arXiv:2603.10884v1 [math.GT] 11 Mar 2026

纤维结的带状同痕与曲面同胚的压缩

伊恩·阿戈尔和 QIUYU REN

摘要。我们证明，在 S^3 中纤维结之间的带状共边下，单纯体积和膨胀率具有单调性；并且每个纤维结在带状同痕偏序中都只有有限多个前驱，这为 Gordon 提出的问题提供了佐证。我们还给出一种算法，可在对称性意义下枚举曲面同胚的所有极小压缩，从而推广 Casson–Long 的一个定理。由此可得一种算法，用于找出在某个同伦 $I \times S^3$ 中与给定纤维结强同伦带状同痕的所有纽结。我们对极小压缩的研究也为 Miyazaki 关于非简单纤维带状结的结果提供了另一种视角。

1. 引言

1.1. 纤维结的带状同痕。 从一个纽结J 到另一个纽结 K 的（光滑）共边 $C \subset I \times S^3$ 是一个（光滑）嵌入的环带，其边界为 J 和 K。若投影 $I \times S^3 \to I$ 在 C 上的限制是一个没有指标为 2 的临界点的莫尔斯函数，则称其为带状共边。若存在这样的共边，则称 J 与 K带状同痕，记作 $J \leq K$。

带状共边的概念由 Gordon [Gor81] 提出，近年来得到了广泛研究。若 $J \leq K$，则预期 J 比 K “更简单”。具体而言，已知许多纽结不变量在带状共边下具有单调性，包括亚历山大多项式、 S-等价类 [Gil84], 、塞弗特亏格和纽结 Floer 同调[Zem19], ，以及 Khovanov同调 [LZ19]。第一作者最近证明，带状共边构成偏序 [Ago22], ，从而证实了 Gordon 的一个猜想 [Gor81]。

我们的研究受到 Gordon [Gor81]提出的以下问题的启发：

问题 1.1 ([Gor81, 问题 6.4])。是否 $J \leq K$ 意味着 $||S^3\backslash J|| \leq ||S^3\backslash K||$?

这里， $||\cdot||$ 表示单纯体积。

问题 1.2 ([Gor81, 问题 6.2])。若 $K_1 \geq K_2 \geq \cdots$，是否存在 m，使得对所有 $n \geq m$都有 $K_n = K_m$?

以下是 Baldwin–Sivek 提出的问题 1.2 的进一步细化 [BS25].

问题 1.3（[BS25，问题 1.1]）。对于每个纽结 K，满足 $J \leq K$ 的 J 是否只有有限多个?

当 K 是纤维化的时，我们对这些问题给出肯定回答。注意，如果 K 是纤维化的且 $J \leq K$，那么 J 也是纤维化的 [Sil92； Koc06]。

定理 1.4. 若 K 是纤维化的且 $J \leq K$，则 $||S^3\backslash J|| \leq ||S^3\backslash K||$。

对于纤维结 K，单值化 $\phi_K\colon S \to S$ 是一个曲面同胚。根据尼尔森–瑟斯顿分类， ϕ_K 可沿一条多曲线规范地分解为周期片段和伪阿诺索夫片段。 K 的膨胀率记作 $\lambda(K)$，等于 ϕ_K 的伪阿诺索夫片段中的最大膨胀常数（若不存在伪阿诺索夫片段，则为 1）。

定理 1.5. 如果 K 是纤维化的且 $J \le K$，那么 $\lambda(J) \le \lambda(K)$。

以下定理是定理 1.5 的推论。

定理 1.6. 如果 K 是纤维化的，那么存在有限多个满足 $J \le K$ 的 J 。

与定理 1.4、1.5 类似的结果由 Baldwin–Sivek [BS25, 定理 1.5，引理 2.6] 独立地借助 Floer 理论技术证明。我们的证明完全采用拓扑方法，并对纤维结之间的界给出了更精确的估计。Baldwin–Hanselman–Sivek [BHS26, 推论 1.3] 也独立地证明了定理 1.6；他们通过更复杂的 Floer 理论论证，得出了更强的结果：每个纽结至多有有限多个纤维化的带状前驱结。

1.2. **曲面同胚的压缩**。 定理 1.4、1.5、1.6 的证明始于 Casson–Gordon [CG83] 的以下推论。

定理 1.7 ([CG83]). 若 J、K 是纤维化的，则 J 在某个同伦 $I \times S^3$ 中与 K 存在强同伦带状共边，当且仅当 K 的单值化可压缩为 J 的单值化。

强同伦带状共边以及曲面同胚的压缩的定义见第 2 节。若 J 在某个同伦 $I \times S^3$ 中与 K 存在强同伦带状共边，我们记作 $J \le_h K$。每个带状共边都是强同伦带状共边；事实上，将定理 1.4、1.5、1.6 中的 $\le$ 替换为 $\le_h$，这些定理仍成立。就我们所知， $\le_h$ 是否严格细于 $\le$ 尚无定论。

现在，我们介绍证明定理 1.6 的另一种方法，它也会得出一些本身具有独立意义的结果。

设 S 是一个带有（可能为空的）边界的紧致定向曲面，且 $\phi\colon S \to S$ 是一个保定向曲面同胚（不一定相对边界）。受研究曲面同胚的配边 [Bon83] 以及纤维带状结 [CG83], 的启发，Casson–Long [CL85] 证明了以下结果。

定理1.8（[CL85]）。设 $\phi\colon S \to S$ 是如上所述的曲面同胚。

(0) 存在一种算法，可以判定 ϕ 是否存在非平凡压缩。*(1)* 如果 ϕ 是伪阿诺索夫的，那么它至多有有限多个极小压缩。*(2)* 如果 ϕ 是伪阿诺索夫的，那么存在一种算法，可以找出 ϕ 的所有极小压缩。

定理 1.8 中的伪阿诺索夫假设按原样而言是必要的。不过，考虑额外的对称性后，我们能够去掉这一假设，并得到 Casson–Long 主要结果的以下推广。

定理 1.9。 令 $\phi\colon S \to S$ 为如上所述的曲面同胚。

(1) ϕ 在有序对(S, ϕ)的对称性意义下至多容许有限多个极小压缩。*(2)* 存在一种算法，可在(S, ϕ)的对称性意义下找出 ϕ 的所有极小压缩。

关于定理1.8和定理 1.9中的极小性条件、定理 1.9所涉及的对称性的精确解释以及若干例子，请参见第6.1节。此处只需说明，极小性意味着以尽可能小的量进行压缩。

不能反复应用定理 1.9 本身来推导一个不含极小性假设的版本（而该版本并不成立），因为相关的对称性可能无法延拓。尽管如此，如果只记录压缩的内边界，有限性仍然成立。

推论 1.10。紧致定向曲面的每个曲面同胚 ϕ 都只能压缩为有限多个曲面同胚 ϕ'（相差同痕与共轭）。此外，存在一种算法可以找出所有此类对象 ϕ'。□

我们将定理 1.6 推论为定理 1.7 和推论 1.10 的推论。

推论 1.11。对于任意给定的纤维结 K，满足 $J \leq_h K$ 的纽结 J 只有有限多个。此外，存在一种算法可以找出所有此类对象 J。

注1.12。即使只关注伪阿诺索夫同胚，为了得到推论 1.10 和推论 1.11，似乎也有必要研究周期同胚和可约同胚的极小压缩。

推论 1.11 尤其给出了一种算法，用于判定纤维结在同伦 B^4中是否为强同伦带状。若以切片-带状猜想和光滑4维庞加莱猜想为前提，原则上可以用此算法判定任意纤维结是否为光滑切片，尤其是 [DG25，表 5] 中的那些纤维结（这种推论关系也可能反向成立）。在实践中，该算法最有意思的部分来自 Casson–Long [CL85] 的算法。

由于目前只知道 Khovanov同调能够阻碍标准 $I \times S^3$ [GL22 中纽结之间的强同伦带状共边，定理 1.4], , 人们或许可以将推论 1.11 中的算法与 Khovanov 同调给出的阻碍结合起来，从而找到一个奇异 $I \times S^3$，进而得到一个奇异4-球。

最后，我们对曲面同胚的极小压缩所作的研究，为理解 Miyazaki [Miy94] 关于非简单（即卫星纽结）纤维带结的结果提供了一种概念上更简单的视角。我们不试图全面论述，而是通过证明八字结的 (2,1) 缆结不是强同伦带状的，并以符合 Miyazaki 思路的方式简洁证明以下结果，来阐明这一思想。

定理1.13. 设 J_1、$\cdots$ J_m、K_1、$\cdots$ K_n 为素纤维纽结，m、$n \geq 0$。那么 $J_1\#\cdots\#J_m \leq_h K_1\#\cdots\#K_n$ 当且仅当存在纽结 $K_{i,\,j}$、$1 \leq j \leq \ell_i$、$1 \leq i \leq n$，以及某个 $\ell_i \geq 0$，使得

- $K_{i,\,1}\#\cdots\#K_{i,\,\ell_i} \leq_h K_i$ 对所有 i 均成立；
- 纽结的集合 $K_{i,\,j}$ 恰好由纽结 J_1、$\cdots$ J_m 以及其他一些 $2k$ 纽结J_{m+1}、$-J_{m+1}$、$\cdots$ J_{m+k}、$-J_{m+k}$ 组成，这些纽结成（反向的）镜像对 $k \geq 0$。

推论1.14。*(1)* 如果切片-带状猜想成立，那么每个纽结合痕类至多包含一个关于 $\leq_h$ 极小的纤维结。*(2)* 如果切片-带状猜想和光滑4维庞加莱猜想都成立，那么阶大于2 的纽结合痕群中的任何挠元都不能由纤维结表示。

定理1.13蕴含了 [Miy94]，中定理5.3和定理5.5的部分结论，反过来，Miyazaki 对这些结果的证明也可能适用于证明定理1.13。推论1.14(1)是 Miyazaki 的一个直接推论（见 [Bak16，备注 6]），而推论1.14(2)由 [Miy94] 中的定理5.8得出。我们指出，关于 $\leq$ (或 $\leq_h$)，每个纽结合痕类是否都有唯一的极小元，以及纽结合痕群是否包含阶大于2的挠元，仍是未解决的问题。

我们以以下问题结束引言。

问题 1.15。如果 K_1 和 K_2 是协边纤维化结，是否必定存在一个纤维结 K，使得$K_1 \leq K$, $K_2 \leq K$?（或者将 $\leq$ 替换为 $\leq_h$? ）

在问题 1.15 中，可以用等价条件替代 K 的存在性： K_1, K_2 可由一条之字形链联系起来，这条链由纤维结之间的（强同伦）带状协合构成。注意，切片-带状猜想蕴含问题 1.15，因为可以取 $K = K_1\#K_2\#(-K_1)$。

按照 [Bon83], 中论证的思路，利用特征子流形理论可以证明：若 K_1, K_2 是亏格至多为 3 的双曲纽结，且各自关于$\leq_h$都是极小的，那么纤维结 K 的存在性，若其满足 $K_1 \leq_h K$, $K_2 \leq_h K$，便蕴含 $K_1 = K_2$。

1.3. **论文结构**。 在第 2 节中，我们介绍一些预备知识并证明定理 1.7。在第 3 节中，我们举例说明纤维结之间的带状协合。我们在第 4 节证明定理 1.4，在第 5 节证明定理 1.5 和定理 1.6，并在第 6 节证明定理 1.9。在第 6.3 节中，我们将曲面同胚的极小压缩分为六种典范形式。基于这一分类，我们在第 7 节证明定理1.13和推论1.14。

致谢。 感谢约翰·鲍德温、内森·邓菲尔德和曾志卓进行了有益的讨论。QR 感谢在准备本手稿时使用 ChatGPT 和 Gemini 提供的一些图示和部分论证。作者的研究部分得到了西蒙斯研究员奖 376200 的资助。

2. 预备知识

本节中，我们将阐述定理 1.7；该定理将我们对定理 1.4 和定理 1.5 的证明归结为研究曲面同胚的压缩。除非另有明确说明，本文中所有曲面均为紧致、可定向曲面，且所有曲面同胚均保定向，但不一定相对边界。

同伦 $I \times S^3$ 中从 J 到 K 的共边是强同伦带状的，如果其补集允许仅含1-柄和2-手柄的相对把手分解。若存在这样的共边，我们记作$J \leq_h K$。 [Ago22] 中的论证表明 $\leq_h$ 是一个偏序。

一个（相对）压缩体是紧致定向三维流形 C，其边界被划分为 $\partial C = (-\partial_i C) \cup A \cup \partial_e C$，使得

- $\partial_i C$ 和 $\partial_e C$，分别称为 C的内边界和外边界，是 ∂C的不相交子曲面。
- $\partial_i C$ 没有球面分支。
- $A \cong I \times \partial(\partial_i C) \cong I \times \partial(\partial_e C)$，称为 C 的 垂直边界，是若干环带的并集，其中每个分支都与 $\partial(\partial_i C)$ 的一个分支和 $\partial(\partial_e C)$ 的一个分支共同构成边界。

