。（iii）如果 $\mathfrak{m}(0:I)=0$，那么将论证 (i) 应用于理想 $0:I$，可得 $\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}R/(0:I)$ 与 $\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$ 重合；由对偶 $(-)^*:\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)\to\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$ 可知，$\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}(R/(0:I))^*$ 与 $\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$ 重合。因此，$\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)}R/I$ 也与 $\mathsf{D}^{\mathsf{sg}}(R)$ 重合，因为我们有 $(R/(0:I))^*\cong0:(0:I)=I$。

（iv）我们不妨假设 $\mathfrak{m}(0:I)\neq 0$。将论证 (ii) 应用于 $0:I$，可得 $\nu(0:I)=\ell(0:I)-1$。由于 $\ell(0:I)=\ell((R/I)^*)=\ell(R/I)$，我们有 $\nu(I)+\nu(0:I)=(\ell(I)-1)+(\ell(0:I)-1)=\ell(I)+\ell(R/I)-2=\ell(R)-2=3$。由于 $\nu(I)$ 和 $\nu(0:I)$ 均为正数，可知其中必有一个等于 1。若 $\nu(I)=1$，则由 (1a) 得 $\operatorname{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R)} R/I=\mathrm{D^{sg}}(R)$。若 $\nu(0:I)=1$，则由 (1a) 得 $\operatorname{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R)} R/(0:I)=\mathrm{D^{sg}}(R)$；与 (iii) 中类似，应用 $(-)^*$ 可得 $\operatorname{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R)} R/I=\mathrm{D^{sg}}(R)$。

(2) 该断言是 (1) 的直接推论。

(3) 引理 7.2(1) 蕴含 $e\geqslant 3$ and 上同调 $R=\mathfrak{m}^2\cong k$。由注 6.5(1) 可得 $\mathrm{P}_k(t)=\frac{1}{t^2-et+1}$。我们看到，对于所有 ~~$i\geqslant 0$~~，$\beta_{i+2}(k)-e\beta_{i+1}(k)+\beta_i(k)=0$。由于 p、q 是二次方程 $t^2-et+1=0$ 的两个根，我们得到，对于所有 $i\geqslant 0$，$\beta_i(k)=\frac{q^{i+1}-p^{i+1}}{q-p}$。由于 k 不是~~M 的~~直和项，我们看到上同调 M 包含于 $\mathfrak{m}M$ 中。由于 M 没有非零自由直和项，它是一个上同调。等式 $\mathfrak{m}^2M=0$ 和上同调 $M=\mathfrak{m}M$ 随之成立。根据 [37, 推论 3.4(1)]，我们有 $\mathrm{P}_M(t)=\frac{a-bt}{1-et+t^2}$，由此可见，对于所有 $i\geqslant 1$，$\beta_i(M)=a\beta_i(k)-b\beta_{i-1}(k)$。因此，~~对于所有~~$i\geqslant 0$，$\beta_i^R(M)=\frac{a(q^{i+1}-p^{i+1})-b(q^i-p^i)}{q-p}$。注意，$\nu(M^*)=\mathrm{r}(M)=b$，且 $\mathrm{r}(M^*)=\nu(M)=a$。~~将上述关于 M 的~~论证应用于 M^*，我们得到，对于所有 $j\geqslant 0$，$\beta_j(M^*)=\frac{b(q^{j+1}-p^{j+1})-a(q^j-p^j)}{q-p}$。利用等式 $pq=1$，我们得到

$$\beta_i(M)=\beta_{-i-1}(M^*)=\frac{b(q^{-i}-p^{-i})-a(q^{-i-1}-p^{-i-1})}{q-p}=\frac{a(q^{i+1}-p^{i+1})-b(q^i-p^i)}{q-p}$$

对所有 $i\leqslant -1$ 均成立。因此我们证明了 $\beta_i(M)=\frac{a(q^{i+1}-p^{i+1})-b(q^i-p^i)}{q-p}$ 对所有整数 i 均成立。

