arXiv:2603.10832v1 [math.GT] 11 Mar 2026

RP^3中的一些链环同调

William Rushworth

摘要。 我们为 RP^3 中的链环引入 Khovanov 同调的推广，以及 Lee 谱序列和 Bar-Natan 谱序列。这些推广不同于此前由 Asaeda-Przytycki-Sikora（以及 Gabrovˇsek 的推广）和 Chen、Manolescu-Willis 定义的推广。新的 Lee 理论和 Bar-Natan 理论各自导出 Rasmussen 不变量（且彼此不同）。从新的 Lee 同调中提取的不变量不同于 Manolescu-Willis 定义的不变量；至于新的 Bar-Natan 同调与 Chen 定义的同调是否也如此，目前尚不清楚。

1. 引言

本文将 Khovanov、Lee 和 Bar-Natan 同调推广到 RP^3中的链环。Asaeda-Przytycki-Sikora 最先定义了 Khovanov 同调的一种此类推广，其系数取自 Z_2，后来 Gabrovˇsek 将其扩展为允许取 Z系数 [APS04、Gab13]。Manolescu-Willis 最近运用该理论，在 RP^3, 中定义了 Lee 同调（及相关的 Rasmussen 不变量），并取得了其他多项成果 [MW25、Ren24、RY25、Yan25]。Chen 定义了 Khovanov 同调的另一种推广，并用它为 RP^3 [中的零同调链环定义了 Bar-Natan 理论 、Che25]。

在第 3 节中，我们定义了 Khovanov 同调的一种新推广，并证明它不同于 Asaeda-Przytycki-Sikora、Chen 和 Gabrovˇsek 提出的理论。在第4 节和第5节中，我们分别定义了 Lee 谱序列和 Bar-Natan 谱序列的新推广，并证明它们不同于 Manolescu-Willis 和 Chen 定义的理论。最后，在第 6 节中，我们从这些新的谱序列中提取 Rasmussen 不变量。这些新不变量取决于基环（与经典情形一样），而有理数域上的不变量不同于 Manolescu-Willis 定义的不变量。

在 Z_2, 上，尽管这些谱序列通常彼此不同，但作者尚未发现任何一个纽结，使 Chen 的 Rasmussen 不变量与本文定义的不变量所包含的信息不等价（同调非平凡纽结除外，因为 Chen 的不变量对这类纽结未定义）。换言之，在所有已知例子中，任一谱序列的 E_∞ 页都可以由另一个谱序列的对应页确定。然而，鉴于二者构造上的显著差异，有理由怀疑这一点并非普遍成立；参见问题A 和B。

本文定义的同调理论与现有理论具有许多共同性质，例如函子性，但在重要方面有所不同。例如，这些新理论并不是（无向的）类TQFT结构 [TT06]。考虑是否存在一种能够容纳这些理论的广义类TQFT结构是很有意思的；参见注2。

本文定义的 Khovanov 同调和 Lee 同调的推广，与先前工作中为虚链提出的推广密切相关 [Rus18]。虽然本文不对此作进一步探讨，但很可能可以通过考察带有额外标记的高斯码，使这种关系得到精确刻画（另见 [KMN24]）。

2020年数学主题分类。57K18。

致谢。感谢 Carlo Collari 就后来成为第5节内容的材料与我们进行了许多富有启发性的讨论。

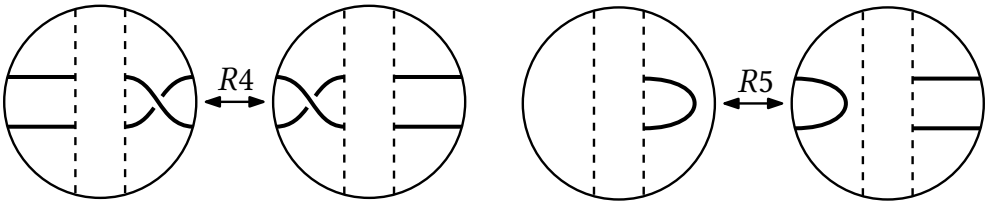
2. 预备知识

我们首先整理一些必要的组合背景知识。除非另有说明，链环 指 RP^3 中的有向链环（我们用经典 来指代 S^3的情形）。

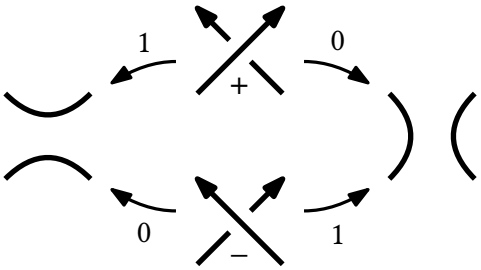
定义 2.1. 链环的图 是一个缠结图，其中 D^2 中的对径端点被视为相同。◊

图 1给出了一个例子。关于如何用此类图表示RP^3 中的链环，完整讨论可参见例如 [Dro90，第 2]节。

命题 2.2 ([Dro90]). 两个图表示同一个链环，当且仅当它们可通过有限次经典 *Reidemeister* 变换以及以下额外变换相互得到



正交叉和负交叉，以及它们的 0-分解和 1-解消，定义如下 S^3:



我们先以标准方式构造光滑化立方体，再应用类似 TQFT 的构造来得到代数不变量。

定义 2.3. 设 D 是一个链环图。 D 的一个平滑是指在 D的每个交叉处取 0-分解或 1-解消所得到的图。

设 D有 n个交叉。任意将这些交叉标记为 1 到 n，并将通过在第 i 个交叉处取 e_i-分解得到的平滑记为 $e_1e_2\cdots e_n \in \{0,1\}^{\times n}$。我们将$\{0,1\}^{\times n}$ 中的元素与D的相应平滑对应起来。由此得到的对象称为 D 的光滑化立方体，记作 $[\![D]\!]$。◊

光滑化立方体的一个例子见 [Che21，图 10]。

如果 D 的两个平滑仅在一个交叉处不同，那么它们共同围成一个裤形曲面或一个带一个穿孔的莫比乌斯带。我们将 $[\![D]\!]$ 中相应的边视为带有适当的（有向）余边界。$[\![D]\!]$ 的一个面由以下边组成

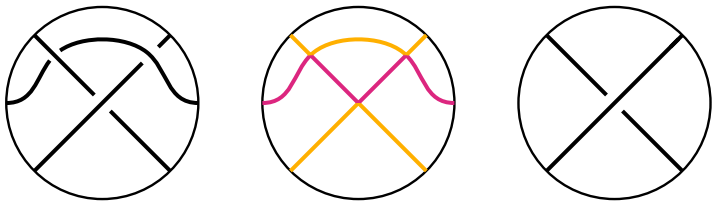


图 1。从左到右：一个链环图；它的二着色；一个不可二着色的链环图。

当将 $\{0,\ 1\}^{\times n}$ 视为一个图时，这些边构成一个长度为 4 的环；其中元素作为顶点，且当两个顶点恰好在一个位置上不同时，它们之间有一条边。

我们将经常使用以下概念，因为对于我们对 Lee 同调和 Bar-Natan同调的推广而言，它们就如同定向之于经典理论一样。关于虚链相关情形的进一步讨论，参见 [Kau04、Rus21]。

定义 2.4（二着色）。设 D 为一个链环图，$S(D)$ 为通过移除 D 的上交叉和下交叉装饰而得到的浸入曲线。

对 $S(D)$ 进行二着色，是指使用至多 2 种颜色为其非奇异点着色，并且在每个双重点处（在旋转意义下）满足以下条件：



对 D 进行二着色，就是对 $S(D)$ 进行二着色。如果一个链环的某个图具有二着色，则称该链环是二可二着色的。◊

这些概念的示例见图1。在 RP^3 中的每个纽结都是可二着色的，因为沿着图行进时，每个交叉都会恰好经过两次。并非所有链环都可二着色，如图 1所示。Chen [Che25] 定义的扭曲可定向链环构成可二着色链环的一个子集；关于这两个概念的比较，参见第 5 节。

链环的二着色性按如下方式确定。

定义 2.5。设 $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$是一个具有分支 D_i的链环图（这里指链环分支，而非 RP^2中的连通分支）。若一个分支 D_i 退化，则

$$\mathrm{lk}\,(D_i, D \setminus D_i) = 1 \mod 2.$$

◊

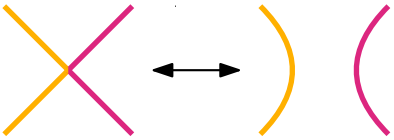
图 1 最右侧的图中的两个分支都是退化的。显然，命题 2.2中的变换保持退化性质，因此我们可以讨论链环的退化分支。

