arXiv:2603.10820v1 [math.CV] 11 Mar 2026

亚解析层多重微局部化的强正则性与微支撑估计

Ryosuke Sakamoto *

摘要

我们引入亚解析层的强正则性概念，并建立其多重微局部化的支撑与微支撑估计。作为应用，我们研究沿对合子丛的正则D-模的 Whitney 与缓增全纯解的亚解析层。在此背景下，我们证明了具有增长条件的多微局部对象的初值定理，以及温和多微函数和 Whitney多微函数的除法定理。由此，我们为强渐近可展函数的解层获得了 Bochner 管状定理的多微局部版本。

引言

渐近可展开函数和温和分布等重要的分析对象并不构成经典层。因此，为经典层发展起来的传统微局部方法无法直接应用于这些对象。为处理这类对象，人们引入了经典框架的若干扩展，其中尤以归纳层和亚解析层为代表 [13, 17]。在 [7],Honda、Prelli 和 Yamazaki 构建了沿某个子流形族的亚解析层多重微局部化理论。他们的构造统一了各种类型的特化与微局部化 [24, 4] ，并为具有增长条件的多微局部对象提供了一个函子框架，其中包括与 Majima 的渐近可展开函数相关的层（见 [21, 5]）。特别地，他们根据经典层的微支撑，获得了多重微局部化的微支撑估计。然而，现有估计仅限于经典层，无法应用于亚解析层。为克服这一困难，我们引入了亚解析层的强化正则性概念，称为强正则性。这一概念旨在控制亚解析情形下多重微局部化的支撑和微支撑。

归纳层的微支撑概念在 [14], 中被提出，其函子性质则在 [20]中得到研究。在 [18], 中，Prelli 利用

*电子邮箱：sakamoto.ryosuke.h0@elms.hokudai.ac.jp

柏原和沙皮拉意义下的微支撑 [14]，得到了亚解析层微局部化的支集估计。我们发现，必须加强微局部条件，才能得到亚解析层多重微局部化的支撑（或微支撑）估计。本文介绍了一种可能的方法，用于估计亚解析层多重微局部化的支撑和微支撑。

一种可能的方法是为亚解析层引入比柏原和沙皮拉 [14]所定义的更强的正则性概念。在 [20], 中，Martins证明， [14] 意义下归纳层的正则性，与柏原和大岛意义下沿对合子丛正则的D-模 [9]之间存在自然联系。这类D-模不一定是完整的。我们证明，本文引入的强化概念仍与这一框架相容。作为应用，我们推导出多重微局部解析对象的若干性质，其中包括正则D-模的Majima的强渐近展开解。还值得一提的是，许多作者利用Andronikof的$_{w}THom$ 和Colin的 $\otimes$，研究了正则D-模的缓增解和Whitney解 [11, 28] 。

有了这些估计，我们证明了逆像定理和多重微局部化定理。最终，我们得到了正则D-模的缓增多重微函数和Whitney多微函数系数的除法定理。作为应用，我们证明了强渐近可展函数解层的Bochner 管状定理。这些结果是 [2], [3], [27]中所得结果的多重微局部对应版本。还请参阅与此主题相关的论文 [25], [26] 。

本文内容安排如下。

第1节介绍强正则性的概念，并研究其基本性质。我们证明了强正则性的一个部分 Abel 性质。我们证明，按照 [9], 的意义，沿对合子丛正则的D-模的各种解（其所属的类别不一定是完整的）都满足强正则性。我们还研究了强正则性的函子性质。

第2节给出多重微局部化的微支集估计。我们先给出支集估计，并考察结果的一些简单推论。我们运用 [14] 中发展的技巧证明微支撑估计。作为一个简单应用，我们证明了在非特征条件下亚解析层的微局部同构。

第3节将讨论范围限定在正规交叉情形，证明逆像定理和多重微局部化定理。这是 [16, 定理 6.7.1] 的多微局部推广。多重微局部化的多重锥结构起着关键作用。也就是说， [7] 的多重法锥与 [16] 的经典法锥表现不同。我们首先讨论经典层情形下的逆像定理和多重微局部化定理。然后应用第2节的结果，证明相应的强正则次解析层定理。

第4节中，我们给出一个关于多微局部 D-模理论的应用

分析。利用在 [22], 中得到的三角形，我们首先证明多微局部对象的初值问题，其中包括 Majima 关于沿对合子丛正则的 D-模的强渐近可展解。最后，我们得到正则 D-模的缓增系数和 Whitney多微函数的除法定理。这可视为正则 D-模的缓增系数和 Whitney多微函数的初值问题。特别地，通过结合除法定理与[8] 的消灭定理，我们得到多微局部 Bochner 管状定理。

0.1 记号

我们基本上遵循 [16], [7] 与 [6]的记号。设 $\underline{X}$ 为复流形， $X_{\mathbb{R}}$ 为其底实解析流形，X 为复共轭流形。我们令 $\mathcal{O}_X^t := \mathrm{RH}_{\mathcal{D}\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{O}_X, \mathrm{D}b^t_{X_{\mathbb{R}}})$， $\mathcal{O}_X^w := \mathrm{RH}_{\mathcal{D}\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{O}_X, \mathrm{C}^{\infty\ w}_{X_{\mathbb{R}}})$。这里$\mathrm{D}b^t_{X_{\mathbb{R}}}$是 $X_{\mathbb{R}}$ 上温和分布的次解析层，而$\mathrm{C}^{\infty\ w}_{X_{\mathbb{R}}}$，是Whitney C^∞-函数的次解析层。

设C表示一个小阿贝尔范畴。 [15] 定义了函子 $J\colon\ D^b(\mathrm{Ind}(\mathrm{C})) \to (D^b(\mathrm{C}))^\wedge$，其定义为对 $F \in D^b(\mathrm{Ind}(\mathrm{C}))$与 $G \in D^b(\mathrm{C})$

$$J(F)(G) = \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{Ind}(C))}(G, F).$$

本文中我们把紧支可构造层范畴$\mathrm{Mod}^c_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$用作C。

1 强正则次解析层

本节将阐述亚解析层强正则性的概念。

定义 1.1（强正则次解析层）。 设 V 和 Ω 是T^*X中的子集。若存在与 F在 x的某个邻域内同构的$F' \in D^b$（$k_{X_{sa}}$）、一个小滤过范畴I以及一个函子 $I \to D^{[a,b]}_{\mathbb{R}}\text{-c}(k_X)$， $i \mapsto F_i$，使得 $J(F') \simeq$“$\varinjlim_i$”$J(R\rho_* F_i)$且奇异支撑 $\mathrm{SS}(F_i) \cap \Omega \subset V$，则称 $F \in D^b$（$k_{X_{sa}}$）在 Ω上沿 V于 $x \in X$处强正则。若对任意 $x \in X$，都存在 x 的一个邻域 U，使得$F \in D^b(k_{X_{sa}})$在π^{-1}（U）上沿V于$x \in X$处强正则，则称 $F \in D^b$（$k_{X_{sa}}$）沿 V强正则。

命题 1.2。 设 $F \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} H \xrightarrow{+1}$ 是 $D^b(k_{X_{sa}})$ 中的一个典范三角。假设存在一个从小滤过归纳范畴 I 到 $D^{[a,b]}_{\mathbb{R}}\text{-c}(k_X)$ 的函子典范三角， $F \mapsto F_i$、$G \mapsto G_i$ 和 $H \mapsto H_i$,

$$F_i \xrightarrow{f_i} G_i \xrightarrow{g_i} H_i \xrightarrow{+1},$$

使得 $J(F) \simeq$“$\varinjlim_i$”$J(F_i)$， $f \simeq$“$\varinjlim_i$” f_i， $J(G) \simeq$“$\varinjlim_i$”$J(G_i)$ 且 $g \simeq$“$\varinjlim_i$”g_i。此外，假设 $\mathrm{SS}(F_i) \subset V$ 且 $\mathrm{SS}(G_i) \subset V$，并且该对应关系

关于三角形态射是函子性的，也就是说，对任意 $i \to j$、 $j \to k$ 和 $j \to k$，以下关联图交换：

$$\begin{array}{ccccccc}
F_i & \xrightarrow{f_i} & G_i & \xrightarrow{g_i} & H_i & \xrightarrow{+1} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
F_j & \xrightarrow{f_j} & G_j & \xrightarrow{g_j} & H_j & \xrightarrow[+1]{} & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
F_k & \xrightarrow{f_k} & G_k & \xrightarrow{f_k} & H_k & \xrightarrow{+1} & .
\end{array}$$

于是 H 沿 V是强正则的。

证明。 由三角不等式，我们有奇异支撑$(H_i) \subset V$。于是只需证明$J(H) \simeq$“$\lim\!\longrightarrow_{i\in I}$”$J(H_i)$。由 [12,引理 2.3.1],这等价于证明

$$H^k(H) \simeq \text{“}\varinjlim_{i\in I}\text{”}H^k(H_i),$$

对任意 k。考虑以下长正合列：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^k(F) & \longrightarrow & H^k(G) & \longrightarrow & H^k(H) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \sim\uparrow & & \sim\uparrow & & \vdots\uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \text{“}\varinjlim_i\text{”}H^k(F_i) & \longrightarrow & \text{“}\varinjlim_i\text{”}H^k(G_i) & \longrightarrow & \text{“}\varinjlim_i\text{”}H^k(H_i) & \longrightarrow & \cdots .
\end{array}$$

由五引理，对每个 k 虚线箭头是一个同构。 □

由以下定理，我们证明正则D模的解自然是强正则的，而Martins [20] 证明了在温和全纯函数情形下[14] 意义下的正则性。设 X 为复流形，并设 M为凝聚D_X-模。为简便起见，我们记：

$$\mathrm{Sol}^t(\mathcal{M}) := \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho^!\mathcal{D}_X}(\rho^!\mathcal{M}, \mathcal{O}_X^t),$$

$$\mathrm{Sol}^w(\mathcal{M}) := \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho^!\mathcal{D}_X}(\rho^!\mathcal{M}, \mathcal{O}_X^w).$$

定理1.3。 若$\mathcal{M}$ 是沿 T^*X的对合向量子丛 V在*Kashiwara-Oshima [9],*意义下正则的凝聚$\mathcal{D}_X$-模，则$\mathrm{Sol}^w(\mathcal{M})$与$\mathrm{Sol}^t(\mathcal{M})$沿 V是强正则的。