有 $(q-p)\beta_i(M)=(aq-b)q^i+(b-ap)p^i$。由于 $e\geqslant 3$，我们有 $0<p<1<q$。因此，$\lim_{i\to\infty}q^i=\lim_{i\to-\infty}p^i=\infty$ 和 $\lim_{i\to\infty}p^i=\lim_{i\to-\infty}q^i=0$。由于对每个整数 i，$\beta_i(M)\geqslant 0$ 均成立，我们必有 $aq-b>0$ 和 $b-ap>0$。因此 $p<\frac{b}{a}<q$。我们得到 $p=\frac{1}{q}<\frac{a}{b}<\frac{1}{p}=q$。

注意 $(aq-b)$ q^i，$(b-ap)p^i$ 对所有 $i\in\mathbb{Z}$ 均为正。由于 $p+q=e$，$pq=1$ 和 $q-p=\sqrt{e^2-4}$，我们得

$$\begin{aligned}\sqrt{e^2-4}\cdot\beta_i(M)=(q-p)\beta_i(M)&=(aq-b)q^i+(b-ap)p^i\geqslant 2\sqrt{(aq-b)q^i\cdot(b-ap)p^i}\\&=2\sqrt{(aq-b)(b-ap)}=2\sqrt{eab-a^2-b^2},\end{aligned}$$

因此，对于所有整数 i，~~有~~ $\beta_i(M)\geqslant 2\sqrt{\frac{eab-a^2-b^2}{e^2-4}}$。

■

以下定理是本节的主要结果。该结果肯定地支持问题7.1的第二种情形。

定理 7.5。设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个 k 无限的 *Gorenstein* 局部环，并假设 R 不是完全交。设 $\mathcal{X}$ 是 $\mathrm{D^{sg}}(R)$ 的一个厚子范畴。那么，如果以下任一条件成立，k 属于 $\mathcal{X}$。

(1) 不等式 $\mathrm{e}(R)\leqslant$ 余维 $R+2$ 成立，并且存在一个非自由循环极大 *Cohen–Macaulay* R-模 X，使得 X 和 X^* 都属于 $\mathcal{X}$。(2) 有 $\mathrm{e}(R)\leqslant 5$，且 $\mathcal{X}$ 包含一个非自由循环极大 *Cohen–Macaulay* R-模。

证明。(1) 由于 k 是无限的，我们可以选择 R 的一个参数系 $\boldsymbol{x}=x_1,\dots,x_d$，使得 $(\boldsymbol{x})$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个极小约化。按照命题 6.7(3)证明开头的论证，我们看到 $(\mathfrak{m}/(\boldsymbol{x}))^3=0$。令 $\mathcal{Y}=\operatorname{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))}\{X/\boldsymbol{x}X,\operatorname{Hom}_{R/(\boldsymbol{x})}(X/\boldsymbol{x}X,R/(\boldsymbol{x}))\}$。注意到 $X/\boldsymbol{x}X$ 是一个非自由循环 $R/(\boldsymbol{x})$-模，并且 $\mathcal{Y}$ 在 $\operatorname{Hom}_{R/(\boldsymbol{x})}(-,R/(\boldsymbol{x}))$ 下闭。由命题 7.4(1)可知，k属于 $\mathcal{Y}$。应用函子 $\eta:\mathrm{D^{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))\to\mathrm{D^{sg}}(R)$，我们看到 k 属于 $\eta(\mathcal{Y})$，而根据引理 7.2(2)，该对象包含于 $\operatorname{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R)}\{X/\boldsymbol{x}X,\operatorname{Hom}_{R/(\boldsymbol{x})}(X/\boldsymbol{x}X,R/(\boldsymbol{x}))\}$ 中。由于 X 是极大 Cohen– Macaulay，$\boldsymbol{x}$ 是 X 上的正则序列。关于 X 的 $\boldsymbol{x}$ 上的 Koszul 复形是无挠的，这意味着 $X/\boldsymbol{x}X$ 属于 $\operatorname{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R)}X$。利用 [15, (A.4.21) 和 (A.4.23)]，我们有