命题 2.6。设 L 是一个具有 n 个分支的链环。那么

$$|\{2\text{-colourings of } L\}| = \begin{cases} 0, & \text{if } L \text{ possesses a degenerate component} \\ 2^n, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该陈述的证明很容易从 [Rus21 第 2], 节中给出的类似陈述推知，因为高斯码是为 RP^3 中的链环自然定义的。

最后，注意到链环图 D 的一个二着色 D规定了一种平滑方式，即按照以下约定消解交叉：

(1) 

我们将以这种方式得到的平滑称为二着色平滑。

3. 扩展 Khovanov 同调

第 3 节至5中定义的同调理论，是通过如今的标准流程构造的：给定一个图 D，我们为 $[\![D]\!]$ 的顶点赋予模，并为其边赋予映射，从而得到一个链复形；该链复形的链同伦等价类是不变量，且由 D所表示的链环决定。本节将以此构造 Khovanov 同调在RP^3上的扩展。

设 R 是一个交换含幺环，并令

$$\mathcal{A} = R[X]/\langle X^2\rangle = \langle v_+, v_-\rangle_R.$$

在 A 上定义一个分次 p，取为 $p(v_\pm) = \pm 1$，并将其线性延拓到张量积上。令 $\{-1\}$ 表示将 p分次平移 -1，并令

$$A^k = \mathcal{A}^{\otimes k} \oplus \mathcal{A}^{\otimes k}\{-1\}$$

从而特别地有 $A := A^1 = \mathrm{A} \oplus \mathrm{A}\{-1\}$。必要时，我们通过上标 u 与 ℓ 来区分 A 的未平移副本与平移副本，例如

$$A = \langle v_+^u, v_-^u, v_+^\ell, v_-^\ell\rangle_R.$$

我们简写张量积上的上标与下标，记作 $v_{+-}^u = v_+^u \otimes v_-^u$ 等等。

定义 3.1. 设 D 是具有 n_- 个负交叉的链环图。对于 S，即$[\![D]\!]$ 的一个由 k 个圆组成的顶点，在将S的圆与 A^k的（成对）张量因子作任意等同的条件下，赋予 A^k。定义高度 S 为

$$|S| := \#(\text{1-resolutions in } S) - n_-$$

并令 $CDKh_i(D)$ 为赋予高度为 i 的各平滑的 R模的直和。我们将 i 称为同调分次。

将验证推迟到命题 3.2之后，我们断言，双重 *Khovanov* 链复形 D 是一个链复形，其链空间为 $CDKh_i(D)$，微分由映射矩阵给出，其矩阵项由 $[\![D]\!]$的边确定。映射m、 Δ 对应于裤子曲面，而 η 对应于带一个穿孔的莫比乌斯带。它们的具体形式如下。

映射 m和 Δ不受上标 u、 ℓ的影响，因此我们将其省略

$$
\begin{aligned}
m : A^2 &\to A & \Delta : A &\to A^2 \\
v_{++} &\mapsto v_+ & v_+ &\mapsto v_{+-} + v_{-+} \\
v_{+-}, v_{-+} &\mapsto v_- & v_- &\mapsto v_{--}. \\
v_{--} &\mapsto 0
\end{aligned} \tag{2}
$$

（这些映射用于经典 Khovanov 同调。）

该 η 映射的形式为

$$
\begin{aligned}
\eta : A &\to A \\
v_+^u &\mapsto v_+^\ell \\
v_+^\ell &\mapsto 2v_-^u \\
v_-^u &\mapsto v_-^\ell \\
v_-^\ell &\mapsto 0.
\end{aligned}
$$

将其延拓到张量积上，会改变整个字符串的上标，以及与有一个穿孔的 Möbius 带边界相关联的张量因子的下标。例如， $\eta(v_{++}^u) = 2v_{+--}^\ell$，如果所讨论的边界对应于定义域和陪域中的第二个张量因子。

最后，我们为这些项添加符号，采用任意一种约定，使每个面都包含奇数个负号。

最后，我们将 $CDKh(D)$上的量子分次定义为

$$j(x) = p(x) + i(x) + wr(D)$$

表示 i同调分次， $wr(D)$表示 D 的缠绕数，因此

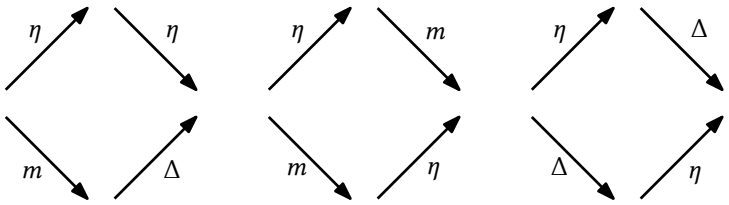
$$CDKh(D) = \bigoplus_{i,j} CDKh_{i,j}(D)$$

表示$CDKh_{i,\ j}(D)$表示同调次数为 i、量子度为j的齐次元素。◊

命题 3.2。 赋予定义 *3.1* 中所述的微分后，对象 $CDKh(D)$ 是一个链复形。

证明。 与其他将 Khovanov 同调推广到 RP^3 的方式（例如 [APS04、Gab13、Che21]）不同，双重构造除了构造经典 Khovanov 同调所用的数据外，不涉及任何辅助数据。也就是说，不会在图或其平滑上添加额外的装饰。

因此，我们只需考虑 $[\![D]\!]$各个面的映射，而不必考虑产生这些映射的具体图。只需检查这些面



即可，因为其他可能的面可由经典证明处理。这些面的交换性很容易验证，因此任意符号赋值都会产生一个链复形。□

定理 3.3. *$CDKh$（D）的链同伦等价类是由 D表示的链环的不变量。*

证明。 正如命题 3.2 的证明一样，构造 $CDKh$（D）时没有使用额外的辅助数据，这使我们能够紧密遵循不变性的经典证明。

命题 $R4$ 和 $R5$ 中的变换在链水平上诱导同构。也就是说，这两种变换都不会改变平滑中的圆的数量，也不会改变它们之间边的构型。

关于经典的 Reidemeister 变换，我们只需指出，用于证明经典情形下不变性的所谓去环技巧，可以直接推广到这一情形（例如参见 [BN02，引理 3。7]，[BN05，引理 3。2],以及 [Nao06，命题 5。1]）。□

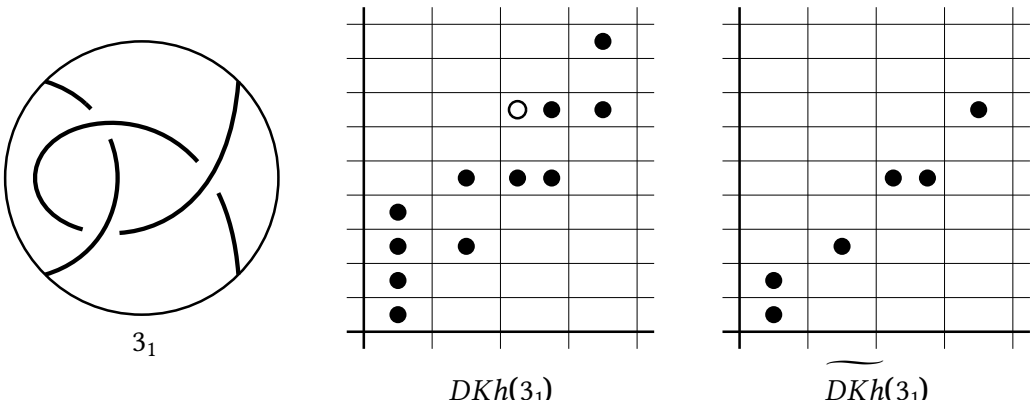
$CDKh(D)$ 的同调是由 D 表示的链环 L 的一个不变量，因此我们将 的双重 *Khovanov* 同调定义为

$$DKh(L) \coloneqq H\left(CDKh(D)\right).$$

与其他推广的比较

为了将双重 Khovanov 同调与先前定义的推广进行比较，采用约化版本会更方便。设 D 是链环 L 的一个图，其某个分支上有一个标记点。这个标记点可以沿用到 D 的平滑中；若某个圆包含该标记点，则该平滑中的这个圆本身也被标记。沿用经典定义，定义 $CDKh(D)$ 为 $CDKh(D)$ 的子复形，其由以下状态张成：对应于标记圆的张量因子标记为 v_-^u 或 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}v_-^\ell$。将 $DKh(L)$ 记为 $CDKh(D)$ 的同调。证明 $DKh(L)$ 确实是 L 的不变量，这与经典情形下的证明基本相同。

考虑如下纽结，其标记为 3_1，见于 Drobotukhina 表 [Dro94]，，及其（约化）双重 Khovanov 同调（系数在 $\mathbb{Z}_2$, 上），其中 •，∘ 表示 $\mathbb{Z}_2$, 的一个副本，空心生成元 ∘ 位于双分次 (0,0)，且两个坐标轴均以整数标记：