- C 是通过附加 0-手柄和 1-手柄从 $I\times\partial_iC$ 得到的；等价地， C 是通过向（ ∂_eC 的一个加厚）附加 2-手柄和 3-手柄得到的。

例如，每个把手体都是一个内边界为空且外边界连通的压缩体。一般而言，可以将压缩体 C 视为从内边界到外边界的配边。

当 C 连通时， ∂_iC 的每个分支在 C中都是 π_1-单射的，而 ∂_eC的唯一分支映到 C上是 π_1-满射的。反过来，若 C 是一个连通定向不可约三维流形，且 $S\subset\partial C$是一个映到 C上为 π_1-满射的连通子曲面，那么通过迭代应用环定理和庞加莱猜想，我们知道 C 是一个外边界为S的相对压缩体。

设 $\phi\colon S\to S$是一个曲面同胚。若 C是一个具有 $\partial_eC=S$的压缩体，且 $\Phi\colon C\to C$ 是一个延拓 ϕ 的同胚，我们称 ϕ 可压缩于 C 中，压缩为曲面同胚$\Phi|_{\partial_iC}\colon\partial_iC\to\partial_iC$，并称 $\Phi\colon C\to C$，或简称 C，为 ϕ的一次压缩。注意， Φ 由 C 在 S相对同痕意义下唯一确定。我们不将 ϕ 在 C 上的不同延拓 Φ 视为不同的压缩；因此， $\Phi|_{\partial_iC}$ 只在同痕意义下定义。类似地，若ϕ， $\phi'\colon S\to S$ 同痕，则它们的压缩一一对应；因此，可以谈论映射类（非相对边界）的压缩，而不必指定具体的曲面同胚，以下我们常将这两个概念混为一谈。

当 ϕ 是一个相对边界的曲面同胚时，例如纤维结的单值化，我们要求一个压缩 $\Phi\colon C\to C$ 在垂直边界上为恒等映射。这个区别并不重要，从下一节开始，我们将忽略这一差异，只讨论不一定是相对边界的曲面同胚的压缩。

定理 1.7 的证明。必要性：设 C 是同伦 $I\times S^3$中 J与 K 之间的强同伦带状共边。从 C 上连接 J 与 K的一条弧的管状邻域中删去该邻域后， C的其余部分（记为 D）是同伦4-球 B中 $(-J)\#K$ 的一个带状圆盘。纽结 $(-J)\#K$是一个纤维结，其闭单值化为 $(-\phi_J)\cup\phi_K\colon(-F_J)\cup F_K\to(-F_J)\cup F_K$，其中$\phi_\bullet\colon F_\bullet\to F_\bullet$是 $\bullet=J$的单值化， K。简记 $\phi=(-\phi_J)\cup\phi_K$和 $F=(-F_J)\cup F_K$。Casson–Gordon [CG83，第 5.1] 定理表明，单值化 ϕ可在把手体H 中压缩，且 $\ker(\pi_1F\to\pi_1H)=\ker(\pi_1F\to\pi_1W/(\pi_1W)_\omega)$，其中 W 是 $B\backslash D$的无限循环覆盖，而 $(\pi_1W)_\omega$ 是 π_1W 的某个特征子群（事实上，由于 π_1W根据 [Koc06], 是自由的，它是平凡群，不过我们并不需要这一点）。我们断言 $\pi_1F_K\to\pi_1H$ 是满射的。这将推出 H 是一个压缩体，其内边界为 F_J，外边界为 F_K，从而证明所需结论。

由于 C 是强同伦带状共边， $B\backslash D$ 可以通过附加 2,3-手柄由 $S^3\backslash K$ 构造而成，这表明 $\pi_1(S^3\backslash K)\to\pi_1(B\backslash D)$ 是满射。取无限循环覆盖后，我们发现 $\pi_1(\mathbb{R}\times F_K)\to\pi_1W$是满射。由于 $\pi_1H=\pi_1W/(\pi_1W)_\omega$，这就证明了该命题。

充分性：设 C 是一个压缩体，且 $\Phi\colon C\to C$ 是一个同胚，分别在内部边界和外部边界上限制为 J 和 K 的单值化。映射环面 M_Φ 的垂直边界是 $I\times(S^1\times S^1)$。将一份 $I\times(S^1\times D^2)$ 粘到 M_Φ 的垂直边界上，使 K 和 J 上的经向斜率都被消去（这是可行的，因为 Φ 在 C 的垂直边界上是恒等映射），由此得到一个同伦 $I\times S^3$，其中的核心$I\times S^1\times\{*\}$是 J 与 K 之间的共边，其补集，即 M_Φ，由 $S^3\backslash J$ 通过粘接 1、2-手柄构成（因为 C 是由 ∂_iC 粘接 1-手柄构成的）。□

注意，若 K 是一个纤维结，且其单值化可压缩为某个连通曲面的同胚 $\phi\colon S \to S$，那么 $\phi = \phi_J$ 是纤维结 J 的单值化（这是几何化之后的 [Miy94，引理 1.3](2)），且 $J \leq_h K$。因此，推论 1.11 直接由定理 1.7 和推论 1.10 得出。

3. 示例

给定一个纤维结 J，自然会想知道具有 $J \leq K$ 的纤维结 K 会是什么样子。如果 R 是一个纤维带结，那么可以看出 $J \leq J\#R$。在这种情况下，本文关于单纯体积单调性和膨胀率的定理很容易验证，因为 J 是 $J\#R$ 的一个收缩。

一种变体是取一个纤维带结 R，例如方结，使得它的一个带状圆盘与其纤维曲面共享一个 $2n$ 边形 Q。在纤维结 J 的纤维曲面上任取一个 $2n$ 边形 P。然后，我们可以沿着 P 和 Q 对 J 与 R 作 Murasugi 和，从而得到纽结 K；它仍然是纤维化的 [Gab83, 定理 1.3]。将 J 稍稍推入带状曲面中，便得到一个连接 J 和 K 的带环，这表明 $J \leq K$。见图 1。

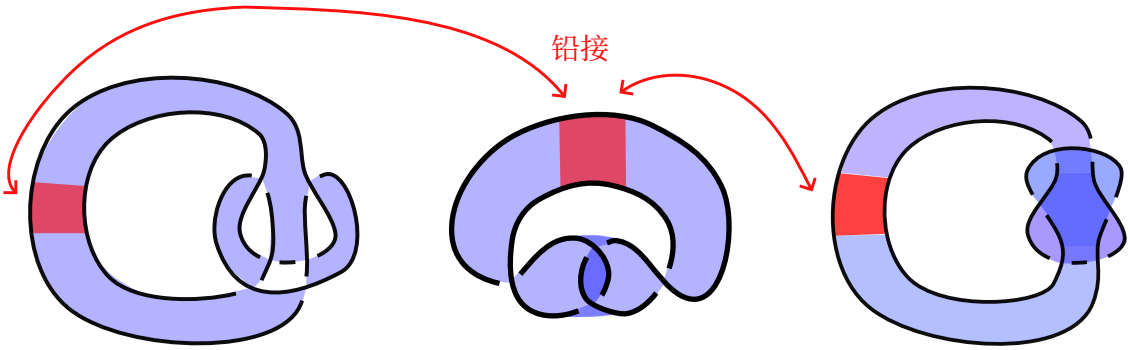


图 1. 将方结铅接到八字结上，从而得到一条从八字结通往该纽结 9_{24} 或其镜像的带状协和。

4. 单纯体积的单调性

为证明单纯体积的单调性，我们利用它与有界上同调之间的对偶关系。首先回顾同调上的格罗莫夫范数与有界上同调之间的关系[Gro82]。我们将沿用 [BP92, Appendix F]中的记号。

设 X 为一个拓扑空间。对于 $c \in C^k(X)$，定义 $||c||_\infty = \sup\{|c(\sigma)| \mid \sigma\colon \Delta_k \to X\} \in [0,\infty]$。定义 $\hat{C}^k(X) = \{c \in C^k(X) \mid ||c||_\infty < \infty\}$。则 $\delta^k(\hat{C}^k(X)) \subset \hat{C}^{k+1}(X)$，而 X的有界上同调记为 $\hat{H}^*(X)$，它是上链复形 $(\hat{C}^*(X)\ \delta^*)$ 的上同调。$\hat{C}^*(X)$ 上的 ℓ^∞-范数在 $\hat{H}^*(X)$ 上诱导出一个伪范数，即 $||\beta||_\infty = \inf\{||c||_\infty \mid c \in \hat{C}^k(X), c = \beta\}$,$\beta \in \hat{H}^k(X)$。上同调群 $\hat{H}^*(X)$ 满足自然性、同伦性和维数公理，但不满足上同调理论的其他公理。此外，它们只依赖于 $\pi_1(X)$。它们与格罗莫夫范数的关系如下。

命题 4.1。 *[BP92，命题 F.2。2]* 类 $z \in H_k(X)$ 的格罗莫夫范数 $||z||_1$ 满足$||z||_1^{-1} =$下确界$\{$ $||\beta||_\infty \mid \beta \in \hat{H}^k(X)\ [\beta, z] = 1\}$。□

现在我们陈述一个定理，该定理将推出纤维结的带状协合的单纯体积单调性。

定理 4.2. 设 C 为一个连通压缩体，并设 $\Phi\colon\ C \to C$ 为一个同胚，其限制为 $\Phi_i = \Phi|_{\partial_i C}$、$\Phi_e = \Phi|_{\partial_e C}$。则 $||T_{\Phi_i}|| \leq ||T_{\Phi_e}||$。

证明. 双倍的单纯体积是单纯体积的两倍。因此，为避免处理带边流形，我们可以沿垂直边界将压缩体取双倍，并假设 $\partial_e C$ 与 $\partial_i C$ 为闭曲面。

设 $[T_{\Phi_e}]$, $[T_{\Phi_i}]$ 分别为相应流形的基本类。则 $[T_{\Phi_e}]$, $[T_{\Phi_i}]$ 都映到 $H_3(T_\Phi) \cong \mathbb{Z}$ 的一个公共生成元，记为 $[T_\Phi]$。由于映射关于格罗莫夫范数是非增的，我们有 $||T_{\Phi_e}|| = |||[T_{\Phi_e}]|||_1 \geq |||[T_\Phi]|||_1$。我们还有 $||T_{\Phi_i}|| \geq |||[T_\Phi]|||_1$，若能证明另一个不等式，则定理随之成立。

根据格罗莫夫的一个定理 [Gro82，第 247], 页，循环覆盖 $\rho\colon\ \mathbb{R} \times C \to T_\Phi$ 诱导一个关于 $||\cdot||_\infty$ 的等距单射$\hat{}\rho^*\colon\ \hat{}H^3(T_\Phi) \to \hat{}H^3(\mathbb{R} \times C) \cong \hat{}H^3(C)$，对 T_{Φ_e}, T_{Φ_i}亦类似，因为 $\mathbb{Z}$ 是顺从的。

我们需要了解格罗莫夫定理中的自然性。格罗莫夫定理的证明使用了一个平均算子$\hat{}A\colon\ \hat{}H^*(C) \to \hat{}H^*(T_\Phi)$，使得$\hat{}A \circ \hat{}\rho^* = \mathrm{id}$，并且类似地，将 Φ 替换为 Φ_e, Φ_i。设$\iota\colon\ T_{\Phi_i} \to T_\Phi$表示含入映射，它诱导循环覆盖的含入 $\iota\colon\ \mathbb{R} \times \partial_i C \to \mathbb{R} \times C$。$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$于是从格罗莫夫的证明中容易看出 $A \circ \hat{\iota}^* = \hat{\iota}^* \circ A$。关键在于 A 是通过由非主超滤子定义的平均算子来定义的，这使得人们可以取有界序列的极限。一旦选定超滤子，极限便与映射交换，从而我们得到平均算子的自然性。

由于 C 是通过附加 1-手柄从 $I \times \partial_i C$ 得到的，因此存在一个收缩 $r\colon\ C \to \partial_i C$，使得 $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\partial_i C}$。令 $\beta_i \in \hat{}H^3(T_{\Phi_i})$ 为任意满足 $[\beta_i, [T_{\Phi_i}]] = 1$ 的元素。令 $\beta = \hat{}A \circ \hat{}r^* \circ \hat{}\rho_i{}^*(\beta_i)$。由于 $||\cdot||_\infty$ 在拉回以及 $\hat{}A$ 下均不增，因此有 $||\beta||_\infty \leq ||\beta_i||_\infty$。由于$\hat{\iota}^* \circ \hat{}A \circ \hat{}r^* \circ \hat{}\rho_i{}^* = \hat{}A \circ \hat{\iota}^* \circ \hat{}r^* \circ \hat{}\rho_i{}^* = \hat{}A \circ \hat{}\rho_i{}^* = \mathrm{id}$，因此有 $\hat{\iota}^*(\beta) = \beta_i$，从而 $[\beta, [T_\Phi]] = 1$。由此可得 $\inf\{||\beta||_\infty \mid \beta \in \hat{}H^3(T_\Phi)\ [\beta, [T_\Phi]] = 1\} \leq \inf\{||\beta_i||_\infty \mid \beta_i \in \hat{}H^3(T_{\Phi_i})\ [\beta_i, [T_{\Phi_i}]] = 1\}$，这意味着根据命题 4.1，$||T_{\Phi_i}|| \leq |||[T_\Phi]|||_1$。□

