arXiv:2603.10837v1 [math.CO] 11 Mar 2026

神经码态射的伴随

JULIANN GERACI[1], ALEXANDER B. KUNIN[2], 和 ALEXANDRA SECELEANU[1]

Abstract. 组合编码 $\mathcal{C}$ 是 $[n]$的子集的集合，或等价地说，是 $\{0,1\}^n$中的点集。编码态射是从一个组合编码到另一个组合编码的映射，使得像中各点的坐标可以表示为定义域中坐标的乘积。通过将编码态射表示为二元矩阵，我们证明任何编码态射都是某个伽罗瓦连接的一部分，其伴随是用代表矩阵进行布尔乘法。利用这一点，我们刻画了那些能够对布尔矩阵进行分解的编码态射，并将其应用于估计布尔矩阵秩。

态射还会在码的（同构类）上诱导一个偏序。我们用 *free* 神经元以及一个关于对应覆盖映射的指标的组合条件，确定了在该偏序中两个伴随映射互为逆映射时的覆盖关系。我们将码的 *defect* 引入为研究该偏序集的新工具，并证明在覆盖映射下，缺陷恰好减少 0 或 1。

Contents

1. 引言 2
2. 预备知识 3
3. 神经理想的典范形式 6
4. 态射作为矩阵 8
5. 态射作为矩阵分解 12
6. 布尔秩 20
7. 讨论与开放问题 22
参考文献 24
附录 A. 主干引理 24
附录 B. 至多三个神经元上的所有同构类 25

(1) Department of Mathematics,
University of Nebraska – Lincoln
(2) Department of Mathematics,
Creighton University
E-mail addresses: jgeraci2@huskers.unl.edu, alexkunin@creighton.edu, aseceleanu@unl.edu.
Date: 2026年3月10日。

1. Introduction

神经环由 Curto、Itskov、Veliz-Cuba 和 Youngs 引入，用以研究组合神经码的内在结构 [5]。组合神经码是二阶有限域上的仿射簇，我们将其记为$\mathbb{F}$，而神经环是该簇的坐标环。“内在结构”由该簇消失理想的一组特定极小生成元所编码。作者的目标是利用这一内在结构，识别哪些组合码可作为某个欧几里得空间中凸集的交集模式出现（参见，例如 [3, 4]）。

为实现这一目标，Jeffs 引入了码之间的一类映射，并将其称为神经码态射，使得凸码的像仍为凸码 [9]。这在码的同构类上诱导出一个分级偏序，记作 $\mathbf{P_{Code}}$，其中凸码构成一个下集。本文介绍了对这一偏序理解方面的一些进展，并将其应用于布尔矩阵分解问题。

布尔矩阵分解以给定的 $m \times n$ 二元矩阵$\mathbf{C}$ 作为输入，并要求寻找一对矩阵 $\mathbf{V}$,$\mathbf{H}$ ，使得 $\mathbf{C} = \mathbf{VH}$，其中加法和乘法均在布尔半环 $\mathbb{B}$上进行（即 $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ 配备了布尔逻辑的 $\vee$ 和 $\wedge$ 运算）。我们观察到，在某些情况下（但并非所有情况下），将从$\mathbf{C}$ 的行到$\mathbf{V}$ 的行的映射读出后，会得到一个编码态射。事实上，这些情况下$\mathbf{V}$ 的形式早在 20 世纪 50 年代 [12, 13] 就已在求解方程$\mathbf{C}$ =$\mathbf{VH}$ 中$\mathbf{V}$的背景下被描述过。反过来，将编码态射的定义域和像写成矩阵形式，有时（但并非总是）会得到一个布尔矩阵分解。

我们旨在刻画那些对应于编码态射的分解。为此，对于给定的 $r \times n$ 矩阵 $\mathbf{H}$，我们找到了两种互补的解释：一方面，$\mathbf{H}$右乘进行布尔乘法会产生一个映射 $\mathbb{B}^r \to \mathbb{B}^n$。另一方面，将 $\mathbf{H}$ 解释为神经环之间的单项式映射，它是编码态射 $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^r$ 的拉回。这些映射在它们构成伽罗瓦连接的意义下互为伴随，而这构成了本文工作的基础。

我们提出四个主要结果。首先，我们证明一个码的交完备化的典范形式是原码的典范形式的一个子集（定理 3.4）。一个码是交完备的，如果任意一对码字的逐坐标乘积也是一个码字。交完备码在组合码的研究中占有特殊地位：它们是最早被知道为凸的一类码 [2],每个交完备码都是单纯复形在编码态射下的像 [9], 并且交完备码的消失理想由单项式和二项式生成 [4]。基于Geller和R.G.的最新结果 [7], ，我们证明，任意码的理想中单项式和二项式生成元的子集生成该码的交完备化的消失理想。

第二和第三，我们证明由矩阵 $\mathbf{H}$定义的一对映射构成一个伽罗瓦连接（定理 4.6），并刻画在$\mathbf{P_{Code}}$ 中该连接为双射的那些覆盖关系（定理 5.19）。这些是其逆可由矩阵乘法表示的态射，从而部分解决了我们的目标。我们所给出的刻画是用自由神经元表述的，这是一种组合性质，可在表示一个码的矩阵规模的线性时间内检验（定理6.3）。

最后，我们引入码的缺陷，这是一种同构不变量，用于衡量码偏离交完备性的程度，并在$\mathbf{P_{Code}}$ 上诱导出一种弱双分次（定理5.24）。此外，码的双射态射（同构除外）会严格降低缺陷。

本文的结构如下：第2 节介绍本文所用的组合神经码相关术语、记号和基本结果；关于组合码主干的若干技术引理则推迟到A节。第3 节简要插入一段内容，证明具有独立意义的定理3.4 。第4 节建立码的态射与矩阵乘法之间的伽罗瓦连接。第5节进一步阐述这一连接的性质；尤其是，在第5.3节中，我们说明$\mathbf{P_{Code}}$ 中的哪些覆盖映射对应于矩阵分解。在第5.4 节中，我们定义缺陷，并证明它在$\mathbf{P_{Code}}$上弱保序。第6 节将我们的结果应用于布尔秩的计算问题。第7 节通过简要讨论我们的结果和若干开放问题作结。

2. Preliminaries

本节将确立本文使用的术语和记号，并回顾组合码的相关结果。

我们将由 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 个$[n]$ 的子集组成的集合称为组合码。我们将码中的元素称为码字，将基集 $[n]$ 中的元素称为神经元，因为我们的研究建立在 Curto 等人 [5] 和 Jeffs [8,9]的工作之上。我们也可以将码视为二元向量的集合$\mathcal{C} \subseteq \{0,1\}^n$，方法是用向量的支撑来编码：对于 $\mathsf{c} = (c_1, \ldots, c_n) \in \{0,1\}^n$，$\mathsf{supp(c)} := \{i \in [n] \mid c_i = 1\}$。注意，$2^{[n]}$ 自带集合包含的偏序 $\subseteq$。我们可以通过设定$0 \leq 1$，再令 $\mathsf{c} \leq \mathsf{d}$ 当且仅当 $c_i \leq d_i$ 对所有 i 都成立，从而对 $\{0,1\}^n$ 排序。在此序下，$\mathsf{c} \leq \mathsf{d}$ 当且仅当 $\mathsf{supp(c)} \subseteq \mathsf{supp(d)}$。

我们通过将每个码字写成矩阵的一行，在码与矩阵之间进行转换。因此，码 $\mathcal{C} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ 由 m 个 $[n]$ 的子集组成，并指定一个 $m \times n$ 矩阵

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] \quad \text{with} \quad c_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in \sigma_i \\ 0 & j \notin \sigma_i. \end{cases}$$

然而，由于给定的矩阵可能包含重复的行，$m \times n$ 矩阵$\mathbf{C}$可能表示一个码字少于 m 的码。

我们采用以下记号约定：将码视为集合系统讨论时，用花体大写字母表示，例如 $\mathcal{C} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subseteq 2^{[n]}$。如这里所示，小写希腊字母表示$[n]$的子集。根据上下文清楚时，讨论含一个或两个元素的集合时，我们会省略集合括号，以减少记号冗杂；也就是说，我们写作 i ，而不写 $\{i\}$ ；或写作 ij ，而不写 $\{i, j\}$ 。

二元矩阵和向量用粗体字母表示，例如 $\mathbf{C} \in \{0,1\}^{m\times n}$。给定一个向量 $\mathbf{c} = (c_1, \ldots\ldots, c_n)$ 和一个指标集 $\sigma \subseteq [n]$，我们将由 σ 索引的元素的乘积记为 $\mathbf{c}^\sigma := \prod_{i\in\sigma} c_i$。对于多项式环中的一组变量，我们也用相同的方式表示单项式，$x^\sigma = \prod_{i\in\sigma} x_i$，此外还使用记号 $(1-x)^\sigma := \prod_{i\in\sigma}(1-x_i)$。

在下文中，我们所写的大部分内容，若将$\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 视为有限集的集合，则能以最简洁的方式呈现；不过，在不会过于繁琐的情况下，我们也会用二元向量来陈述结果和公式。本节其余部分将回顾 [5, 8, 9]中的相关定义和定理。

2.1. 码的坐标环与典范形式。 集合 $\{0,1\}$可以赋予代数结构，使得0成为加法单位元，方法有两种。我们将带有布尔逻辑运算（即 $1 \vee 1 = 1$）的半环 $\{0,1\}$ 记作 $\mathbb{B}$ ，将带有模2算术（即 $1 + 1 = 0$）的域 $\{0,1\}$ 记作 $\mathbb{F}$ 。因此，如果希望为码赋予额外结构，也可以将码视为 $\mathbb{B}^n$或 $\mathbb{F}^n$ 的子集。

特别是，将 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}^n$ 视为仿射簇可能会很有用。令 $R = \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ 表示以 n 个变量构成的多项式环， $\mathcal{C}$ 的消失理想记作 $I_\mathcal{C}$,

$$I_\mathcal{C} = \{f \in R : f(\mathbf{c}) = 0 \text{ for all } \mathbf{c} \in \mathcal{C}\}.$$

理想 $I_\mathcal{C}$ 由伪单项式生成，这些多项式的形式为$x^\sigma(1-x)^\tau$。如果 $\sigma \cap \tau = \varnothing$，我们就称伪单项式为无平方。 $I_\mathcal{C}$的典范形式记作 $CF(I_\mathcal{C})$，是 $I_\mathcal{C}$中按整除关系极小的无平方伪单项式集合。有时我们会宽泛地将 $CF(I_\mathcal{C})$ 称为 $\mathcal{C}$的典范形式。

我们将商环 $R_\mathcal{C} := R/I_\mathcal{C}$ 称为以下对象的神经环 $\mathcal{C}$ [5]。神经环是定义在 $\mathcal{C}$ 上的取值于 $\mathbb{F}$的函数环。这个环配备了一组特殊的函数，即坐标函数 $x_1, \ldots, x_n$，定义如下:

$$x_i(\mathbf{c}) = c_i \quad \text{or, in terms of sets,} \quad x_i(\sigma) = \begin{cases} 1 & i \in \sigma \\ 0 & i \notin \sigma. \end{cases}$$

例 2.1. 令 $\mathcal{C} = \{\varnothing, 12, 23, 34, 123, 234, 1234\}$（为避免符号繁杂，我们书写 $[n]$ 的子集时省略集合括号和逗号；也就是说，