证明。 我们可以假设 $X = Z \times Y$，其中 Z和 Y是某些复流形， f是投影 $X \to Y$，且 $V = X \times_Y T^*Y$。由 [11,引理 3.6],可知，只需证明以下断言：

断言 1.4. 存在一个小的滤过归纳系统 $\{F_i\}_{i\in I} \in \mathrm{C}^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_Y))$，使得 $\mathrm{Sol}^\lambda(\mathrm{D}_{X\to Y})$ 准同构于 Q“$\lim\!\longrightarrow_i$”F_i且

$$\mathrm{SS}(F_i) \subset V, \text{ for all } i \in I.$$

事实上，由 [11, 引理 3.6]，M 在 X 上局部容许有限分解

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}^N \xrightarrow{\varphi_N} \mathcal{L}^{N-1} \xrightarrow{\varphi_{N-1}} \cdots \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{L}^0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

每个 D_X-模 L^j 都同构于 D_X-模 $\mathrm{D}_{X\to Y}$ 的有限直和。我们得到以下短正合列:

$$\begin{aligned}
&0 \longrightarrow \mathcal{L}^N \longrightarrow \mathcal{L}^{N-1} \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi_{N-1} \longrightarrow 0,\\
&\cdots\\
&0 \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi_{j-1} \longrightarrow \mathcal{L}^j \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi_j \longrightarrow 0,\\
&\cdots\\
&0 \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi_0 \longrightarrow \mathcal{L}^0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

我们有典范三角

$$\mathrm{Sol}^w(\mathcal{L}^N) \xrightarrow{\mathrm{Sol}^w(\varphi_N)} \mathrm{Sol}^w(\mathcal{L}^{N-1}) \longrightarrow \mathrm{Sol}^w(\operatorname{Im}\varphi_{N-1}) \xrightarrow{+1} .$$

存在一个小滤过归纳系统 $\{F_i\}_{i\in I} \in \mathrm{C}^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_Y))$，使得 $\mathrm{Sol}^\lambda(\mathrm{L}^N)$ 准同构于 $Q\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i$，并且

$$\mathrm{SS}(F_i) \subset V, \text{ for all } i \in I.$$

类似地，存在一个小滤过归纳系统 $\{G_i\}_{i\in J} \in \mathrm{C}^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_Y))$，使得 $\mathrm{Sol}^\lambda(\mathrm{L}^{N-1})$ 准同构于 $Q\text{“}\varinjlim_i\text{”}G_i$，并且

$$\mathrm{SS}(G_i) \subset V, \text{ for all } i \in J.$$

由 [13, 命题 6.1.13] 可知，存在一个小滤过范畴 K 和一个函子态射 φ。对每个 $i \in K$，令 $H_i :=$ 余核 φ_i，则 $\{H_i\}_{i\in K}$ 是一个小滤过系统。然后利用命题 1.2 可知，$\mathrm{Sol}^w(\mathrm{Im}\ \varphi_{N-1})$ 满足将 $\mathrm{Sol}^\lambda(\mathrm{D}_{X\to Y})$ 代入后的断言 1.4。因此，反复应用上述论证即可得到结论。

我们来证明惠特尼全纯函数情形下的断言 1.4。由[18,推论 A.4.8], 可得

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y^w \simeq \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{D}_{X\to Y}, \mathcal{O}_X^w).$$

存在一个小的滤过归纳系统 $\{F_i\}_{i\in I} \in \mathrm{C}^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_Y))$，使得$F := \mathcal{O}_Y^w$与 $Q\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i$准同构。于是，由 [14, 定理 3.1] 和 [12,命题 2.3.2]可得 $J(f^{-1}F) \simeq \text{“}\varinjlim_i\text{”}J(f^{-1}F_i)$，并且有

$$\mathrm{SS}(f^{-1}F_i) \subset X \times_Y T^*Y, \text{ for all } i \in I.$$

由此可得，$f^{-1}F$ 沿着 V是强正则的。

接下来我们证明 Sol′(M) 的情形，证明过程类似。事实上，在这种情况下我们可以使用[18, 推论 A.3。7] 我们有

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y^t \simeq \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{D}_{X\to Y}, \mathcal{O}_X^t).$$

由此得证。 □

我们研究正则性的一些函子性质。

命题 1.5. 设 $f\colon Y \to X$ 是一个闭嵌入，并将 Y 视为 X的一个子流形。设 V是 T^*Y中的一个子集。若 $F \in D^b(k_{Y_{sa}})$沿 V强正则，则 Rf_*F沿 $f_\pi{}^t f_{\prime-1}(V)$强正则。

证明。 若 F沿 V强正则，则存在 $F' \in D^b(k_{Y_{sa}})$，它在邻域内与 F y I $I \to$同构；还存在一个 $D_{\mathbb{R}}^{[a,b]}$ k_Y $i \mapsto F_i$ J $F' \simeq$ J $R\rho_*F_i$ $F_i \subset V$ [12, 小滤过范畴以及一个函子-c( )，使得( )“lim⟶i”( )且奇异支撑( )。由命题 2.3.2], 可得

$$J(Rf_*F') \simeq \text{“}\varinjlim_i\text{”} J(Rf_*F_i).$$

由 [16, 命题 5.4.4] ，对每个 i ，我们有

$$\mathrm{SS}(Rf_*F_i) = f_\pi{}^t f'^{-1}(\mathrm{SS}(F_i)).$$

□

命题 1.6. 设 $K \in D^b_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$。设 V是 T^*X中的一个子集。若 $F \in D^b(k_{X_{sa}})$ 沿着 V强正则，则 $K \otimes F$沿着 $\mathrm{SS}(K)\hat{}+V$强正则。

证明。 证明与命题 1.5 类似。应用 [12, 命题 2.3.2] 和[16,推论 6.4.5]。□

命题 1.7. 设 $f\colon Y \to X$是一个态射。设 V是 T^*X中的一个子集。若 F沿着 V强正则，则 $f^{-1}F$和 $f_!F$沿着 $f^\sharp(V)$ 强正则。

证明。 证明与命题 1.5 类似。应用 [12, 命题 2.3.2] 和[16,推论 6.4.4]。□

2 强正则次解析层多重微局部化的支撑与微支集估计

本节中，我们研究多重微局部化支撑的估计。设 χ 是流形 X 上的子流形族 {M_1、……、 M_ℓ，该流形满足 [7]中的条件 H1、H2 和 H3。

2.1 支撑估计

定理 2.1。 设 V 是 T^*X 的一个子集。假设 $F \in D^b$（$k_{X_{sa}}$）沿 V 强正则。那么

$$\mu_X^{sa}(F)_{C_{\mathcal{X}^*}(V)\cap S_{\mathcal{X}}^*} \xleftarrow{\sim} \mu_X^{sa}(F).$$

$$\mathrm{supp}(\rho^{-1}\mu_X^{sa}F) \subset C_{\mathcal{X}^*}(V) \cap S_{\mathcal{X}}^*.$$

证明。 设 $Z := C_{\mathcal{X}^*}(V) \cap S_{\mathcal{X}}^*$. 由强正则性，存在 F'，它在 x 的某个邻域 U 内与 F 同构；还存在一个小滤过范畴 I 和一个函子 $I \to D^{[a,b]}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X), i \mapsto F_i$，使得 $J(F') \simeq$ “$\varinjlim_i$”$J(R\rho_* F_i)$，且奇异支撑 $\mathrm{SS}(F_i) \cap \Omega \subset V$。由 [14, 定理 3.3],

$$\begin{aligned} J(\mu_X^{sa}(F')_Z) &\simeq \text{“}\varinjlim_i\text{”} J(R\rho_*\mu_{\mathcal{X}}(F_i) \otimes k_Z) \\ &\simeq \text{“}\varinjlim_i\text{”} J(R\rho_*\mu_{\mathcal{X}}(F_i)) \\ &\simeq J(\mu_X^{sa}(F')). \end{aligned}$$

第二个同构由 [7, 定理 3.6] 得出。由 [15, 推论 15.4.4],J 是保守的。因此 $\mu_X^{sa}(F')_Z \simeq \mu_X^{sa}(F')$。于是，对任意 $x \in X$，存在一个邻域 U，使得

$$\mu_X^{sa}(F)_{C_{\mathcal{X}^*}(V)\cap S_{\mathcal{X}}^*} \simeq \mu_X^{sa}(F)$$

在 $\pi^{-1}(U)$ 上。

设 $p \notin C_{\mathcal{X}^*}(V) \cap S_{\mathcal{X}}^*$。由沿 V 的强正则性，在 $C^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X))$ 中存在一个小滤过系统 $\{F_i\}$，其奇异支撑 $\mathrm{SS}(F_i) \subset V$，使得 F 在 $\pi(p)$ 的某个邻域 W 内与 $\varinjlim_i \rho_* F_i$ 准同构。此外，我们还找到一个沿 $\mathcal{X}$、包含 p 的多锥形开邻域 U，使得 $C_{\mathcal{X}^*}(V) \cap U = \emptyset$ 且 $U \subset \pi^{-1}(W)$。我们有：

$$H^k\mu_X^{sa}(F_W) \simeq \varinjlim_i \rho_* H^k\mu_{\mathcal{X}}F_{iW},$$

对任意 $k \in \mathbb{Z}$。于是 $\mu_X^{sa}(F)|_U = 0$，因为 $\mathrm{supp}(\mu_{\mathcal{X}}F_i) \subset C_{\mathcal{X}^*}$(奇异支撑($F_i$)) $\cap S_{\mathcal{X}}^*$，由 [7, 定理 3.6]，且 $C_{\mathcal{X}^*}$(奇异支撑 (F_i)) $\subset C_{\mathcal{X}^*}(V)$。□

命题 2.2。 设 $G_1, \ldots, G_\ell \in D^b_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$，$F \in D^b(k_{X_{sa}})$。假设 F沿 V $Z = C_{\mathcal{X}^*}$ $G_1{}^a \times \cdots \times G_\ell{}^a \times i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_{\Delta}$ V $\cap$强正则。设 :˜ $S^*_{\hat{\mathcal{X}}}$ $i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_{\Delta}$ V $= x_1$ x_n ξ_1 ξ_n $x_1 =$ $= x_n$ $\xi_1 +$ $+ \xi_n \in V$ (奇异支撑()⋯奇异支撑()())，其中 (){(, . . . , :, . . . ,);⋯,⋯}为局部坐标。于是我们有

$$\mu hom^{sa}_{\hat{\mathcal{X}}}(G_1, \ldots, G_\ell; F)_Z \simeq \mu hom^{sa}_{\hat{\mathcal{X}}}(G_1, \ldots, G_\ell; F).$$