3_1 $DKh(3_1)$ $\widetilde{DKh}(3_1)$

在 [Che21，第 2.6] 节中，一系列同调理论（系数在 $\mathbb{Z}_2$中）被计算，其计算对象为 3_1。 K 的约化双重 Khovanov 同调凭借秩区别于 α_0、α_1、 α_{HF}、 α'_{HF}以及约化 Asaeda-Przytycki-Sikora 同调。

Gabrov̌sek 定义了 Asaeda-Przytycki-Sikora 同调的一种扩展，使其允许使用Z系数 [Gab13], 与双重 Khovanov 同调也有所不同。图2 中的纽结在 2_1 Drobotukhina 表中标记为；对 2_1 应用 Gabrov̌sek 的理论不会产生挠，而其双重 Khovanov 同调在Z 上含有 2-挠。

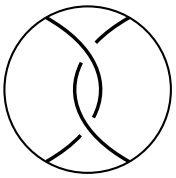


图 2

4. Lee 同调的扩展

Lee 定义了 Khovanov 同调的一种扰动，其中向微分中加入了量子度非零的项 [Lee05]。所得理论的秩与同调度支撑仅取决于链接矩阵，但量子度支集包含深刻的几何信息。该扰动理论也是一种同痕不变量。

本节将定义 Lee 同调在RP^3 上的一种扩展，该扩展也具有上述性质（其同痕不变性将在第6节证明）。

定义 4.1. 设 D 为一个链环图。令 R 为 2 可逆的交换含幺环，并记 $CDKh'(D)$ 为链空间与 $CDKh(D)$ 相同的链复形（如定义 3.1中所给出），其微分分量为

$$\begin{aligned} m' : A^2 &\to A \\ v_{++} &\mapsto v_+ \\ v_{+-}, v_{-+} &\mapsto v_- \\ v_{--} &\mapsto v_+ \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \Delta' : \ A &\to A^2 \\ v_+ &\mapsto v_{+-} + v_{-+} \\ v_- &\mapsto v_{--} + v_{++} \end{aligned}$$

（这里我们和公式（2）中一样省略了上标）并且

$$\begin{aligned} \eta' : A &\to A \\ v_+^u &\mapsto v_+^\ell \\ v_+^\ell &\mapsto 2v_-^u \\ v_-^u &\mapsto v_-^\ell \\ v_-^\ell &\mapsto 2v_+^u. \end{aligned}$$

注意，这些映射含有 j 次数为 4 的项，因此必须将 $CDKh(D)$ 的 j 分次弱化为 $CDKh'(D)$ 的滤过。同调分次的定义方式与 $CDKh(D)$ 相同。◊

定理 4.2. 设 D 是链环 L的一个图。对象 $CDKh'(D)$ 是一个链复形，其链同伦等价类是 L的不变量。

证明。 与第 3 节中类似的验证一样，由于构造 $CDKh'(D)$ 时没有使用辅助数据，因此可以直接沿用经典证明。参见例如 [Ras10，第 6]。 □

给定 D L 的一个图，我们将加倍*Lee*同调 L 定义为

$$DKh'(L) := H\left(CDKh'(D)\right).$$

Manolescu-Willis 定义了 Lee 同调到RP^3 [MW25], 的一个延拓，加倍Lee同调与之不同。例如，将 Manolescu-Willis 延拓在纽结 2_1 （见图2）上求值的结果支撑于同调次数 0；加倍Lee同调 2_1 支撑于同调次数 -2。这两种同调也可由其量子次数支撑加以区分，如第6.2节所述。

正如经典情形，加倍Lee同调是 E_∞ 页，即与定义4.1中隐含的滤过相关联的谱序列的相应页。

定理 4.3. 设 L 为一个链环。存在一个谱序列，其 E_2 页为 $DKh(L)$ ，收敛到 $DKh'(L)$，且每一页都是 L的不变量。

证明。 该论证与经典情形中给出的论证本质上相同，这是因为 η' 是 j-次数为 0 和 4 的映射之和。再次参见 [Ras10，第 6]节。 □

典范生成元

经典Lee同调具有一个典范基，由所论链环的定向（即与这些定向相关联的生成元）构成。这源于如下事实：平面中链环图的定向平滑具有下述性质。设 D 为一个图， S 为其一个平滑；若其泰特图是二分的，则称 S 是二分的 。一个 n分支的经典链环有 2^{n-1} 个二部平滑，它们很容易与其定向在整体反向的意义下建立双射。

加倍Lee同调同样具有由二部平滑构造的典范基，但这些生成元不再与所论链环的定向成双射。事实上，在 RP^3 中存在没有二部平滑的链环。如方程（1）所述，链环图 D 的二着色规定了 D的一个平滑。显然，2-着色平滑是二分的，并且一个二部平滑恰好可以用两种方式进行二着色（通过交换所有圆上的颜色相关联）[1]。

命题 2.6 因此意味着， n 分支的链环在 RP^3 中有 0 或 2^{n-1}个二部平滑。我们可以将定向替换为二着色，从而恢复关于加倍Lee同调的秩和同调度支持的重要结果。此后，我们假设二着色采用橙色和粉色。

[1]当然，双色与二分之间的区别几乎是同义反复：平滑的二着色不过是对其圆的一种划分，用以证明泰特图是二分的。我们选择用二着色来表述，因为这样能使论述更加简洁。

首先，我们定义 A 的基为 $\{r^u,\ r^\ell,\ p^u,\ p^\ell\}$，其中

$$r^u = \frac{v_+^u + v_-^u}{2}$$
$$p^u = \frac{v_+^u - v_-^u}{2}$$

以及 r^ℓ, p^ℓ的定义方式类似（这是对 $\{a, b\}$基的适当改编版本，见 [Lee05，第 4.3 节。1]）。对于 C 图 D 的一个二着色，我们赋予如下元素$\mathfrak{s}_C^u \in CDKh'(D)$ 定义为

$$\mathfrak{s}_C^u = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k$$

其中，若 C 的第 i个圆圈着橙色，则 $x_i = r^u$；否则 $x_i = p^u$。元素 $\mathfrak{s}_C^\ell$ 的定义方式类似。我们常省略对二着色C的依赖，简写为 $\mathfrak{s}^u, \mathfrak{s}^\ell$。

元素 $\mathfrak{s}^u, \mathfrak{s}^\ell$ 称为典范生成元，以下结果说明了这一术语的由来。

定理 4.4。设 D 是 L的一个图。与 D 的二着色相关联的典范生成元生成 $DKh'(L)$。此外，由 *Reidemeister* 变换诱导的 $DKh'(L)$ 上的映射会将典范生成元映为典范生成元（相差一个符号）。

证明。同样，在构造 $DKh'(L)$ 时未使用辅助数据，这使我们能够沿用经典证明。此外，密切相关的虚链设定中类似陈述的证明在此也适用 [Rus18，第 3]节。我们只需观察到微分分量在$\{r^u, r^\ell, p^u, p^\ell\}$基中具有如下形式：

$$\begin{aligned} m'(r \otimes r) &= r & \Delta'(r) &= 2r \otimes r \\ m'(r \otimes p) = m'(p \otimes r) &= 0 & \Delta'(p) &= 2p \otimes p \\ m'(p \otimes p) &= p \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \eta'(r^u) &= r^\ell \\ \eta'(r^\ell) &= 2r^u \\ \eta'(p^u) &= p^\ell \\ \eta'(p^\ell) &= 2p^u. \end{aligned}$$

证明通过将上述内容与如下事实相结合而进行：可二着色平滑仅有 Δ 个入射映射和 m 个出射映射。□

将此与命题 2.6 相结合，我们得到如下结论。

推论 4.5。设 L 是一个具有 n 个分支的链环。则

$$rank\,(DKh'(L)) = \begin{cases} 0, & \text{if } L \text{ has a degenerate component} \\ 2^{n+1}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，秩为 2^{n+1}，而不是经典情形中的 2^n，因为对于每个二着色 C，我们都关联了两个典范生成元：$\mathfrak{s}_C^u$ 和 $\mathfrak{s}_C^\ell$。

给定图 D 的二着色 C，如果 D 的一个交叉处于以下构型中，我们将其声明为奇

(3) 

至多相差整体交换颜色。否则，该交叉被判定为偶。注意，对于不同链环分支之间的交叉，这种判定取决于二着色。

推论 4.6。设 D 是链环 L 的一个图。给定 D 的一个2-着色，分别以 n_+^o 和 n_-^o 表示奇正交叉和奇负交叉的数量。$DKh'(L)$ 的同调度支集为

$$\left\{n_+^o - n_-^o \mid C \text{ a 2-colouring of } D\right\}.$$

以这种方式将交叉识别为偶或奇，是奇偶性的一个实例；参见 [IMN13、Man10] 及其中的参考文献。量 $n_+^o - n_-^o$ 是此处奇拧数的一个例子。