$12 = \{1, 2\}$）。用矩阵形式表示，

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

消失理想 $I_{\mathcal{C}}$ 由以下元素生成

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{C}} = \langle & x_1(1-x_1), x_2(1-x_2), x_3(1-x_3), x_4(1-x_4), \\ & x_4(1-x_3), x_1(1-x_2), \\ & x_2(1-x_1)(1-x_3), x_3(1-x_2)(1-x_4) \rangle \end{aligned}$$

$I_{\mathcal{C}}$ 的典范形式由生成元的最后两行组成。

2.2. 码的态射。 对于一个码 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 及其任意子集 $\tau \subseteq \mathbb{N}$， τ 在 $\mathcal{C}$ 中的主干是由以下条件指定的 $\mathcal{C}$ 的子集

$$\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\tau) = \{\sigma \in \mathcal{C} : \sigma \supseteq \tau\} \quad \text{or, in binary,} \quad \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\tau) = \{\mathbf{c} \in \mathcal{C} : \mathbf{c}^{\tau} = 1\}.$$

注意，我们不要求 $\tau \in \mathcal{C}$，并且允许例如 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}([n+1]) = \varnothing$。码的主干是上述形式的任意子集。特别地，空集是任意码的主干，而码本身也是它自身的主干，因为 $\mathcal{C} = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\varnothing)$。如果对于某个 $i \in [n]$，有 $T = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)$，我们称 T 为简单干。

码的态射 是一个函数 $f : \mathcal{C} \subseteq 2^{[n]} \to \mathcal{D} \subseteq 2^{[r]}$，它满足：主干（在 $\mathcal{D}$中）的原像是主干（在 $\mathcal{C}$中）。任何码的态射都完全由简单干的原像确定；换言之，一个态射可以通过列出 $\mathcal{C}$的主干的有序元组 $(T_1, \ldots, T_r)$ 来指定，其中对于每个 $i \in [r]$， $T_i = f^{-1}(\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(i))$。因此，态射定义为

$$f(\sigma) = \{j \in [r] : \sigma \in T_j\} \tag{1}$$

（参见 [9, 定义 2.10 以及命题 2.11 和 2.12]）。两个码 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$ 称为同构，记作 $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$，如果存在一个码的双射态射 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$且其逆也是一个态射。

如果 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个满射态射，我们称 $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}$。这在所有组合码上定义了一个预序，并在码的同构类上诱导出一个偏序。我们将这个偏序集$\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$记为。

注 2.2. 关于$\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ 的这个定义见于 [10]，，与 [9]中给出的定义略有不同。后一种定义还对 $\mathcal{C}$的任意主干 T 满足 $T \leq \mathcal{C}$ 。正如 [11, 命题 12], 所指出的，我们总有 $T \cup \{\varnothing\} \leq \mathcal{C}$：将 T 中的元素映射到自身，并将 T之外的元素映射到 $\varnothing$ 的映射是一个编码态射。因此，至少从定性角度来看，这些不同的 $\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ 概念刻画了码之间相同的关系。

2.3. **平凡性与冗余。** 我们将需要以下技术概念。

定义 2.3. 设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 为一个码， $i \in [n]$ 为一个神经元。若 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) = \varnothing$，则称 i 为平凡。若存在集合 $\sigma \subseteq [n] \setminus i$ 使得 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma)$，则称 i 冗余于 σ。若存在这样的 σ，则简称 i 为冗余。若 $\mathcal{C}$ 没有平凡神经元或冗余神经元，则称 $\mathcal{C}$ 为约化。

以下两个引理由该定义直接得出。

引理 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 为一个码。以下各项等价：
（1）神经元 i 是平凡的。（2）在表示 $\mathcal{C}$的矩阵中，第 i 列全为 0。（3） $x_i \in I_{\mathcal{C}}$，即 $x_i = 0$ 在 $R_{\mathcal{C}}$ 中。

引理 2.5. 设 $\mathcal{C}$ 为一个码。以下各项等价：
(1) 神经元 i 对 σ是冗余的。(2) 列 i 是由索引为 σ的列逐项相乘得到的。(3) $x_i - x^{\sigma} \in I_{\mathcal{C}}$，即 $R_{\mathcal{C}}$中的 $x_i = x^{\sigma}$ 。

注记 2.6. 如果两个码都是约化的且同构，那么该同构就是神经元的排列 [9, 推论 3.8]。如果一个码不是约化的，那么在置换意义下，它有唯一的约化代表元 [9, 定理 1.4], ，可以通过先删除所有平凡神经元，再逐个删除冗余神经元，直到不再有冗余神经元来得到。鉴于此，我们将这一系列删除操作的复合称为 约化态射，并记作 ρ。

由此注记可得以下结论。

引理 2.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个码，且 $\mathbf{C}$ 是表示它的一个矩阵。则存在一个投影矩阵 $\mathbf{P}$，使得 $\rho(\mathcal{C})$ 由 $\mathbf{CP}$表示。
这个引理的预期读法是从布尔矩阵运算的角度来理解，但我们注意到，这个结论对 $\mathbb{F}$ 也成立。

3. Canonical forms of neural ideals

现在我们稍作插述，陈述两个定理；研究凸码问题 [3, 4]的读者或许会对它们本身感兴趣。在我们的研究中，交完备码和并完备码将发挥重要作用。

3.1. **交完备码与并完备码。** 若一个码 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 满足：任意两个码字 σ， $\tau \in \mathcal{C}$的交集 $\sigma \cap \tau$ 也是一个码字， $\sigma \cap \tau \in \mathcal{C}$则称其为交完备 码。同样，若一个码满足并完备 条件，即$\sigma \cup \tau \in \mathcal{C}$ 对任意两个码字 σ， $\tau \in \mathcal{C}$均成立，则称其为并完备码。

[4] 的作者证明了，交完备码的消失理想的典范形式关于 $(1 - x_i)$s 至多是线性的。我们在下文陈述他们的定理，并给出关于并完备码的对偶陈述，同时提供一个略有不同的证明。

命题 3.1 ([4, 命题 3.7])。 码 $\mathcal{C}$ 是交封闭的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 的典范形式关于 $(1-x_i)$ 项至多是线性的。也就是说，若 $x^\sigma(1-x)^\tau \in CF(I_\mathcal{C})$，则 $|\tau| \leq 1$。

命题 3.2. 码 $\mathcal{C}$ 是并封闭的，当且仅当 $\mathcal{C}$ 的典范形式关于 x_i 项至多是线性的。也就是说，若 $x^\sigma(1-x)^\tau \in CF(I_\mathcal{C})$ 则$|\sigma| \leq 1$。

定理 *3.1* 和*3.2*的证明。 (3.1) 我们将证明，任何伪单项式 $x^\sigma(1-x)^\tau \in I_\mathcal{C}$ 满足 $|\tau| > 1$ 的都不可能属于典范形式。

假设 $p(x) = x^\sigma(1-x)^\tau \in I_\mathcal{C}$，因此对所有 $c \in \mathcal{C}$， $p(c) = 0$。若不存在包含 σ的 $\mathcal{C}$ 的码字，则有 $x^\sigma \in I_\mathcal{C}$，因此除非 $\tau = \varnothing$，否则 $p(x)$ 不可能是极小的。因此，假设 σ 包含在 $\mathcal{C}$的某个码字中，并令 s 为所有包含 σ的码字的交集。由于 $\mathcal{C}$ 是交封闭的， $s \in \mathcal{C}$，因此 $p(s) = 0$。由于对于 $i \in s$， $x_i = 1$，我们必须有 $s \cap \tau \neq \varnothing$。特别地，这表明任何包含 σ的码字都必须对每个 $j \in s \cap \tau$包含 $\sigma \cup j$，因此对每个 $j \in s \cap \tau$， $x^\sigma(1-x_j) \in I_\mathcal{C}$。这说明，若 $|\tau| > 1$，则 $x^\sigma(1-x)^\tau$不是极小的，因此不属于典范形式。

(3.2) 我们将证明，任何满足 $x^\sigma(1-x)^\tau \in I_\mathcal{C}$ 且 $|\sigma| > 1$的伪单项式都不可能属于典范形式。

假设 $q(x) = x^\sigma(1-x)^\tau \in I_\mathcal{C}$，那么对于所有 $c \in \mathcal{C}$， $q(c) = 0$。如果 τ与 σ的任何码字都不相交，那么 $(1-x)^\tau \in I_\mathcal{C}$，因此除非 $\sigma = \varnothing$，否则 $q(x)$ 不可能是极小的。所以，假设 τ 与 $\mathcal{C}$中的某个码字不相交，并令 t 为所有与 τ不相交的码字的并。由于 $\mathcal{C}$ 对并封闭， $t \in \mathcal{C}$，因此 $q(t) = 0$。但由于 t 与 τ不相交，我们需要某个 x_i 因子在 t处取值为 0；换句话说， $\sigma \setminus \tau \neq \varnothing$。因此，任何与 τ不相交的码字都不能包含每个 $j \in \sigma \setminus \tau$对应的 j，所以对于每个 $j \in \sigma \setminus \tau$， $x_j(1-x)^\tau \in I_\mathcal{C}$。但特别地，这表明当 $|\sigma| > 1$ 时，$x^\sigma(1-x)^\tau$ 不是极小的。□

3.2. **计算完备化**。 定理 3.1和3.2可以推广如下：给定一个码 $\mathcal{C}$，删去其中不满足定理 3.1 （分别是定理3.2）条件的生成元，即可得到 $\mathcal{C}$的交完备化（分别是并完备化）的典范形式。

为证明这一点，我们将利用 Geller 和 R. G. 对神经理想典范形式的刻画[7]。对于 p， q 设 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$中的两个无平方伪单项式，定义 分离子为 p， q 令 $\mathsf{sep}(p,q) = \{i : \ x_i(1-x_i) \ | pq\} \subseteq [n]$。

定理 3.3 （重述 [7, 定理 1.1]）。 设 $\Gamma = \{p_1, \ldots, p_m\}$ 是一个无平方伪单项式集合，使得 $p_i \nmid p_j$ 对所有 $i \neq j$均成立。那么，当且仅当对于任意一对 $p \neq q \in \Gamma$，若 $\mathrm{sep}(p,q) = \{i\}$，存在某个 $r \in \Gamma$ 使得 $r \mid (pq/x_i(1-x_i))$时， Γ具有典范形式。

由此得到我们的首批主要结果，用以确定码的交完备化与并完备化的典范形式。

定理 3.4. 设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 为一个码，且 $\Gamma = \{p_1, \ldots, p_t\}$ 为 $I_{\mathcal{C}}$的典范ˆ
ˆ 形式。令 $\Gamma = \{x^{\sigma}(1-x)^{\tau} \in \Gamma : \ |\tau| \leq 1\}$。则 Γ 是 $\mathcal{C}$ 的交完备化的消失理想的典范形式。