定理 1.4 现在可由定理 1.7 和定理 4.2 推出。

5. 膨胀常数的单调性

为证明膨胀率的单调性，我们利用膨胀率与群自同态增长率之间的关系。以下定义和事实可见于 [FLP79，Exposé 10]。

设 G 为一个有限生成群，$A\colon\ G \to G$ 是 G的一个自同态。A 的增长率 为

$$\gamma_A := \sup_{g \in G} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log(\ell(A^n(g))),$$

其中 $\ell\colon\ G \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是关于有限生成集的 G 上的字长函数。A 的增长率在对定义域或目标进行共轭后保持不变。特别地，若 $f\colon\ X \to X$ 是道路连通拓扑空间之间的连续映射，则其诱导映射$f_*\colon\ \pi_1 X \to \pi_1 X$（在共轭意义下良定义）具有良定义的增长率 γ_{f_*}，且与基点的选取无关。

我们专门研究曲面同胚 ϕ: $S \to S$。根据 Nielsen–Thurston 理论，对 ϕ 进行同痕后（不一定相对边界），我们可以选取 ϕ 的典范约化系统$\delta \subset S$，它是由 ϕ保持不变的多曲线；并选取一个由 ϕ保持不变的开管状邻域 $\nu(\delta)$。此外，我们可以写成 $S\backslash\nu(\delta) = \sqcup_{i=1}^{k} S_i$，使得 ϕ 在每个 S_i上的限制都是$\phi|_{S_i}$，且每个限制要么是周期的，要么是伪阿诺索夫的，并按循环方式置换 S_i 的各个分支。若 $\phi|_{S_i}$ 是伪阿诺索夫的，令 λ_i 表示其膨胀常数；否则令 $\lambda_i = 1$ 表示相应量。我们关注最大膨胀率 $\lambda([\phi]) = \lambda(\phi) = \max_i(\lambda_i)$。当 ϕ 是纤维结K的单值化时，这就是我们在引言中定义的 K 的膨胀率 $\lambda(K)$。

引理 5.1. 若 S 连通，则$\log \lambda([\phi]) = \gamma_{\phi_*}$。

[FLP79，报告 10] 在 ϕ为伪阿诺索夫时证明了引理 5.1，尽管 $\leq$方向的证明在一般情况下也成立。我们借鉴 [FLP79]的思想，概述该等式在完全一般情形下的证明。

证明. 我们按如下方式在 S 上选取一个度量：

- 在 ϕ 为周期的每个 S_i 上，选取任意 ϕ不变的黎曼度量；
- 在 ϕ 为伪阿诺索夫的每个 S_i 上，选取由与 $\phi|_{S_i}$相关联的稳定测度叶状结构与不稳定测度叶状结构的有序对所诱导的奇异欧几里得度量；
- 在 $\nu(\delta)$ 的每个分支 $A \cong I \times S^1$ 上，我们任取一个度量，使其延拓 ∂A上的度量，并满足：A 同一边界分支上任意两点之间的距离均由边界上的一条弧实现，且该距离小于 A的两个边界分支之间的距离。

如 [FLP79，第 190], 页所示，定义 $G_{[\phi]} := \sup_x \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\ell(\phi^n(x)))$，其中 x 遍历 S 中圈的自由同伦类，而 $\ell(x)$ 表示在上述度量下，代表 x的圈的最小长度。我们证明：

$$\log \lambda([\phi]) = G_{[\phi]} = \gamma_{\phi_*}. \tag{1}$$

由于圈的自由同伦类恰好对应于 $\pi_1 S$ 中模共轭的元素，利用˜拟等距嵌入 $\pi_1 S \subset S$，我们得到 $G_{[\phi]} \leq \gamma_{\phi_*}$。

假设 $\lambda([\phi]) = \lambda_1$。若 $\phi|_{S_1}$ 是伪阿诺索夫的，取一个与稳定叶状结构拟横截的本质圈 $\alpha \subset S_1$；则对某个 $c > 0$，有 $\ell(\phi^n([\alpha])) \geq \lambda_1^n c$，从而 $\log \lambda([\phi]) \leq G_{[\phi]}$。若$\phi|_{S_1}$是周期的，则显然有 $0 = \log \lambda([\phi]) \leq G_{[\phi]}$。

取一个基点 $* \in S$，以及一条从 $*$ 到 $\phi(*)$ 的道路 γ，以定义 ϕ_*: $\pi_1(S, *) \to \pi_1(S, *)$。令 $g \in \pi_1(S, *)$ 由一个基点闭路 α_0 表示。于是，$\phi_*^n(g)$ 由基点闭路 α_n 表示，该闭路由 $\alpha_n = \gamma * \phi(\alpha_{n-1}) * \gamma^{-1}$ 归纳定义。我们通过将 α_n 分解为分别位于周期片 S_i、可约片 $A_j \subset \nu(\delta)$ 或伪阿诺索夫片 S_k 中的部分，来估计其长度，记为 $L(\alpha_n)$：

$$L(\alpha_n) = L_P(\alpha_n) + L_R(\alpha_n) + L_A(\alpha_n),$$

其中，对于某个 $C = C(\alpha_0)$，$L_P(\alpha_n) \leq C$，$L_R(\alpha_n) \leq Cn$，且 $L_A(\alpha_n) \leq \lambda([\phi]) L_A(\alpha_{n-1}) + C$。由此可知，对于某个 $C > 0$，$\ell(\phi_*^n(g)) \leq L(\alpha_n) \leq n\lambda([\phi])^n C$，这意味着 $\gamma_{\phi_*} \leq \log \lambda([\phi])$。□

定理 5.2. 设 C 为一个压缩体，其中 $\partial_i C$、$\partial_e C$ 连通且非空，并设 Φ: $C \to C$ 为一个同胚，它限制为 $\Phi_i = \Phi|_{\partial_i C}$、$\Phi_e = \Phi|_{\partial_e C}$。则 $\gamma_{\Phi_{i,*}} \leq \gamma_{\Phi_*} \leq \gamma_{\Phi_{e,*}}$。

证明。存在映射 $\pi_1(\partial_i C) \to \pi_1 C \leftarrow \pi_1(\partial_e C)$，它们与自同构 $\Phi_{i,*}$, Φ_* 以及 $\Phi_{e,*}$ 相交织。由于满射不会增加字长，我们得到 $\gamma_{\Phi_*} \leq \gamma_{\Phi_{e,*}}$。因为

$\pi_1(\partial_i C) \to \pi_1 C = \pi_1(\partial_i C) * F_k$存在收缩，因此它是一个拟等距嵌入。于是字长在粗略意义下保持不变，我们得到 $\gamma_{\Phi_{i,*}} \leq \gamma_{\Phi_*}$。□

定理 1.5 是定理 1.7、引理 5.1 和定理 5.2 的推论。

现在我们转向定理 1.6。证明通过仔细分析纽结补空间的 JSJ 分解，并利用定理 1.5 对该分解中双曲块的复杂度进行界定。关于纽结补空间 JSJ 分解的精彩介绍，请参见 [Bud06] 。

定理 *1.6* 的证明。任取一个非平凡结 $J \leq K$。令 Γ_J 表示$S^3\backslash J$ 的 JSJ 图，它是一棵有根树，其中根顶点 $*$ 对应于与 J 相邻的 JSJ 块。每个 JSJ 环面 T 以及尖点边界 $\partial\nu$（J）都有一个典范参数化（m, ℓ），在整体符号变换意义下唯一确定，其特征为

- m （$T \subset S^3$ 的包含 J的补区域中的子午线零调和;
- ℓ （$T \subset S^3$ 的不包含J的补区域中的经线零调和;
- （m, ℓ）构成正定向基，前提是 T 的定向取为其在S^3中所围成的实心环面的边界定向。

对于每个 JSJ 环面 T，我们预先从两个选项中选定一个（m, ℓ）。

反过来，流形 $S^3\backslash J$，因而 J [GL89], , 都可以按自然方式由以下数据唯一确定:

(1) JSJ 图 Γ_J; (2) 对于 Γ_J的每个顶点 v ，一个边界为环面的紧致定向三维流形 M_v ; (3) 对于 Γ_J的每个顶点 v，一个双射 $\pi_0(\partial M_v) \cong E(v)$，若 $v \neq *$，以及 $\pi_0(\partial M_v \backslash \partial\nu(J)) \cong E(v)$，若 $v = *$，其中 $E(v)$是与 v相邻的边的集合; (4) 对于 Γ_J 的每个顶点 v 和 ∂M_v的每个分支 T ，一个由曲线对（m, ℓ）给出的 T 参数化。

我们证明，(1)–(4)中每一项的选择都是有限的。

令 ϕ_J: $F_J \to F_J$ 表示 J的单值化，它沿典范约化系统分解为周期片段和伪阿诺索夫片段。回顾 $g(F_J) = g(J) \leq g(K)$ [Zem19] and$\Delta_J|\Delta_K$ [Gil84]。

(1) 典范约化系统 δ 由 F_J 上的一条多曲线组成，且不含平行分支，因此其大小有界。 $S^3\backslash J$ 中的JSJ环面与 δ 的分支在 ϕ_J作用下的轨道一一对应，因此其数量也有界。由此可知， Γ_J 的大小有界，故有根树 Γ_J 的可能同构类型数量有界。

(3) 可选项的数量显然有限。

(2)(4) 我们将证明分为Seifert纤维化情形和双曲情形。在开始之前，注意到J 在任意一个JSJ环面 T 所围成的实心环面中具有非零绕数。这是因为否则我们可以假设 $F_J \cap T = \emptyset$，这意味着 $\pi_1(F_J) = [\pi_1(S^3\backslash J)\ \pi_1(S^3\backslash J)]$ 包含$\pi_1(T) = \mathbb{Z}^2$ 作为子群，矛盾。

固定Γ_J的一个顶点 v 。

情形1： M_v 是Seifert纤维化。

根据 S^3的塞弗特纤维化子流形的分类， M_v 同胚于以下三个流形族之一 [Bud06]:

- 钥匙链链环补空间 $H_n \subset S^3$, $n \geq 2$，定义为 S^3 中的平凡结，连同其 n条远距子午线。这对应于纽结的连通和操作。（事实上，在这种情况下， v 必定是根顶点。）
- 在 $S^1 \times D^2$ 中的一个（p, q）缆模式的补集，其中 p, q互素，且 $p > 1$。这对应于纽结的（$p, q\prime$）缆结操作，其中 $q\prime \equiv q$ （模 p）。
- 一个（p, q）环面纽结的补集，其中 p, q互素，且 $p, |q| > 1$。这对应于一个$T_{p,q}$ 伴随纽结。

如果 M_v 是钥匙链链环补空间，其复杂度（即参数 n）受 Γ_J的大小限制，而后者有界。边界M_v 上的可用参数化（m, ℓ）在 M_v 的对称性及符号意义下唯一。

如果 M_v 是缆结补空间，则其两个边界环面表明 J 是一个迭代卫星纽结 $J = P(C_{p,\ q}(C))$，其中当 $v = *$时， P 是恒等模式。 M_v 的边界参数化数据由 $(p,\ q)$ 决定，且只差 M_v 的对称性和符号。因此，我们只需界定有序对 $(p,\ q)$ 的复杂度，其中 $p > 1$ 和 $p,\ q$ 互素。

回顾以下初等事实。

引理 5.3. 卫星结的亏格和亚历山大多项式为

$$g(P(C)) = |w(P)|g(C) + \hat{g}(P),\ \Delta_{P(C)}(t) = \Delta_{P(U)}(t)\Delta_C(t^{w(P)}),$$

其中 $w(P)$ 是 P的绕数，而 $\hat{}g(P)$ 是实心环面中以 P 和边界上的 $w(P)$ 条典范经线为边界的可定向曲面的最小亏格。□

根据引理 5.3，我们有

$$\Delta_J(t) = \Delta_{P(U)}(t)\Delta_{T_{p,q}}(t^{w(P)})\Delta_C(t^{pw(P)}).$$

由于 $w(P) \neq 0$, $\Delta_{T_{p,\ q}}(t) = (t^{pq} - 1)(t - 1)/(t^p - 1)(t^q - 1)$，且 $\Delta_J(t)|\Delta_K(t)$ 有界，因此除非 $q = \pm 1$, 这就给出了 $(p,\ q)$ 的复杂度上界。另一方面，引理 5.3 蕴含 $p \leq p \cdot g(C) \leq g(J) \leq g(K)$ 有界，因此无论如何，$(p,\ q)$ 的复杂度都有界。

如果 M_v 是环面纽结补空间，那么其边界环面表明 J 是一个卫星纽结 $J = P(T_{p,\ q})$；若 $v = *$, 则 P 是恒等卫星模式。流形 M_v 连同其边界参数化数据（相差一个符号）由有序对 $(p,\ q)$ 确定，其中 $p,\ |q| > 1$ 互素。根据上述亚历山大多项式上界，$(p,\ q)$ 的复杂度有界。