证明。由公式（3）可知，在与 C 相关的双色平滑中，当且仅当交叉是偶负交叉或奇正交叉时，它会被解消为其 1-解消。令 n_- 表示负交叉的总数，令 n_-^e 表示 D 的偶负交叉数，则可得

$$i\left(\mathfrak{s}_C^u\right) = i\left(\mathfrak{s}_C^\ell\right) = n_+^o + n_-^e - n_- = n_+^o - n_-^o.$$

□

5. 扩展 Bar-Natan同调

与其经典对应理论一样，倍增 Lee 同调仅适用于 2 可逆的基环。Bar-Natan 在$\mathbb{Z}_2$ [BN05第 9 节3]中介绍了一种 Lee 同调的伴随理论，其系数取自RP^3, 。这里我们将 Bar-Natan 的理论扩展到RP^3, , 并将其与 Chen 先前定义的扩展进行比较 [Che25]。

定义 5.1. 设 D为一个链环图。令 $R = \mathbb{Z}_2$, 表示 $CDBN(D)$ 的链复形，其链空间与 $CDKh(D)$ 相同，微分分量为：

$$\begin{aligned} m_2 : A^2 &\to A \\ v_{++} &\mapsto v_+ \\ v_{+-}, v_{-+} &\mapsto v_- \\ v_{--} &\mapsto v_- \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Delta_2 : A &\to A^2 \\ v_+ &\mapsto v_{+-} + v_{-+} \\ v_- &\mapsto v_{--} \end{aligned}$$

（这里我们再次省略了上标），并且

$$\begin{aligned}\eta_2 : A &\to A\\ v_+^u &\mapsto v_+^\ell\\ v_+^\ell &\mapsto v_+^u\\ v_-^u &\mapsto v_-^\ell\\ v_-^\ell &\mapsto v_-^u.\end{aligned}$$

注意，这些映射含有 j-次数为 2 的项，因此必须将 $CDKh(D)$ 的 j-分次弱化为 $CDBN(D)$ 的一个滤过。同调分次的定义方式与 $CDKh(D)$ 相同。◊

定理 5.2。 设 D 是链环 L 的一个图。对象 $CDBN(D)$ 是一个链复形，其链同伦等价类是 L的不变量。

*P*证明。 这一验证与 $CDKh'(D)$ 的类似结果的验证基本相同。

□

给定 D 一个 L 的图，我们将 L 的双重 ***Bar-Natan*** 同调定义为

$$DBN(L) := H\left(CDBN(D)\right).$$

在此情形下，定理4.3 有一个自然的类似版本。

定理 5.3。 设 L 为一个链环。存在一个以 E_2 为第 DKh 页的谱序列(L)，其最终收敛到 $DBN(L)$，且每一页都是 L 的不变量。

我们将此谱序列称为加倍 ***Bar-Natan*** 谱序列。

典范生成元

加倍 Bar-Natan 在结构上与加倍Lee同调非常相似。这里我们证明定理 4.4 对于加倍 Bar-Natan 同调的对应结论（同调不变性留待第 6节讨论）。

第 $\{r^u,\ r^\ell,\ p^u,\ p^\ell\}$ 节中的集合 4若系数取自 $\mathbb{Z}_2$，则不是一个基。我们t因此使用以下基 $\{a^u,\ a^\ell,\ b^u,\ b^\ell\}$，其中

$$\begin{aligned}a^u &= v_+^u + v_-^u\\ b^u &= v_-^u\end{aligned}$$

以及 $a^\ell,\ b^\ell$ 的定义方式类似（参见 [Tur06，第 3]节）。

我们以几乎完全相同的方式定义 $DBN(L)$ 的典范生成元，与 $CDKh'(L)$ 的定义方式相同。也就是说，对于图 D 的一个二着色 C，我们关联元素 $\mathfrak{s}_C^u \in CDBN(D)$，其定义为

$$\mathfrak{s}_C^u = x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k$$

其中 $x_i = a^u$ 若 i的第 C 个圆圈 $x_i = b^u$ 被染成橙色，则取此值；否则取 $\mathfrak{s}_C^\ell$。元素 $\mathfrak{s}_C^\ell$ 的定义方式类似。与第 4 节中一样，我们通常省略对二着色 C的依赖，简写为 $\mathfrak{s}^u,\ \mathfrak{s}^\ell$。

定理5.4. 设 D 是 L 的一个图。与 D 的2-颜色染色相关联的典范生成元集合构成 $DBN(L)$ 的一个基。此外，由 ***Reidemeister*** 变换诱导的 $DBN(L)$ 上的映射将典范生成元映为典范生成元。

证明. 鉴于以下观察，我们可以完全按照经典情形进行：

$$\begin{aligned}\eta_2(a^u) &= a^\ell\\ \eta_2(a^\ell) &= a^u\\ \eta_2(b^u) &= b^\ell\\ \eta_2(b^\ell) &= b^u.\end{aligned}$$

□

因此，将推论 4.5 和 4.6 中的$DKh'(L)$替换为 $DBN(L)$后得到的结论同样成立。

推论 5.5。 设 L 是一个具有 n 个分支的链环。那么

$$rank\,(DBN(L)) = \begin{cases} 0, & \text{if } L \text{ has a degenerate component} \\ 2^{n+1}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

推论 5.6。 设 D 是链环 L的一个图。给定 C 一个 D的2-颜色染色，记 n_+^o和 n_-^o 分别为奇正交叉和奇负交叉的数量。 $DBN(L)$ 的同调度支集为

$$\left\{n_+^o - n_-^o \mid C \text{ a 2-colouring of } D\right\}.$$

与 Chen 的扩展比较

Chen 为 RP^3 [Che25]中的扭曲可定向链定义了 Bar-Natan 谱序列的一个扩展。这里我们给出一些例子，说明 Chen 的谱序列与定理 5.3 中的谱序列并不相同。另一方面，我们证明，忽略量子分次后，这些谱序列的 E_∞ 各页所包含的信息等价。作者尚不清楚一般情况下这些 E_∞ 谱序列各页是否会因量子分次而有所区别；参见第 6.2节。

定义 5.7 ([Che25，定义2.8])。 一个链环是扭曲可定向的，如果它由零调分支组成。一个扭曲定向（链环图 D 的）是 D 的弧的一种定向，使得这些定向在对跖点（环境圆盘的边界上）处不一致。 ◊

图3中给出了一个例子。扭曲定向之于 Chen 的扩展，正如定向之于经典 Bar-Natan 同调。回想一下，二着色与双重 Bar-Natan 同调亦是如此。因此，我们首先比较扭曲定向与二着色这两个概念。

设 D 为一个扭曲定向图。扭曲定向以与定向相同的方式规定一种平滑，因此我们可以谈论扭曲定向分解，即 D的一个交叉的扭曲定向分解；在每个交叉处取扭曲定向分解，便得到关于 D的扭曲定向平滑。在 [Che25命题 2.16]的证明中隐含着：扭曲定向平滑是二分的。如方程（1）所述，二部平滑对应于 D的二着色，至多相差全局交换颜色。由此可知，扭曲可定向链环是可二着色的。

反之一般不成立：图1 左侧的链环是可二着色的，但不是扭曲可定向的。由此可知，这种双重 Bar-Natan 同调对此类链环有定义，而 Chen 的扩展则没有。

然而，若将这两个概念限制在零同调链环上，它们便是等价的。

引理 5.8。 设 L 是一个零同调链环。若 L 可用2种颜色着色，则它是扭曲可定向的。

证明。 假设 $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$，并设 $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$ 是 L的一个图。若 L 不是扭曲可定向的，则其分支中必有非零（且必为偶数个）在同调意义下非平凡；将它们记为 $L_{e_1}, \ldots, L_{e_{2k}}$。

由于 D_{e_i} 和 D_{e_j} 代表在同调意义下非平凡的分支，因此存在一列交叉变换，可将 D变为 $D' = D'_1 \cup \cdots \cup D'_n$，其中 $D_i = D'_i$远离交叉邻域，并且

$$\mathrm{lk}\left(D'_{e_i}, D'_{e_j}\right) = 1$$

对所有 $1 \le i < j \le 2k$均成立。

由于交叉变换保持链接数模 2 不变，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{lk}\left(D_{e_i}, D \setminus D_{e_i}\right) \mod 2 &= \sum_{i=1,\ i\neq j}^{2k} \mathrm{lk}\left(D_{e_i}, D_{e_j}\right) \mod 2 \\ &= 1 \mod 2.\end{aligned}$$