证明。 首先，我们将验证定理3.3中的两个条件。由于我们从 Γ 的典范形式出发并移除了一些元素，因此没有任何 p_i彼此整除，所以只需检查关于分隔子的条件。

ˆ 设 $p, q \in \Gamma$ ，且 $\mathsf{sep}(p, q) = \{i\}$。不失一般性， $p = x^{\alpha}(1-x_i)$ 对某个 $\alpha \subseteq [n] \setminus \{i\}$ 成立，并且 $q = x^{\sigma \cup i}(1-x)^{\tau}$满足 $\sigma, \tau \subseteq [n] \setminus i$ 且$|\tau| \leq 1$。根据定理 3.3，必定存在某个 $r \in \Gamma$ 使得

$$r \mid \frac{pq}{x_i(1-x_i)} = x^{\alpha \cup \sigma}(1-x)^{\tau}.$$

ˆ ˆ 这样的 r 也会属于 Γ。因此，根据定理 3.3， Γ 具有典范形式。

现在，令 $\hat{\mathcal{C}} \subseteq \mathbb{F}^n$ 表示由.....生成的理想的零点集 $\hat{\Gamma}$，以及 ˆ
Iˆ ˆ 如下对象的消失理想： $\mathcal{C}$。根据理想-簇对应，由于 $I \subseteq I_{\mathcal{C}}$ˆ ˆ 我们有 $\mathcal{C} \supseteq \mathcal{C}$，并且由定理 3.1， $\mathcal{C}$ 是交完备的，因而包含如下对象的交完备化： $\mathcal{C}$。

ˆ 现在考虑 $\sigma \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}$。首先，我们断言 σ 必定包含于 $\mathcal{C}$ 的至少一个码字中：若不然，则 $x^{\sigma} \in I_{\mathcal{C}}$，因此 $I_{\mathcal{C}}$ 的ˆ 典范形式中的某个单项式整除 x^{σ}。该单项式将属于 Γ，因而ˆ ˆ 属于 I，故 $\sigma \notin \mathcal{C}$。因此 σ 包含于 $\mathcal{C}$ 的至少一个码字中。

设 Σ 为所有码字的交集，这些码字位于 $\mathcal{C}$ 中且包含 σ。若 $\sigma \subsetneq \Sigma$，则用于证明定理 3.1 的论证表明，对每个 $i \in \Sigma \setminus \sigma$，ˆ 我们必有 $x^{\sigma}(1-x_i) \in I_{\mathcal{C}}$。然而，这些项中的每一项也都属于 I，并且ˆ ˆ 因此 $\sigma \notin \mathcal{C}$。因此，我们必有 $\sigma = \Sigma$ ，从而 $\mathcal{C}$ˆ 中的每一个字都是诸字的交集，诸字属于 $\mathcal{C}$；也就是说， $\mathcal{C}$ 是如下对象的交完备化：$\mathcal{C}$。□

这一论证稍作调整后也可用于证明并补全同样适用这一结果：

定理 3.5。 设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 为一个码， $\Gamma = \{p_1, \ldots, p_t\}$ 为 $I_{\mathcal{C}}$的典范形式。令 $\Gamma' = \{x^{\sigma}(1-x)^{\tau} \in \Gamma : \ |\sigma| \leq 1\}$。则 Γ' 是 $\mathcal{C}$的并完备化的消失理想的典范形式。

4. Morphisms as matrices

我们工作的核心观察是，码的态射和单项式映射可以用二元矩阵指定，而单项式映射的复合由这些矩阵的布尔 乘积给出。

4.1. 态射的代表元。 如果 $T \subseteq \mathcal{C}$ 是一个主干，那么可能存在多个 $\tau \subseteq [n]$ 使得 $T = \mathsf{Tk}_{\mathcal{C}}(\tau)$。如果 $T = \mathsf{Tk}_{\mathcal{C}}(\tau)$，我们称 τ生成 主干 T。主干的生成元 是集合

$$\mathrm{gens}(T) = \{\tau \subseteq [n] : T = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\tau)\}.$$

我们约定，如果 T 是空的，那么 gens(T) $=\{\}$ 就是空集。

引理 4.1. 对于任意非空主干 $T \subseteq \mathcal{C}$，生成元集(T) 有一个唯一的极大元素，即 $\tau = \bigcap_{\alpha\in T} \alpha$。

证明。显然，$T \subseteq$Tk$_{\mathcal{C}}(\tau)$，因为 T 中的每个字都包含 τ。若 $\tau' \in$gens(T)，则它是 T 中每个码字的子集，因此也是它们交集的子集，即 $\tau' \subseteq \tau$。因此，必有 $\tau \in$gens(T)，且 τ 是 gens(T) 中的极大元素。□

鉴于上述内容，我们引入以下术语和记号：

定义 4.2. 设 $S \subseteq 2^{[n]}$ 非空。则 S 的根是 S中所有元素的交集，即 $\sqrt{S} = \bigcap_{\sigma\in S} \sigma \subseteq [n]$。给定一个码$\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 和 $\sigma \subseteq [n]$，我们将 σ 相对于 $\mathcal{C}$ 的根定义为 $\sqrt[\mathcal{C}]{\sigma} = \sqrt{\text{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma)}$。

对于主干 $T \subseteq \mathcal{C}$，若 $\sqrt{T} \in \mathcal{C}$，则称 T 为有根的；若 $\sqrt{T} \notin \mathcal{C}$，则称其为自由的。对于$i \in [n]$，若 $\sqrt[\mathcal{C}]{i} \in \mathcal{C}$，则称 i 为有根的；若 $\sqrt[\mathcal{C}]{i} \notin \mathcal{C}$，则称其为自由的。

定义 4.3。设 $f\colon \mathcal{C} \subseteq 2^{[n]} \to \mathcal{D} \subseteq 2^{[r]}$ 是一个编码态射，且对每个 $i \in [r]$，f^{-1}(Tk$_{\mathcal{D}}(i)$) 都非空。f 的代表元是一个有序元组 $(\tau_1, \ldots, \tau_r)$，其各项均为 $[n]$ 的子集，并且对每个 $i \in [r]$，$\tau_i \in$gens(f^{-1}(Tk$_{\mathcal{D}}(i)$))。或者，支撑为 τ_i 的第 i 行的 $r \times n$ 矩阵表示 f:

$$\mathbf{T} = [t_{ij}], \quad t_{ij} = \begin{cases} 1 & j \in \tau_i \\ 0 & j \notin \tau_i \end{cases} \tag{2}$$

要求 f^{-1}(Tk$_{\mathcal{D}}(i)$) 非空是必要的，因为按照我们的约定，当 T 为空时，gens(T) $= \varnothing$。

若（τ_1，……，τ_r）是态射 f 的一个代表元，则公式（1）可写为

$$f(\sigma) = \{j \in [r] : \tau_j \subseteq \sigma\}. \tag{3}$$

对于二元向量 $\mathbf{c} =$（c_1，……，c_n）$\in \{0,1\}^n$，我们可以将（3）改写为

$$f(\mathbf{c}) = \Big(\prod_{i\in\tau_1} c_i, \ldots, \prod_{i\in\tau_r} c_i\Big) = \Big(\mathbf{c}^{\tau_1}, \ldots, \mathbf{c}^{\tau_r}\Big). \tag{4}$$

给定由 $t =$（τ_1，……，τ_r）组成的子集元组 $[n]$，我们用 f_t 表示由（3）或（4）指定的映射，并称其为由 表示的态射 t。

4.2. **拉回同态**。将编码态射 f 写成（4）的形式，可以清楚地看出拉回同态 $f^*\colon R_{\mathcal{D}} \to R_{\mathcal{C}}$通过 $x_i \mapsto x^{\tau_i}$作用于坐标函数。这种环同态中，每个变量的像都是单项式，称为单项式映射。Jeffs 证明，以组合码为对象、以码的态射为态射的范畴，等价于带有单项式映射的神经环范畴 [9]。

因此，矩阵 $\mathbf{T}$ 如（2）所示，确定一个等价于单项式映射的编码态射。反之，给定单项式映射 ϕ，将 ϕ（x_i）的指数向量读作矩阵的第 i行，便得到 ϕ的一个代表元。我们将该矩阵记为 $[\phi]$；也就是说，$[\phi]_{ij} = 1$，若 $x_j \mid \phi(x_i)$ 成立，否则为 0。若 $\phi: R_{\mathcal{C}} \to R_{\mathcal{D}}$ 与 $\psi: R_{\mathcal{D}} \to R_{\mathcal{E}}$ 均为单项式映射，直接计算表明 $[\phi \circ \psi] = [\psi][\phi]$。由于 $x_i^2 = x_i$ 对所有 i 在各自的神经环中成立，矩阵乘积实际上是在 $\mathbb{B}$上进行的。

一般而言，表示单项式映射的矩阵不一定唯一，以下例子说明了这一点。

例4.4。 考虑 $\mathcal{C}$ 来自定理2.1，并设 $\mathcal{V}$ 为码

$$\mathcal{V} = \{\varnothing, 1, 2, 3, 12, 23, 123\}.$$

以下矩阵表示同一个环同态 $R_{\mathcal{V}} \to R_{\mathcal{C}}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

差异在第一行中以粗体标出。要看出它们指定的是同一个映射，只需注意 $x_1 = x_1x_2$ 属于 $R_{\mathcal{C}}$，因为 $x_1(1 - x_2)$ 是 $I_{\mathcal{C}}$ 的一个生成元。

这个例子只是以下事实的一种体现：二者

$$(12,\ 23,\ 34) \quad \text{and} \quad (1,\ 23,\ 34)$$

是同一个编码态射 $\mathcal{C} \to \mathcal{V}$ 的代表元。

4.3. 伽罗瓦连接。 两个偏序集 A, B 之间的伽罗瓦连接是一对函数 $F: A \to B$, $G: B \to A$，满足

$$F(a) \leq b \quad \Longleftrightarrow \quad a \leq G(b).$$

在这种情况下，F 称为下伴随，而 G 称为上伴随。

由矩阵 $\mathbf{H}$ 定义的两个映射构成一个伽罗瓦连接（下文定理 4.6将证明这一点）。接下来，H_a 表示 $a\mathbf{H}$ 的第**行**，η_a =supp(H_a)。

定义 4.5。 设 $\mathbf{H}$ 是一个 $r \times n$ 二元矩阵。则我们定义以下一对从 $2^{[r]}$ 到 $2^{[n]}$ 的映射:

$$F_{\mathbf{H}} : 2^{[r]} \to 2^{[n]} \quad \text{and} \quad G_{\mathbf{H}} : 2^{[n]} \to 2^{[r]}$$

- $F_{\mathbf{H}}$ 是布尔矩阵乘法:

$$\begin{array}{ll} 2^{[r]} \to 2^{[n]} & \{0,1\}^r \mapsto \{0,1\}^n \\ \xi \mapsto \bigcup_{j \in \xi} \eta_j & \mathbf{x} \mapsto \mathbf{xH} \end{array} \tag{5}$$

$$(F_{\mathbf{H}}(x))_i = \bigvee_{j=1}^{n} x_j \wedge h_{ji} \tag{6}$$

- $G_{\mathbf{H}}$ 是由 $(\eta_1, \dots, \eta_r)$ 表示的编码态射

$$\begin{aligned} 2^{[n]} &\to 2^{[r]} & \{0,1\}^n &\to \{0,1\}^r \\ \xi &\mapsto \{j : \eta_j \subseteq \xi\} & (x_1, \dots, x_n) &\to (x^{H_1}, \dots, x^{H_r}). \end{aligned} \tag{7}$$

请注意， $F_{\mathbf{H}}$ 通常并不是编码态射。

引理 4.6. 上文定义的映射 $F_{\mathbf{H}}$ 和 $G_{\mathbf{H}}$ 分别是 $2^{[n]}$ 与 $2^{[r]}$ 之间伽罗瓦连接中的下伴随和上伴随。