$$\operatorname{Hom}_{R/(\boldsymbol{x})}(X/\boldsymbol{x}X,R/(\boldsymbol{x}))\cong\mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R/(\boldsymbol{x})}(X/\boldsymbol{x}X,R/(\boldsymbol{x}))\cong\mathbf{R}\operatorname{Hom}_{R/(\boldsymbol{x})}(X\otimes^{\mathbf{L}}_R R/(\boldsymbol{x}),R/(\boldsymbol{x}))\cong\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X,R/(\boldsymbol{x}))\cong\mathbf{R}\operatorname{Hom}_R(X,R)\otimes^{\mathbf{L}}_R R/(\boldsymbol{x})\cong X^*\otimes^{\mathbf{L}}_R R/(\boldsymbol{x})\cong X^*/\boldsymbol{x}X^*.$$

与上文类似，最后一项属于 $\operatorname{thick}_{\mathrm{D^{sg}}(R)}\{X,X^*\}$，而由假设，它包含于 $\mathcal{X}$。我们得出结论：k 属于 $\mathcal{X}$。

(2) 令 $X\in\mathcal{X}$ 为一个非自由循环极大 Cohen–Macaulay R-模。由于 R 不是完全交而是一个 Gorenstein环，我们有 $\operatorname{codim}R\geqslant 3$。因此 $\mathrm{e}(R)\leqslant 5\leqslant\operatorname{codim}R+2$。令 $e=\operatorname{edim}R$。由 (1) 及其证明可知，我们可以找到 $\mathfrak{m}$ 的一个极小约化 $(\boldsymbol{x})$，其中 $x_d,\dots,$是 R 的一个参数系，使得 $(\mathfrak{m}/(\boldsymbol{x}))^3=0$ 且 $\ell(\mathfrak{m}^2/\boldsymbol{x}\mathfrak{m})=\mathrm{e}(R)+d-e-1$。根据假设，$\mathrm{e}(R)\leqslant 5$。由于$R$ 不是超曲面，R 不具有极小重数，因此 $\ell(\mathfrak{m}^2/\boldsymbol{x}\mathfrak{m})\geqslant 1$。注意到

$e-d\leqslant 3$。根据 [32, 命题 8.3.3(2)],，我们可以找到元素 $y_1,\dots,y_{e-d}$，使得 $(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_{e-d})=\mathfrak{m}$。因此，$\operatorname{edim} R/(\boldsymbol{x})=\nu(\mathfrak{m}/(\boldsymbol{x}))\leqslant e-d\leqslant 3$。注意，$X/\boldsymbol{x}X$ 是一个非自由循环 $R/(\boldsymbol{x})$-模。由命题 7.4(2)可知，k 属于 $\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R/(\boldsymbol{x}))}X/\boldsymbol{x}X$。利用引理 7.2(2)以及 X的极大 Cohen–Macaulay 性，我们得到 $k\in\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)}X/\boldsymbol{x}X\subseteq\operatorname{thick}_{\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)}X$。■

注 7.6。(1) 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个 Gorenstein 局部环，其中 $\mathfrak{m}^3=0$且嵌入维数为 $R\geqslant 2$。设 M是一个R-模。那么，对于所有 k，它都不是 Ω^iM 的直和项，当且仅当 $i\in\mathbb{Z}$，它不是 k 的直和项，并且 M这些 R-模 M、M^*都是 *Koszul*意义下的模，该意义由 Herzog 和 Iyengar 给出 [31]。

事实上，由 [5, 定理 4.6] 可知，M 是 Koszul，当且仅当对于所有 $i>0$，$(\Omega^ik)^*$ 不是 M 的直和项；当且仅当对于所有 $i>0$，Ω^ik 不是 M^* 的直和项；当且仅当对于所有 $i>0$，k 不是 $\Omega^{-i}(M^*)=(\Omega^iM)^*$的直和项；当且仅当对于所有 $i>0$，$k^*=k$ 不是 Ω^iM 的直和项。因此，M^* 是 Koszul，当且仅当对于所有 $i>0$，k 不是 $\Omega^{-i}M$ 的直和项。