情形 2： M_v 是双曲的。

（2） $S^3 \backslash J$ 的 JSJ 分解中的双曲块与 ϕ_J 的 Nielsen–Thurston 典范分解中伪阿诺索夫片的映射环面一一对应。由于每个这样的映射环面的纤维曲面具有有界复杂度 $-\chi \leq -\chi(F_J) \leq 2g(K) - 1$, 并且由定理 1.5，单值化的膨胀常数以 $\lambda(J) \leq \lambda(K)$ 为界，因此只可能出现有限多个双曲映射环面。

(4) 首先，我们对 M_v的边界分支上 ℓ 的经线数量进行界定。将纤维曲面F_J 相对于 ∂M_v置于最简位置。此时， F_J 与一个边界$T \subset \partial M_v$ 的交为 T的 w 条平行经线，其中 $w \neq 0$ 是 J 在实心

由 T围成的环面内的绕数，其正负号不影响确定结果。此外， $F_J \cap M_v$ 是Thurston范数最小的，其复杂度上界为 $-\chi(F_J) \leq 2g(K) - 1$。由于 M_v 是双曲的， $H_2(M_v, \partial M_v)$上的Thurston范数非退化，这意味着 $[F_J \cap M_v]$ 可能具有的同调类数量有限。特别地，由 $\partial[F_J \cap M_v] \in H_1(\partial M_v)$确定的分支 ∂M_v上的可能经线数量也有限。

接下来，我们给出 M_v的边界分支上子午线 m 个数的上界。设 T_*， T_1， $\cdots$ T_n 为 ∂M_v的各分支，其中 T_* 是 S^3中最接近 J 的分支。由Fox再嵌入定理（见 [Bud06，命题 2]），以斜率 m 对 $T_* \subset M_v$ 所作的Dehn填补同胚于$\natural^n(S^1 \times D^2)$。由例外手术的界，或更确切地说，当 $n = 0$ 时的纽结补问题[GL89] ，以及当 $n > 0$时边界可约手术的界 [Wu92] ，在 T_*上这样的 m 只有有限多个。若 $n > 0$，一旦选定 T_* 上的子午线 m以及（比如说）T_2， $\cdots$ T_n上的所有经线 ℓ ，则以这些斜率对 M_v所作的Dehn填补具有唯一的边界分支T_1，并且 T_1 上的子午线 m 由其在该填补中为零调和这一性质所唯一刻画（至多差一个符号）。这就证明了 ∂M_v上子午线选取的有限性。□

6. 曲面同胚的算法压缩

本节证明定理 1.9，将 Casson–Long [CL85]（定理 1.8）的主要结果加以推广。当曲面同胚 ϕ: $S \to S$ 的 Nielsen–Thurston分解非平凡时，我们通过仔细逐案分析来完成这一推广。我们指出，[CL85] 只考虑了 S 为闭且连通的情形；不过，针对伪阿诺索夫同胚的相关技巧稍作调整即可推广至有边界的情形，而且为方便起见，也可以去掉连通性假设。

注 6.1. 根据引理 6.10，定理 1.9 中出现的有序对 (S, ϕ) 的对称群的一个生成集也可以计算得到。

6.1. 预备知识与例子。 若 C 不等于积配边 $I \times S$，则 ϕ 的压缩 Φ: $C \to C$ 称为非平凡；若 C 不能分解为两个非平凡压缩的复合，且 Φ 在这两个压缩上均有限制，则称其为极小。

例6.2。 定理1.8中所述的伪阿诺索夫假设是必要的。例如，若 S 有一个分支既不是球面、圆盘、环带，也不是裤子曲面，并且 ϕ 是恒等映射，那么 ϕ 就有无穷多个极小压缩；每个压缩对应于 S 中一个本质简单闭曲线的同痕类。

鉴于例6.2，若要在去掉伪阿诺索夫假设后得到有限性结论，就必须考虑对称性。

若 f: $S \to S$ 是一个曲面同胚，我们将压缩 C 在 ϕ上的推前定义为 f，记作 f_*C；它是 $f_*\phi = f\phi f^{-1}$: $S \to S$的压缩，由 C给出，但其外边界通过 f重新参数化。或者，若 S 连通，则 ϕ 的压缩 C 由 ϕ_*-不变正规子群 $N =$ker$(\pi_1 S \to \pi_1 C)$确定，而 C经 f 推前后，则由（$f_*\phi$）$_*$-不变正规子群 f_*N确定。

若 c: $S \to S$是一个相对边界曲面同胚，且在相对边界同痕意义下与 ϕ: $S \to S$交换，则 $c_*\phi$ 在相对边界意义下同伦于 ϕ；因此，对于 ϕ 的一个压缩 C，推前 c_*C 可以自然地再次视为 ϕ 的一个压缩。(S, ϕ) 的对称群，记为 $C(S, \phi)$，是 S 的相对边界映射类群的子群，其表示

由这样的曲面同胚 c 给出。然后， $C(S,\ \phi)$ 作用在 ϕ 的压缩集合上。 $C(S,\ \phi)$ 的作用，就是我们在定理 1.9 的陈述中所模去的对称性。

由于伪阿诺索夫映射类 $[\phi]$ （满足自由边界条件）的中心化子是由 $[\phi]$ [McC82], and ϕ_* 生成的无限循环群的有限扩张，且其在 ϕ的压缩集合上平凡作用，因此当 ϕ 为伪阿诺索夫时，定理 1.9(1) 等价于定理 1.8(1)。事实上，尽管 ϕ 本身可能不是（$S,\ \phi$）的对称性，因为它可能不是相对边界的，但某个幂 ϕ^N 若平凡置换 π_0（∂S），则它与（$S,\ \phi$）的某个对称性自由同伦。

例 6.3。 设 C 为一个压缩体，其具有 $\partial_i C = T^2$ 和 $\partial_e C = \Sigma_3$，其中 Σ_3 为亏格 3 闭曲面。 [BJM13，引理 3.4] 的证明表明，存在两条简单闭曲线 $\alpha,\ \beta$ 位于 Σ_3 上，并且可在 C 中压缩，使得 $\alpha \cup \beta$ （处于最简位置）填充 Σ_3。根据瑟斯顿[Thu88，定理 7],，围绕 $\alpha,\ \beta$ 作德恩扭转的许多复合（例如 $T_\alpha \circ T_\beta^{-1}$）都是伪阿诺索夫的。由于 $T_\alpha,\ T_\beta$ 各自都可在 C中压缩为 id_{T^2}: $T^2 \to T^2$，因此我们知道，任何此类伪阿诺索夫同胚 ϕ: $\Sigma_3 \to \Sigma_3$都可在 C中压缩为 id_{T^2}。由于 T^2有无穷多个简单闭曲线同伦类，我们得到 ϕ的无穷多个把手体压缩。此例表明定理 1.8 中的极小性假设是必要的，因此鉴于上一段，定理 1.9 中的极小性假设也同样必要。

例 6.4. 设 S 是一个边界非空的曲面，且 ϕ: $S \to S$ 是一个伪阿诺索夫同胚。令 $D(S)$ 表示沿边界对 S 作双倍所得的曲面，并令 $D(\phi)$: $D(S) \to D(S)$ 表示对 ϕ 作双倍所得的同胚。那么， $D(\phi)$ 是一个可约曲面同胚，具有两个尼尔森–瑟斯顿分块，并且在把手体 $I \times S$ 中可压缩。事实上，从下一节的论证将可知， $I \times S$ 是 $D(\phi)$ 的一个极小压缩；特别地，该压缩并非支撑在单个尼尔森–瑟斯顿分块上。此例表明，定理 1.9 不能直接归结为周期情形和伪阿诺索夫情形。

6.2. **极小压缩的有限性**。 在第 6 节余下部分中，不失一般性地假设 ϕ: $S \to S$ 在 S 的连通分支集合上传递作用。于是，若 $S \neq \emptyset$，则 ϕ 的压缩与将 $\phi^{\#\pi_0(S)}$ 限制在 S 的某个连通分支上所得映射的压缩之间存在自然的一一对应；因此，我们还可进一步假设 S 连通。 S 为空集、圆盘、球面或环带的情形都很简单，因此假设 $S \neq \emptyset$ 是双曲的。

令 $\delta \subset S$ 表示 ϕ 的典范约化系统: $S \to S$。记 $S \backslash \nu(\delta) = \sqcup_{i=1}^{\ell} S_i$ ，使得 ϕ （经过一次同痕后）在每个 S_i 上限制为周期同胚或伪阿诺索夫同胚，并循环置换其分支。根据假设，每个 S_i 的每个分支都是双曲的。

定理 *1.9(1)* 的证明。令 Φ: $C \to C$ 是 ϕ 的极小压缩。

选取一条本质（简单闭）曲线 $\gamma \subset S$ ，它在 C 中可压缩，且与 δ 一般相交，并使 $|\gamma \cap \delta|$ 最小化。通过对 γ 和 ϕ 的某个幂作用下 γ 的（拉紧）迭代应用精细的切割粘贴论证，我们将证明 $|\gamma \cap \delta| \in \{0,2,4\}$，随后证明 $|\gamma \cap \delta| = 4$ 不可能出现。然后我们讨论 $|\gamma \cap \delta| = 0$ （根据 γ 是否平行于典范约化曲线、本质包含于周期部分，或本质包含于伪阿诺索夫片段，分为三种子情形）和 $|\gamma \cap \delta| = 2$ （分为三种子情形，由此在压缩体 C 中形成乘积区域或扭曲乘积区域）。在六种保留下来的子情形中，压缩在对称性意义下由有限数据确定，从而得到所需的有限性。之后，第 6.3 节将在该证明的基础上，描述 C 的六种不同形式。

在补区域 S_i 上选取边界全测地的双曲度量，并在 $\nu(\delta)$ 上选取欧几里得度量，使得 δ 是测地线。我们可以将 γ 拉紧，使其在每个 S_i 上都垂直于边界且为测地线，并且在 $\nu(\delta)$ 上为测地线（如果 γ 上有平行弧在此过程中被识别为同一条弧，则将它们稍微拨开，以确保 γ 仍然是一条简单闭曲线）。

选取 $N>0$，使得 ϕ^N 保持 $\partial\nu(\delta)$ 的每个分支不变（因而也保持 $S\backslash\nu(\delta)$ 的每个分支不变），并且 ϕ^N 在 ϕ 的周期片上限制为恒等映射。选取一个足够大的 $q>0$。按照前面相同的步骤，将 $\phi^{Nq}(\gamma)$ 拉紧到某条简单闭曲线 γ_q 上。然后在周期片的一个邻域内对 γ_q 做轻微扰动，使得 γ，γ_q，δ 两两处于最简位置。

如果 $\gamma\cap\delta$ 非空，那么要么 γ 进入 S 的某个伪阿诺索夫片段；要么 γ 与 $\phi^{Nq}(\gamma)$ 相差一个沿 S 上某条多曲线进行的非平凡多重扭转，该多曲线由 δ 中与 γ 相交的分支的若干副本组成。在第一种情况下，当 q 足够大时，$\gamma\cap\gamma_q$ 非空。在第二种情况下，对于 $q\geq 2$，$\gamma\cap\gamma_q$ 非空，因为在这种情况下，γ 与 $\phi^{Nq}(\gamma)$ 在 $\nu(\delta)$ 上的某个交无法通过扰动消除。

根据假设，γ、γ_q 分别界定了 C中的圆盘 D、D'。由于 C不可约，在必要时对D' 进行相对边界的同痕变换后，我们可以假设 D 与 D' 横截相交，且交集是不交并的双弧。若 e 是 D上最内侧的一条双弧，即存在某条弧 $\alpha\subset\gamma$，使得 $\partial\alpha=\partial e$ 与 $int(\alpha)\cap\gamma_q=\emptyset$，那么我们可以选取一条弧 $\beta\subset\gamma_q$，使得 $\partial\beta=\partial e$与 $|\beta\cap\delta|\leq\frac{1}{2}|\gamma_q\cap\delta|=\frac{1}{2}|\gamma\cap\delta|$，并沿 e 进行切割粘贴，从而得到一条本质曲线$\gamma':=\alpha\cup\beta\subset S$，且该曲线在 C中可压缩。除非每条这样的 ∂D 上的最内侧 α（以及 $\partial D'$上的最内侧 β）都与 δ恰好相交 $\frac{1}{2}|\gamma\cap\delta|$ 次，否则对 α的某种选择将与 $|\gamma\cap\delta|$的极小性矛盾。此外，若 $\gamma\cap\gamma_q$ 在 δ 附近包含一个点（即位于 $\nu(\delta)$ 内，或者等价地，γ、γ_q、δ 共同界定一个三角形），那么我们可以将该点移到 δ 的另一侧，从而安排存在某条最内侧的 α，这将与 $|\gamma\cap\delta|$的极小性矛盾。因此，在 $\gamma\cap\delta\neq\emptyset$的情形下，