证明。 令 $\alpha \subseteq [r], \sigma \subseteq [n]$。假设 $F_{\mathbf{H}}(\alpha) \subseteq \sigma$。这意味着 $\bigcup_{j\in\alpha} \eta_j \subseteq \sigma$。因此 $\alpha \subseteq \{k : \eta_k \subseteq \sigma\} = G_{\mathbf{H}}(\sigma)$

反过来，假设 $\alpha \subseteq G_{\mathbf{H}}(\sigma)$。这意味着 $\alpha \subseteq \{k : \eta_k \subseteq \sigma\}$。于是可得

$$F_{\mathbf{H}}(\alpha) = \bigcup_{j\in\alpha} \eta_j \subseteq \bigcup_{\{k:\eta_k\subseteq\sigma\}} \eta_k \subseteq \sigma.$$

由此我们证明了 $F_{\mathbf{H}}(\alpha) \subseteq \sigma$ 当且仅当 $\alpha \subseteq G_{\mathbf{H}}(\sigma)$。 □

码的态射与布尔矩阵乘法之间的关系表明，应当存在一种用布尔代数来表示编码态射的方式。事实上，令 $\neg$ 表示补算子（例如$(\neg\mathbf{H})_{ij} = 1 - \mathbf{H}ij$），我们有如下公式。

引理 4.7. 设$\mathbf{H}$ 为布尔矩阵，且 $G_{\mathbf{H}}$ 如上定义。则对$\mathbf{x} \in \mathbb{B}^n$， $G_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \neg((\neg \mathbf{x})\mathbf{H}^\top)$

证明。 注意 $x_j^{h_{ij}}$ 等价于 $\neg h_{ij} \vee x_j$，由此可得

$$G_{\mathbf{H}}(\mathbf{x})_i = \prod_{j=1}^{n} x_j^{h_{ij}} = \bigwedge_{j=1}^{n} (x_j \vee \neg h_{ij}) = \neg \left(\bigvee_{j=1}^{n} (\neg x_j \wedge h_{ij}) \right)$$ □

由此我们得出， $F_{\mathbf{H}}$ 的像是并完备的，而 $G_{\mathbf{H}}$ 的像是交完备的。

引理 4.8. 设$\mathbf{H}$ 为二元矩阵，且 $F_{\mathbf{H}}$、 $G_{\mathbf{H}}$ 如上定义。

（1） $F_{\mathbf{H}}$ 的像是$\mathbf{H}$的并完备化。（2） $G_{\mathbf{H}}$ 的像是 $\neg\mathbf{H}^\top$的交完备化。

证明。 条目 1 由（5）立即得出。

条目 2 由定理 4.7得出。令 $\mathbf{x}$ 遍历所有 $\mathbb{B}^n$，可见 $G_{\mathbf{H}}$ 的像是 $\mathbf{H}^\top$ 的并补全的补集，也就是 $\mathbf{H}^\top$ 的补集的交完备化。 □

注 4.9. Luce 证明，满足 $\mathsf{VH} \leq \mathsf{C}$（其中比较 $\leq$ 逐项进行）的极大 V 为 $\neg((\neg\mathsf{C})\mathsf{H}^\top)$ [12, 定理 5.2]。因此，布尔矩阵代数是（右）剩余化的：总存在满足 $\mathsf{XA} \leq \mathsf{B}$ 的极大 X。这个矩阵记作 $\mathsf{B} : \mathsf{A}$。因此，从这里开始，我们将写作 $F_{\mathbf{H}}(\mathsf{x}) = \mathsf{xH}$ 和 $G_{\mathbf{H}}(\mathsf{x}) = \mathsf{x} : \mathsf{H}$。

5. Morphisms as matrix factorizations

我们已经证明，码的态射与布尔矩阵乘法构成一个伽罗瓦连接。利用这一连接，我们现在将对其伴随是自身逆的那些态射给出部分刻画。随后，我们将证明这会在偏序集 $\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ 上诱导出一种弱双分次。下一节中，我们将把这些结果应用于布尔矩阵分解问题。

5.1. **给出态射的分解**。 给定一个固定矩阵 $\mathbf{H} \in \mathbb{B}^{r\times n}$，现在我们来确定哪些与 $\mathbf{H}$ 相乘得到的矩阵乘积会产生码的态射。下面的命题可由伽罗瓦连接的基本性质推出 [1, 引理6.3.1],不过我们在此给出直接证明。

命题 5.1. 对于$\mathbf{H}$ 为二元矩阵， $F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{H}}(G_{\mathbf{H}}(F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x})))$，也就是说，$\mathbf{xH} = ((\mathbf{xH}) : \mathbf{H})\mathbf{H}$。

证明。从平凡的陈述 $F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) \leq F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x})$ 出发并应用定理 4.6，我们有 $\mathbf{x} \leq G_{\mathbf{H}}(F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}))$。根据定义，显然 $F_{\mathbf{H}}$ 是保序的，因此 $F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) \leq F_{\mathbf{H}}(G_{\mathbf{H}}(F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x})))$。另一方面，从 $G_{\mathbf{H}}(\mathbf{y}) \leq G_{\mathbf{H}}(\mathbf{y})$ 出发可得 $F_{\mathbf{H}}(G_{\mathbf{H}}(\mathbf{y})) \leq \mathbf{y}$。将 $F_{\mathbf{H}} \circ G_{\mathbf{H}}$ 应用于 $F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x})$，可得 $F_{\mathbf{H}}(G_{\mathbf{H}}(F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}))) \leq F_{\mathbf{H}}(\mathbf{x})$，由此等式成立。□

推论 5.2。 设$\mathbf{H}$ 是一个 $r \times n$ 二元矩阵，并且 $F_{\mathbf{H}}$ 和 $G_{\mathbf{H}}$ 如上所述。设$\mathbf{C}$ 是表示 $F_{\mathbf{H}}$的像的矩阵，并设$\mathbf{V}$ 由$\mathbf{C}$的每一行应用 $G_{\mathbf{H}}$ 得到。那么，作为布尔积，$\mathbf{C} = \mathbf{VH}$ 。

注意这里的运算顺序：给定$\mathbf{H}$，我们计算 $F_{\mathbf{H}}$的像。将其写成矩阵，并对每一行应用 $G_{\mathbf{H}}$ ，得到该像的布尔矩阵分解。然而，不能 根据任意矩阵中各行之间的映射关系，断定$\mathbf{C} = \mathbf{V}'\mathbf{H}$会产生编码态射，下面的例子将对此加以说明。

例 5.3. 继续定理4.4，以下是 $\mathbf{C}$ 的不同因子分解:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\1&\mathbf{1}&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&0\\0&1&1\\1&\mathbf{0}&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{V}'} \underbrace{\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}}_{\mathbf{H}}$$

底行中加粗的元素突显了这一差异。映射$\mathbf{C} \to \mathbf{V}$ 是一个编码态射（事实上，它是定理 4.4中描述的态射），而映射 $\mathbf{C} \to \mathbf{V}'$ 则不是。

推论 5.4. 假设 $\mathbf{C} = \mathbf{VH}$ 是矩阵的布尔积。如果$\mathbf{V} = (\mathbf{VH})$: $\mathbf{H}$，那么将 $\mathbf{C}$ 的行映射到$\mathbf{V}$ 的行的映射是一个编码态射。

证明。根据假设，$\mathbf{C} = \mathbf{VH}$ 且映射 $\mathbf{C} \to \mathbf{C} : \mathbf{H} = (\mathbf{VH}) : \mathbf{H}$ 是一个编码态射。事实上，当方程 $\mathbf{V} = (\mathbf{VH})$: $\mathbf{H}$ 成立时，这就是式（ $G_{\mathbf{H}}$ （7）中的态射。□

我们称具有此性质的矩阵 $\mathbf{V}$ 为 $\mathbf{H}$-极大。继续讨论定理 4.9，注意到 $\mathbf{H}$-极大矩阵也出现在 [13, 引理 1。1], 其中 Plemmons 证明，对于固定的 $\mathbf{C}$、$\mathbf{H}$，方程 $\mathbf{C} = \mathbf{VH}$ 有解，当且仅当 $\mathbf{V} = \mathbf{C}$: $\mathbf{H}$ 是一个解。

5.2. **态射的伴随**。为了将我们的结果推广到任意态射，我们需要一种方法，将编码态射的定义域和陪域扩展到整个布尔格。对于任意态射 $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ with$\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ and $\mathcal{D} \subseteq 2^{[m]}$，我们称 $\tilde{g} : 2^{[n]} \to 2^{[m]}$ 是 g 的一个 提升，如果 $\tilde{g}|_{\mathcal{C}} = g$。

引理 5.5. 设 $g : \mathcal{C} \subseteq 2^{[n]} \to \mathcal{D} \subseteq 2^{[r]}$ 是一个编码态射，且其像 g 不含任何平凡神经元。那么， g 的代表元与 g 的提升构成双射。

证明。给定 g 的一个代表元 $t = (\tau_1, \dots, \tau_r)$，令 $g_t : 2^{[n]} \to 2^{[r]}$ 定义如下:

$$g_t(\sigma) = \{j \in [r] : \tau_j \subseteq \sigma\}$$

(参见公式 (3))。根据定义， $g_t|_{\mathcal{C}} = g$，因此 g 的每个代表元都会给出 g 的一个提升。

假设 $t' = (\tau'_1, \dots, \tau'_r)$ 与 t 在位置 j 处不同，因此 $\tau_j \neq \tau'_j$。那么，不失一般性， $\tau_j \not\subseteq \tau'_j$，所以 $g_t(\tau_j) \neq g_{t'}(\tau_j)$，因此从代表元到提升的映射是一对一的。

最后，设 $\tilde{g}$ 是 g 的一个提升。若 $\tilde{t} = (\tilde{\tau}_1, \dots\dots, \tilde{\tau}_2)$ 是 $\tilde{g}$ 的一个代表元，则根据定义， $\tilde{t}$ 是 g 的一个代表元。因此，从代表元到提升的映射是满射的，证明完毕。□

定义 5.6。设 $f : \mathcal{C} \subseteq 2^{[n]} \to \mathcal{D} \subseteq 2^{[k]}$ 是由主干 $T_1, \dots\dots, T_k \subseteq \mathcal{C}$ 定义的编码态射。对每个 $i \in [k]$，令 $\tau_i = \sqrt{T_i}$。我们将 f 的典范代表 定义为 $(\tau_1, \dots\dots, \tau_k)$，并将 f 的典范提升 定义为态射 $f_t : 2^{[n]} \to 2^{[m]}$。

注 5.7。注意，典范提升是对 [11, 引理 13], 中所述映射的扩展；该引理表明，对于任意态射 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ˆ^ ^ ˆ，都存在唯一映射 $f :$ $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得 $f|_{\mathcal{C}} = f$。其底层构造完全相同，我们只是通过态射的代表元来表述，而不直接讨论主干。

定义 5.8. 设 $f : \mathcal{C} \subseteq 2^{[n]} \to \mathcal{D} \subseteq 2^{[k]}$ 是一个满射编码态射。 f 的典范伴随是映射 $f^{\top} : \mathcal{D} \to 2^{[n]}$，定义如下:

$$f^{\top}(d) = \bigcup_{j \in d} \sqrt{f^{-1}(\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(j))} \tag{8}$$