因此， D 有一个退化分支，且 L 不可二着色。 □

秩与同调度支撑。 设 L 是零同调链环， $HBN(L)$表示 Bar-Natan同调的 Chen 的扩展。这里我们证明， $HBN(L)$与 $DBN(L)$的秩和同调次数支撑集包含等价的信息。

命题 5.9。 设 L 是零同调链环。那么， $DBN(L)$ 的秩是 $HBN(L)$的两倍。

证明。 结合推论 5.5, [Che25、定理 1.1], 和引理 5.8。 □

由此可知，若 L 是零同调且不可扭曲可定向的，那么 $HBN(L)$ 和 $DBN(L)$ 的同调次数支撑集均为空。接下来需要关联扭曲可定向情形下这两种理论的支撑集。为此，鉴于本文与 [Che25] 中采用的分次约定不同，我们引入以下概念。

假设 L 是扭曲可定向的。在 L的每个分支上放置一个标记点，会在 L 的扭曲定向与其定向之间诱导出一个双射：每个扭曲定向都对应于唯一一个在标记点处与之相符的定向。此后我们将默认使用这样一个双射；标记点的不同选择所带来的影响，已由下文命题5.11 中的移位体现。

设 D 为一个扭曲定向图。若某个交叉的扭曲定向分解不同于其定向分解，我们称该交叉本身是扭曲的。记 n^t_+ 和 n^t_- 分别为扭曲正交叉和扭曲负交叉的数量，其中正负由扭曲定向决定。另见图3。

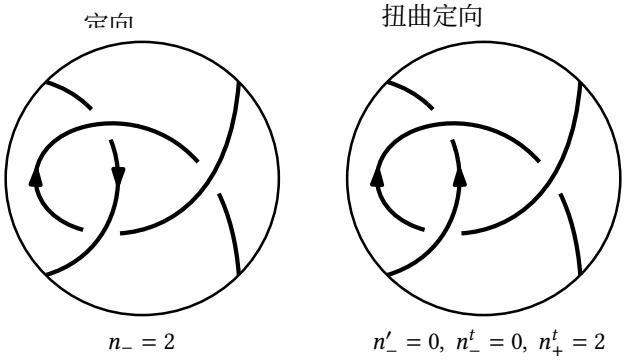


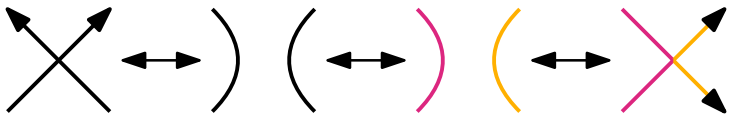
图 3. 与扭曲定向图相关联的定向图。在扭曲定向图中，最左侧的两个交叉本身就是扭曲的。

给定 D 的一个二着色，我们按照公式（3）将交叉标记为偶交叉或奇交叉。扭曲定向与 D 的二着色之间存在自然对应关系（忽略全局交换颜色），在此对应下，扭曲交叉与奇交叉的概念等价。

引理 5.10。 设 D 为一个扭曲定向图。扭曲定向规定了 D的一个二着色，颜色整体互换除外。相对于该扭曲定向，一个交叉是扭曲的，当且仅当相对于相应的二着色它是奇的。

证明。 扭曲定向定义了 D的一个扭曲定向平滑。该平滑是二分的，因此可以有两种二着色，这两种着色通过整体互换颜色相互关联。这两个平滑通过方程 D（1）定义了 D 的二着色。

不妨设 C 表示其中一种二着色（整体交换颜色不会影响论证）。要看出一个交叉是扭曲的当且仅当它相对于 C 是奇的，我们考察下面这一系列图



这里最左侧的交叉采用扭曲定向，最右侧的交叉采用定向（请记住，我们隐含地使用了扭曲定向与 D的定向之间的一个双射）。二着色必定如右起第二个图所示（整体交换颜色也可以），因为扭曲定向平滑是二分的。□

设 C 是图 D 的一种二着色（正交叉和负交叉是相对于定向而非扭曲定向定义的）。令 n^e_+, n^e_- 分别表示偶正交叉和偶负交叉的数量，令 n^o_+, n^o_- 分别表示奇正交叉和奇负交叉的数量，其中奇偶性是相对于C而言的。

命题 5.11。 设 D是 L的一个扭曲定向图。那么 $HBN_i(L) \neq 0$ 当且仅当 $DBN_{i+n^t_- - n^t_+}(L) \neq 0$。

证明。 设 C 是根据引理 5.10与扭曲定向对应的二着色。记 n'_- 为相对于 D的扭曲定向的负交叉数， n_- 为相对于定向的负交叉数（示例见图 3）。 $HBN(L)$ 的同调分次通过将平滑的高度平移n'_-来定义，而 $DBN(L)$ 的同调分次则将高度平移 n_-。注意到 $n_- = n^e_- + n^o_-$。引理 5.10意味着

$$n^o_+ = n^t_-$$
$$n^o_- = n^t_+.$$

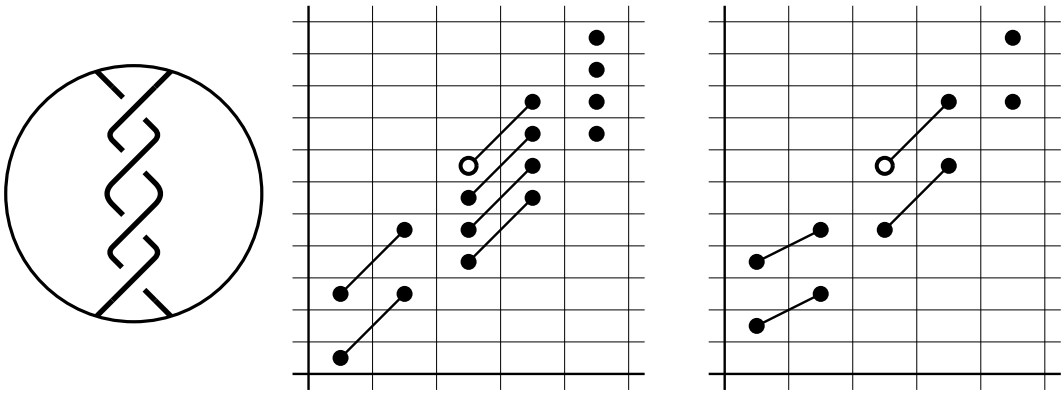
Th因此 $n'_- = n^e_- + n^t_-$， 以及 $n_- - n'_- = n^o_- - n^t_- = n^t_+ - n^t_-$。将其与 [Che25相结合，P命题2.17]完成了证明。□

这些谱序列是不同的。尽管命题5.9与5.11 之间存在关系，Chen所定义的谱序列与定理5.3 的谱序列并不包含等价的信息。它们通常由其 E_2 页以及非平凡页的数目加以区分。

注1。 回想这两种理论具有不同的分次约定。从*Chen*的理论过渡到加倍理论时，同调次数所需的平移在命题*5.11*中给出为 $n^t_+ - n^t_-$。通过类似的论证，可以确定量子度所需的平移为3（$n^t_+ - n^t_-$）。

对于图3 中给出的纽结，这两个序列都有两个非平凡页，但由其 E_2 页的（经适当平移的）量子次数支撑加以区分。

此外，对于下方给出的纽结，标记为 4_1 Drobotukhina 表中的 [Dro94], 这些序列的非平凡页数各不相同。下面展示它们的 E_2 页面，左侧为加倍的 Bar-Natan 序列，右侧为 Chen 的序列：



如前所述， $\bullet$， $\circ$ 表示 Z_2 的一个副本。微分项用连接两个生成元的一条边表示，坐标轴标记为整数。右侧网格中的空心生成元 $\circ$ 位于双次数 $(-2, -4)$。我们计算 $n^t_- = 0, n^t_+ = 4$，因此左侧网格中的空心生成元位于双次数 $(2, 8)$。

请注意，加倍 Bar-Natan 谱序列有两个非平凡页，而 Chen 谱序列有三个。

经典Bar-Natan序列坍缩所在页的指标为各种几何量提供了界；例如，参见 [Ali19，CGL+21]。因此，全面确定本文所考察的这些谱序列之间的关系很有意义。

问题 A. 设 K 是一个零同调纽结，使得 *Chen* 谱序列有 A非平凡页，并且加倍 *Bar-Natan* 谱序列有 B 非平凡页。

$A \geq B$吗？如果是，$A-B$能否任意大？如果不是，$B-A$能否任意大？

6. 函子性

第 3 节至5 节中定义的加倍不变量具有与经典情形相同的函子性。在第6.1 节中，我们证明协合会在加倍 Lee 同调和 Bar-Natan同调上诱导同构。结合关于量子分次支集的适当结果，我们在第6.2 节中将 Rasmussen不变量推广到RP^3。我们将这些新不变量与 Chen 和 Manolescu-Willis 此前定义的不变量进行比较。最后，在第6.3节中，我们描述新 Rasmussen 不变量能够为哪些配边给出亏格界。