证明。 由 [14, 定理 3.3] 和 [16, 命题 5.4.1、命题 5.4.2、命题 5.4.4], $\mathrm{RH}om($ $p_2^{-1}(G_1 \boxtimes \cdots \boxtimes G_\ell)$, $p_1^!Ri_{\Delta*}F))$ 沿着奇异支撑 $\mathrm{SS}(G_1)^a \times \cdots \times \mathrm{SS}(G_\ell)^a \times i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_{\Delta}(V)$ 是强正则的。因此由定理 2.1 可得结论。□

引理 2.3。 设 A 是 T^*X 中的一个子集。我们有：

$$C_{X^*}(A) \cap S^*_X \subset \overline{A}^X \cap S^*_X.$$

这里，对于 T^*X 中的子集 D，我们定义 $(x(0), 0, \dots, 0; 0, \xi(1), \dots, \xi(l)) \in D^X$，当且仅当存在序列 $\{(t_{1,n}, \dots, t_{\ell,n})\} \subset (\mathbb{R}^+)^\ell$ 和 $\{(x(0)_n, \dots, x(l)_n; \xi(0), \dots, \xi(l))\} \subset D$，使得 $(t\hat{}_{J_0,n}x(0)_n, t\hat{}_{J_1^c,k}\xi(1)_k, \dots, t\hat{}_{J_\ell^c,k}\xi(l)_k) \to (x(0), \xi(1), \xi(2), \cdots, \xi(l))$，且 $t_{j,n} \to +\infty$, $j = 1, \dots, l$。

证明。 根据 [7,引理 1.4],$(x_{(0)}, \dots, x_{(l)}; \xi_{(0)}, \dots, \xi_{(l)}) \in C_{X^*}(A)$ 当且仅当存在序列

$$\{(x_k^{(0)}, \dots, x_k^{(\ell)}; \xi_k^{(0)}, \dots, \xi_k^{(\ell)})\} \subset A$$

以及 $(t_{1,k}, \dots, t_{n,k}) \subset (\mathbb{R}^+)^\ell$ 使得

$$(t\hat{}_{J_0,k}x(0)_k, \dots, t\hat{}_{J_\ell,k}x(l)_k; t\hat{}_{J_0^c,k}\xi(0)_k, \dots, t\hat{}_{J_\ell^c,k}\xi(l)_k) \to (x(0), \dots, x(l); \xi(0), \dots, \xi(l)) \tag{1}$$

以及 $t_{1,n}, \dots, t_{\ell,n} \to \infty$。由此得证。 □

推论 2.4。 设 $G_1, \dots, G_\ell \in D^b_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$, $F \in D^b(k_{X_{sa}})$。假设 F 沿 V 强正则。设 奇异支撑$(G_1) \times \cdots \times$奇异支撑$(G_\ell) \cap i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_\Delta(V) \subset T^*_X X \times \cdots \times T^*_X X$。那么

$$D'G_1 \otimes \cdots \otimes D'G_\ell \otimes F \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\mathscr{H}om(G_1 \otimes \cdots \otimes G_\ell, F).$$

证明。 由引理 2.3，根据假设可得：

$$\begin{aligned} & C_{\hat{X}^*}(\mathrm{SS}(G_1)^a \times \cdots \times \mathrm{SS}(G_\ell)^a \times i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_\Delta(V)) \cap \dot{S}^*_{\hat{X}} \\ \subset\ & \overline{\mathrm{SS}(G_1) \times \cdots \times \mathrm{SS}(G_\ell) \cap i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_\Delta(V)}^X \cap \dot{S}^*_{\hat{X}} \\ =\ & \emptyset. \end{aligned}$$

最后，利用 [22, 推论 3.12] 和命题 2.2 中的典范三角。

□

推论 2.5。 假设 $F \in D^b(k_{X_{sa}})$ 沿 V 强正则。设 U 和 U' 是 S_X 中的开多锥子集，具有凸纤维，$U \subset U'$。若 $C_{X^*}(V) \cap U^{\circ a} \subset U'^{\circ a}$，则

$$R\Gamma(U'; \nu_X(F)) \to R\Gamma(U; \nu_X(F))$$

是一个同构。

证明。 设 $\gamma := U^{\circ a}, \gamma' := U'^{\circ a}$。由以下交换图

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(U'; \nu_X(F)) & \longleftarrow & R\Gamma_{\gamma'}(S^*_X; \mu_X(F) \otimes or_{M/X}[d]) \\ \downarrow \beta & & \downarrow \alpha \\ R\Gamma(U; \nu_X(F)) & \longleftarrow & R\Gamma_{\gamma}(S^*_X; \mu_X(F) \otimes or_{M/X}[d]) \end{array} \tag{2}$$

其中水平态射由 [18, 注 3.2.7、命题 3.2.8]和 [7,命题 2.2], 给出，α 和 β 是由限制诱导的态射。因此，由命题 2.1，α 是一个同构。□

2.2 多重微局部化的微支撑估计

利用 [14], 中发展的技巧，我们可以得到多重微局部化的微支集估计。回顾 [14, 定义 4.4]: 设Λ_i， $i \in I$是由小滤过范畴 I的对象为指标的一族 T^*X的闭锥形子集。若存在 p 的一个开邻域 U 以及 I 的一个共终子集 J，使得对每个 $j \in J$都有 $\Lambda_j \cap U = \emptyset$，则 $p \in T^*X$不属于 $\lim_i \Lambda_i$。

定理 2.6. 设 $F \in D^b(k_{X_{sa}})$沿 V 强正则。则有:

$$\mathrm{SS}(\mu_X^{sa}(F)) \subset \mathrm{C}_{\mathcal{X}^*}(V).$$

特别地,

$$\mathrm{SS}(\rho^{-1}\mu_X^{sa}(F)) \subset \mathrm{C}_{\mathcal{X}^*}(V).$$

证明. 由于 F 沿 V 强正则，对于任意 $x \in X$，我们可以在 x 的某个邻域 U 中找到与 F 同构的 F'，使得 $J(F') \simeq \text{“}\varinjlim_i\text{”} J(R\rho_* F_i)$，且奇异支撑 $\mathrm{SS}(F_i) \cap \pi^{-1}(U) \subset V$。由 [14,定理 3.3] 可得

$$J(\mu_X^{sa}(F')) \simeq \text{“}\varinjlim_i\text{”} J(R\rho_* \mu_X(F_i)).$$

由 [14, (4.1)] 以及关于 $\pi^{-1}U$ 的 [7, 定理 3.6.] 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{SS}(\mu_X^{sa}F') &\subset \varinjlim_i \mathrm{SS}(\mu_X(F_i)) \\ &\subset \varinjlim_i \mathrm{C}_{\mathcal{X}^*}(\mathrm{SS}(F_i)) \subset \mathrm{C}_{\mathcal{X}^*}(V). \end{aligned}$$

由 [20, 命题 3.13 (ii)], , 第二个断言得证。 □

推论 2.7. 设 $F \in \mathrm{D}^b(k_{X_{sa}})$沿 V 强正则。我们有:

$$\mathrm{SS}(\mu_M^{sa}(F)) \subset \mathrm{C}_{T^*_M X}(V).$$

定理 2.8. 设 W 是 T^*Y 的一个子集。设 $f\colon Y \to X$ 是解析流形之间的一个态射。假设 $F \in D^b(k_{X_{sa}})$在 T^*X 中沿 V 强正则。如果 f 对 W 上的 V 是非特征的，那么

$$\rho^{-1}f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X} \to \rho^{-1}f^! F$$

在 W上是一个同构。

证明。 将 Y 等同于 $X \times Y$ 中 f 的图像，并用 q 表示投影$T^*_Y(X \times Y) \to Y$。然后由 [18,定理5.1.2]我们得到:

$$\begin{cases} f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X} \simeq Rq_{!!}\mu_Y(F \boxtimes \omega_Y), \\ f^! F \simeq Rq_*\mu_Y(F \boxtimes \omega_Y). \end{cases} \tag{3}$$

我们有如下典范三角：

$$\rho^{-1}f^{-1}F\otimes\omega_{Y/X}\longrightarrow\rho^{-1}f^{!}F\longrightarrow R\dot{q}_{*}\rho^{-1}\mu_{Y}^{sa}(F)\xrightarrow{+1}.$$

并且根据假设，我们有：

$$\dot{q}_{\pi}{}^{t}\dot{q}'^{-1}(\mathrm{C}_{T_{Y}^{*}X}(V))\cap W=\emptyset.$$

因此，结论由推论 2.7 和 [16,命题 5.5.4] 得出。 □

推论 2.9. 设 $G_1,\ldots,G_\ell\in D^{b}_{\mathbb{R}\text{-c}}(X)$。假设 $F\in D^{b}(k_{X_{sa}})$沿 V 强正则。则：

$$\mathrm{SS}(\mu hom_{\hat{\chi}}(G_1,\ldots,G_\ell;F))\subset\mathrm{C}_{\hat{\chi}^{*}}(\mathrm{SS}(G_1\boxtimes\cdots\boxtimes G_\ell)^{a}\times i_{\Delta\pi}{}^{t}i'^{-1}_{\Delta}(V)).$$

此外，

$$\overset{\ell}{\underset{i=1}{\otimes}}D'G_i\otimes\rho^{-1}F\to\rho^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(\overset{\ell}{\underset{i=1}{\otimes}}G_i,F)$$

是 $T^{*}X\setminus R\dot{\pi}_{\pi}{}^{t}\dot{\pi}'^{-1}\mathrm{C}^{\hat{}}_{\chi^{*}}$(奇异支撑$(G_1\boxtimes\cdots\boxtimes G_\ell)^{a}\times i_{\Delta\pi}{}^{t}i'^{-1}_{\Delta}(V)$) 上的同构。

证明。 考虑典范三角

$$\overset{\ell}{\underset{i=1}{\otimes}}D'G_i\otimes\rho^{-1}F\longrightarrow\rho^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om(\overset{\ell}{\underset{i=1}{\otimes}}G_i,F)\longrightarrow H\xrightarrow{+1},$$