注意，集合 $\sqrt{f^{-1}(\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(j))}$ 正是出现在 f 的典范代表元中的集合。若将 $f^{\top} \circ f$ 限制在其像上后，它是 $\mathcal{C}$ 上的恒等映射，我们就称 f 是一个布尔矩阵分解（*BMF*）。此时，我们称 $\mathcal{D}$ 是 的一个因子。

引理 5.9. 映射 $f^{\top}$ 是 f 的典范提升的伽罗瓦伴随，限制于 $\mathcal{D}$。

证明。 f 的典范提升由以下表示

$$t = (\sqrt{f^{-1}(\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(1))}, \ldots, \sqrt{f^{-1}(\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(k))}).$$

由定理 4.5 （见（5）），f_t 的伴随定义为将 $d \subseteq [r]$映到由 d索引的代表元集合的并，这恰好是（8）中的表达式。□

注意，定理 5.2 和 5.9 证明了将满足 $f^{\top} \circ f = id_{\mathbf{C}}$ 的态射 $f\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ 称为布尔矩阵分解是合理的：给定这样的态射 f，表示 f 的典范提升的矩阵 H 恰好是使得 $\mathrm{C} = G_{\mathbf{H}}(\mathrm{C})\mathrm{H} = (\mathrm{C} : \mathrm{H})\mathrm{H}$ 成立的矩阵。鉴于定理 5.4，给定分解 $\mathrm{C} = \mathrm{VH}$，我们有 $\mathrm{C} = (\mathrm{VH} : \mathrm{H})\mathrm{H}$。因此，我们可以互换使用这些分解概念。

成为 BMF 这一性质在某种意义上是偏序的内在属性 $\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$。也就是说，如果 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 BMF，那么存在一个映射 $f'\colon \rho(\mathcal{C}) \to \rho(\mathcal{D})$，它也同样是一个 BMF（回顾定理 2.6 ρ，它是约化态射）。我们将分两步证明这一点：首先证明可以在保持 BMF 的同时约化$\mathcal{C}$，然后再约化 $\mathcal{D}$。

引理 5.10。 设 $f\colon \mathcal{C} \subseteq 2^{[n]} \to \mathcal{D} \subseteq 2^{[k]}$ 是一个 *BMF*。那么存在一个 *BMF*$\rho(\mathcal{C}) \to \mathcal{D}$。

证明。 不失一般性，设在 $\mathcal{C}$中，n 对于 σ 是冗余的。令$t = (\tau_1, \ldots\ldots, \tau_k)$ 为 f的典范代表，并设 $t' = (\tau_1 \cap [n-1], \ldots\ldots, \tau_k \cap [n-1])$。

首先，我们断言 $f_t(c) = f_{t'}(c \cap [n-1])$，这要求 $\tau_j \subseteq c$ 当且仅当 $\tau_j \cap [n-1] \subseteq c \cap [n-1]$。我们证明逆向。若 $n \notin \tau_j$，则

$$\tau_j = \tau_j \cap [n-1] \subseteq c \cap [n-1] \subseteq c$$

可得 $\tau_j \subseteq c$。现在假设 $n \in \tau_j$。根据假设，n 对于某个 $\sigma \subseteq [n-1]$是冗余的，因此必有 $\sigma \subseteq \tau_j$。但这样我们也有$\sigma \subseteq \tau_j \cap [n-1] \subseteq c \cap [n-1]$，这意味着 $n \in c$。于是

$$\tau_j = \tau_j \cap [n-1] \cup n \subseteq c \cap [n-1] \cup n = c$$

得到 $\tau_j \subseteq c$，正如所需，从而完成该断言的证明。

直接计算可得

$$\begin{aligned} f_{t'}^{\top}(f_{t'}(c\cap[n-1])) &= f_{t'}^{\top}(f_t(c)) \\ &= \bigcup_{j\in f_t(c)} \tau_j \cap [n-1] \\ &= \left(\bigcup_{j\in f_t(c)} \tau_j\right) \cap [n-1] \\ &= f_t^{\top}(f_t(c)) \cap [n-1] = c\cap[n-1]. \end{aligned}$$

因此， $f_{t'}$ 是从删除了神经元 n 的 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$的一个 BMF。若有必要，通过置换 $\mathcal{C}$ 中的神经元，并对 $\mathcal{C}$中冗余神经元的数量进行归纳，即可得出该定理的结论。□

引理 5.11. 设 $f:\ \mathcal{C}\subseteq 2^{[n]}\to\mathcal{D}\subseteq 2^{[k]}$ 是一个满射编码态射，且 k 在 $\mathcal{D}$中是冗余的。对于 f的任意一个代表元 $t=(\tau_1,\dots,\tau_k)$，元组 $t'=(\tau_1,\dots,\tau_{k-1})$ 代表了 f与在 $\mathcal{D}$中删除神经元 k 的复合。特别地， $f_{t'}$ 的像与 f的像同构。

证明。注意， $f(\sigma)=f_t(\sigma)=\{j\in[k]:\ \tau_j\subseteq\sigma\}$，因此$f_{t'}(\sigma)=f_t(\sigma)\setminus k$。由于 k 在 $\mathcal{D}$中是冗余的，删除 k 是一个同构。□

定理 5.12. 假设 $f:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是一个 *BMF*，且 $\mathcal{C}\subseteq 2^{[n]}$, $\mathcal{D}\subseteq 2^{[k]}$。若 $\mathcal{C}$ 是约化的，则存在一个 *BMF* $\mathcal{C}\to\rho(\mathcal{D})$。

证明。我们将证明，若在 $\mathcal{D}$ 中 k 对 $\sigma\subseteq[k-1]$ 是冗余的，那么将 f 与神经元 k 的删除复合后仍是一个 BMF。

对每个 $i\in[k]$，令 $T_i=f^{-1}(\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(i))$，并令 $t=(\sqrt{T_1},\dots,\overline{\sqrt{T_k}})$ 为 $\overline{f}$ 的一个代表元。我们的目标是证明，由$t'=(\sqrt{T_1},\dots,\sqrt{T_{k-1}})$ 表示的映射也是一个布尔矩阵分解。由于 k 在 $\mathcal{D}$ 中是冗余的，根据定理 5.11，我们知道 $f_{t'}$ 的像恰好是删除了 k 的$\mathcal{D}$，因此只需证明对于所有$c\in\mathcal{C}$， $f_{t'}^{\top}(f_{t'}(c))=c$。

首先，我们断言 $f_{t'}^{\top}(f_{t'}(c))=f^{\top}(f(c)\setminus k)$。由 $f_{t'}$ 的定义可得 $f_{t'}(c)=f(c)\setminus k$。写作 $f_{t'}^{\top}(d)=\bigcup_{j\in d}\sqrt{T_j}$，我们看到当 $k\notin d$ 时，这与 $\overline{f^{\top}(d)}$ 一致。

考虑某个 $c\in\mathcal{C}$，并令 $d=f(c)$。若 $c\notin T_k$，则 $k\notin d$，因此由上文可得 $f_{t'}(c)=f(c)$，且 $f_{t'}^{\top}(f_{t'}(c))=c$。

现在考虑情形 $c\in T_k$，于是 $k\in d$。由于 k 对 σ 是冗余的，$d\in\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(\sigma)$，因此我们可以将 d 写成不相交并 $d=d'\cup\sigma\cup k$。接下来

$$f^{\top}(d)=\bigcup_{j\in d'}\sqrt{T_j}\cup\bigcup_{j\in\sigma}\sqrt{T_j}\cup\sqrt{T_k} \qquad (*)$$

我们将证明，在这个并集中，$\sqrt{T_k}$ 是多余的。

由于 k 对 σ 是冗余的，我们有 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(k)=\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(\sigma)=\bigcap_{j\in\sigma}\mathrm{Tk}_{\mathcal{D}}(j)$。对两边应用 f^{-1}，得到 $T_k=\bigcap_{j\in\sigma}T_j$，因此取根

对两边并应用定理 A.1，

$$\sqrt{T_k} = \sqrt{\bigcap_{j\in\sigma} T_j} \supseteq \bigcup_{j\in\sigma} \sqrt{T_j}.$$

如果$\sqrt{T_k} = \bigcup_{j\in\sigma} \sqrt{T_j}$，则显然 $\sqrt{T_k}$在（*）中是不必要的。

另一方面，假设存在某个 $\ell \in \sqrt{T_k} \setminus \bigcup_{j\in\sigma} \sqrt{T_j}$。如果$\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\ell) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sqrt{T_k}) = T_k$ 则 ℓ 对$\bigcup_{j\in\sigma} \sqrt{T_j}$ 是冗余的，因为

$$\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}\Big(\bigcup_{j\in\sigma} \sqrt{T_j}\Big) = \bigcap_{j\in\sigma} \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sqrt{T_j}) = \bigcap_{j\in\sigma} T_j = T_k = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\ell).$$

由于 $\mathcal{C}$ 是约化的，因此我们必有$\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\ell) \supsetneq T_k$。考虑 $\alpha \in \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\ell) \setminus T_k$。由于 $\ell \in \alpha$、$k \notin f(\alpha)$以及$f^{\top}(f(\alpha)) = \alpha$，我们从(*)看出必存在某个 $j \in d'$ 使得$\ell \in \sqrt{T_j}$。我们再次得出结论：$\sqrt{T_k}$ 在(*)中是不必要的。

因此，$f_{t'}$ 是一个 BMF。引理的陈述可通过在必要时置换 $\mathcal{D}$ 中的神经元，并对 $\mathcal{D}$中冗余神经元的数量进行归纳得出。□

5.3. 覆盖映射的伴随。 如果 $\mathcal{C} \geq \mathcal{D}$，但二者不同构，则称码 $\mathcal{C}$ 覆盖 码 $\mathcal{D}$；对于任意满足 $\mathcal{C} \geq \mathcal{E} \geq \mathcal{D}$的 $\mathcal{E}$，我们有$\mathcal{C} \cong \mathcal{E}$ 或$\mathcal{E} \cong \mathcal{D}$。现在我们将说明如何确定码 $\mathcal{C}$的哪些因子被它覆盖。

下面的构造见 [8, 定义 3。19]；我们显式地为主干编上索引，以简化后续推导。

定义 5.13。 设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$和 $i \in [n]$。对于 $j = 1, \ldots, 2n$，定义以下主干：

$$T_j = \begin{cases} \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) & j \leq n \text{ and } \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \\ \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j-n) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) & j > n \text{ and } \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j-n) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \\ \varnothing & \text{o.w.} \end{cases}$$

令 f_i 为由这些主干定义的态射，并令 $\mathcal{C}^{(i)}$ 为 f_i的像。这是 $\mathcal{C}$ 的第 i个覆盖映射，而 是其第 个被覆盖码。

当 $\mathcal{C}$ 约化时，f_i 的显式公式为

$$f_i(c) = (c \setminus i) \cup \Big\{ j + n : ij \subseteq c, \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \Big\} \tag{9}$$

命题 5.14 ([8, 定理 3.20])**.** 若 $\mathcal{C}$ 约化，则对任意 i，$\mathcal{C}$覆盖 $f_i(\mathcal{C})$。

备注 5.15. 上述定义会导致像中至少出现两个平凡神经元，因为 T_i 和 T_{n+i} 都是空的。不过，上述公式简化了后续讨论。根据定理 5.12，如果 $\mathcal{C}$ 是约化的，那么为 $\mathcal{C}^{(i)}$ 选择哪个代表元并不重要——如果任一代表元是 $\mathcal{C}$ 的因子，那么 $\rho(\mathcal{C}^{(i)})$ 也是。