本节中的许多构造和证明，在虚链这一相关情形下都有对应内容，详见 [Rus18，第 3 节。2]。

6.1. 配边映射

设 L_0, L_1 为链环。就本文而言，从 L_0 到 L_1 的余边界是一个光滑且适当嵌入的紧曲面 $S \hookrightarrow \mathrm{RP}^3 \times [0,1]$，满足 $\partial S = L_0 \sqcup L_1$。我们不将这类余边界视为在任何同痕意义下等价，因此 S 规定了 L_0和 L_1的图 D_0和 D_1。因此，我们也可以将 S 称为从 D_0 到D_1的余边界。

按照惯例，我们首先定义与简单配边相关联的映射，再由此构造与一般配边相关联的映射。

定义 6.1 (参见 [CS93])。设 S 是从 D_0 到 D_1的余边界。我们称 C 是初等的，如果 D_1 由下列操作从 D_0 得到：

(i) Reidemeister 变换（如命题 2.2 中所述）。(ii) 生成一个无扭结、未链接且同调平凡的分支。(iii) 消亡一个无扭结、未链接且同调平凡的分支。(iv) 一个定向鞍。

◊

定义 6.2。设 S 是从 D_0 到 D_1的初等配边，其中 $D_0 \neq \emptyset$。由此可知，D_0 和 D_1 在圆盘邻域 v之外完全相同。存在一个立方体映射 $[\![D_0]\!] \to [\![D_1]\!]$，其定义是在$D_0$ 的每一种平滑中，用 $v \cap D_1$ 替换 $v \cap D_0$。这进而诱导一个映射

$$CDKh(S) : CDKh(D_0) \to CDKh(D_1)$$

如下。

与 Reidemeister 变换相关联的映射，其定义方式与经典情形基本相同；例如，参见 [BN05，第 8] 节，或参见 [HS24，第 2 节。3]。

如果 S是一个鞍点，则映射 $CDKh(S)$ 在状态上的定义为 m、 Δ或 η，具体取决于立方体映射。

如果 S是一个生成，则映射 $CDKh(S)$ 定义为 $\iota \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$，其中

$$\iota : R \to A$$
$$1 \mapsto v_+^{u/\ell}$$

上标由输入状态的上标决定，例如 $\iota(1) \otimes v_+^u = v_{+-}^u$。

如果 S是一个消亡，则映射 $CDKh(S)$ 定义为 $\epsilon \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$，其中

$$\epsilon : A \to R$$
$$v_+^u, v_+^\ell \mapsto 0$$
$$v_-^u, v_-^\ell \mapsto 1.$$

◊

注 2。 定义 $D_0 \neq \emptyset$ 中的条件 *6.2* 仅用于确保 ι 是良定义的。通过将基环 R 替换为

$$\mathcal{S} := R \oplus R\{-1\} = R[z]/\langle z^2 - 1\rangle$$

分次为 $p(1) = 0, p(z) = -1$。令 $v_\pm^\ell = zv_\pm$，我们有 $\mathcal{A} = \langle v_+, v_-\rangle_{\mathcal{S}}$，并可定义

$$\iota(1) = v_+, \quad \iota(z) = zv_+$$

and

$$\epsilon(v_+) = \epsilon(zv_+) = 0, \quad \epsilon(v_-) = 1, \quad \epsilon(zv_-) = z.$$

根据此定义，ι和 ϵ是 S-线性的，但 η不是，例如 $\eta(v_-) = zv_- \neq 0 = \eta(zv_-)$。因此，元组 $(A, m, \Delta, \eta, \epsilon, \iota)$ 并非 *Turaev-Turner [TT06]* 所描述的无定向拓扑量子场论（该构造对于不交并也不满足乘法性）。广义拓扑量子场论构造有很多，例如 *[BCGPM16,Tur20]*：它们中是否有任何一种为双重理论提供了自然的范畴框架？

有趣的是，映射 η_2 定义 *5.1* 确实是 S-线性的，因为它是乘以 z（不过，*Bar-Natan* 理论仍不满足乘法性）。

与经典情形完全相同，可以验证 That $CDKh(S)$ 是一个链映射。我们将其在双重 Khovanov 同调上诱导的映射记为

$$DKh(S) : DKh(L_0) \to DKh(L_1).$$

一般的余边界 S可以（非唯一地）分解为一系列初等余边界。令

$$S = S_0 \cup \cdots \cup S_n$$

为这样一种分解，并定义

$$DKh(S) := DKh(S_n) \circ \cdots \circ DKh(S_0).$$

我们预期，$DKh(S)$ 不依赖于分解（也就是说，在逐点固定边界的情况下，它在对 S 作同痕时保持不变），但由于任何此类依赖都不会影响本节的结果，我们不再进一步探讨。

我们以与定义 doubled Khovanov 同调完全相同的方式，定义 doubled Lee 同调和 Bar-Natan 同调上的配边映射：

- 将定义 m、 Δ、 η 中的6.2 替换为 $m\prime$、 $\Delta\prime$、 $\eta\prime$ （定义 4.1 中的），可得到映射 $DKh\prime(S)$： $DKh\prime(L_0) \to DKh\prime(L_1)$。
- 将定义 m、 Δ、 η 中的6.2 替换为 m_2、 Δ_2、 η_2 （定义 5.1 中的），可得到映射 $DBN(S)$： $DBN(L_0) \to DBN(L_1)$。

注意， $DKh(S)$ 是双分次的，次数为 $(0, \chi(C))$；而 $DKh'(S)$ 和 $DBN(S)$ 是i-分次的，次数为 0，并且是 j-过滤的，次数为 $\chi(S)$。

与经典情形不同，映射 $DKh'(S)$ 和 $DBN(S)$ 可能为零，即使 S 可定向。值得庆幸的是，二着色链环之间的协合会诱导非零映射；就本文而言，若一个余边界是不交并的适当嵌入环带（每个链环分支对应一个），则称其为协合。

引理 6.3 （参见定理 3.21 [Rus18]）。 设 S 是从 L_0 到 L_1 的一个并合，其中 L_0 是可二着色。映射 $DKh'(S)$ 和 $DBN(S)$ 均非零。此外，它们将典范生成元映射为典范生成元（对于 $DKh'(S)$ 的情形，差一个符号）。

证明。 将 S 分解为初等配边

$$S = S_0 \cup \cdots \cup S_n$$

其中 $\partial S_i = D_i \sqcup D_{i+1}$，并令 $f \in \{DKh'(S)\ DBN(S)\}$。

若存在 D_j 不可二着色，则 f 由推论 4.5和 5.5可知是零映射。我们首先证明不会遇到这样的图。

若 S_i 是一个分支的生成或消亡，则 D_{i+1} 可二着色当且仅当 D_i 可二着色。若S_i 是连接两个不同分支的鞍点，且 D_i 没有退化分支，则 D_{i+1} 也没有退化分支，因此 D_{i+1} 可二着色。

假设 S_i 是一个将一个分支分裂为两个的鞍点。 D_{i+1} 所得的分支要么二者皆退化，要么二者皆非退化。若为前者，注意到由于 S 是一个协合，这些分支中至少有一个必须在稍后某个时刻参与另一个鞍点（将两个分支合并）。然而， S的紧致性，以及退化分支不能通过消亡被移除这一事实，意味着这种情况不可能发生。

回想 Reidemeister 变换保持二着色性。结合上述观察，这意味着对所有 $1 \le i \le n+1$, D_i 都是可二着色的。

设 $g \in \{DKh'(S_i)\ DBN(S_i)\}$，其中 $1 \le i \le n$为某个值。我们断言 g将典范生成元映为典范生成元（在 $DKh'(S_i)$的情形下，至多相差一个符号）。

如果 S_i 是一个分支的生成或消亡，那么通过观察以下事实即可验证该断言：

$$\begin{aligned}
\iota(1) &= o^{u/\ell} + p^{u/\ell} = a^{u/\ell} + b^{u/\ell} \\
\epsilon(o^{u/\ell}) &= -\frac{1}{2} \\
\epsilon(p^{u/\ell}) &= \frac{1}{2} \\
\epsilon(a^{u/\ell}) &= \epsilon(b^{u/\ell}) = 1.
\end{aligned}$$

设 S_i 是两个不同分支之间的一个鞍点。参见定义4.1和5.1 我们可以看到，如果鞍点涉及的圆颜色相同，则典范生成元在 g 下映射为典范生成元；否则映射为零。

设 S_i 为一个将一个分支分裂成两个分支的鞍点。当且仅当由此得到的 D_{i+1} 分支退化时，鞍点涉及的典范生成元中的圆具有不同的颜色。如上所述，这样一对退化分支不会出现在 S中，因此 g 会将典范生成元映射到（非零倍数的）典范生成元。