其中 $H:=R\dot{\pi}_{*}\mu\hat{h}om_{\chi}(G_1,\ldots,G_\ell;\ F)$。 □

3 多重微局部化与逆像

本节的目标是研究正则D-模的除法定理。为此，我们将研究多重微局部化和逆像定理，这是在多重微局部化理论背景下对 [16, 定理 6.7.1] 的推广。设 $f:Y\to X$ 是流形之间的态射，设 $\chi^{M}=\{M_1、\ldots\ldots、\ M_\ell\}$和 $\chi^{N}=\{N_1、\ldots\ldots、\ N_\ell\}$分别是$X$和$Y$的两个闭子流形族，它们满足 H1、H2 和 H3，其中 $f(N_j)\subset M_j,\ j=1、\ldots\ldots、\ l$。根据 [6, 命题 2.5]，对于 $F\in D^{b}(k_{X_{sa}})$，存在一个由典范态射构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc}R^{t}f'_{\chi!}(\omega_{N/M}\otimes f^{-1}_{\chi\pi}\mu_{\chi^{M}}F)&\longrightarrow&\mu_{\chi^{N}}(\omega_{Y/X}\otimes f^{-1}F)\\ \downarrow\beta&&\downarrow\alpha\\ R^{t}f'_{\chi^{*}}f^{!}_{\chi\pi}\mu_{\chi^{M}}F&\longleftarrow&\mu_{\chi^{N}}(f^{!}F).\end{array}\tag{4}$$

考虑 $\chi=\{M_1、\ \ldots\ldots、\ M_\ell\}$为正规交叉型。 $M:=\bigcap_{M_i\in\chi}M_i(N:=\bigcap_{N_i\in\chi}N_i)$。
令 $\pi\colon\ S^*_\chi\to T^*_MX$以显然的方式作等同:

$$\begin{array}{ccc}\pi\colon & S^*_\chi & \longrightarrow & T^*_MX\\ & \cup & & \cup\\ & (x,\xi_1),(x,\xi_2),\ldots,(x,\xi_\ell) & \longmapsto & (x,\xi_1,\ldots,\xi_\ell).\end{array}\tag{5}$$

若 χ^M 和 χ^N 为正规交叉型，则得到如下图表:

$$\begin{array}{ccccc}S^*_{\chi^N} & \xleftarrow{{}^tf'_\chi} & N\times_M S^*_{\chi^M} & \xrightarrow{f_{\chi\pi}} & S^*_{\chi^M}\\ \sim\downarrow\pi & & \sim\downarrow & & \sim\downarrow\pi\\ T^*_NY & \xleftarrow{{}^tf'_N} & N\times_M T^*_MX & \xrightarrow{f_{N\pi}} & T^*_MX.\end{array}$$

3.1 经典层情形

我们首先研究经典层情形下的多重微局部化与逆像。

引理 3.1. 设 V是 T^*X的一个闭锥形子集。若

$$V\cap\dot T^*_MX=\emptyset,$$

then

$$C_{\chi^{M*}}(V)\cap\dot S^*_{\chi^M}=\emptyset.$$

证明。 假设存在一点

$$(x^{(0)};\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(\ell)})\in\dot S^*_{\chi^M}\cap C_{\chi^{M*}}(V).$$

那么存在一些序列

$$\{(x_n^{(0)},x_n^{(1)},\ldots,x_n^{(\ell)};\xi_n^{(1)},\ldots,\xi_n^{(\ell)})\}_{n=1}^\infty\subset V,$$

$$\{(c_n^{(1)},\ldots,c_n^{(\ell)})\}_{n=1}^\infty\subset(\mathbb{R}^+)^\ell,$$

使得:

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}c_n^{(j)}=\infty, & (j=1,\ldots,\ell),\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^{(0)},x_n^{(1)}c_n^{(\hat J_1)},\ldots,x_n^{(\ell)}c_n^{(\hat J_\ell)};\xi_n^{(0)}c_n,\xi_n^{(1)}c_n^{(\hat J_1)},\ldots,\xi_n^{(\ell)}c_n^{(\hat J_\ell)}\right)\\ \quad=(x^{(0)},0,\ldots,0;0,\xi^{(1)},\ldots,\xi^{(\ell)}),\end{cases}$$

其中

$$c_n:=\prod_{j=1}^\ell c_n^{(j)},\quad \hat J_j:=\{1,\ldots,\ell\}\setminus J_j,\quad c_n^{(J)}:=\prod_{j\in J}c_n^{(j)}\quad\text{for any } J\subset\{1,\ldots,\ell\}.$$

特别地，我们有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)},\dots,x_n^{(\ell)},\xi_n^{(0)}c_n)=(0,\dots,0,0).$$

由于 $(\xi_{(1)},\dots,\xi_{(l)})\neq 0$，我们可以假设

$$t_n:=|(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)},\dots,\xi_n^{(\ell)})|>0.$$

我们考虑序列

$$\{(x_n^{(0)},x_n^{(1)},\dots,x_n^{(\ell)};t_n^{-1}(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)},\dots,\xi_n^{(\ell)}))\}_{n=1}^{\infty}\subset V.$$

通过抽取一个子序列，我们可以假设存在 $\zeta_0\neq 0$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}t_n^{-1}(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)},\dots,\xi_n^{(\ell)})=\zeta_0.$$

取 $1\le k\le l$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n^{(k)}c_n^{(\hat{J}_k)}=\xi^{(k)}\neq 0.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}c_n^{(j)}=\infty$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n^{(0)}}{\xi_n^{(k)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\xi_n^{(0)}c_n}{\xi_n^{(k)}c_n^{(\hat{J}_k)}c_n^{(J_k)}}=0.$$

因此，我们看到 $\zeta_0=(0,\zeta_{(1)0},\zeta_0^{(2)},\cdots,\zeta_{(l)0})\neq 0$。因此

$$\lim_{n\to\infty}(x(0)_n,x(1)_n,\dots,x(l)_n;\ t_n^{-1}(\xi(0)_n,\xi(1)_n,\dots,\xi(l)_n))=(x(0),0,\dots,0;\ \zeta_0)\in \dot{T}^*_MX\cap V,$$

这与非特征条件矛盾。 □

定理 3.2。 设任意子流形族均为正规交叉型。令$F\in D^b(X)$且 V为 T^*_NY的一个开子集。假设：

(i) f在 V上对 F 是非特征的，

(ii) $S^*_{\chi^N}\cap C_{\chi^{N*}}(f_\infty^\sharp(\mathrm{SS}(F)))\cap\pi^{-1}(V)=\emptyset$,

(iii) $f_{N\pi}$: ${}^tf'^{-1}_N(V)\to T^*_MX$对 $C_{T^*_MX}$(奇异支撑(F))是非特征的，

(iv) $f_{\chi\pi}$: ${}^tf'^{-1}_\chi(\pi^{-1}(V))\to S^*_{\chi^M}$对 $C_{\chi^{M*}}$(奇异支撑(F))是非特征的，

(v) ${}^tf'^{-1}(V)\cap f_\pi^{-1}$(奇异支撑$(F)$) $\subset Y\times_X T^*_MX$,

(vi) ${}^tf'_\chi$ *is proper on* ${}^tf'^{-1}_\chi(\pi^{-1}(V))\cap f_{\chi\pi}^{-1}(C_{\chi^{M*}}(\mathrm{SS}(F))\cap S^*_{\chi^M})$.

Then

$$R^t f'_{\chi!}(\omega_{N/M} \otimes f_{\chi\pi}^{-1}\mu_{\chi M}(F))|_{\pi^{-1}(V)} \to \mu_{\chi N}(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F)|_{\pi^{-1}(V)}$$

and

$$\mu_{\chi N}(f^!F)|_{\pi^{-1}(V)} \to R^t f'_N f^!_{N\pi}\mu_{\chi M}(F)|_{\pi^{-1}(V)}$$

是同构。

证明。 只需证明 f 为闭嵌入的情形。根据 [7,定理 3.6], [16, 推论 6.4.4] 以及假设 (iv), $\omega_{N/M} \otimes f_{\chi\pi}^{-1}\mu_{\chi M}F \to {}^t f'^{-1}_{\chi}{}_{!\chi\pi}\mu_{\chi M}F$ 在 ${}^t f'^{-1}_{\chi}(\pi^{-1}(V))$ 上是同构。根据假设 (vi), ${}^t f'_{\chi}$ 在 ${}^t f'^{-1}_{\chi}(\pi^{-1}(V)) \cap \mathrm{supp}(f_{\chi\pi}^{-1}\mu_{\chi M}F)$ 上是真。因此, (4) 中的垂直箭头 β 在 $\pi^{-1}(V)$ 上是同构。根据假设 (ii), (4) 中的垂直箭头 α 在 $\pi^{-1}(V)$ 上是同构。事实上，有如下典范三角形:

$$\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F \longrightarrow f^!F \longrightarrow G \xrightarrow{+1},$$

其中 $G := R\dot{q}_*\mu_Y F$，且 q 是投影 $T^*_Y(X \times Y) \to Y$。应用 $\mu_{\chi N}$，我们得到如下典范三角形:

$$\mu_{\chi N}(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F) \longrightarrow \mu_{\chi N}(f^!F) \longrightarrow \mu_{\chi N}(G) \xrightarrow{+1}.$$

于是，由 [7, 定理 3.6], [16, 命题 5.5.4] 以及假设 (ii), $\mathrm{supp}(\mu_{\chi N}(G)) \cap \pi^{-1}(V) \subset S^*_{\chi N} \cap C_{\chi N *}(\dot{q}_\pi {}^t\dot{q}'^{-1} C_{T^*_Y X}(\text{奇异支撑}(F))) \cap \pi^{-1}(V) = S^*_{\chi N} \cap C_{\chi N *}(f^\sharp_\infty(\text{奇异支撑}(F))) \cap \pi^{-1}(V) = \emptyset$。