- $D\cap D\prime$ 由位于 D 上的平行弧组成（分别地，$D\prime$）；
- $\gamma\cap\delta=A\sqcup B$ 对于某些集合 A,B，它们的基数相同，且每条双弧都将 D 分成两部分，分别包含 A 和 B；γ_q 的情形类似；
- $\gamma\cap\gamma_q$ 中没有交点靠近 δ。

因此，当 $\gamma\cap\delta\neq\emptyset$ 时，所有交点 $\gamma\cap\gamma_q$ 基本上都位于 $S\backslash\nu(\delta)$ 的某些连通分支 Σ_1,Σ_2（不一定彼此不同）中，其中 Σ_1 中的交点与 Σ_2 中的交点一一对应，该双射由 $D\cap D'$ 中的弧给出。此外，Σ_1 和 Σ_2 都包含在 S 的伪阿诺索夫片段中，否则交点就会靠近 δ。当 $|\gamma\cap\delta|=4$ 时的示意图见图2。交集 $\gamma\cap\partial(\nu(\delta))$ 将 γ 分成依次位于 $\Sigma_1,\nu(\delta_1)$ $\Sigma_1',\nu(\delta_1')\cdots$ $\Sigma_r',\nu(\delta_r')$ $\Sigma_2,\nu(\delta_2)$ $\Sigma_1'',\nu(\delta_1''),\cdots$ $\Sigma_r'',\nu(\delta_r'')$ 中的线段，其中 Σ_i',Σ_i'' 是 $S\backslash\nu(\delta)$ 的某些连通分支，而 $\delta_1,\delta_2,\delta_i',\delta_i''$ 属于 δ, $i=1,\cdots r$, $r\geq 0$。对 γ_q 也有相同的描述。由于 Σ_i' 中的 $\gamma\cap\gamma_q$ 与 Σ_i'' 之间没有交点，取足够大的 q 可知，所有 Σ_i' 和 Σ_i'' 都包含在 S 的周期部分中。此外，取 $q\geq 2$ 后可知 $r\leq 1$，否则 γ 和 γ_q 会在 δ_1' 附近相交。

我们由此特别证明了，$|\gamma\cap\delta|\in\{0,2,4\}$。事实上，我们将在证明的后文中进一步排除情形$|\gamma\cap\delta|=4$。

情形1：$|\gamma\cap\delta|=0.$

Ca引理 1.1：γ 与 δ 的某个分支 δ_1 或 ∂S的某个分支 $\partial_1 S$ 平行　　.

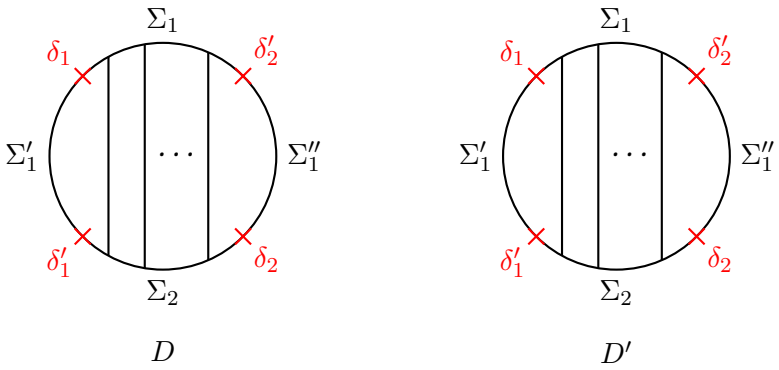


图2. 圆盘 D, D' 及其双弧和边界数据，见情形$|\gamma \cap \delta| = 4$。分支 Σ_1, Σ_2 是伪阿诺索夫的，而分支 Σ_1', Σ_1''是周期的。

那么， C 就是压缩体，它可压缩多曲线 $\cup_{i\geq 0}\phi^i$（δ_1）的每个分支 $\subset S$，或多曲线 $\cup_{i\geq 0}\phi^i$（$\partial_1 S$）的每个分支（稍微向内推移后） $\subset S$。

情形 1.2： γ 本质包含于 S的某个周期部分 S_1 中。

在 S_1 上取一个在周期映射 $\phi_1 := \phi|_{S_1}$ 作用下不变的双曲度量，使得 γ 是测地线。我们可以假设选取的 γ 长度最小。于是，依照前述切割粘贴论证（参见 [Bon83，引理 4.2]），每个 $\phi_1^i(\gamma)$ 要么与 γ 不相交，要么与 γ 完全相同。因此， C 是压缩体，它可压缩多曲线 $\cup_{i\geq 0}\phi^i(\gamma)$的每个分支。

还需证明，这类 γ 在 S_1 上的数量在(S_1, ϕ_1)的对称性下仅有限，即在与 ϕ_1 在相对边界同痕意义下对易的 S_1 的相对边界同胚下仅有限（注意，这样的同胚可通过恒等映射延拓为(S, ϕ)的一个对称性）。事实上，我们构造的同胚将与 ϕ_1严格对易。

令 K 表示 ϕ_1的周期。则 ϕ_1 是 K重循环覆盖 π: $S_1 \to S_1$的甲板变换群的正生成元，其中 S_1 表示轨形 S_1/ϕ_1。曲线 γ 映射到 $\bar{\gamma} = \pi(\gamma) \subset S_1$中的一条本质简单闭曲线。还需证明，在 S_1 上，能够提升为 S_1的相对边界同胚的简单闭曲线在同胚下仅有有限多个。

考虑 S_1的相对边界同胚群 $G_0 = \text{Homeo}_\partial^+(S_1)$、其子群 G_1 （由能够提升到S_1的同胚组成），以及其子群 G_2 （由能够提升为 S_1的相对边界同胚的同胚组成）。由于 S_1的 K重覆盖仅有有限多个，我们知道 G_1 在 G_0中具有有限指数。由于与$\pi|_{\partial S_1}$交织的 ∂S_1 的自同构仅有有限多个，我们知道 G_2 在 G_1中具有有限指数。现在，由于S_1 中一条简单闭曲线的补集的拓扑类型受到限制，因此 S_1 中的简单闭曲线在 G_0下仅有有限多个。由此， S_1 中的简单闭曲线在 G_2下也仅有有限多个，证毕。

情形 1.3： γ 本质包含于 S的某个伪阿诺索夫片段 S_1 中。

在 $int(S_1)$ 上固定一个完备双曲度量，并令 γ 为测地线。 [CL85 定理 1.2] 的证明可推广到带 puncture 的情形，并表明 γ 的长度有一个上界，该上界仅取决于 $\phi|_{S_1}$ 和该度量。这意味着此类 γ 的数量有限，因此根据 [CL85 推论 2.5]，包含此类 γ 的极小压缩 C 也只有有限个。

情形 2：　$|\gamma \cap \delta| = 2$。

如有必要，再进行一次切割粘贴操作，为便于记号，我们不妨假设$\delta_1 = \delta_2$。

情形 2.1：　$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$。

可以看出，在这种情况下，奇异曲面 $D \cup D'$ 与 $I \times ((\gamma \cup \gamma_q) \cap \Sigma_1)$同胚。

我们可以假设 q 足够大，使得 γ 和 γ_q 填满 $\Sigma_i, i = 1, 2$，也就是说，它们在 Σ_i 中的并集的每个补区域，要么是一个与 $\partial\Sigma_i$ 的交至多有一个分支的圆盘，要么是一个边界分支的环形邻域。除少数特殊情形外，可以从 [MM99，命题 4.6] 推出这一事实。该命题指出，伪阿诺索夫同胚（作用于既非四 puncture 球面也非单 puncture 环面的曲面上）在曲线复形上具有正平移长度；而 [MS13，引理 4.10]指出，曲线复形拟等距地嵌入弧与曲线复形。

$D \cup D'$ 中与 D_0 相邻的闭面之并，是 $\gamma \cup \gamma_q$ 在 Σ_1（分别为 Σ_2）中的补集的一个内部圆盘分支，其边界为 $\partial D_0 \sqcup \gamma'$，其中 γ' 是 Σ_2（分别为 Σ_1）上的一条简单闭曲线。由于 γ' 在 C中可压缩，因此它在 S上必然是平凡的，从而在 Σ_2（分别为 Σ_1）上也是平凡的。因此，$\nu(S \cup D \cup D')$的内边界包含若干球面，每个球面都包含 $\gamma \cup \gamma_q$ 在 Σ_1 中的补集的一个内部圆盘分支，以及 Σ_2中的一个这样的圆盘分支。用球填充这些球面后，我们看到一个乘积区域 $I \times \Sigma_1$，$\to C$，其两侧分别由 Σ_1 和 Σ_2围成。$\nu(S \cup D \cup D')$的内边界还有另外四个球面分支，每个都包含 $\gamma \cup \gamma_q$ 在 Σ_1 中的补集的一个边界圆盘分支，以及Σ_2中的一个这样的圆盘分支。同样用球填充这些球面后，我们像之前一样得到 C 中的一个乘积区域 $I \times \Sigma_1$，但此时其边界的 $I \times \partial_1\Sigma_1$ 部分粘合到 $\nu(\delta_1)$ 上，其中 $\partial_1\Sigma_1$ 是 Σ_1 中与 $\nu(\delta_1)$ 相邻的边界分支。这个乘积区域产生一个压缩体 $C_{00} \subset C$，其外边界为 S。

注意，$\phi^i(\Sigma_1) = \Sigma_1$ 当且仅当 Σ_2，因为否则，对由 γ 和大 q 时的 $\phi^{i+Nq}(\gamma)$ 围成的圆盘施行切割粘贴操作，会使 $|\gamma \cap \delta|$ 减小。因此，$C'' := \cup_{i \geq 0}\Phi^i(C_{00}) \subset C$ 的并是一个压缩体，其外边界为 S，由互不相交的乘积区域 P_i 组成；这些乘积区域分别以 $\phi^i(\Sigma_1)$ 和 $\phi^i(\Sigma_2)$、$i = 0$、1、$\cdots$、$M - 1$ 为界，其中 M 是满足 $\phi^M(\Sigma_1) = \Sigma_1$ 或 Σ_2 的最小整数。与某个 $\phi^j(\nu(\delta_1))$ 相邻的乘积区域 P_i 的竖直环带边界，会与这样的 $\phi^j(\nu(\delta_1))$ 粘合。由于 Φ 限制在 C'' 上，且 C 是最小的，我们可知 $C'' = C$。

压缩体 C 由乘积区域 P_0决定，而乘积区域又由反向定向曲面同胚 θ决定：$\Sigma_1^+ \to \Sigma_2^+$ 其中，Σ_i^+ 是 Σ_i 与 $S \backslash int(\Sigma_i)$ 中由 $\cup_{j \geq 0}\phi^j(\delta_1)$、$i = 1,2$ 所界定的边界环带的并。Σ_i^+ 的一个边界称为**固定边界**，如果它是某个 $\phi^j(\delta_1)$ 的副本；否则称为**自由边界**，$i = 1,2$。曲面同胚 θ 在 Σ_1^+, Σ_2^+（二者有典范的同一识别）固定边界上的限制为恒等映射，并且视为在固定边界上限制为恒等映射的同痕意义下等价。接下来要证明，对于任意固定的 $\Sigma_1, \Sigma_2, \delta_1$，此类 θ: $\Sigma_1^+ \to \Sigma_2^+$在对称性意义下等价的情形只有有限多个。

情形 2.1.1：　$\phi^M(\Sigma_1) = \Sigma_1$。

我们首先证明以下引理。

引理 6.5. 设 Σ 是一个紧致定向曲面，且 α、β: $\Sigma \to \Sigma$ 是保定向曲面同胚。此外，假设 α 相对边界，且 β 对边界分支的置换是平凡的。若 $[\alpha, \beta]$ 同伦于 恒等映射，则它同伦于相对边界的 恒等映射 。

证明。不失一般性，假设 Σ 非空且连通。通过在边界处添加同痕的领，我们可以假设 β 也相对边界。根据假设，$[\alpha,\beta]$ 相对边界同伦于某个多重扭转 $T_1^{n_1}\cdots T_k^{n_k}$，其中 T_i 是沿 Σ 的第 i 个边界分支的德恩扭转。反设 $T_1^{n_1}\cdots T_k^{n_k}$ 不同伦于相对边界的恒等映射。那么，必要时通过封闭 Σ 的某些边界分支，我们可以假设 $k=1$、$n_1\neq 0$，且 Σ 不是圆盘。

情形*1*：Σ 的亏格为 0。

通过封闭除前两个边界分支以外的所有边界分支，我们可以假设 $\Sigma = I\times S^1$。这会导出矛盾，因为 Σ 的相对边界映射类群由德恩扭转生成。

情形*2*：Σ 的亏格为 1。

通过封闭除第一个边界分支以外的所有边界分支，我们可以假设 Σ 只有一个边界。于是，根据 Birman–Hilden理论，Σ 的相对边界映射类群与三股辫群 B_3同构；参见 [FM11，定理 9.2]。此外，在此同构下，Σ 上的边界德恩扭转对应于 B_3中全扭转的平方，其在阿贝尔化映射 $B_3\to (B_3)_{ab}\cong\mathbb{Z}$ 下映为 12；该映射通过对 Artin生成元的词中的指数求和给出。特别地，边界德恩扭转的任何幂都不属于映射类群的换位子子群，这就导出了矛盾。