如果 S_i 是一个 Reidemeister 变换，那么可以将 Rasmussen 在经典Lee同调情形下给出的论证应用于此处，作相应调整 [Ras10，第 6] 节。

由此可知， f非零，因为它是映射 $g \in \{DKh'(S_i)\ DBN(S_i)\}$ 对于 $1 \le i \le n$的复合。□

Pardon 关于 Lee 同调的结果 [Par12，定理1.2，（5）] 因此也适用于 doubled Lee 同调和 Bar-Natan 同调。

推论 6.4. 加倍的 *Lee* 同调和 *Bar-Natan* 同调都是合痕不变量。

6.2. Rasmussen 不变量

我们现在已经证明，加倍的 Lee 同调和 Bar-Natan 同调的秩及同调分次支集都受到严格限制，并且这些同调都是合痕不变量。要从这些同调中提取 Rasmussen 不变量，最后还需了解它们的量子分次支集。

设 D 是一个链环 L的图。如第 4 节所述， $CDKh'(D)$ 和$CDBN(D)$ 都是带有 j-滤过的，其中

$$F^k CDKh'(D) := \{x \in CDKh'(D) \mid j(x) \ge k\}$$

而 $F^k CDBN(D)$ 的定义类似。用 s表示由滤过诱导的 $DKh'(L)$ 和 $DBN(L)$ 上的分次。

命题 6.5. 设 K 是一个纽结。 $DKh'(K)$ 和 $DBN(K)$ 的 s-分次支集分别具有如下形式

$$\{u+1, u, u-1, u-2\}$$

对于某个（可能互不相同的） $u \in$ 有理数域。

注意，一般而言， $DKh'(K)$ 和 $DBN(K)$ 的支撑并不确定相等。

证明。 与证明加倍 Lee 同调和 Bar-Natan 同调的不变性一样，我们可以基本照搬经典验证，见 [Ras10，第 3 节。1], 另请参见虚纽结相关情形中的类似结果 [Rus18，引理4.2，命题4。4]。 □

因此， $DKh'(K)$ 和 $DBN(K)$ 的量子分次支撑各自等价于一个整数（与经典情形不同，该整数不一定是偶数）。

定义6.6。 设K是一个纽结， R是一个 2 可逆的交换含幺环，或者是有理数域$_2$。 K 的加倍拉斯穆森不变量（取值于 R）定义为

$$ds_R(K) := \max\{s(x) \in H \mid x \ne 0\} - 1$$

其中，如果 $R = \mathbb{Z}_2$，则为 $H = DBN(K)$；否则为 $H = DKh'(K)$。 ◊

换言之， $ds_R(K) = u$ 命题 6.5。注意，推论 6.4 表明，加倍 Rasmussen 不变量是合痕不变量。特别是，加倍 Rasmussen 不变量可以用于阻碍切片性。

与其他推广的比较。 在 有理数域 和$\mathbb{Z}_2$ 上的经典 Rasmussen 不变量，在纽结 $14n19265$ [LS14上取值不同，见注 6。1]。将此纽结包含在一个三维球中，而该三维球又包含于$\mathbb{RP}^3$, 中，便得到一个纽结的例子：它在有理数域 和 $\mathbb{Z}_2$ 上的加倍 Rasmussen 不变量不同，下面将对此进行说明。

如果纽结 K 包含在 $\mathbb{RP}^3$ 中，且可以置于一个三维球内，我们就称它为局部结。局部结的加倍不变量具有受限的形式。

命题 6.7 (参见命题 2。5 [Rus18])。 设 D 是一个不与环境圆盘边界相交的结图[2]。那么

$$CDKh(D) = CKh(D) \oplus CKh(D)\{-1\}$$

其中 $CKh(D)$ 是将 D视为平面中的图时的经典 *Khovanov* 复形。

证明。 由于 D 不与环境圆盘的边界相交，因此 η 映射不会出现在$CDKh(D)$中，故它可分解为所需的直和。□

$\mathbb{RP}^3$ 中的局部结 K 通过将包含 K 的三维球纳入 S^3，唯一确定 S^3中的一个纽结。

推论 6.8. 设 K 为一个局部结。则 K 的加倍拉斯穆森不变量等于由 K 确定的 S^3 中纽结的经典 *Rasmussen* 不变量（对任意系数环）。

由此可知，将 $14n19265$ 纳入$\mathbb{RP}^3$ 会得到一个纽结，其上有理数域与$\mathbb{Z}_2$ 上的加倍 Rasmussen 不变量不同。

分别记 $s_{\mathbb{Q}}(K)$ 与 $s_{\mathbb{Z}_2}(K)$ 为 Rasmussen不变量到 $\mathbb{RP}^3$的、分别由 Manolescu-Willis 与 Chen 定义的推广 [MW25，Che25]。

对于纽结 2_1（图 2），我们有 $ds_{\mathbb{Q}}(2_1) = -5$ 以及 $s_{\mathbb{Q}}(2_1) = -2$，因此加倍不变量与 Manolescu-Willis 的不变量互不相同。

在第 5节中证明了 Chen 谱序列与加倍 Bar-Natan 谱序列是不同的。然而，作者尚未知有纽结 J 使得

$$ds_{\mathbb{Z}_2}(J) \neq s_{\mathbb{Z}_2}(J) + 3\left(n_+^t - n_-^t\right)$$

其中， $3\left(n_+^t - n_-^t\right)$ 用于说明不同的分次约定（见注释1）。换言之，目前没有已知的例子表明 E_∞ 页承载着不同的信息（请回顾，根据推论5.5和5.6，它们的秩与同调度支集必然等价）。

然而，由于两个序列中的微分项具有不同的次数——例如，Chen 的序列可能包含奇数次项，而加倍序列则不可能包含——因此有理由怀疑， E_∞ 页通常承载着不等价的信息。

[2]也就是说，作为一个缠结，它只有闭分支。

问题 B。 是否存在一个纽结 J 使得

$$ds_{\mathbb{Z}_2}(J) \neq s_{\mathbb{Z}_2}(J) + 3\left(n_+^t - n_-^t\right)?$$

尤其是，是否存在一个 J，使得其中一个 $ds_{\mathbb{Z}_2}(J)$、$s_{\mathbb{Z}_2}(J)$ 能阻碍切片性，而另一个不能？

6.3. 亏格界

最后，我们描述一下双重 Rasmussen 不变量施加亏格界的配边类别。经典 Rasmussen 不变量以及 Manolescu-Willis 定义的不变量，对所有配边都施加此类界；对于 Chen 的扩展，相关配边称为扭曲可定向 [Che25，定义 3。1]。

设 S 是一个从 D_0 到 D_1的初等配边。回想一下，D_0 和 D_1 在圆盘邻域 ν之外相同。分别给定 D_0和 D_1的二着色 C_0、C_1，若 C_0 和 C_1 在 ν之外相同，则称 C_0 可以通过 S 传播（从而得到 C_1）。

容易看出，若 S 是由 Reidemeister 变换，或由生成或消亡（一个无纽结、非链结分支）所定义的初等配边，则初始图的每种二着色都能延续。若 S 是鞍点，我们断言，初始图的二着色能够延续，当且仅当 ν 中包含的弧颜色相同。在 S 将两个分支合并为一个分支的情形下，这一点可以直接验证。

若 S将一个分支分裂为两个分支，则注意到，包含在 ν中的弧颜色不同，当且仅当新生成的分支的链接数为奇数。因此，若 D_0 是可二着色的，则 D_1 是可二着色的，当且仅当包含在 ν 中的弧颜色相同（否则 D_1 会包含一个退化分支）。关于虚链的类似情形，更多细节见 [Rus18，引理 3。24]。

定义 6.9。 设 S 为一个配边，并且

$$S = S_0 \cup \cdots \cup S_n$$

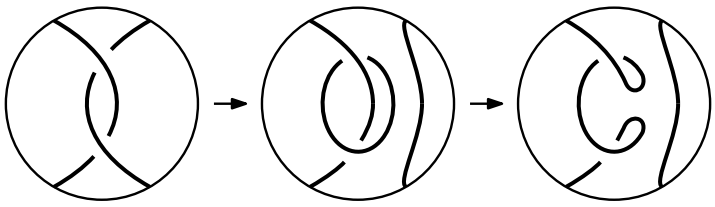
将其分解为初等配边 S_i，从 D_i 到 D_{i+1}。若存在 D_i 的一个二着色 C_i，对所有 $0 \leq i \leq n$均成立，使得 C_i 经由 S_i 传播后得到 C_{i+1}，则称 S为 2-可二着色 。◊