因此，只需证明 (4) 中的任意一条水平箭头。考虑以下同构链:

$$\begin{aligned} T_\chi f^{-1}\nu_{\chi M}(F) &\simeq T_\chi f^{-1} s_X^{-1} R\Gamma_{\Omega_X} p^{-1}F \\ &\simeq s_Y^{-1}\tilde{f}'^{-1} R\Gamma_{\Omega_X} p^{-1}F \\ &\simeq s_Y^{-1}\tilde{f}'^{-1} R j_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \nu_{\chi N}(f^{-1}F) &\simeq s_Y^{-1} R j_{Y*}\tilde{f}^{-1}\tilde{p}_X^{-1}F \\ &\simeq s_Y^{-1}(\tilde{f}'^! R j_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F \otimes \omega^{\otimes -1}_{\tilde{Y}/\tilde{X}}). \end{aligned}$$

考虑一个典范三角:

$$\omega_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \otimes \tilde{f}'^{-1} R j_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F \longrightarrow \tilde{f}'^! R j_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F \longrightarrow H \xrightarrow{+1}.$$

于是， H 支集于 $S_{\chi N}$ 中。只需证明 $\pi^{-1}(V) \cap$ 奇异支撑$((s_Y^{-1}H)^\wedge) = \emptyset$。回顾等同 [7, 定理 3.3]。因此，根据等同（即，我们在空间 $T^*S_{\chi N}$ 中进行证明），只需证明 $\pi^{-1}(V) \cap$ 奇异支撑$(H) = \emptyset$。根据 [16, 推论 6.4.4] ，只需证明:

断言 3.3. 对于任意 $q_0 \in \pi^{-1}(V)$，存在 $q \in S_{\tilde{X}} \times_{\tilde{Y}} T^*\tilde{Y}$ 使得 $q_0 = {}^t s'_{\tilde{Y}}($ q $\in$ π^{-1} V $\tilde{f}$ $Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F$ q) ( )，并且，在处是非特征的。

我们选取局部坐标系 $(x) = (x_{(0)}, x_{(1)}, \ldots, x_{(l)})$ 于 X，$(y) = (y_{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y_{(l)})$ 于 Y，使得 $M_k = \{x^i = 0 (i \in I_k)\}$，$N_k = \{y^i = 0 (i \in I_k)\}$。我们记

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(\ell)}, t_1, \ldots, t_\ell; \xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\ell)}, \tau_1, \ldots, \tau_\ell),$$

˜为 X 上的坐标，并记

$$(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(\ell)}, t_1, \ldots, t_\ell; \eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(\ell)}, \tau_1, \ldots, \tau_\ell),$$

˜为 Y上的坐标。我们写成：

$$f(y) = (g_0(y), g_1(y), \ldots, g_\ell(y)),$$

$\sim f(y, t_1, \ldots, t_\ell) = (\tilde{g}_0(y, t_1, \ldots, t_\ell),\ \tilde{g}_1(y, t_1, \ldots, t_\ell),\ \tilde{g_\ell}(y, t_1, \ldots, t_\ell),\ t_1, \ldots, t_\ell)$. 因此：

$$t_{J_k} \tilde{g}_k(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(\ell)}, t_1, \ldots, t_\ell) = g_k(y^{(0)}, t_{J_1} y^{(1)}, \ldots, t_{J_\ell} y^{(\ell)}),$$

$$\tilde{g}_0(y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(\ell)}, t_1, \ldots, t_\ell) = g_0(y^{(0)}, t_{J_1} y^{(1)}, \ldots, t_{J_\ell} y^{(\ell)}).$$

注意：

$$\begin{aligned} & {}^t f'(y^{(0)}, ty^{(1)}, \ldots, ty^{(\ell)}) \cdot (t\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\ell)}) \\ = & \begin{pmatrix} \tilde{g}_{0,y^{(0)}}(y,t) \cdot t\xi^{(0)} + \tilde{g}_{1,y^{(0)}}(y,t) \cdot t\xi^{(1)} + \cdots + \tilde{g}_{\ell,y^{(0)}}(y,t) \cdot t\xi^{(\ell)} \\ \tilde{g}_{0,y^{(1)}}(y,t) \cdot \xi^{(0)} + \tilde{g}_{1,y^{(1)}}(y,t) \cdot \xi^{(1)} + \cdots + \tilde{g}_{\ell,y^{(1)}}(y,t) \cdot \xi^{(\ell)} \\ \cdots \\ \tilde{g}_{0,y^{(\ell)}}(y,t) \cdot \xi^{(0)} + \tilde{g}_{1,y^{(\ell)}}(y,t) \cdot \xi^{(1)} + \cdots + \tilde{g}_{\ell,y^{(\ell)}}(y,t) \cdot \xi^{(\ell)} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

我们令 $q = (y_0, 0, 0, 0, 0; 0, \eta_1, \ldots, \eta_\ell, \tau_1, \ldots, \tau_\ell)$，$x_0 = g_0(y_0, 0, 0)$，$q_0 = (y_0; \eta_1, \ldots, \eta_\ell) \in \pi^{-1}(V)$。设 $\tilde{f}$，对 $Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F$ 在 q 处是特征的。应用 [16,命题 6.2.4 (iii) (b)]($A = T^*_{\tilde{Y}}\tilde{Y}$，$B =$ 奇异支撑$(Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F)$)，我们得到序列：

$$\{(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell)\} \subset \tilde{Y}$$

and

$$\{(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}, t_n^1, \ldots, t_n^\ell; \xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)}, \tau_n^1, \ldots, \tau_n^\ell)\} \subset \mathrm{SS}(Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F),$$

使得：

$$\begin{cases} (y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell) \xrightarrow{n} (y_0, 0, 0), \\ (x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}, t_n^1, \ldots, t_n^\ell) \xrightarrow{n} (x_0, 0, 0), \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \tau_n^1 + \sum_{k=0}^{\ell} \tilde{g}_{k,t_1}(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell) \cdot \xi_n^{(k)} \xrightarrow{n} \tau_1, \\ \cdots \\ \tau_n^\ell + \sum_{k=0}^{\ell} \tilde{g}_{k,t_\ell}(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell) \cdot \xi_n^{(k)} \xrightarrow{n} \tau_\ell, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\ell} \tilde{g}_{k,y^0}(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell) \cdot \xi_n^{(k)} \xrightarrow{n} 0, \\ \sum_{k=0}^{\ell} \tilde{g}_{k,y^1}(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell) \cdot \xi_n^{(k)} \xrightarrow{n} \eta_1, \\ \cdots \\ \sum_{k=0}^{\ell} \tilde{g}_{k,y^\ell}(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell) \cdot \xi_n^{(k)} \xrightarrow{n} \eta_\ell, \end{cases} \tag{9}$$

$$|\xi_n^{(0)}| + \cdots + |\xi_n^{(\ell)}| + |\tau_n^1| + \cdots + |\tau_n^\ell| \xrightarrow{n} \infty, \tag{10}$$

$$|(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}, t_n^1, \ldots, t_n^\ell) - \tilde{f}(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, \hat{t}_n^1, \ldots, \hat{t}_n^\ell)| \cdot (\sum_{k=0}^{\ell} |\xi_n^{(k)}| + \sum_{k=1}^{\ell} |\tau_n^k|) \xrightarrow{n} 0. \tag{11}$$

由 (8)、(10) 可得：

$$|\xi_n^{(0)}| + |\xi_n^{(1)}| + \cdots + |\xi_n^{(\ell)}| \xrightarrow{n} \infty. \tag{12}$$

事实上，用反证法假设 $|\xi_n^{(0)}| + |\xi_n^{(1)}| + \cdots + |\xi_{(l)n}|$ 有界。由 (10)，$|\tau_n^1| + \cdots + |\tau_n^\ell| \to +\infty$。我们可以假设 $|\tau_n^k| \to +\infty$ 对某个 $1 \le k \le l$。由于 $|\xi_n^{(0)}| + |\xi_{(1)n}| + \cdots + |\xi_{(l)n}|$ 有界，$|\tau_n^k| \to +\infty$ 与 (8) 矛盾。

此外，(11) 特别蕴含：

$$|t_n^j - \hat{t}_n^j| \cdot (|\xi_n^{(0)}| + |\xi_n^{(1)}| + \cdots + |\xi_n^{(\ell)}| + |\tau_n^1| + \cdots + |\tau_n^\ell|) \xrightarrow{n} 0. \tag{13}$$

于是，由下面的引理 3.4，我们可以假设 $t_n^j > 0$ 以及

$$(x_n^{(0)}, -t_n x_n^{(1)}, \ldots, -t_n x_n^{(\ell)}; t_n \xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)}) \in \mathrm{SS}(F)$$

（请记住等同 [7, 定理 3.3]），其中 $t_n = \prod_{k=1}^{\ell} t_{k,n}$。由 (6)、(9) 和 (13) 可得：

$${}^t f'(y_n^{(0)}, -t_n y_n^{(1)}, \ldots, -t_n y_n^{(\ell)}) \cdot (t_n \xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)}) \xrightarrow{n} (0, \eta_1, \ldots, \eta_\ell). \tag{14}$$

由于 f 在 $\pi(q_0)$ 处关于 F 是非特征的（假设 (i)），因此：

$$\{|t_n\xi_n^{(0)}| + |\xi_n^{(1)}| + \cdots + |\xi_n^{(\ell)}|\} \text{ is bounded.} \tag{15}$$

因此由 (12) 和 (15)，$|\xi_{(0}{}_{n}| \xrightarrow{n} \infty)$。由于序列 $\{(t_n\xi_{(0)n}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_{(l)n})\}$ 有界，我们可以抽取一个子序列，并假设 $\xi_n^{(1)} \xrightarrow{n} \xi_{(1)1}, \ldots, \xi_n^{(\ell)} \xrightarrow{n} \xi^{(l)1}$，$t_n\xi_n^{(0)} \xrightarrow{n} \xi_{(0)1}$。于是由 (14)

$$(y^{(0)}, 0, 0; \xi_1^{(0)}, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(\ell)}) \in {}^t f'^{-1}(V) \cap f_\pi^{-1}(\mathrm{SS}(F)).$$

根据假设 (v)，我们得到 $\xi(0)_1 = 0$。因此 $(t_n\xi(0)_n, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi(l)_n) \xrightarrow{n} (0, \xi(1)1, \ldots, \xi(l)1)$。我们可以假设 $\xi_n^{(0)}/|\xi(0)_n|$ 有极限 $\xi(0)2$。我们得到一个序列

$$\{(x_n^{(0)}, -t_n x_n^{(1)}, \ldots, -t_n x_n^{(\ell)}; t_n\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)})\}$$