（2）除定理 7.5 的假设外，进一步假设 R 具有孤立奇点。那么 $\mathcal{X}$与 $\mathsf{D}^{\mathrm{sg}}(R)$ 根据 [53,推论 2。7]。

References

[1] M. Artin, 《曲面孤立有理奇点》。 *Amer. J. Math.* **88** (1966年), 129–136。[2] L. L. Avramov, 《无限自由分解》, *Six lectures on commutative algebra* 1 118, ¨ *Birkhäuser* – Mod. *Verlag Basel* 2010 Birkhauser Class., , , 。[3] L. L. Avramov; R.-O. Buchweitz; S. B. Iyengar; C. Miller, 《完美复形的同调》, *Adv. Math.* **223** (2010年), 第5期, 1731–1781。[4] L. L. Avramov; S. B. Iyengar; S. Nasseh; K. Sather-Wagstaff, 《交换诺特环上的同调持久性》, *J. Algebra* **610** (2022年), 463–490。[5] L. L. Avramov; S. B. Iyengar; L. M. Şega, 《短局部环上的自由分解》, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **78** (2008年), 第2期, 459–476。[6] M. Ballard; D. Favero; L. Katzarkov, 《Orlov 谱：界与间隙》, *Invent. Math.* **189** (2012年), 第2期, 359–430。[7] A. Bahlekeh; S. Salarian; R. Takahashi; Z. Toosi, 《消解子范畴的 Spanier–Whitehead 范畴及其与奇点范畴的比较》, *Algebr. Represent. Theory* **25** (2022年), 第3期, 595–613。[8] A. Beligiannis, 《逆变有限子范畴的同调理论：Auslander–Buchweitz 环境、Gorenstein 范畴与（余）稳定化》, *Comm. Algebra* **28** (2000年), 第10期, 4547–4596。[9] A. Bondal; M. Van den Bergh, 《交换几何与非交换几何中函子的生成元与可表示性》, *Mosc. Math. J.* **3** (2003年), 第1期, 1–36, 258。[10] W. Bruns; J. Herzog, 《Cohen–Macaulay 环》, 修订版, 《剑桥高等数学研究》 **39** *Cambridge*, , , 。 *University Press Cambridge* 1998

[11] R.-O. Buchweitz, 《极大 Cohen–Macaulay 模与 Tate 上同调》, 附录及导言由 Luchezar L. Avramov、Benjamin Briggs、Srikanth B. Iyengar 和 Janina C. Letz 撰写, 《Math. Surveys Monogr.》262, *AmericanMathematical Society, Providence, RI*, 2021年。[12] L. Burch, 《局部环中有限同调维数的理想》 *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968年), 941–948。

[13] E. Celikbas; O. Celikbas; J. Herzog; S. Kumashiro, 《全迹模》, `arXiv:2505.14961v1`。[14] O. Celikbas; T. Kobayashi, 《关于一类 Burch 理想及 Huneke–Wiegand 猜想》, *Collect. Math.* **73** (2022年), 第2期, 221–236。[15] L. W. Christensen, 《Gorenstein 维数》, 《Lecture Notes in Math.》1747, *Springer–Verlag Berlin*, 2000年。

[16] L. W. Christensen; D. Jorgensen; H. Rahmati; J. Striuli; R. Wiegand, 《全反身模的 Brauer–Thrall 理论》。 *J. Algebra* **350** (2012年), 340–373。

[17] L. W. Christensen; J. Striuli; O. Veliche *J. Lond. Math.*, 《局 *Soc. (2)* **81** 2010 1, 24 44 部环极小内射分解中的增长》, （），第–期。[18] H. Dao, 《关于冒号运算与特殊类型的理想》, *Palest. J. Math.* **10** (2021年), 第2期, 383–388。[19] H. Dao; D. Eisenbud, 《Burch 指数、合冲的直和项与分解中的线性》, *Bull. Iranian Math. Soc.* **49** (2023年), 第2期, 论文编号10，10页。