换句话说，若存在 D_0 的一个二着色，且该着色能够完整地经由 S 传播，则 S 是可二着色的。

引理 6.3 的证明表明，二着色链环之间的协合是可二着色的。稍作调整即可将其中使用的论证用于证明，亏格为零的配边（在可二着色链环之间）同样是可二着色的。这最终源于它们的 Reeb 图是树这一事实。

如果某个不可二着色链环出现在 S，那么 S 本身肯定不可二着色。此外，也存在其中只出现可二着色链环、但余边界本身不可二着色的余边界，例如：

(4)



最左侧的图有两种二着色，显然无法将它们延续到最右侧的图。

定理6.10。 设 K 是一个纽结， S 是从 K 到（同调平凡的）平凡结的一个2-可二着色配边。那么

$$|ds_R(K)| \leq 2g(S).$$

证明。 证明 $DKh'(S)$ 和 $DBN(S)$ 非零，并将典范生成元映到（非零倍的）典范生成元，这与引理 6.3的证明基本相同。有了这一点，就可以直接应用 Rasmussen 在经典情形下给出的论证[Ras10，定理 1] 的证明。□

方程（4）描述了一个亏格为1的配边，其起点是图 2_1 中所示的纽结 2。如上所述，我们有 $ds_{\mathbb{Q}}(2_1) = -5$和 $s_{\mathbb{Q}}(2_1) = -2$。由 [MW25，定理1.2] 可知，方程（4）中的配边是亏格极小的。由于 $ds_{\mathbb{Q}}(2_1) = -5$定理 6.10蕴含可二着色配边不是亏格极小的。也就是说，可二着色配边构成所有配边的真子集。

在 [Che25，例411] 中，证明了扭曲可定向配边也构成这样一个真子集。此外，研究还表明，对于所有 $N \in \mathbb{N}$ ，都存在一个纽结K 使得

$$\min\left(\left\{g(S) \;\middle|\; \begin{array}{c} S \text{ a twisted orientable} \\ \text{cobordism from } K \text{ to } U \end{array}\right\}\right) \geq \min\left(\left\{g(S) \;\middle|\; \begin{array}{c} S \text{ a cobordism} \\ \text{from } K \text{ to } U \end{array}\right\}\right) + N \tag{5}$$

对于U同调平凡的平凡结也是如此。也就是说，扭曲可定向配边的最小亏格可以任意大于标准切片亏格。

如果在等式（5）中将扭曲可定向替换为可二着色，结论也同样成立。特别地，将定理6.10 应用于 [Che25中给出的纽结，图 22] 表明，可二着色配边的最小亏格可以任意大于标准切片亏格。

然而，扭曲可定向配边与可二着色配边之间的一般关系仍然未知。

问题C。 *(1)* 一般而言，2-可着色配边的最小亏格是否小于扭曲可定向配边的最小亏格，还是反过来？

(2) 对所有 $M \in \mathbb{N}$ ，是否存在纽结 K 使得

$$\left|\min\left(\left\{g(S) \;\middle|\; \begin{array}{c} S \text{ 一条扭曲可定向配边，从 } K \text{ 到 } U \end{array}\right\}\right) - \min\left(\left\{g(S) \;\middle|\; \begin{array}{c} S \text{ 一条2-可着色余边界，从 } K \text{ 到 } U \end{array}\right\}\right)\right| \geq M?$$

参考文献

[Ali19] A. Alishahi。解结数与 Khovanov 同调。《*Pacific J. Math.*》，301(1):15–29，2019年。[APS04] M. M. Asaeda、J. H. Przytycki 与 A. S. Sikora。曲面上 I-丛的 Kauffman 括号 skein 模的范畴化。《*Algebr. Geom. Topol.*》，4:1177–1210，2004年。[BCGPM16] C. Blanchet、F. Costantino、N. Geer 与 B. Patureau-Mirand。非半单拓扑量子场论、Reidemeister 挠与 Kashaev 不变量。《*Adv. Math.*》，301:1–78，2016年。[BN02] D. Bar-Natan。论 Khovanov 对 Jones 多项式的范畴化。《代数与几何拓扑》，2(1):337–370，2002年。[BN05] D. Bar-Natan。缠结与配边的 Khovanov 同调。《*Geom. Topol.*》，9 1499，2005年 1443: – 。

[CGL+21] C. Caprau、N. Gonz´alez、C. R. S. Lee、A. M. Lowrance、R. Sazdanovi´c 与 . Zhang。论 Khovanov 同调及相关不变量。载于《辛几何与接触几何及拓扑学的研究方向》，Assoc. Women Math. Ser. 第27卷，第273–292页。Springer，Cham，[2021] ©2021。 [Che21] D. Chen。RP3 中零同调链的 Khovanov 型同调，2021年。arXiv:2104. 04779。[Che25] D. Chen。RP^3 中零同调链的 Bar-Natan同调。《Pacific J. Math.》，334(2):233–268，2025年。[CS93] J. S. Carter 与 M. Saito。曲面同伦的 Reidemeister 变换及其作为影片变换的解释。《J. Knot Theory Ramifications》，2(3):251–284，1993年。 [Dro90] Y. V. Drobotukhina。RP^3 中链环的 Jones 多项式的一个类似物及 Kauffman-Murasugi 定理的推广。《Algebra i Analiz》，2(3):171–191，1990年。 [Dro94] J. Drobotukhina。RP^3 中至多六个交叉的链的分类。载于《流形与簇的拓扑学》，Adv. Soviet Math. 第18卷，第87–121页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994年。[Gab13] B. Gabrovˇsek。RP^3 的 Kauffman 括号 skein 模的范畴化。《Bull. Aust. Math. Soc.》，88(3):407–422，2013年。 [HS24] K. Hayden 与 I. Sundberg。4-球中的 Khovanov 同调与奇异曲面。《J. Reine Angew. Math.》，809:217–246，2024年。 [IMN13] D. P. Ilyutko、V. O. Manturov 与 I. M. Nikonov。纽结理论中的奇偶性与图链。《J. Math. Sci. (N. Y.)》，193(6):809–965，2013年。 [Kau04] Louis H Kauffman。虚纽结的自链接不变量。《Fundamenta Mathematicae》，184(1):135–158，2004年。 [KMN24] L. H. Kauffman、R. Mishra 与 V. Narayanan。RP3 中的纽结，2024年。arXiv:2401.06050。 [Lee05] E. S. Lee。Khovanov 不变量的一个自同态。《数学进展》，197(2):554–586，2005年。[LS14] R. Lipshitz 与 S. Sarkar。Rasmussen 的 s-不变量的一个精细化。《Duke Math. J.》，163(5):923–952，2014年。[Man10] V. O. Manturov。纽结理论中的奇偶性。《Sb. Math.》，201(5):693，2010年。[MW25] C. Manolescu 与 M. Willis。RP^3 中链环的 Rasmussen 不变量。《 Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B》，12:789–830，2025年。[Nao06] G. Naot。普适 Khovanov 链同调理论。《Algebr. Geom. Topol.》，6 1892，2006年 1863: – 。[Par12] J. Pardon。来自 Lee 同调的链一致不变量。《Algebr. Geom. Topol.》，12(2):1081–1098，2012年。 [Ras10] J. Rasmussen。Khovanov 同调与切片亏格。《Inventiones Mathematicae》，182(2):419–447，2010年。[Ren24] Q. Ren。 DTS^2 中由

s 24 7 4115 4125, -不变量给出的切片亏格界。《Algebr. Geom. Topol.》，( ): – 。[Rus18] W. Rushworth。双重 Khovanov 同调。《加拿大数学杂志》，70:1130–1172，2018年。[Rus21] W. Rushworth。二着色链的一种奇偶性。《Osaka J. Math.》，58(4):767–801，2021年。 [RY25] Q. Ren 与 H. Yang。RP3 中的内禀 Khovanov 同调，2025 年。arXiv:2510.00109。 [TT06] Vladimir Turaev 与 Paul Turner。无定向拓扑量子场论与链同调。《代数与几何拓扑》，6(3):1069–1093，2006年。 [Tur06] P. R. Turner。计算 Bar-Natan 的特征二 Khovanov 同调。《J. Knot Theory Ramifications》，15(10):1335–1356，2006年。 [Tur20] A. Turzillo。2 019、26、2020年 3 维 pin-minus 拓扑量子场论的图示状态和。《J. High Energy Phys.》，( ): 。[Yan25] H. Yang。RP^3 中的瞬子与 Khovanov 同调。《Trans. Amer. Math. Soc.》，378(7):4991–5009，2025年。

电子邮箱地址：william.rushworth@ncl.ac.uk
地址：英国纽卡斯尔大学数学、统计与物理学院