属于奇异支撑(F)，使得：

$$\begin{aligned}
(x_n^{(0)}, -t_n x_n^{(1)}, \ldots, -t_n x_n^{(\ell)}) &\xrightarrow{n} (x_0, 0, \ldots, 0),\\
(t_n\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)}) &\xrightarrow{n} (0, \xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(\ell)}),\\
\frac{1}{t_n|\xi_n^{(0)}|}(t_n\xi_n^{(0)}, t_n x_n^{(1)}, \ldots, t_n x_n^{(\ell)}) &\xrightarrow{n} (\xi_2^{(0)}, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

那么 $(x_0, 0, \ldots, 0;\ \xi_{(0)2}, \xi_{(1)1}, \ldots, \xi_{(l)1}) \in C_{T_M^*X}$(奇异支撑$(F)$)，且假设 (iii) 推出 $g_{0,y^0}(y^0, 0, 0) \cdot \xi_{(0)}{}_2 = \tilde{g}_{y^0}(y^0, 0, 0) \cdot \xi_2^{(0)} \neq 0$。根据 (9)，我们有（回顾一下$|\xi_n^0| \xrightarrow{n} \infty$）：

$$\sum_{k=0}^{\ell} \tilde{g}_{k,y^0}(y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(\ell)}, t_n^1, \ldots, t_n^\ell) \cdot \frac{\xi_n^{(k)}}{|\xi_n^{(0)}|} \xrightarrow{n} 0.$$

这就得出了矛盾，因为 $|\xi_n^{(1)}|$、$|\xi_{(2)n}|$、.....以及 $|\xi_{(l)n}|$ 均有界。 □

引理 3.4。假设存在一个序列

$$(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}, t_n^1, \ldots, t_n^\ell; \xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)}, \tau_n^1, \ldots, \tau_n^\ell)$$

属于奇异支撑$(Rj_{X*}\tilde{p}_X^{-1}F)$，且满足条件 (8)–(11)。那么我们可以找到序列

$$\{(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}; \xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)})\} \subset \mathrm{SS}(F)$$

并且 $\{(t_n^1, \ldots, t_n^\ell)\} \subset (\mathbb{R}^+)^\ell$ 使其满足条件 (8)–(11)。此外，由于 $\mathrm{SS}(F)$ 是锥形的，我们有

$$(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}; t_n\xi_n^{(0)}, t_n\xi_n^{(1)}, \ldots, t_n\xi_n^{(\ell)}) \in \mathrm{SS}(F),$$

其中 $t_n = \prod_{k=1}^{\ell} t_{k,n}$。

证明。 由 [16, 定理 6.3.1] 可得

$$\mathrm{SS}(Rj_{\Omega_X *}\tilde{p}_X^{-1}F) \subseteq \mathrm{SS}(\tilde{p}_X^{-1}F)\hat{+}N^*(\Omega_X).$$

由 [16, 命题 5.4.5] 我们有

$$\mathrm{SS}(\tilde{p}_X^{-1}F) = \{(x_0, \frac{x^{(0)}}{t_{\hat{j}_1}}, \ldots, \frac{x^{(\ell)}}{t_{\hat{j}_\ell}}; t_1, t_2, \ldots, t_\ell; \xi_0, t_{\hat{j}_1}\xi^{(1)}, \ldots, t_{\hat{j}_\ell}\xi^{(\ell)}; \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\ell);$$
$$t_j > 0, (x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(\ell)}; \xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\ell)}) \in \mathrm{SS}(F)\}.$$

这里我们不显式计算 τ's，因为我们不使用它们。由 [16, 注 6.2.8] 以及 $N^*(\Omega_X) \subset \{(x;\ t;\ 0;\ \tau)\}$这一事实，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们得到序列

$$\{(x_{n,m}^{(0)}, x_{n,m}^{(1)}, \ldots, x_{n,m}^{(\ell)}; \xi_{n,m}^{(0)}, \xi_{n,m}^{(1)}, \ldots, \xi_{n,m}^{(\ell)})\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathrm{SS}(F)$$

$$\{(t_{1,n,m}, t_{2,n,m}, \ldots, t_{\ell,n,m})\} \subset (\mathbb{R}^+)^\ell$$

使得

$$(x_{n,m}^{(0)}, \frac{x_{n,m}^{(1)}}{t_{\hat{j}_1,n,m}}, \ldots, \frac{x_{n,m}^{(\ell)}}{t_{\hat{j}_\ell,n,m}}; t_{1,n,m}, \ldots, t_{\ell,n,m}) \xrightarrow{m} (x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}, t_{1,n}, t_{2,n}, \ldots, t_{\ell,n}),$$

$$(\xi_{n,m}^{(0)}, t_{\hat{j}_1,n,m}\xi_{n,m}^{(1)}, \ldots, t_{\hat{j}_\ell,n,m}\xi_{n,m}^{(\ell)}) \xrightarrow{m} (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)}).$$

然后抽取一个子序列，我们找到序列

$$\{(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}; \xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(\ell)})\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{SS}(F),$$

以及$\{(t_{1,n}, t_{2,n}, \ldots, t_{\ell,n})\} \subset (\mathbb{R}^+)^\ell$，使得它们满足所需条件。由于奇异支撑$(F)$是锥形的，我们有

$$\{(x_n^{(0)}, x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(\ell)}; t_n\xi_n^{(0)}, t_n\xi_n^{(1)}, \ldots, t_n\xi_n^{(\ell)})\} \subset \mathrm{SS}(F).$$

□

注 3.5. 由 [16, 注 6.2.6], 如果我们将定理 3.2 的条件 (i) 替换为以下条件(1)，则我们不需要 (ii)。

(1) f 对于 F是非特征的。

3.2 强正则次解析层情形

我们研究强正则次解析层情形下的多重微局部化与逆像。

定理 3.6。 设任意子流形族均为正规交叉型。设$F \in D^b(k_{X_{sa}})$沿闭锥形子集 W 强正则，且 V 是 T_N^*Y 的一个开子集。假设：

(i) f *is non-characteristic for* W,

(ii) $f_{N\pi} : {}^t f'^{-1}_N(V) \to T^*_M X$ *is non-characteristic for* $C_{T^*_M X}(W)$,

(iii) $f_{\chi\pi} : {}^t f'^{-1}_\chi(\pi^{-1}(V)) \to S^*_{\chi^M}$ *is non-characteristic for* $C_{\chi^{M*}}(W)$,

(iv) ${}^t f'^{-1}(V) \cap f_\pi^{-1}(W) \subset Y \times_X T^*_M X$,

(v) ${}^t f'_\chi$ *is proper on* ${}^t f'^{-1}_\chi(\pi^{-1}(V)) \cap f^{-1}_{\chi\pi}(C_{\chi^{M*}}(W) \cap S^*_{\chi^M})$.

Then

$$R^t f'_{\chi!}(\omega_{N/M} \otimes f^{-1}_{\chi\pi}\mu_{\chi^M}(F))|_{\pi^{-1}(V)} \to \mu_{\chi^N}(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F)|_{\pi^{-1}(V)}$$

and

$$\mu_{\chi^N}(f^!F)|_{\pi^{-1}(V)} \to R^t f'_\chi f^!_{\chi\pi}\mu_{\chi^M}(F)|_{\pi^{-1}(V)}$$

是同构。

证明。我们可以假设 f 是一个闭嵌入。由定理2.6, [16, 推论6.4.4] 以及假设(iii)， $\omega_{N/M}\otimes f^{-1}_{\chi\pi}\mu_{\chi^M}F \to f^!{}_{\chi\pi}\mu_{\chi^M}F$ 在 ${}^t f'_\chi{}^{-1}(\pi^{-1}(V))$上是一个同构。

由假设(i)，(4)中的竖直箭头 α 是一个同构。事实上，由假设(i)， f 对奇异支撑(F)是非特征的。由 [18, 命题5.3.8],， $\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F \to f^!F$ 是一个同构。应用μ_{χ^N}，我们得到一个同构$\mu_{\chi^N}(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F) \to \mu_{\chi^N}(f^!F)$。

因此，只需证明该定理中的第一个态射是一个同构。特别地，只需证明

$$R^t f'_{\chi!}(\omega_{N/M}\otimes f^{-1}_{\chi\pi}\mu_{\chi X}(F))|_{\pi^{-1}(V)} \to \mu_{\chi Y}(\omega_{Y/X}\otimes f^{-1}F)|_{\pi^{-1}(V)} \simeq \mu_{\chi Y}(f^!F)|_{\pi^{-1}(V)}$$

是一个同构。我们有

$$\begin{aligned} T_\chi f^{-1}\nu^{sa}_{\chi X}(F) &\simeq T_\chi f^{-1} s_X^{-1} R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F && (16)\\ &\simeq s_Y^{-1}\tilde{f}'^{-1} R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F && (17)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \nu^{sa}_{\chi Y}(f^!F) &\simeq s_Y^{-1} R\Gamma_{\Omega_Y} p_Y^{-1} f^! F && (18)\\ &\simeq s_Y^{-1}\tilde{f}'^{!} R\Gamma_{\Omega_Y} p_X^{-1} F. && (19)\end{aligned}$$

由于存在自然态射 $\omega_{\tilde{Y}/\tilde{X}} \otimes \tilde{f}'^{-1}G \to \tilde{f}_{,!}G$，对于 G，我们得到以下典范三角：

$$\omega_{\tilde{Y}_N/\tilde{X}_M} \otimes \rho^{-1}\tilde{f}'^{-1} R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F \longrightarrow \rho^{-1}\tilde{f}'^{!} R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F \longrightarrow H \xrightarrow{+1} .$$

那么 H支集于 S_χ。只需证明 $\pi^{-1}(V)$ ∩奇异支撑$((s_Y^{-1}H)^\wedge) = \emptyset$。因此，根据等同[7,定理 3.3],，只需证明 $\pi^{-1}(V)$ ∩奇异支撑$(H) = \emptyset$。由定理 2.8，只需证明:

命题 3.7. 对于任意具有 $q \in S_\chi \times_{\tilde{Y}} T^*\tilde{Y}$ 且满足 $q_0 = {}^t s'_Y(q) \in V$ 的 $q_0 \in V$，有 $\tilde{f}$，在 q 处相对于奇异支撑$(R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F)$ 是非特征的。