情形 *3*：Σ 的亏格至少为 2。

根据 [BKM13，关于换位子长度的定理 2]（或者 [Bay14]，可参见一个不涉及规范理论的证明），$T_1^{n_1}$不是（相对边界）映射类群中的一个换位子，这就产生了矛盾。□

我们回到情形 2.1.1 的证明。设 θ,θ' 是两个相对于固定边界的反向定向同胚，它们在某些极小压缩 C,C' 中产生乘积区域 P_0,P_0'，如上所述。我们断言，如果 θ,θ' 诱导相同的映射 $\pi_0(\partial\Sigma_1^+)\to\pi_0(\partial\Sigma_2^+)$（这类映射只有有限多个），那么 C,C' 可通过 (S,ϕ) 的一个对称性相互关联。

为此，对固定边界进行同伦变形，使得 $\theta|_{\partial\Sigma_1^+}=\theta'|_{\partial\Sigma_1^+}$。令 k 为使 $\phi^{kM}|_{\Sigma_1}$ 平凡地置换 Σ_1 的边界分支的最小正整数。

由于 ϕ^M 限制为 Σ_1 和 Σ_2，Φ^M 限制为乘积区域 P_0 上的映射并保持Σ_i^+，$i=1$，2。由于 P_0的顶端和底端通过 θ识别，我们知道 $\phi^M|_{\Sigma_1^+}$同伦于、因而同痕于$\theta^{-1}\circ\phi^M|_{\Sigma_2^+}\circ\theta$，相对固定边界。$\theta'$也同样成立。因此，相对边界的同胚 $\alpha:=\theta^{-1}\circ\theta'\colon\Sigma_1^+\to\Sigma_1^+$与$\beta_0:=\phi^M|_{\Sigma_1^+}$在相对固定边界的意义下，至多相差同痕而交换。由此，$[\alpha,\beta_0]$同痕于某个多重扭转 $\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^{k_i}T^{n_i}_{i,j}$，$_{i,j}$，其中 i遍历 β_0作用下Σ_1^+的自由边界分支的轨道，j按（循环）顺序遍历第 i个轨道中的自由边界分支，而$T_{i,j}$是沿 Σ_1^+的第（i，j）个自由边界分支的德恩扭转。令 $\beta:=\beta_0^k$，根据假设，它是一个将边界分支逐个保持不变的 Σ_1^+的曲面同胚。由于$\beta_0T_{i,j}\beta_0^{-1}$同痕于相对边界的$T_{i,j+1}$，我们看到，对于$N_i=\frac{k}{k_i}\sum_{j=1}^{k_i}n_{i,j}$，$i=1,\cdots r$，$[\alpha,\beta]$相对边界同痕于$\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^{k_i}T_{i,j}^{N_i}$。另一方面，根据引理 6.5，$[\alpha,\beta]$相对边界同痕于恒等映射。由于 Σ_1^+是双曲的，边界德恩扭转线性无关，这意味着对所有 i，$N_i=0$。现在，通过对 θ' 作相对固定边界的同痕，我们可以用 $\theta''\colon=\theta'\prod_{i=1}^r\prod_{j=1}^{k_i}T^{r_{i,j}}_{i,j}$替换 θ'，其中$r_{i,j}=\sum_{s=j+1}^{k_i}n_{i,s}$。于是 $\alpha':=\theta^{-1}\circ\theta''$与$\beta_0=\phi^M|_{\Sigma_1^+}$在相对边界的意义下，至多相差同痕而交换。现在，定义一个相对边界的曲面同胚 $c\colon S\to S$，令其为 $\phi^i\circ\alpha'\circ\phi^{-i}$

在 $\phi^i(\Sigma_1^+)$ 上，$i=0,\ 1,\ \cdots\ M-1$，并将其通过恒等映射延拓到 S的其余部分。于是 c与 ϕ在相对边界的意义下，至多相差同痕而交换，因此定义了（$S,\ \phi$）的一个对称性。容易验证 $c_*C'=C$，从而证明了该断言。

情形 2.1.2：　$\phi^M(\Sigma_1)\ =\Sigma_2$。

我们首先证明　以下引理，其算法部分直到第 6.4 节才会用到　　.

引理 *6.6*。*</style}*设　S　是一个无边界、带有（可能为空的）尖点的连通定向双曲曲面，且　f　是　S 上的一个伪阿诺索夫映射类。存在一种算法，可输出　S 上所有满足　$a^2=f$ 的映射类　a，无论其保定向与否。特别地，这样的映射类　a 至多只有有限多个。

证明。我们按照[Ago11],的意义，计算　f 的稳定层状结构的周期分裂序列。这是一个由测度火车轨道组成的双无限序列 $\cdots\ \rightharpoonup(\tau_0,\mu_0)\ \rightharpoonup(\tau_1,\mu_1)\ \rightharpoonup(\tau_2,\mu_2)\ \rightharpoonup\cdots$，其中各项通过极大分裂 S相关联，并具有某个周期　$n\ =\ n(f)\ \geq\ 1$，使得对所有　m均有$f_*(\tau_m,\mu_m)\ =\lambda(\tau_{m+n},\mu_{m+n})$，其中 $\lambda=\lambda(f)\ >0$ 是 f的膨胀率。周期分裂序列 $\{(\tau_m,\mu_m)\}_m$ 在缩放和指标平移意义下是良定义的。若 c 是任意一个与 f 可交换的映射类，无论其是否保定向，则$\{c_*(\tau_m,\mu_m)\}_m$是 f的另一个周期分裂序列。因此，根据唯一性，对于所有　m，必有 $c_*(\tau_m,\mu_m)\ =r(\tau_{m+k},\mu_{m+k})$，其中存在某个　$r=r(c)>0,\ k=k(c)\ \in\mathbb{Z}$。

如果　$a^2=f$，那么　a与　f可交换，由上面的讨论可知

$$\lambda(\tau_n,\mu_n)=f_*(\tau_0,\mu_0)=(a_*)^2(\tau_0,\mu_0)=r(a)^2(\tau_{2k(a)},\mu_{2k(a)}).$$

由于不同的 $(\tau_m,\ \mu_m)$ 永远不会在缩放意义下相等，我们必须有　$k(a)\ =n(f)/2$，　$r(a)\ =\sqrt{\lambda(f)}$。如果　$\overline{n(f)}$ 是奇数，则不存在这样的　a；如果　$n(f)$ 是偶数，则可以通过求解 $a_*(\tau_0,\ \mu_0)=\sqrt{\lambda(f)}(\tau_{n(f)/2},\ \mu_{n(f)/2})$，找出所有可能的此类　a。然后在这个列表中检验哪些是真正的解。□

由于　ϕ^M 限制在　$\Sigma_1\cup\Sigma_2$ 上，　Φ^M 限制为乘积区域　P_0 上的一个映射，并交换 Σ_1^+ 和 Σ_2^+。由此可知，　$\phi^M|_{\Sigma_1^+}$ 同伦于　$\theta\circ\ \phi^M|_{\Sigma_2^+}\circ\ \theta$，相对固定边界。利用　$\phi^M|_{\Sigma_2^+}$ 将 $\Sigma_2^+=\Sigma_1^+$ 视为同一对象，这可以改述为：反向同胚θ：$\Sigma_1^+\ \rightarrow\ \Sigma_1^+$ 满足　θ^2 在相对固定边界的同痕意义下同伦于　$\phi^M|_{\Sigma_1^+}$。根据引理 6.6，此类　θ　在同痕意义下的个数有限，但不一定相对边界。

假设　θ,θ'：　$\Sigma_1^+\ \rightarrow\Sigma_2^+$是相对固定边界的映射，且二者同伦（不一定相对边界），分别产生压缩　$C,$ C' 和　ϕ。我们声称，　C 与　C' 通过 (S,ϕ) 的一个对称性相关联。

经由　$\phi^M|_{\Sigma_2^+}$ 对　$\Sigma_2^+\ =\Sigma_1^+$ 进行识别后，　θ,θ' 各自根据　ϕ^M 对 Σ_1^+ 的固定边界分支作循环置换。根据假设，　θ'：　$\Sigma_1^+\ \rightarrow\Sigma_1^+$与某个 $\theta\prod_{j=1}^k T_j^{n_j}$ 在相对固定边界的意义下同伦，其中　k　是　Σ_1^+ 的固定边界数，而　T_j 是沿　Σ_1^+ 的第　j 个固定边界分支的边界德恩扭转；边界按照相对于　ϕ^M 的循环顺序排列。由于　θ 是反向定向的，　$\theta\circ T_j\circ\theta^{-1}$ 与　T^{-1} 同伦

固定边界。由此可知，$(\theta')^2$ 相对于固定边界同伦于 $\theta^2\prod_{j=1}^k T_j^{n_j-n_{j+1}}$。根据假设，这意味着$n_j\overset{j+1}{=}n$ 相对于依赖于 j。现在可以验证，多重扭转$c:=\prod_{i=0}^{M-1}(\phi^i\circ(\prod_{j=1}^k T_j)^n\circ\ \phi^{-i})$是$(S,\phi)$的一个对称性，它将 C' 与 C 联系起来，从而证明了该断言。

情形 2.2：　$\Sigma_1=\Sigma_2$。

这是 与情形 2.1.2 类似，只需稍作修改。我们重复如下论证 s.

与之前一样，对于较大的 q、γ 和 γ_q，填充 Σ_1。与 D_0 相邻的 $D \cup D'$ 的闭面之并，是一个边界为 $\partial D_0 \cup \gamma'$ 的环带，其中 γ' 是某个平凡环（它不可能是边界为 ∂D_0的莫比乌斯带，否则我们会在 C中找到一个嵌入的 $\mathbb{RP}^2$，这与压缩体是 $\mathbb{RP}^2$-不可约的矛盾）。现在，我们看到 ν（$S \cup D \cup D'$）的内边界上有一些球面分支，每个分支都包含 Σ_1中 $\gamma \cup \gamma_q$ 的补集的两个内部圆盘分支。另有四个球面分支，每个分支都包含 Σ_1中 $\gamma \cup \gamma_q$ 的补集的两个边界圆盘分支，分别位于 δ_1 的两侧。用球填充所有这些球面后，我们得到一个扭曲的 I丛区域，其边界为 Σ_1；与 δ_1 对应的竖直环带边界分支粘合到 $\nu(\delta_1)$。这个乘积区域产生一个压缩体 $C_{00} \subset C$，其外边界为 S。

并集 $C'' := \cup_{i \geq 0} \Phi^i(C_{00}) \subset C$ 是一个压缩体，其外边界 S 由互不相交的扭曲 I丛区域 P_i 组成，这些区域 $\phi^i(\Sigma_1)$，$i = 0, 1, \cdots M-1$，其中 M是满足 $\phi^M(\Sigma_1) = \Sigma_1$的最小整数。乘积区域 P_i 的一个环带边界与某个 $\phi^j(\nu(\delta_1))$相邻，并粘合到这样的 $\phi^j(\nu(\delta_1))$上。根据 C的极小性，我们再次得到 $C'' = C$。

压缩体 C 由乘积区域 P_0决定，而后者又由保向反转自由对合 ι决定：$\Sigma_1^+ \to \Sigma_1^+$由 P_0诱导，其中 Σ_1^+是 Σ_1与 $S \backslash int(\Sigma_1)$中的边界环带的并，这些边界环带由 $\cup_{j \geq 0} \phi^j(\delta_1)$界定；但将每个 $\phi^j(\delta_1)$ 替换为自身的两个副本，并分别与一侧的环带粘合。因此，映射 $\Sigma_1^+ \to S$ 在每个 $\phi^j(\delta_1)$上都是二对一的，而在其他地方是一个嵌入。Σ_1^+ 的一个边界若是某个 $\phi^j(\delta_1)$的副本，则称为**固定边界**；否则称为**自由边界**。对合 ι 是相对于 Σ_1^+ 的固定边界而言的（在这些边界上存在一个交换 $\phi^j(\delta_1)$副本的规范对合），并且视为在相对于固定边界的同痕下、模共轭等价。还需证明，对于任意固定的 Σ_1, δ_1，这样的 $\iota: \Sigma_1^+ \to \Sigma_1^+$在对称性的意义下只有有限多个。

我们证明以下引理。

引理 6.7。*设 S 是无边界的连通定向双曲曲面，具有（可能为空的）尖点，且 f 是 S 上的伪阿诺索夫映射类。存在一种算法，可输出 S 上所有满足 $a^2 = [f, a] =$ 恒等 的映射类 a，无论其是否保定向。特别地，这样的映射类 a 至多只有有限多个。*

*证明。*我们沿用引理 6.6 中的方法。设 $\{(\tau_m, \mu_m)\}_m$ 是 f 的稳定层状结构的周期分裂序列。通过求解 $\iota_*(\tau_0, \mu_0) = (\tau_0, \mu_0)$ 并重新检查条件，即可找到引理中所述的所有 ι。□