引理 5.16. 令 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$，并假设 $i \in [n]$ 不是冗余的。令 f_i 为 $\mathcal{C}$的第 i 个覆盖映射。则 $\overset{\mathcal{C}}{\vee} i \notin$ 像 $f_i^{\top} \circ f_i$。

证明。 由（9），我们有

$$f_i^{\top}(f_i(c)) = (c \setminus i) \cup \bigcup_{\substack{ij \subseteq c \\ \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(ij) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)}} \overset{\mathcal{C}}{\vee} ij. \tag{10}$$

假设 $f_i^{\top}(f_i(c)) \subseteq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$。根据定理 A.2，我们知道，任何满足（ j 10）中大并集条件的 $\overset{\mathcal{C}}{\vee} ij \supsetneq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$都必须有，因此

$$\left\{ij \subseteq c : \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)\right\} = \varnothing.$$

如果这个集合非空，那么某个 $j \in \mathcal{C}$ 会对（ $\overset{\mathcal{C}}{\vee}\{i, j\}$ 10）中的并集贡献 $f_i^{\top}$ $(f_i(c)) \supseteq \overset{\mathcal{C}}{\vee} ij \supsetneq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$。但这样一来， $f_i^{\top}(f_i(c)) \subseteq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$, 这与假设 $f_i^{\top}(f(c))$ $= c \setminus i \subsetneq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$矛盾。因此，该集合必为空，这意味着 $\overset{\mathcal{C}}{\vee} i \notin \mathrm{im}\ f_i^{\top} \circ f_i$。 □

因此，我们得到了被覆盖码成为因子的一个必要条件：

推论 5.17. 设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 及其 i 次覆盖映射 f_i。若 f_i 是 *BMF*，则 $\overset{\mathcal{C}}{\vee} i \notin \mathcal{C}$（也就是说， i 是自由的）。

证明。 假设 f_i 是 BMF，也就是说， $f_i^{\top} \circ f_i = id_{\mathcal{C}}$。根据定理 5.16，$\overset{\mathcal{C}}{\vee} i \notin \mathrm{im}\ f_i^{\top} \circ f_i = \mathcal{C}$。 □

注意，等式（10）表明覆盖映射“近乎”单射：

引理 5.18. 设 $\mathcal{C}$ 是约化码， f_i 是其 i 次覆盖映射。那么有以下结论：

(1) （挤压引理）对任意 $\sigma \in \mathcal{C}$，有 $\sigma \setminus i \subseteq f_i^{\top}(f_i(\sigma)) \subseteq \sigma$.(2) （弱碰撞引理）若 $\sigma \neq \tau$ 是彼此不同的码字，且$f_i(\sigma) = f_i(\tau)$，则 $i \notin \sigma$ 和 $\tau = \sigma \cup i$(3) （强碰撞引理）若 $\sigma \neq \tau$，则 $f_i(\sigma) = f_i(\tau)$ 当且仅当 $\sigma = \overset{\mathcal{C}}{\vee} i \setminus i$和 $\tau = \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$。

证明。第1 项由等式（10）得出。第2 项成立，因为 f_i（σ） $= f_i$（τ）需要 $\sigma \setminus i = \tau \setminus i$。

第3项。（$\Leftarrow$） $f_i(\overset{\mathcal{C}}{\vee} i \setminus i) = f_i(\overset{\mathcal{C}}{\vee} i) = \overset{\mathcal{C}}{\vee} i \setminus i$由此前所有定义和引理得出。

（$\Rightarrow$）假设 f_i（σ） $= f_i$（τ），其中 $\sigma \neq \tau$。根据第2项，我们必须有（不失一般性）$\tau = \sigma \cup i$，其中 $i \notin \sigma$。注意，由于 $\tau \in \mathcal{C}$ 且 $i \in \tau$，我们必须有 $\overset{\mathcal{C}}{\vee} i \subseteq \tau$。剩下只需证明 $\tau \subseteq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$ 即可完成证明。

由于 $i \notin \sigma$，我们有 $f_i(\sigma) = \sigma$，因此 $f_i(\tau) = \sigma$。这意味着我们有 $\{j + n : ij \subseteq \tau, \overset{\mathcal{C}}{\vee} ij \supsetneq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i\} = \varnothing$ 这推出了 $\{j \in \sigma : \overset{\mathcal{C}}{\vee} ij \supsetneq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i\} = \varnothing$，也就是说，对所有 $j \in \sigma$，我们都有 $\overset{\mathcal{C}}{\vee} ij = \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$。因此， $\sigma \subseteq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$。事实上，包含关系必定是严格的，因为 $i \notin \sigma$，所以特别地我们必定有 $\tau = \sigma \cup i \subseteq \overset{\mathcal{C}}{\vee} i$，证明至此完成。□

我们现在证明，定理 5.17 中的条件是充分的。

定理 5.19. 设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 是一个约化码，$f_i : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{(i)}$ 是第 i 个覆盖映射。那么，当且仅当 i 是自由的，f_i 才是一个 *BMF*。

证明。 正向推论即为定理5.17。

反过来，设 i 是自由的，即 $\overset{\mathcal{C}}{\sqrt{i}} \notin \mathcal{C}$。我们要证明$f_i^{\top}(f_i(\sigma)) = \sigma$ 对所有 $\sigma \in \mathcal{C}$ 都成立。因此，考虑某个码字 $\sigma \in \mathcal{C}$。若 $i \notin \sigma$，则 $\sigma \setminus i = \sigma$，由定理 5.18(1) 可得 $f_i^{\top}(f_i(\sigma)) = \sigma$。

现在设 $i \in \sigma$。由于 i 是自由的，因此有严格包含关系 $\overset{\mathcal{C}}{\sqrt{i}} \subsetneq \sigma$，于是存在某个 $j \in \sigma \setminus \overset{\mathcal{C}}{\sqrt{i}}$。对于这个 j，$\overset{\mathcal{C}}{\sqrt{ij}} \supsetneq \overset{\mathcal{C}}{\sqrt{i}}$；应用定理 A.2可知集合

$$\{ij \subseteq \sigma : \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)\}$$

是非空的。因此，中的大并

$$f_i^{\top}(f_i(\sigma)) = (\sigma \setminus i) \cup \bigcup_{\substack{ij \subseteq \sigma \\ \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(ij) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)}} \overset{\mathcal{C}}{\sqrt{ij}}$$

至少有一项，因此 $i \in f_i^{\top}(f_i(\sigma))$。根据定理 5.18(1)，这意味着$f_i^{\top}(f_i(\sigma)) = \sigma$，证明完毕。 □

5.4. **码的缺陷。** 定理 5.18 实际上表明，覆盖映射具有很强的刚性：与伴随复合后，所有码字几乎都会映回自身。事实上，覆盖映射的像的基数要么等于其定义域的基数，要么恰好少一。我们将利用这一点在$\mathbf{P_{Code}}$上定义弱双分次。

对于一个码 $\mathcal{C}$，令 $T(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 的非空主干集合，并令$t(\mathcal{C}) = |T(\mathcal{C})|$ 统计 $\mathcal{C}$ 的非空主干数量。这是 $\mathbf{P_{Code}}$ 上的秩函数（特别参见 [8, 第 3], 节中的注记 3.23）：$\mathcal{C}$ 覆盖$\mathcal{D}$ 当且仅当 $\mathcal{C} \geq \mathcal{D}$ 且 $t(\mathcal{C}) = t(\mathcal{D}) + 1$。$\mathcal{C}$ 的每个码字都定义一个不同的主干，因此我们有以下引理。

引理 5.20。 对于任意码 $\mathcal{C}$、$|\mathcal{C}| \leq t\ (\mathcal{C})$。

证明。 将 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}$ 视为映射 $\mathcal{C} \to T(\mathcal{C})$。它是单射：若 $\sigma \neq \tau$，则二者中至少有一个不在另一个的主干中，因此 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\tau)$。□

定义 5.21。 对于 $\mathcal{C}$ 一个码，将 $\mathcal{C}$ 的缺陷 定义为 $d(\mathcal{C}) = t(\mathcal{C}) - |\mathcal{C}|$。

由定理 5.20，我们得到 $d\ (\mathcal{C}) \geq 0$ 对所有码均成立。事实上，$d\ (\mathcal{C}) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{C}$ 是交完备的，下一条命题将说明这一点。

命题 5.22 （[11, 命题 33]）。 限制在 $\mathcal{C}$上，$\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}$ 是双射，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是交完备的。

证明。 ($\Rightarrow$) 如果 $\mathcal{C}$ 是交完备的，那么 $\sqrt{T} \in \mathcal{C}$ 对于任意非空主干 $T \subseteq \mathcal{C}$。因此 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sqrt{T}) = T$，这意味着 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}$ 是满射，因而是双射。

($\Leftarrow$) 假设 σ， $\tau \in \mathcal{C}$。令 $T = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma \cap \tau)$。根据假设， $T = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(c)$ 对某个 $c \in \mathcal{C}$成立。由定理 A.3 (3)，我们有 $c = \sqrt{T}$。但由定理 $\sigma \cap \tau \subseteq c$，根据定理A.3(1)。

另一方面， $\sigma \in T$和 $\tau \in T$，所以 $c = \sqrt{T} \subseteq \sigma \cap \tau$。因此$c = \sigma \cap \tau$，从而 $\sigma \cap \tau \in \mathcal{C}$。□

缺陷是码的同构不变量。

引理 5.23. 假设 $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ 是同构码。那么 $d(\mathcal{C}) = d(\mathcal{D})$。

证明. 同构在码字和主干上构成双射 [8]。因此 $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$ 且 $t(\mathcal{C}) = t(\mathcal{D})$，由此可得 $d(\mathcal{C}) = d(\mathcal{D})$。□

缺陷在 $\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ 上是保序的。事实上，我们将证明一个更强的结论。

定理 5.24. 设 $\mathcal{C}$ 是一个码，且 i 在 $\mathcal{C}$ 中不冗余。那么

$$d(\mathcal{C}) - 1 \leq d(\mathcal{C}^{(i)}) \leq d(\mathcal{C}).$$

证明. 强碰撞引理（定理5.18(3）指出，覆盖映射要么是单射（因此 $|\mathcal{C}^{(i)}| = |\mathcal{C}|$），要么其像的基数比定义域少一（因此 $|\mathcal{C}^{(i)}| = |\mathcal{C}| - 1$）。由于它是覆盖映射， $t(\mathcal{C}^{(i)}) = t(\mathcal{C}) - 1$。综合以上结果，得到

$$\begin{aligned} d(\mathcal{C}^{(i)}) &= t(\mathcal{C}^{(i)}) - |\mathcal{C}^{(i)}| \\ &= (t(\mathcal{C}) - 1) - (|\mathcal{C}| - x) \\ &= d(\mathcal{C}) - 1 + x \end{aligned}$$

其中 $x = 0$ 或为 1。因此， $d(\mathcal{C}) - 1 \leq d(\mathcal{C}^{(i)}) \leq d(\mathcal{C})$。 □

推论 5.25. 设 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个码之间的满射态射。那么$d(\mathcal{C}) \geq d(\mathcal{D})$。