利用引理 3.8，证明的其余部分与定理 3.2 的证明相同，只需将奇异支撑(F)替换为$\mathbb{W}$ 事实上，若假设 f' 在 q处是奇异支撑$(R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F)$的特征的，则会得到矛盾。□

引理 3.8. 设 Ω_X是 X中的一个开子集。 $F \in D^b(k_{X_{sa}})$沿 V强正则。则：

$$\mathrm{SS}(R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F) \subset {}^t \tilde{p}'_X \tilde{p}_{X\pi}^{-1} V \hat{+} N^*(\Omega_X).$$

特别地，

$$\mathrm{SS}(\rho^{-1} R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F) \subset {}^t \tilde{p}'_X \tilde{p}_{X\pi}^{-1} V \hat{+} N^*(\Omega_X).$$

证明. 由强正则性可得 $J(F) \simeq \text{“}\varinjlim_i \text{”} J(F_i)$，且奇异支撑$(F_i) \subset V$。由[14, 定理 3.3]， $J(R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F) \simeq \text{“}\varinjlim_i \text{”} J(R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F_i)$。由 [14, (4.1)] 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{SS}(R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F) &\subset \lim_i \mathrm{SS}(R\Gamma_{\Omega_X} p_X^{-1} F_i) && (20)\\
&= \lim_i \mathrm{SS}(R j_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F_i) && (21)\\
&\subset \lim_i N^*(\Omega_X) \hat{+} \mathrm{SS}(\tilde{p}_X^{-1} F_i) && (22)\\
&\subset N^*(\Omega_X) \hat{+} {}^t \tilde{p}'_X \tilde{p}_{X\pi}^{-1} V. && (23)
\end{aligned}$$

这里，(22)由 [16, 定理 6.3.1]得出。 □

4 D-模的应用

4.1 具有增长条件的复域中 D-模的解。

回顾定理 1. [22, 中的以下三角形：8]

定理 4.1. 设 $F \in D^b(k_{X_{sa}})$是亚解析层导出范畴中的一个对象。我们有以下典范三角：

$$\nu_\chi^{sa}(F) \to \tau^{-1} R\Gamma_M(F) \otimes or_{M/X}[n] \to R p_{1*} R\Gamma_{P^+} p_2^{-1} \mu_\chi^{sa}(F) \otimes or_{M/X}[n] \xrightarrow{+1}.$$

这里 $n =$ 余维 M。

推论 4.2. 设 $F \in D^b(k_{X_{sa}})$。假设 F沿着 V 强正则。如果$S_\chi^* \cap C_{\chi^*}(V) = \emptyset$, 那么

$$\nu_\chi^{sa}(F) \xrightarrow{\sim} \tau^{-1} R\Gamma_M(F) \otimes or_{M/X}[n].$$

证明。由定理 4.1 和定理 2.1，结论得证。 □

设 $\chi:=\{Y_1,Y_2,\dots,Y_\ell\}$ 满足 [7]的条件 H1、H2 和 H3，并假设每个 Y_i 和 $Y:=\bigcap Y_i$ 都是 X的复子流形。设 $f\colon Y\hookrightarrow X$ 为典范嵌入。设 M 为一个相干 D_X-模。我们定义 M 的逆像为

$$Df^*\mathcal{M}:=\mathcal{O}_Y\overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes}}f^{-1}\mathcal{M}.$$

假设 Y对于 M 是非特征的；也就是说，$T^*_YX\cap Char\mathrm{M}\subset T^*_XX$。那么，众所周知，$Df^*\mathrm{M}$ 可识别为 $Df^*\mathrm{M}:=H^0Df^*\mathrm{M}$，并且 $Df^*\mathrm{M}$ 是一个相干 D_Y-模。

定理4.3。 假设 Y 对于 T^*X中的对合子丛 V是非特征的，并且$\mathcal{M}$是沿着 V的正则相干$\mathcal{D}_X$-模。那么

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{M},\nu^{sa}_\chi(\mathcal{O}^\lambda_X))&\simeq\tau^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_Y}(\rho_!Df^*\mathcal{M},\mathcal{O}^\lambda_Y)\\&\simeq\tau^{-1}f^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{M},\mathcal{O}^\lambda_X),\end{aligned}$$

其中 $\lambda=w$ 或 t。

证明。 根据假设，Y对于 M 是非特征的。回忆一下，由 [19,推论 2.2.3]可知，$\mathrm{SS}(\mathrm{Sol}^\lambda(\mathrm{M}))=Char(\mathrm{M})$。由 [18,命题 5.3.8]

$$\tau^{-1}R\Gamma_Y\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{M},\mathcal{O}^\lambda_X)\otimes\omega^{\otimes-1}_{Y/X}\simeq\tau^{-1}f^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{M},\mathcal{O}^\lambda_X).\quad(24)$$

根据 [19, 定理 3.1.1]，我们有：

$$\tau^{-1}f^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_X}(\rho_!\mathcal{M},\mathcal{O}^\lambda_X)\simeq\tau^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho_!\mathcal{D}_Y}(\rho_!Df^*\mathcal{M},\mathcal{O}^\lambda_Y).\quad(25)$$

由于 $\mathrm{Sol}^\lambda(\mathrm{M})$ 沿着 V 是强正则的（由定理1.3），只需根据推论 4.2 检验 $\dot S^*_\chi\cap C_{\chi^*}(V)=\emptyset$。由引理 3.1，我们有

$$\dot S^*_\chi\cap C_{\chi*}(V)=\emptyset.$$

因此我们得到了所需的结果。 □

推论4.4。 假设 Y 对于 T^*X中的对合子丛 V是非特征的，并且$\mathcal{M}$是沿着 V正则相干的$\mathcal{D}_X$-模。那么

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\nu_\chi(\mathcal{O}^\lambda_X))&\simeq\tau^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_Y}(Df^*\mathcal{M},\mathcal{O}_Y)&(26)\\&\simeq\tau^{-1}f^{-1}\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{O}_X),&(27)\end{aligned}$$

其中 $\lambda=w$ 或 t。

注4.5。 如果 $\chi=\{M\}$ 是单个子流形，那么根据 [18, 命题5.3.4.]，即使 D-模 M 不正则，也能得到该推论中的结论。若取 $\lambda=w$ 和 χ 为正规交叉除子，则推论4.4断言，对于非特征的正则 D-模 M，Majima强渐近可展开函数的初值问题有唯一解。

4.2 具有增长条件的正规 $\mathcal{D}$-模的除法定理

我们陈述正则 D-模的缓增和 Whitney 多微函数系数的除法定理。设 $f\colon Y \hookrightarrow X$ 是复流形的一个闭嵌入。设 $\chi^N = \{N_1、\ \ldots\ldots、\ N_\ell\}$ 是 Y 的一族闭子流形。设 $\chi^M = \{M_1、\ \ldots\ldots、\ M_\ell\}$ 是 X 的一族闭子流形。我们还假设以下条件：

1. $f(N_j) \subset M_j, j = 1, \ldots, \ell,$
2. $M_j \subseteq M_{j'}$ iff $N_j \subseteq N_{j'}$.

假设这些族是正规交叉型的。回顾以下图表：

$$\begin{array}{ccccc} S^*_{\chi^N} & \xleftarrow{{}^t f'_\chi} & N \times_M S^*_{\chi^M} & \xrightarrow{f_{\chi\pi}} & S^*_{\chi^M} \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle\pi} & & {\scriptstyle\sim}\downarrow & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ T^*_N Y & \xleftarrow{{}^t f'_N} & N \times_M T^*_M X & \xrightarrow{f_{N\pi}} & T^*_M X, \end{array}$$

其中，π 定义于（5）中。

定理 4.6。 假设这些族是正规交叉型的。设 $\mathcal{M}$ 是一个沿对合子丛 W 正规的相干 $\mathcal{D}_X$-模。设 V 是 $T^*_N Y$ 的一个开子集。假设：

(i) f 对于 W 是非特征的；*(ii)* $f_{N\pi}\colon {}^t f'^{-1}_N(V) \to T^*_M X$ 对于 $C_{T^*_M X}(W)$ 是非特征的；*(iii)* $f_{\chi\pi}\colon {}^t f'^{-1}_\chi(\pi^{-1}(V)) \to S^*_{\chi^M}$ 对于 $C_{\chi^{M*}}(W)$ 是非特征的；*(iv)* ${}^t f'^{-1}(V) \cap f_\pi^{-1}(W) \subset Y \times_X T^*_M X$。

(v) ${}^t f'_\chi$ *is proper on* ${}^t f'^{-1}_\chi(\pi^{-1}(V)) \cap f_{\chi\pi}^{-1}(C_{\chi^{M*}}(W) \cap S^*_{\chi^M})$.

于是我们有：

$$\mathrm{R}^t f'_{\chi^*}(f_{\chi\pi}^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mu_{\chi^M}(\mathcal{O}_X^\lambda)) \otimes or_{S_{\chi^{M*}}})[d] \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_Y}(Df^*\mathcal{M}, \mu_{\chi^N}(\mathcal{O}_Y^\lambda) \otimes or_{S_{\chi^{N*}}})$$

在 $\pi^{-1}(V)$ 上。这里 $d := d^{\mathbb{C}}_X - d^{\mathbb{C}}_Y - (d_M - d_N)$，$\lambda = \emptyset$、$t$ 或 w。

证明。 令 $F := \mathrm{RH}om_{\rho^!\mathcal{D}_X}(\rho^!\mathcal{M}, \mathcal{O}_X^\lambda)$. 根据定理1.3，$F$ 沿着 W 是强正则的。由定理 3.6 可得

$$R^t f'_{\chi^*}(\omega_{N/M} \otimes f_\pi^{-1}\mu_{\chi^M}(F)) \xrightarrow{\sim} \mu_{\chi^N}(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F)$$

在 $\pi^{-1}(V)$ 上。最后，根据假设 (i) 以及带增长条件的柯西-科瓦列夫斯卡娅-柏原定理 [19,定理3.1。1]我们得到

$$\mu_{\chi^N}(f^{-1}F) \simeq \mu_{\chi^N}(\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\rho^!\mathcal{D}_Y}(\rho_!Df^*\mathcal{M},\mathcal{O}_Y^\lambda)) \tag{28}$$

$$\simeq \mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_Y}(Df^*\mathcal{M},\mu_{\chi^N}(\mathcal{O}_Y^\lambda)). \tag{29}$$