[20] H. Dao; O. Iyama; R. Takahashi; C. Vial *J. Noncommut.*, 《非 *Geom.* **9** 2015 34 交换分解与 Grothendieck 群》, （），第1期，21–。[21] H. Dao; T. Kobayashi; R. Takahashi, 《Burch 理想与 Burch 环》, *Algebra Number Theory* **14** (2020年), 第8期, 2121–2150。[22] H. Dao; R. Takahashi, 《模子范畴的半径》, *Algebra Number Theory* **8** (2014年), 第1期, 141–172。[23] H. Dao; R. Takahashi, 《奇点范畴维数的上界》, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **353** (2015年), 第4期, 297–301。

[24] M. DeBellevue; C. Miller *k* *J.*, 《通 *Algebra* **666** 2025 657 672 过典范分解研究正 Burch 指数环上的合冲直和项》, （），–。[25] A. De Stefani, 《理想的乘积可能不是 Golod》, *J. Pure Appl. Algebra* **220**(2016年), 第6期, 2289–2306。[26] S. Dey; T. Kobayashi, 《Burch 理想及相关子模的（上）同调消失》, *Illinois J. Math.* **67** (2023 1, 101 151), 第–期。[27] T. H. Freitas; V. H. Jorge Pérez; R. Wiegand; S. Wiegand, 《拟纤维积环上的 Auslander–Reiten 与 Huneke–Wiegand 猜想》, `arXiv:2205.01031`。