由于 ϕ^M 限制在 Σ_1 上，Φ^M 限制在扭曲乘积区域 P_0 上。因此，$\phi^M|_{\Sigma_1^+}$ 与 $\iota^{-1} \circ \phi^M|_{\Sigma_1^+} \circ \iota$ 在固定边界相对同伦。根据引理 6.7，这类对合的 ι 在同痕意义下只有有限多个，且不必相对边界。

假设 ι，ι'：$\Sigma_1^+ \to \Sigma_1^+$是相对于固定边界的映射，且它们同伦（不一定相对边界），分别导出 ϕ 的压缩 C，C'。我们声称 C 和 C' 通过 (S, ϕ) 的一个对称性相关联。

根据假设，ι'与某个 $\iota \prod_{j=1}^k T_j^{n_j}$ 在固定边界处同伦，其中 k是 Σ_1^+ 的固定边界分支数，而 T_j 是沿第 j 个边界分支的边界德恩扭转。由 $(\iota')^2 = \iota^2 = \mathrm{id}^{\Sigma_1^+}$，以及 ι, ι' 都与 ϕ^M 在固定边界处同痕至同伦这一事实，采用与情形 2.1.2 中类似的论证可知，$n_j = n$ 与

j无关。现在可以验证，多重扭转 $c:=\prod_{i=0}^{M-1}(\phi^i\circ(\prod_{j=1}^{k}T_j)^n\circ\phi^{-i})$ 是 (S,ϕ) 的一个对称性，将 C' 与 C联系起来，从而证明该结论。

案例 3：$|\gamma\cap\delta|=4$。

见图2。如有必要，再进行一次剪切粘贴操作后，我们可以假设 $\delta_1=\delta_2'$、$\delta_2=\delta_1'$、$\Sigma_1'=\Sigma_1''$，并且 $\gamma\cup\gamma_q$ 与 Σ_1' 相交于 4 条平行本质弧 σ_1，$\cdots$ σ_4，顺序如此，且每条弧都平行于某个 σ。我们构造一条与 δ 不相交的本质曲线 γ'，它在 C 中可压缩，这与 $|\gamma\cap\delta|$的极小性矛盾。

情形 3.1：$\Sigma_1\neq\Sigma_2$。

与情形 2.1 中一样，对于较大的 q，γ 和 γ_q 填充 Σ_i、$i=1$，2，并且 $D\cup D'$ 同胚于 $I\times((\gamma\cup\gamma_q)\cap\Sigma_1)$。在 $\nu(S\cup D\cup D')$ 的内边界上，有若干球面分支，每个分支都包含 Σ_1 上的一个内部圆盘和 Σ_2 上的一个内部圆盘；另有三个球面分支，每个分支都包含 Σ_1 上的一个边界圆盘分支、Σ_2 上的一个边界圆盘分支，以及由 σ_i 和 σ_{i+1} 围成的 Σ_1' 上的环带区域，其中 $i\in$ 属于{1，2，3}。填入这些球面后，得到一个压缩体 $C_{00}\subset C$，其外边界为 S；它由一个以 Σ_1、Σ_2 为边界的乘积区域，以及一个额外的 2- 柄组成，该 2- 柄沿着 σ 与乘积区域垂直边界上的一条弧的并附着。

我们看到，本质简单闭曲线 γ':$=\sigma_+\cup\delta_{1,\ 0}\cup\sigma_-\cup\delta_{2,\ 0}$是一条本质包含于 Σ_1' 中的曲线，且在 C中可压缩；其中 $\sigma_\pm$ 是 σ的两个平行副本，而 $\delta_{i,\ 0}\subset\delta_i$ 是 δ_i 上连接 δ_i上 σ_+ 和 σ_- 端点的较长子弧，$i=1$，2。

情形 3.2：$\Sigma_1=\Sigma_2$。

与情形 2.2 中一样，对于较大的 q，γ和 γ_q 填入 Σ_1。填补 $\nu(S\cup D\cup D')$的球面分支后，得到一个压缩体 $C_{00}\subset C$，其外边界 S 由一个扭曲的 I丛区域（其边界为 Σ_1 ）以及一个沿着 σ 与扭曲积垂直边界上的一条弧的并集附加的 2-柄构成（特别是，$\delta_1\neq\delta_2$）。与情形 3.1 中完全相同地给出的本质简单闭曲线 γ' 本质包含于 Σ_1'中，并且在 C中可压缩。□

6.3. **极小压缩的典范形式**。根据第 6.2 节中的证明可知，双曲曲面 S 上的曲面同胚 ϕ （其典范约化系统为 $\delta\subset S$）的每个极小压缩都具有以下形式之一：

1.1 对 $\cup_{i\geq0}\phi^i$（γ）的每个分支都进行压缩的压缩，其中 γ 是$\delta\cup\partial S$ 的某个分支，并且 $S\backslash\nu$（δ）中没有任何平面分支恰有除一个边界分支外的所有边界分支都包含在 $\cup_{i\geq0}\phi^i$（ν（γ））中。（在下文对压缩的描述中，球面分支均假定已用球填充。）

这对应于第 6.2 节中的**情形1.1** 。可以验证，关于平面分支的这一附加假设，是压缩为极小压缩的充要条件。充分性显然。为证明必要性，注意如果 $S\backslash\nu$（δ）的某个平面分支违反了该条件，即只有一个对应于 $\gamma'\subset\delta\cup\partial S$ 的边界分支不包含在 $\cup_{i\geq0}\phi^i$（γ）中，那么要么每个 ϕ^i（γ）在两侧都邻接 $S\backslash\nu$（δ）中的同一平面部分，此时由 γ' 确定的压缩给出一个真子压缩；要么 #π_0（$\cup_{i\geq0}\phi^i$（γ））>#π_0（$\cup_{i\geq0}\phi^i$（γ'）），此时我们可以用 γ' 替换 γ，并通过归纳证明其非极小性。

1.2 对包含在 S 的某个周期片段中的某条本质（非 ∂-平行）简单闭曲线 γ，使 $\cup_{i\geq0}\phi^i(\gamma)$的每个分支均可压缩的压缩，使得

- 每个 $\phi^i(\gamma)$要么与 γ 不相交，要么与 γ相同；
- 不存在一条非平凡的简单闭曲线 $\gamma\prime \subset S$ （可能 ∂-平行），它与 $\cup_{i\geq 0}\phi^i(\gamma)$ 不相交，且每个 $\phi^i(\gamma\prime)$ 要么与 $\gamma\prime$ 不相交，要么与 $\gamma\prime$ 相同，使得 $S\backslash\nu(\cup_{i\geq 0}(\gamma\cup\gamma\prime))$ 存在一个平面分支，该分支有一个分支包含于 $\nu(\cup_{i\geq 0}\phi^i(\gamma\prime))$ 中，而所有其他分支包含于 $\nu(\cup_{i\geq 0}\phi^i(\gamma))$ 中。

这对应于第 6.2 节中的**情形 1.2** 。我们断言，关于 γ' 不存在的额外假设是该压缩为极小的充要条件。

设 S_i 表示正在被压缩的周期部分，而 $C_i(\gamma)$ 表示 $\phi|_{S_i}$ 的相应压缩。为证明该断言，我们考察商轨形 $S_i = S_i/\phi|_{S_i}$ 中的图像。设 $\bar{\gamma} \subset S_i$表示 γ 的像。该循环覆盖诱导一个映射 $h\colon H_1(S_i) \to \mathbb{Z}/N$，其中 $N \geq 1$为覆盖度。我们沿 $\bar{\gamma}$ 在 $I \times S_i$ 的内边界上粘贴一个 2-柄,—并沿余核指定一段阶为 $N/(gcd(h([\bar{\gamma}]) N))$ 的循环奇点弧，若 $h([\bar{\gamma}]) \neq 0$，从而 h （唯一地）延拓到所得的 3 维轨形，记为 $C_i{}'$。若 $h([\bar{\gamma}]) = 0$ 且 $\bar{\gamma}$ 界定一个含有两个奇点（其阶必然相等）的圆盘，则定义 C_i 为 $C_i{}'$ 与若干球的并，这些球带有连接边界上奇点的奇异弧，对每个这样界定 $\bar{\gamma}$ 的圆盘各取一个；若 $h([\bar{\gamma}]) \neq 0$, 则定义 $C_i = C_i{}'$。3 维轨形 $C_i = C_i(\bar{\gamma})$ 被视为 (S_i, h) 的一个压缩，由$\bar{\gamma}$决定，而其由 h 的唯一延拓所决定的 N 重循环覆盖，即为$\phi|_{S_i}$的压缩 $C_i(\gamma)$。反之， $C_i(\gamma)$ 关于 $\phi|_{S_i}$ 的任一周期延拓的商同胚于$C_i(\bar{\gamma})$。 —

假设 $\bar{\gamma}' \subset S_i$ 是另一条不围成至多含有一个轨形奇点圆盘的简单闭曲线， $\gamma' \subset S_i$ 是它的一条提升。由 [Bon83 引理 4.1] 可证明， $C_i(\gamma')$ 是 $C_i(\gamma)$ 的子压缩，当且仅当 $C_i(\bar{\gamma}')$ 是 $C_i(\bar{\gamma})$ 的子压缩。后一种情况成立，当且仅当 $h([\bar{\gamma}]) = 0$ 与 $\bar{\gamma}'$ （经过同痕后）共同围成一个恰好含有一个轨形奇点的环带。但这种 $\bar{\gamma}'$ 的存在与否，等价于假设中 γ' 的存在与否，因此结论成立。

1.3 将 S 的伪阿诺索夫片段（不压缩该片段的任何边界）的极小压缩与该片段补集的恒等压缩粘合而得到的压缩。

这对应于第 6.2 节中的**情形 1.3** 。此处陈述的更强结论，即任何可压缩伪阿诺索夫片段中本质曲线的极小压缩都支撑在该片段上，可以由 [CL85] 中定理 2.1 的证明推得。

2.1.1 一种压缩 C ，如第 6.2 节中的**情形 2.1.1** 所述。

更确切地说，设 $S_i = \sqcup_{j=1}^{M}\Sigma_{i,j}$ 是 S 的一个伪阿诺索夫片段，其中 $\Sigma_{i,j}$ 是 S_i 的连通分支，在 ϕ, $i = 1,2$, $S_1 \neq S_2$ 作用下循环置换。设 δ_1 是 δ 的一个分支，且 $\nu(\delta_1)$ 同时邻接 $\Sigma_{1,1}$ 和 $\Sigma_{2,1}$。令 S_i^+ 表示 S_i 与 $S\backslash int(S_i)$ 中由 $\cup_{j\geq 0}\phi^j(\delta_1)$, $i = 1, 2$ 所界定的边界环带的并。设 $\theta\colon S_1^+ \to S_2^+$ 是一个反向定向同胚，它在公共边界（称为固定边界）上与恒等映射一致，并且在固定边界相对同痕意义下交织 $\phi|_{S_1^+}$ 和 $\phi|_{S_2^+}$ （注意，对于每个 j， θ 必然将 $\Sigma_{1,j}$ 映至 $\Sigma_{2,j}$ ）。于是 θ 确定了 ϕ 的一个压缩 C ，该压缩由一个乘积区域构成，此区域以 S_1^+ 和 S_2^+ 为边界；在其中， S_1^+ 和 S_2^+ 通过 θ 识别。

2.1.2 一种压缩 C ，如第 6.2 节中**情形 2.1.2** 所述。

更确切地说，设 $S_1 = \sqcup_{j=1}^{2M}\Sigma_{1,j}$ 是 S的一个伪阿诺索夫片段，其中 $\Sigma_{1,j}$是 S_1 的连通分支，且在 ϕ作用下循环置换。设 δ_1 是 δ 的一个分支，其中 $\nu(\delta_1)$同时邻接于 $\Sigma_{1,1}$ 和 $\Sigma_{1,M+1}$。令 S_1^+表示 S_1 与 $S\backslash int(S_1)$中边界环带的并

其边界由 $\cup_{j\geq 0}(\phi^j(\delta_1))$围成，但将每个 $\phi^j(\delta_1)$替换为两个副本，每个副本都粘合到一侧的环带上。设 θ: $S_1^+ \to S_1^+$是一个反向定向对合，它在由 $\phi^j(\delta_1)$副本产生的边界分支之并上与自然对合相对（这些边界分支称为固定边界），并且在固定边界相对同痕意义下与 $\phi|_{S_1^+}$ 交换（注意，对于每个 $j=1,\cdots\ M$， θ 必然将 $\Sigma_{1,j}$映射到 $\Sigma_{1,M+j}$）。于是 θ确定了 ϕ的一个压缩 C，它由一个围住 S_1^+的扭曲乘积区域构成；在该区域内， S_1^+通过 θ与自身识别。该扭曲乘积区域是不交并，由 M 个连通乘积区域组成。