□

注 4.7。 若假设 $\lambda=\emptyset,\chi$ 是单个子流形且 M 是椭圆的，则可得到 [10, 定理 1]。若假设 $\lambda=t,\chi$ 是单个子流形且 M 是椭圆的，则可得到 [1, 定理 1]。

定义 4.8。 若存在局部坐标变换，使得我们可以得到第4节 [8, 中所述的情形3]，则称 χ 为与复化相容的同时可线性化族。

推论 4.9。 设 χ^N 为与复化相容的同时可线性化族。假设$\mathcal{M}$ 是一个相干$\mathcal{D}_X$-模，沿对合子丛 V和 $M=N$正则。设W是 T^*_NY中的一个开集。设 Y对于 V 是非特征的，并假设：

(i) ${}^tf'^{-1}(W)\cap f_\pi^{-1}(V)\subset Y\times_X T^*_MX.$

对于 $j<$余维$_{\mathbb{C}}M$，有

$$R^j\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mu_{\chi^M}(\mathcal{O}_X^\lambda))\simeq 0$$

在 $\pi^{-1}(W$上。这里余维$_{\mathbb{C}}M$ 是包含于 M 中的最大复线性子空间的复余维，这里采用定义 *2.4.8* 中所述的局部坐标系。

证明。 由于 $N=M, f_{N\pi}\colon N\times_M T^*_MX\to T^*_MX$和 $f_{\chi\pi}\colon N\times_M S^*_{\chi^M}\to S^*_{\chi^M}$是同构。

注意 $N\times_M T^*_MX\subset Y\times_X T^*_YX$ $f_\pi^{-1}\ W\ \cap N\times_M$。

$T^*_MX\subset f_\pi^{-1}\ W\ \cap Y\times_X T^*_YX\subset T^*_XX$ 3 1, $C_{\chi^{M*}}\ W\ \cap\dot{S}^*_{\chi^M}=$

根据假设 (i)，( ) ( )。由引理，我们有 ( ) ∅。由于 $\mathrm{supp}(\mu_{\chi^M}(F))\subset C_{\chi^{M*}}(W\cap S^*_{\chi^M}$, ${}^tf_{,\chi}$ 在 ${}^tf'^{-1}_{\chi}(\pi^{-1}(V))\cap\mathrm{supp}(f_{\chi\pi}^{-1}\mu_{\chi^M}F)$ 上为真。

由定理 4.6 可得，

$$\mathrm{R}^tf'_*\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mu_{\chi^M}(\mathcal{O}_X^\lambda))[d]\simeq\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_Y}(Df^*\mathcal{M},\mu_{\chi^N}(\mathcal{O}_Y^\lambda)),$$

关于 $\pi^{-1}(W$。众所周知，对于 $k\neq 0$ 和 Df^*， $H^k(Df^*\mathrm{M})=0$，且 M 是一个相干 D_Y-模。根据 [8,第 4], 节，我们有 $H^k(\mu_{\chi^N}(\mathcal{O}_Y^\lambda))=0$，其中 $k<$余维$_{\mathbb{C}}N$。因此，我们得到 $\mathrm{R}^j\mathrm{H}om(Df^*\mathrm{M},\mu_{\chi^N}(\mathcal{O}_Y^\lambda))\simeq 0$，其中 $j<$余维$_{\mathbb{C}}N$。故对于任意 $p\in W$ 且 $j<d+$余维$_{\mathbb{C}}N$

$$(\mathrm{R}^{j\,t}f'_{\chi^*}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mu_{\chi^M}(\mathcal{O}_X^\lambda)))_{{}^tf'_\chi(p)}\simeq 0.$$

由 ${}^t f'_\chi$ 的有限性，我们得到

$$\mathrm{R}^j \mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mu_{\chi^M}(\mathcal{O}_X^\lambda)) \simeq 0,$$

对于 $j < d +$余维$_{\mathbb{C}} N$。 □

推论 4.10(Bochner 管状定理)。 设 χ^M 是一个与复化相容的同时可线性化族。假设$\mathcal{M}$ 是一个沿对合子丛 V 正则的相干 $\mathcal{D}_X$-模。设 Y 对 V 是非特征的。设 $\tilde{U}$ 是 S_{χ^M} 的一个开多锥子集。设 U 在每个纤维中都是 U 的凸包。我们令 $W := S^*_{\chi^M} \setminus U^{\circ a}$，并假设：

(i) ${}^t f'^{-1}(\pi(W)) \cap f_\pi^{-1}(V) \subset Y \times_X T^*_M X.$

我们有：

$$\Gamma(\tilde{U}; \mathrm{R}^0 \mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \nu_{\chi^M}(\mathcal{O}_X^\lambda))) \simeq \Gamma(U; \mathrm{R}^0 \mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \nu_{\chi^M}(\mathcal{O}_X^\lambda))).$$

证明。 由下述从 [22, 定理 1.8] 得到的三角形可得结论。

$$\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \nu_\chi(\mathcal{O}_X^\lambda)) \longrightarrow \tau^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \rho^{-1}\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X^\lambda)) \otimes \omega_{M/X}^{\otimes -1}$$

$$\longrightarrow Rp^+_{1*}(p_2^+)^{-1}\,\mathrm{R}\mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mu_\chi(\mathcal{O}_X^\lambda)) \otimes \omega_{M/X}^{\otimes -1} \xrightarrow{+1}$$

事实上，由推论 4.9 可得以下正合列：

$$0 \to \Gamma(U; \mathrm{R}^0 \mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \nu_\chi(\mathcal{O}_X^\lambda))) \longrightarrow \Gamma(M; R^d \mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \rho^{-1}\mathrm{R}\Gamma_M(\mathcal{O}_X^\lambda)) \otimes or_{M/X})$$

$$\longrightarrow \Gamma(S^*_\chi \setminus U^{\circ a}; \mathrm{R}^d \mathscr{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mu_\chi(\mathcal{O}_X^\lambda)) \otimes or_{M/X}).$$

~类似地，将 U 替换为 U，可得如上所述的正合列。由于$\mathcal{U}^{\circ a} = U^{\circ a}$，由五引理可得所述结论。 □

注 4.11。 这是对 [27, 2, 23] 中工作的推广。

致谢

我们感谢 N. Honda 教授、L. Prelli 教授和 S. Yamazaki 教授在本研究准备过程中给予的大力支持和宝贵意见。

参考文献

[1] E. Andronikof 和 N. Tose，《分布空间中的椭圆边值问题》，RIMS Kôkyûroku **845** (1993), 13–18.[2] T. Aoki 和 S. Tajima，《关于 Bochner 管状定理在一般 CR 子流形上的推广》，Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.**63** (1987), no. 8, 302–303.[3] M. S. Baouendi 和 F. Trèves，《Bochner 管状定理的微局部版本》，Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), no. 6, 885–895.[4] J.-M. Delort，《同步微局部化与分歧柯西问题》，Compos. Math. **100**(1996), 171–204.[5] N. Honda 和 L. Prelli，《多重特化与多重渐近展开》，Adv. Math.**232** (2013), 432–498.[6]N. Honda 和 L. Prelli, μhom 以及多重微局部算子，arXiv:2404.06123.[7] N. Honda、L. Prelli 和 S. Yamazaki，《多重微局部化与微支撑》，Bull. Soc. Math. France **144** (2016), no. 3, 569–611.[8] N. Honda、L. Prelli 和 S. Yamazaki，《多重微局部化与微支撑》，arXiv:1401.0746.[9] M. Kashiwara 和 T. Oshima，《具有正则奇点的微分方程组及其边值问题》，Ann. Math. **106** (1977), 145–200.[10] M. Kashiwara 和 T. Kawai，《线性微分方程椭圆系统的边值问题 I》，Proc. Japan Acad. **48** (1972).[11] M. Kashiwara、P. Schapira 和 M. T. Fernandes，《正则模温和解的微支撑与柯西问题》，Port. Math. (N.S.) **58**(2001), no. 4, 485–504.[12] M. Kashiwara、P. Schapira、F. Ivorra 和 I. Waschkies，《归纳层的微局部化》，Birkhäuser，波士顿，2004.[13] M. Kashiwara 和 P. Schapira，《归纳层》，《Astérisque》**271** (2001), 1–136.[14] M. Kashiwara 和 P. Schapira，《归纳层的微局部研究 I：微支撑与正则性》，《Astérisque》**284** (2003), 143–164.[15] M. Kashiwara 和 P. Schapira，《范畴与层》，Grundlehren Math. Wiss. 332，Springer 出版社，柏林，2006。

[16] M. Kashiwara 和 P. Schapira，《流形上的层》，Grundlehren Math. Wiss. 292，Springer 出版社，柏林，1990 年。[17] L. Prelli，亚解析位点上的层，Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **120**（2008），167–216。[18] L. Prelli，亚解析层的微局部化，Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)**135** （2013），vi+91 pp。[19] L. Prelli，带增长条件的柯西–科瓦列夫斯卡娅–柏原定理，Math. Z. **265**（2010），第 1 期，115–124。[20] A. R. Martins，归纳层的微支撑的函子性质与正则性，Math. Z. **260** （2008），第 3 期，541–556。[21] H. Majima，具有不规则奇点的可积联络的渐近分析，Lecture Notes in Mathematics 1075，Springer 出版社，柏林–海德堡，1984 年。[22] R. Sakamoto，多重微局部 Hom 函子与多重微局部 Sato 三角形的茎公式，arXiv:2411.19095。[23] M. Sato、T. Kawai 和 M. Kashiwara，微函数与伪微分方程，载于：超函数与伪微分方程，Lecture Notes in Math. 287，Springer 出版社，柏林–纽约，1973 年，第 265–529 页。[24] P. Schapira 和 K. Takeuchi，双法向变形与双重特化，C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** （1994），第 7 期，707–712。[25] Y. Sugiki，高余维边值问题中 E-模的除法定理，J. Math. Sci. Univ. Tokyo **8** （2001），第 4 期，595–608。[26] K. Takeuchi，微局部逆像与双微局部化，Publ. Res. Inst. Math. Sci. **34** （1998），第 2 期，135–153。[27] M. Uchida，椭圆边值问题中 Bochner 管状定理的推广，Publ. Res. Inst. Math. Sci. **31** （1995），第 6 期，1065–1077。[28] S. Yamazaki，具有正则奇点的系统的 Whitney解的微支撑及其应用，UTMS 2003-7（2003 年）。