[28] D. Ghosh; A. Saha, 《Burch 理想、子模与商模的同调维数》, *J. Pure Appl. Algebra* **228**(2024年), 第7期, 论文编号107647, 14页。[29] T. H. Gulliksen, 《极小 R-代数分解存在性证明》, *Acta Math.* **120** (1968年), 53–58。[30] I. B. Henriques; L. M Şega, 《短 Gorenstein 局部环上的自由分解》, *Math. Z.* **267** (2011年), 第3-4期, 645–663。[31] J. Herzog; S. Iyengar, 《Koszul 模》, *J. Pure Appl. Algebra* **201** (2005年), 第1-3期, 154–188。[32] C. Huneke; I. Swanson, 《理想、环与模的整闭包》, 《伦敦数学学会讲义丛书》 **336** *Cambridge* , , , 。 *University Press Cambridge* 2006
[33] D. A. Jorgensen, 《Auslander–Buchsbaum 公式的推广》, *J. Pure Appl. Algebra* **144** (1999年), 第2期, 145–155。
[34] D. A. Jorgensen; G. J. Leuschke; S. Sather-Wagstaff, 《具有非平凡半对偶化模的环的表示》, *Collect. Math.* **63** (2012年), 第2期, 165–180。[35] A. R. Kustin; J. Striuli; A. Vraciu, 《齐次零因子的正合对》, *J. Algebra* **453** (2016年), 221–248。
[36] J. Lescot, 《局部环纤维积的 Bass 级数》, ´列 ´环, *Paul Dubreil and Marie-Paule Malliavin algebra seminar 35th year (Paris, 1982)* 218 239, **1029** *Springer Berlin* 1983 , –《 Lecture Notes in Math.》, , , 。[37] J. Lescot, 《某些环上模的 Betti 数的渐近性质》, *J. Pure Appl. Algebra* **38** (1985年), 第2-3期, 287–298。
[38] J. C. Letz; M. Stephan *Doc. Math.* , 《三 **30** 2025 2, 379 415
角范畴中双正合函子的生成时间与 Koszul 对象》, （）, 第–期。[39] G. J. Leuschke; R. Wiegand, 《Cohen–Macaulay 表示》, 《 Math. Surveys Monogr.》 **181** *American Mathematical* , , , 。 *Society Providence RI* 2012
[40] J. Lyle; J. Montaño *Trans. Amer. Math. Soc.* , 《 **373** 2020 11, 7937 7958
Betti 数的极值增长与（上）同调的平凡消失》, （）, 第–期。[41] S. Nasseh; R. Takahashi, 《具有准可分解极大理想的局部环》, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **168** (2020年), 第2期, 305–322。[42] D. O. Orlov *Proc. Steklov Inst. Math.* 《奇点的三 **246** 2004 3, 227 248
角范畴与 Landau–Ginzburg 模型中的 D-膜》, （）, 第–期。[43] D. O. Orlov, 《奇点的三角范畴及 Landau–Ginzburg 模型之间的等价》, *Sb. Math.* **197** (2006年), 第11-12期, 1827–1840。[44] D. Orlov, 《相干层的导出范畴与奇点的三角范畴》, *Algebra arithmetic and* , , , – *geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II* 503 531, 270 *Birkhäuser Boston Inc. Boston MA* 2009
《Progr. Math.》, , , , , 。[45] B. Poonen, 《代数闭域上有限秩交换代数的同构类型》, *Computational arithmetic geometry* 111 120, **463** *American Mathematical Society Providence RI* 2008 , –《 Contemp. Math.》, , , , , 。[46] J. Sally, 《拉伸 Cohen–Macaulay 环的 Poincaré 级数》, ´(1980年), 第5期, 1261–1265。 *Canad. J. Math.* **32** , 《正特征下三维簇的一般超平面截面》, [47] K. Sato; S. Takagi(2020年), 第2期, 647–661。 *J. Inst. Math. Jussieu* **19** [48] G. Scheja《局部环的 Betti 数》, ¨(1964年), 155–172。 *Math. Ann.* **155** , 《有限与可数 CM-表示型》, [49] F.-O. Schreyer, , , –《Lecture Notes in Math.》, , , 。 *Singularities representation of algebras and vector bundles* , 《小余维 *(Lambrecht, 1985)* 9 34, **1273** *Springer–Verlag Berlin* 1987
Gorenstein 环上的上同调消失》, [50] L. M. Şega(2003年), 第8期, 2313–2323。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** , 《具有
[51] G. Sjödin 的局部 Gorenstein 环上模的 Poincaré 级数》, ´(1979年), 《数学系, 斯德哥尔摩大学》预印本2。 $\mathfrak{m}^3 = 0$, 《关于 G-正则局部环》, [52] R. Takahashi(2008年), 第12期, 4472–4491。 *Comm. Algebra* **36** , 《Cohen–Macaulay 模稳定范畴厚子范畴的分类》, [53] R. Takahashi(2010年), 第4期, 2076–2116。 *Adv. Math.* **225**[54] R. Takahashi《去心谱上局部为超曲面的 Gorenstein 局部环上的厚子范畴》, （）, 第–期。 *J.* , 《支配局 *Math. Soc. Japan* **65** 2013 2, 357 374
部环与子范畴分类》, [55] R. Takahashi(2023年), 第9期, 7259–7318。 *Int. Math. Res. Not. IMRN* , 《一致支配局部环与奇点范畴的 Orlov 谱》, [56] R. Takahashi(即将出版), *Math. Z.* 。arXiv:2412.00669v2, 《Noether 环与局部环的同调》, [57] J. Tate(1957年), 14–27。 *Illinois J. Math.* **1** , 《阿贝尔范畴的导出范畴》, 序言由 Luc Illusie 撰写, 由 Georges Maltsiniotis 编辑并撰写附注, [58] J.-L. Verdier(1996年)。´, 《极大理想的立方为零的局部环上的 G-维数零模》, ´´, –《NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.》, , , 。

School of Science and Technology, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tamaku, Kawasaki 214-8571, Japan
Email address: tkobayashi@meiji.ac.jp

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya 464-8602, Japan*Email address*: takahashi@math.nagoya-u.ac.jp*URL*: https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~takahashi/