因此，每个码的同构类都可以对应一对坐标 $(d(\mathcal{C}), t(\mathcal{C}))$；覆盖映射会使坐标变为 $(0, -1)$ 或 $(-1, -1)$。只有在 $(-1, -1)$ 方向上，基数才保持不变；这意味着，任何双射编码态射（同构除外）都必定会降低缺陷。

推论5.26。 如果 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 *BMF*，那么它要么是同构，要么会严格降低缺陷。

证明。设 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 BMF，因此它特别是一个满射编码态射。若 $t(\mathcal{C}) = t(\mathcal{D})$，则根据命题 3.16]， f 是一个同构 [8, 。否则，我们必有 $t(\mathcal{C}) > t(\mathcal{D})$。由于 $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}|$我们有$d(\mathcal{C}) = t(\mathcal{C}) - |\mathcal{C}| > t(\mathcal{D}) - |\mathcal{D}| = d(\mathcal{D})$。□

5.5. **另一个伽罗瓦连接**。 我们注意到，定理5.22 颇具启发性：给定一个固定的码 $\mathcal{C}$，映射 $\sigma \mapsto \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma)$ 定义了一个从 $2^{[n]}$ 到其幂集的映射。反向则有映射 $S \mapsto \sqrt{S}$。事实上，这些映射也构成一个伽罗瓦连接。

引理 5.27。 设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 为固定对象。那么映射 $G: \quad S \mapsto \sqrt{S}$ 和$\overline{F}$：$\sigma \mapsto \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma)$ 分别是 $2^{\mathcal{C}}$ 与 $2^{[n]}$之间伽罗瓦连接中的上伴随和下伴随。

证明。_设 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma) \subseteq S$。则 S 中的每个码字都包含 σ，因此$\sigma \subseteq \sqrt{S}$。

设 $\sigma \subseteq \sqrt{S}$。则对所有 $s \in S$都有 $\sigma \subseteq s$，从而每个 $s \in S$ 也属于 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma)$。
□

定理 5.22 进而给出这些映射在限制到 $\mathcal{C}$ 与 $T(\mathcal{C})$ 时互为逆的条件（即当 $\mathcal{C}$ 为交完备，而这成立当且仅当 $d(\mathcal{C}) = 0$）。

6. Boolean rank

现在我们展示所得结果在计算矩阵布尔秩中的一个应用。矩阵$\mathbf{C} \in \mathbb{B}^{m\times n}$ 的秩 r 分解，是将$\mathbf{C}$ 表示为矩阵$\mathbf{C} = \mathbf{VH}$的布尔积，其中$\mathbf{V} \in \mathbb{B}^{m\times r}$ 且$\mathbf{H} \in \mathbb{B}^{r\times n}$。$\mathbf{C}$的布尔秩记为 $\mathbf{brank(C)}$，是 r的最小值，使得存在$\mathbf{C}$的秩 r 分解。对于码 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$，我们将 $\mathbf{brank}(\mathcal{C})$ 定义为表示 $\mathcal{C}$的任一矩阵的布尔秩。下面的小例子表明，布尔秩不是组合码的同构不变量。

例 6.1. 以下矩阵表示**码**中的同构码：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

在$\mathbf{C}'$中，神经元 3 对 $\{1, 2\}$ 是冗余的；删除这个冗余神经元后得到$\mathbf{C}$。经观察，$\mathbf{brank(C)} = 2$ 而 $\mathbf{brank(C')} = 3$。

然而，同构类的约化代表元确实具有该类码中最小的布尔秩。

引理 6.2. 对于任意码 $\mathbf{C}$，$\mathbf{brank}(\rho(\mathbf{C})) \leq \mathbf{brank(C)}$。

证明。 设 $\mathbf{C} = \mathbf{VH}$ 是一个秩为 $r = \mathrm{brank}(\mathbf{C})$ 的因子分解 $\mathbf{C}$。根据定理2.7 存在一个 $\mathbf{P}$ 使得

$$\rho(\mathbf{C}) = \mathbf{CP} = (\mathbf{VH})\mathbf{P} = \mathbf{V}(\mathbf{HP})$$

这是一个秩为 r 的因子分解 $\rho\mathbf{(C)}$。 □

综合来看，我们的结果提出了一种用于分解约化布尔矩阵的图搜索算法：首先，枚举码 $\mathbf{C}$ 的自由神经元。对于每个自由神经元 i，计算被覆盖码的一个约化代表元$\mathbf{C}^{(i)}$，然后递归搜索。我们搜索的图是 $\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ 的哈斯图，并限制在代表矩阵分解的边上，其中一部分如图 2 所示。下面的引理表明

判断神经元 i 是否冗余，所需时间与表示 $\mathcal{C}$ 的矩阵中的条目数呈线性关系（因此，对于固定的 n，所需时间与码的大小呈线性关系）。

引理 6.3 (冗余引理)。 如果 i 相对于 σ是冗余的，那么对于任意 $\tau \in$ 生成元集 $(\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma))$ 且满足 $\tau \subseteq \sigma$， i 相对于 τ 也是冗余的。特别地，神经元 i 是冗余的，当且仅当 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\overset{\mathcal{C}}{\forall} i \setminus i)$。

证明。 $\tau \in$ 生成元集$(\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma))$ 的含义是 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\tau) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)$。如果 $\tau \subseteq \sigma \subseteq [n] \setminus i$，那么 i 相对于 τ是冗余的。

显然，如果 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\overset{\mathcal{C}}{\forall} i \setminus i)$，那么 i 是冗余的，因此我们只需验证其逆命题。设 i 相对于 σ是冗余的，且 $\sigma \subseteq [n] \setminus i$。于是有 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma \cup i)$，因此特别有 $\overset{\mathcal{C}}{\forall} i \setminus i \in$生成元集$(\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma))$。□

冗余神经元也能根据矩阵约化代表的布尔秩，对该矩阵的布尔秩给出上界。

引理 6.4. 设$\mathbf{C}$ 是一个含有 k 个冗余神经元的码。那么 $\mathrm{brank}(\mathbf{C}) \leq \mathrm{brank}(\rho(\mathbf{C})) + k$。

证明。 不失一般性，假设神经元 $n-k+1, \ldots, n$ 在$\mathbf{C}$中是冗-余的。设 $\rho(\mathbf{C}) = \mathbf{VH}$ 是 $\rho(\mathbf{C})$的一个秩为 $r = \mathrm{brank}(\rho(\mathbf{C}))$ 的分解。令$\mathbf{C}'$ 为$\mathbf{C}$的最后 k 列，并设

$$\mathbf{V}' = \begin{bmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{C}' \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

其中$\mathbf{I}$ 是一个 $k \times k$ 单位矩阵。于是我们有$\mathbf{C} = \mathbf{V}'\mathbf{H}'$ 是$\mathbf{C}$的一个秩为 $r+k$ 的分解。□

我们的结果还表明，交完备码必须具有满布尔秩。

定理 6.5. 若 $\mathcal{C} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \subseteq 2^{[n]}$ 是交完备的，则$\mathrm{brank}(\mathcal{C}) = \min(m, n)$

证明。 根据定理 5.26，若 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 是一个布尔矩阵分解，则必须满足严格不等式 $d(\mathcal{C}') < d(\mathcal{C})$。然而，由于 $\mathcal{C}$ 是交完备的， $d(\mathcal{C}) = 0$。 □

根据定理 **3.1**，通过检查 $I_{\mathbf{C}}$的生成元即可确定 C 是否交完备。

最后，我们可以利用神经环给出布尔秩的下界。若存在满射单项式映射 $\mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_r] \to R_{\mathbf{C}}$，使得 $R_{\mathbf{C}}$ 由 r 个单项式生成，我们就称 $R_{\mathbf{C}}$ 由 r 个单项式生成。使 $R_{\mathbf{C}}$ 由 r个单项式生成的最小单项式秩称为 $R_{\mathbf{C}}$的单项式秩，记为 $\mathrm{mrank}(R_{\mathbf{C}})$。

定理 6.6. 对于任意码 $\mathbf{C}$，$\mathrm{mrank}(\mathbf{C}) \leq \mathrm{brank}(\mathbf{C})$。

证明。设 $\mathbf{C} = \mathbf{VH}$ 是 r 秩分解 $\mathbf{C}$，满足 $\mathbf{V}$ 是 $\mathbf{H}$- 极大的。由定理 5.4，映射 $\mathbf{C} \to \mathbf{V}$ 是码的双射态射，因此其拉回 $R_{\mathbf{V}} \to R_{\mathbf{C}}$ 是满射。于是，与自然映射 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_r] \to R_{\mathbf{V}}$ 复合得到满射 $\mathbb{F}[x_1, \ldots, x_r] \to R_{\mathbf{C}}$。 □

7. Discussion and Open Questions

我们的工作通过用二元矩阵表示码及其态射，使二者处于同等地位。组合码可以看作矩阵的一个等价类；若两个矩阵的行支撑集所构成的组合码同构，则这两个矩阵等价。然而，态射的不同代表矩阵通常会产生不同的组合码（回顾定理4.4），因此码的态射会在二元矩阵集合上诱导出另一种划分。未来的工作可以探究矩阵的哪些性质在这些等价类中保持不变。

我们的工作补充了 Jeffs 和 Trang 最近的研究 [11]。他们研究覆盖给定码的码，给出了定理5.13的对偶操作。一个自然而然的问题是，他们的构造是否存在定理5.19 的类似结果：也就是说，覆盖给定码的哪些码可以通过矩阵乘法得到?

他们还证明，将码取交完备化是码范畴上的一个自函子，并且该函子保持$\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ [11, 引理 13 和 14]中的覆盖关系。我们可以用图示的方式来描述这一点：图1 中的每条边都可以向左“平移”，从而得到 $d = 0$ 列中哈斯图的一条边。交完备码之间的覆盖关系不可能是 BMF（定理5.26）。然而，码或态射是否具有某种性质，能保证平移到该覆盖关系的边中有一条是 BMF?

寻找低秩布尔矩阵分解的问题等价于许多其他问题，例如寻找用双团覆盖二分图的最小覆盖，或对两个集合之间的一般关系进行分解。我们再给出一种等价表述：寻找给定单项式映射可经由其分解的多项式环中变量的最小数量（见第 4.2节）。

最后，我们提出在研究过程中产生的一些具体问题和猜想。

7.1. **对交完备化的兴趣**。在 [6], 的预印本版本中，作者提出了一种流式算法，用于构造码 $\mathcal{C}$ 的典范形式。给定码字 $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ 的一个排列，$i = 1, \ldots, m$ 对每个 $\mathcal{C}_i = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_i\} \subseteq \mathcal{C}$，该算法都会构造子集 3.1 定理3.2的典范形式。因此，如果在每个中间步骤中舍弃违反定理 $\widehat{\mathcal{C}_i}$ (分别为，$\check{}\,\mathcal{C}_i$) 的元素，就能在每一步得到 $\widehat{\mathcal{C}}$ (分别为，$\check{}\,\mathcal{C}$的典范形式。算法的输出就是

任意码的典范形式规模都可能变得很大，因此一个自然的问题是，交完备（并完备）码的典范形式规模增长得有多快。

问题 7.1. 在 n 个神经元上的交完备或并完备码的典范形式中，元素的最大数目是多少?

这被提出为一个极值问题，但同时还附带一个计数问题：对于给定大小的典范形式，在 n个神经元上有多少个码能达到该大小的典范形式?

7.2. **缺陷的性质**。 设 $\lambda(\mathcal{C})$ 表示一个码的最小神经元数，即最小的 n 使得 $\mathcal{C}$ 同构于一个码 $\mathcal{C}' \subseteq 2^{[n]}$。图 1 展示了$\mathbf{P_{Code}}$ 的下集，该下集由所有具有 $\lambda = 3$的码生成。令人惊讶的是，其中包含一些具有 $\lambda = 4$的码，这表明 λ 在 $\mathbf{P_{Code}}$上不是保序的。

问题 7.2. $\max_{\mathcal{C}\in\mathbf{Code}}\{\lambda(\mathcal{C}^{(i)}) - \lambda(\mathcal{C})\}$是什么?

由定理 5.13 可知 $\lambda(\mathcal{C}^{(i)}) \leq 2\lambda(\mathcal{C}) - 2$。是否有码达到此界? 此外，我们从图 1 中看到，在由 $\lambda = 3$ 生成的下集中的 82 个码里，有 24 个具有 $\lambda = 4$。长度为 $\ell + 1$ 的码在由长度为 ℓ的码生成的下集中，最大数目是多少?

7.3. **冗余的相关性**。 向矩阵添加重复行不会改变相应的码，也不会改变布尔秩。添加重复列或全为1的列同样不会改变布尔秩，但会向该码引入一个冗余神经元。然而，定理 6.1 表明，可以通过添加等于其他列之积但不复制已有列的列来提高矩阵的布尔秩。因此，我们可以区分简单冗余神经元（对单元素集或空集而言冗余的神经元）与非简单冗余（冗余但并非简单冗余的神经元）。定理6.4 中的界因此可以通过将 k 替换为简单冗余神经元的数目来改进，但我们猜想定理 6.2 与6.4 可以变得精确。

猜想 7.3. 设 $\mathbf{C}$ 为具有 k 个冗余神经元的二元矩阵，其中 $\ell \leq k$ 个并非简单冗余。则 $\mathbf{brank(C)} = \mathbf{brank}(\rho\mathbf{(C)}) + \ell$。

一个相关问题是 ℓ最大能达到多少。我们注意到，向一个码添加非简单冗余，相当于添加代表矩阵各列支撑的交集，因此其上界为 $\ell \leq 2^{\lambda(\mathbf{C})} - 1$，因为这统计了所有由不同非冗余列构成的非空子集。我们预计，在码中很少能达到这个上界；而对 ℓ 的任何进展，也会相应地限制 $\mathbf{brank(C)}$ 与 $\mathbf{brank}(\rho\mathbf{(C)})$ 之间的差距。

References

[1] George M. Bergman, *An invitation to general algebra and universal constructions*, 第二版, Universitext, Springer, Cham, 2015。MR3309721[2] Joshua Cruz、Chad Giusti、Vladimir Itskov 和 Bill Kronholm, *On open and closed convex codes* **61** 2019 03 01 2, 247 270 , 《离散与计算几何》（//），第 – 期。[3] Carina Curto、Elizabeth Gross、Jack Jeffries、Katherine Morrison、Mohamed Omar、Zvi Rosen、Anne Shiu 和 Nora Youngs, *What makes a neural code convex?*, SIAM应用代数与几何期刊 1（2017），第 1 期，222–238。[4] Carina Curto、Elizabeth Gross、Jack Jeffries、Katherine Morrison、Zvi Rosen、Anne Shiu 和 Nora Youngs, *Algebraic signatures of convex and non-convex codes*, 纯粹与应用代数期刊 223（2019），第 9 期，3919–3940。[5] Carina Curto、Vladimir Itskov、Alan Veliz-Cuba 和 Nora Youngs, *The neural ring: an algebraic tool for analyzing the intrinsic structure of neural codes* , 《数学生物学通报》75（2013），第 9 期，1571–1611。[6] Carina Curto 和 Nora Youngs, *Neural ring homomorphisms and maps between neural codes* 2018, [2020] 2020, 163 , 拓扑数据分析——阿贝尔研讨会 © pp. – 180。[7] Hugh Geller 和 Rebecca R. G., *Canonical forms of neural ideals*, 《数学》3（2024），第 2 期，721–752。[8] R. Amzi Jeffs, *Sunflowers of convex open sets*, 《应用数学进展》111（2019），101935。[9] *Morphisms of neural codes*, SIAM应用代数与几何期刊 4（2020），第 1 期，99–122。[10] *Morphisms minors and minimal obstructions to convexity of neural codes*, 博士论文，2021。[11] R. Amzi Jeffs 和 Trong-Thuc Trang, *Covering relations in the poset of combinatorial neural codes* 2025 2512 04241 , 。可见于 https://arxiv.org/abs/ 。[12] R. Duncan Luce, *A note on boolean matrix theory*, 《美国数学会会刊》3（1952），第 3 期，382–388。[13] R. J. Plemmons, *Generalized inverses of boolean relation matrices*, SIAM应用数学期刊 20（1971），第 3 期，426–433。

Appendix A. Trunk Lemmas

这里陈述关于一个码的主干的几个技术引理。

引理 A.1。设 S、T 是一个码 $\mathcal{C}$ 的两个主干。那么 $\sqrt{S \cap T} \supseteq \overline{\sqrt{S} \cup \sqrt{T}} \supseteq \sqrt{S} \cap \sqrt{T}$。

引理 A.2。设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$。当且仅当 $\sqrt[\mathcal{C}]{ij} \supsetneq \sqrt[\mathcal{C}]{i}$，有 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)$。（等价地，$\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)$ 当且仅当 $\sqrt[\mathcal{C}]{ij} = \sqrt[\mathcal{C}]{i}$。）

证明。($\Rightarrow$) 假设 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j) \neq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)$。由于左侧的交集始终是右侧的子集，该不等式意味着它是一个真子集。这意味着左侧的极大生成元（即 $\sqrt[\mathcal{C}]{ij}$）严格包含右侧的极大生成元（即 $\sqrt[\mathcal{C}]{i}$）。

($\Leftarrow$) 严格包含 $\sqrt[\mathcal{C}]{ij} \supsetneq \sqrt[\mathcal{C}]{i}$ 意味着严格包含 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(ij) \subsetneq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i)$，且左侧恰好是 $\mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(i) \cap \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(j)$。□

引理 A.3 (显然的引理)。设 $\mathcal{C} \subseteq 2^{[n]}$ 是一个码。

(1) 对于任意 $\sigma \subseteq [n]$, $\sigma \subseteq \sqrt[\mathcal{C}]{\sigma}$.(2) 对于任意非空主干 $T \subseteq \mathcal{C}$, $T = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sqrt{T})$。(3) 对于任意 $\sigma \in \mathcal{C}$, $\sigma = \sqrt[\mathcal{C}]{\sigma}$。

证明。 (1) 由于对所有 $\tau \in \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma)$ 均有 $\sigma \subseteq \tau$，故它包含于它们的交集中。(2) 设 $\sigma \in$ 生成元集(T)。由第 1 部分，$\sigma \subseteq \sqrt[\mathcal{C}]{\sigma}$，因此 $T = \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma) \supseteq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sqrt[\mathcal{C}]{\sigma})$。另一方面，陈述 $T \subseteq \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sqrt{T})$ 是显然的。(3) 由于 $\sigma \in \mathcal{C}$，我们有 $\sigma \in \mathrm{Tk}_{\mathcal{C}}(\sigma)$，因此 $\sigma \supseteq \sqrt[\mathcal{C}]{\sigma}$。由第 1 部分，$\sigma \subseteq \sqrt[\mathcal{C}]{\sigma}$。□

Appendix B. All isomorphism classes on at most three neurons

图 1 和 2展示了由最小神经元数为 3 的码生成的 $\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ 中的向下闭集。请注意，该向下闭集包含一些最小神经元数为 4 的码；事实上，存在最小神经元数为 3 的码覆盖长度为 4 的码，且该覆盖映射是布尔矩阵分解。

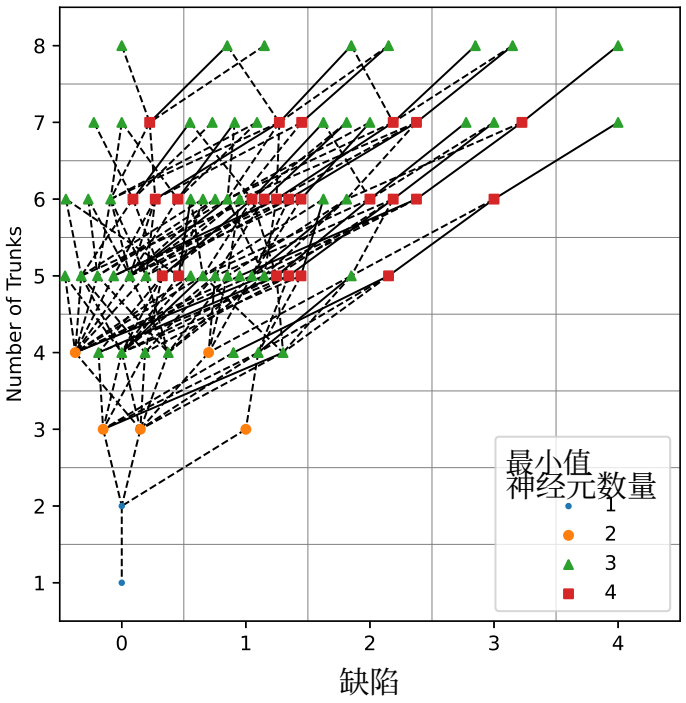


Figure 1. 由所有最小神经元数为 3 的码生成的$\mathbf{P}_{\mathbf{Code}}$ 中向下闭集的哈斯图。每个灰色网格方格包含主干数和缺陷组合相同的所有码。实线表示由矩阵分解构成的覆盖关系。

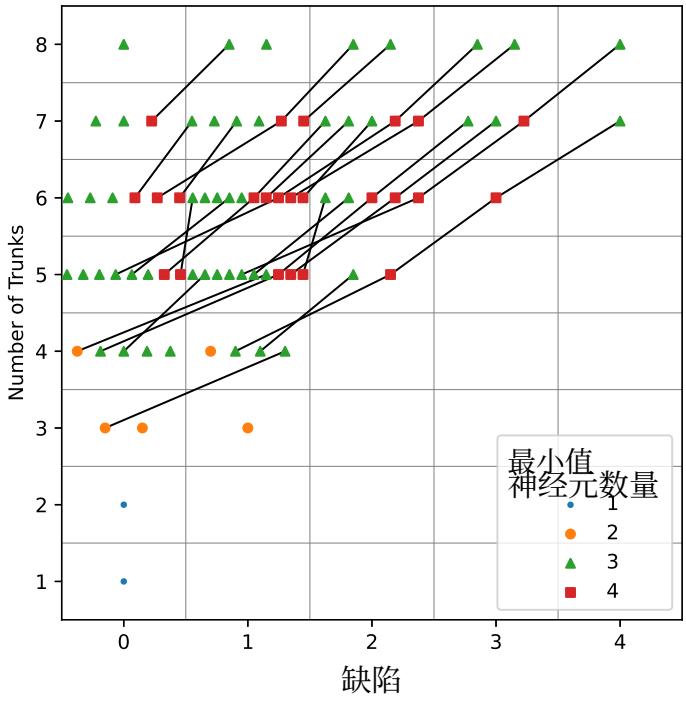


FIGURE 2. 图 1 中对应于矩阵分解的边的子集。