2.2 如**情形 2.2** 第 6.2 节所述的压缩 C。

更确切地说，设 $S_1 = \sqcup_{j=1}^{M}\Sigma_{1,j}$ 是 S 的一个伪阿诺索夫片段，其中 $\Sigma_{1,j}$ 是 S_1 的连通分支，且在 ϕ 作用下按循环方式置换。设 δ_1 是 δ 的一个分支，其中 $\nu(\delta_1)$ 在两侧均与 $\Sigma_{1,1}$ 相邻。按 **2.1.2**中的相同方式定义 S_1^+及其固定边界，并设 ι: $S_1^+ \to S_1^+$是一个保向反转自由对合，相对于固定边界上的自然对合，并且在固定边界相对同痕意义下与 $\phi|_{S_1^+}$ 交换（注意，必然有 ι 将 $\Sigma_{1,j}$ 映到 $\Sigma_{1,j}$，对每个 j 均如此）。于是 ι 确定了 ϕ的一个压缩 C，该压缩由一个以 S_1^+为边界的扭曲乘积区域构成。这个扭曲乘积区域是不交并，由 M个连通的扭曲乘积区域组成。

反过来，可以验证，上述六种情形中列出的每一种形式的 ϕ 的压缩都是极小压缩，而且这六种情形两两互斥。此外，$(S,\ \phi)$ 的对称性不会改变极小压缩的形式，使其从一种形式变为另一种。

注意，**2.1.1、2.1.2、2.2** 这几种形式可以统一描述如下。设 $\delta_1 \subset \delta$ 是 δ 的一个分支。假设与 $\nu(\delta_1)$ 相邻的 S 的（一块或两块）部分均为伪阿诺索夫，并设 S_{δ_1} 为这些部分的并。令 $S_{\delta_1}^+$ 表示 S_{δ_1} 与 $\cup_{j\geq 0}\nu(\phi^j(\delta_1))$ 的并，但将每个 $\phi^j(\delta_1)$ 替换为两个副本，并使每个副本分别粘合到其补集的一侧。若 $S_{\delta_1}^+$ 的一个边界分支源自某个 $\phi^j(\delta_1)$，则称其为固定边界。设 ι: $S_{\delta_1}^+ \to S_{\delta_1}^+$ 是一个相对于固定边界上的自然对合的反向定向自由对合，并且与 $\phi_1 := \phi|_{S_{\delta_1}^+}$ 交换。

在固定边界相对同痕的意义下。于是，ι确定了一个 I丛区域，其边界为$S_{\delta_1}^+$，由此产生了 ϕ的一个极小压缩 $C = C_\iota$。

为便于后续讨论，我们指出，在**2.1.1、2.1.2、2.2** 这一统一框架中，$\phi_1 = \phi|_{S_{\delta_1}^+}$ 必须满足以下约束，才能保证 ι存在。设 $N > 0$ 满足 ϕ^N以保持定向的方式保留 δ_1。经过一次同痕，我们可以假设 ϕ^N 逐点固定 δ_1。那么， ϕ_1^N关于由 δ_1 产生的两个边界的分数德恩扭转系数之和为零。这是因为 $\iota\phi_1^N\iota^{-1}$ 与 ϕ_1^N在固定边界相对同伦，并且 ι是反向定向的，会成对交换固定边界。

动机示例请参见第**7.1**节。

我们以如下引理结束本节，为下一节作准备。该引理消除了条件 $[\iota,\phi_1] \sim \mathrm{id}^{S_{\delta_1}^+}$ 在自由同痕与相对于固定边界的同痕之间的歧义。

引理 6.8。令 $S_{\delta_1^+}$ 和 ϕ_1 如上所定义，使得关于 ϕ_1^N 的分数德恩扭转系数条件成立。若 ι 是 $S_{\delta_1^+}$ 上的一个反向定向自由对合，且它与 ϕ_1 在不一定相对边界的意义下同伦交换，则存在一个与 ι 自由同伦的反向定向自由对合 ι'，它与 ϕ_1 在相对于固定边界的意义下同伦交换。这样的 ι' 可由给定数据计算得出。

证明。令 $\sim$ 表示由相对于固定边界的同痕所定义的等价关系。根据假设，对于某些整数 n_j，有 $\iota\phi_1\iota^{-1} \sim \phi_1 \prod_{j=1}^{2k} T_j^{n_j}$，其中 $k = \#\pi_0(\cup_{j\geq 0}\phi^j(\delta_1))$，而 T_j 是沿 $S^+_{\delta_1}$ 的第 j 个边界分支的边界德恩扭转。假设 $S^+_{\delta_1}$ 的边界已按如下方式排列：第 j 个和第 $(k+j)$ 个边界分支分别对应于 $\phi^j(\delta_1)$，并且 ϕ_1 要么按顺序循环置换所有分支，要么按顺序循环置换最前和最后的 k 个分支。

由于 ι和 $\phi_1\iota\phi_1^{-1}$都是对合，因此对所有 $j = 1, \cdots k$，必有 $n_j = n_{k+j}$。因此，$\iota\phi_1^N\iota^{-1} \sim \phi_1^N(\prod_{j=1}^{2k} T_j)^{NS/k}$，其中 $S = \sum_{j=1}^{k} n_j = \sum_{j=k+1}^{2k} n_j$。令 ∂_j 表示 $S^+_{\delta_1}$的第 j个边界分支，则有

$$FDTC(\phi_1^N, \partial_{k+1}) + NS/k = FDTC(\iota\phi_1^N\iota^{-1}, \partial_{k+1}) = -FDTC(\phi_1^N, \partial_1) = FDTC(\phi_1^N, \partial_{k+1})$$

这意味着 $S = 0$。

现在，定义 $\iota' = \iota \prod_{j=1}^{2k} T_j^{r_j}$，其中 $r_j = \sum_{s=1}^{j-1} n_s$。那么 ι'是一个自由对合，因为对所有$j = 1, \cdots k$，都有 $r_j = r_{k+j}$。此外，

$$[\phi_1, \iota'] \sim \phi_1\iota(\prod_j T_j^{r_j})\phi_1^{-1}(\prod_j T_j^{-r_j})\iota^{-1} \sim \phi_1\iota\phi_1^{-1}(\prod_j T_j^{r_{j-1}-r_j})\iota^{-1} \sim \iota(\prod_j T_j^{n_{j-1}+r_{j-1}-r_j})\iota^{-1} \sim \mathrm{id},$$

如所需。 □

6.4. **极小压缩的算法**。除了引理 6.6 和引理 6.7 外，我们的算法还将用到以下两个结果。

引理 6.9（共轭问题，[Hem79]）。给定紧致定向曲面 Σ 上的两个同胚 $f, g\colon \Sigma \to \Sigma$，可以判定是否存在一个同胚 $h\colon \Sigma \to \Sigma$，它诱导给定的置换 $\pi_0(\partial\Sigma) \to \pi_0(\partial\Sigma)$，且满足 hfh^{-1} 与 g 同伦（不一定相对边界）。若这样的 h 存在，则可以求出一个。

引理 6.10（中心化子，[RSY20]）。给定紧致定向曲面 Σ 上的一个同胚 $f\colon \Sigma \to \Sigma$，存在一种算法，可以求出 $C(\Sigma, f)$ 的生成集；它是(Σ, f) 的对称群。

[RSY20] 针对自由边界条件下的映射类群陈述了引理 6.10；而此处固定边界条件下的版本，例如可以通过分析边界分支的置换和边界扭转，并对相关子群应用施赖尔引理，作为推论得出。

定理 *1.9(2)* 的证明。在给出算法之前，我们先作如下观察。(S, ϕ) 的任何对称性都会保留 ϕ 的典范约化系统 δ，并置换 S 的周期部分（分别地，伪阿诺索夫部分）。这些信息可以编码为一个映射 $C(S, \phi) \to \mathrm{Aut}(\pi_0(\partial(\nu(\delta))))$；由于其像是有限群，因此可以计算，而且根据引理 6.10，可以写出其生成集。特别地，我们可以判定 (S, ϕ) 的对称性可以将 δ 的哪些分支彼此关联、可以将 S 中 δ 的哪些补区域彼此关联，以及可以将这些补区域的边界以何种方式彼此关联。

现在，对于第 6.3 节列出的六种典范形式（**1.1**、**1.2**、**1.3**、**2.1.1**、**2.1.2**、**2.2**），我们给出一个算法，输出该形式下所有在对称性意义下的极小压缩。对于每种情况，算法包含三个步骤：

1. 生成一个给定形式的 ϕ 的压缩列表，记为 $\mathcal{C} = \{C_1, \cdots C_N\}$，使得该形式下每个极小压缩在对称性意义下都包含在其中。2. 从列表 $\mathcal{C}$ 中剔除非极小的压缩，得到新列表 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$。3. 从列表 $\mathcal{C}'$ 中删除重复项；也就是说，对于所有彼此通过对称性相关的极小压缩，只保留一个代表元。输出由此得到的新列表 $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}'$ 。

1.1 步骤 1：对于满足平面分支条件的 $\delta \cup \partial S$ 的每个分支 γ，构造压缩体 C_γ，使其可压缩 $\cup_{i \geq 0} \phi^i(\gamma)$ 的每个分支，然后将所有这些压缩 C_γ 输出为 $\mathcal{C}$。

步骤 2：从 $\mathcal{C}$ 中剔除那些使 γ 违反第 6.3 节 **1.1** 描述中关于平面分支假设的压缩 C_γ，得到 $\mathcal{C}'$。

步骤 3： C_{γ_1} 与 C_{γ_2} 通过对称性相关，当且仅当 γ_1 的 ϕ-轨道与 γ_2 的 ϕ-轨道通过 (S, ϕ) 的对称性相关。根据证明开头的观察即可判定这一点，从而能够从 $\mathcal{C}'$ 中删除重复项，得到 $\mathcal{C}''$。

1.2 步骤 1：对 S 的每个周期部分 S_i，构造商轨形 $S_i \to S_i = S_i/(\phi|_{S_i})$。令 $G_2 < \overline{G_1} < G_0 = \mathrm{Homeo}^+_\partial(S_i)$ 为按照第 6.2 节**情形 1.2** 中定义的群。列出$\{\gamma_1, \cdots \gamma_r\}$，即 S_i 中所有本质简单闭曲线在 G_0 下的代表（这是一个有限过程）。由于可以写出 S_i 的相对边界映射类群的一个有限生成集，根据 G_2 的定义，可以写出 G_0 中的有限集$\{\phi_1, \cdots \phi_s\}$，其中包含 G_0 中 G_2 的每个右陪集的一个元素。于是$\{\phi_j(\gamma_k)\}$ 给出了$\overline{S_i}$中简单闭曲线在 G_2 下的代表列表。这些曲线在 S_i 中的提升（对不同的 i 而言）构成了 ϕ 的极小压缩列表，并且在对称性意义下穷尽所有情况。

步骤 2：根据第 6.3 节中 **1.2** 的描述所提出的 γ' 不存在这一假设，以及随后对商轨形 S_i 的描述，曲线 $\bar{\gamma} \subset S_i$ 当且仅当 $h([\bar{\gamma}]) \neq 0$ 或 $h([\bar{\gamma}]) = 0$ 时，确定 ϕ 的一个极小压缩；或者，当且仅当 S_i 的每个轨形奇点都包含在一个由 γ 围成且含有两个轨形奇点的圆盘内时，确定一个极小压缩。我们舍弃 $\mathcal{C}$ 中由 S_i 内违反此条件的曲线确定的压缩，得到 $\mathcal{C}'$。

步骤 3：根据证明开头的观察，我们可以确定哪些周期部分通过对称性彼此相关。对于 S 中在对称性作用下的周期部分的每个等价类，选取一个代表元，并舍弃 $\mathcal{C}'$ 中压缩非代表元所在周期部分内曲线的极小压缩。将所得极小压缩列表记为 $\mathcal{C}''_0$ 。

我们仍需从$\mathcal{C}''_0$中，针对每个选作代表元的周期部分 S_i，去除那些压缩同一 S_i 中由 (S, ϕ) 的对称性联系起来的曲线的压缩中的重复项，而这些对称性并非来自 $(S_i, \phi|_{S_i})$ 的对称性。若 $c\colon S \to S$ 是 (S, ϕ) 的一个对称性，且其限制为一个 $S_i \to S_i$，并且平凡地置换 S_i 的边界分支，那么通过对 c 作相对边界同痕，并在必要时像第 6.2 节中**情形 2.1.1** 的论证那样应用引理 6.5，我们可以假设 $c|_{S_i}$ 与 $\phi|_{S_i}$ 在相对边界同痕意义下可交换，从而得到 $(S_i, \phi|_{S_i})$ 的一个对称性。因此，我们只需考虑那些限制为 S_i、并非平凡地置换 S_i 边界分支的对称性 $c\colon S \to S$。根据证明开头的观察，我们可以了解保持 S_i 的 (S, ϕ) 的对称性如何置换 S_i的边界分支。由此，我们可以进一步检查并删除 $\mathcal{C}''_0$ 中的重复项，从而得到所需的$\mathcal{C}''$ 。

1.3 步骤 1：在 S 的伪阿诺索夫片段内部固定完备双曲度量。根据 [CL85]，中的证明，在非平凡压缩中可压缩的本质简单闭曲线的最小长度有一个可计算的上界，该上界与

压缩无关。我们枚举 S 的伪阿诺索夫片段中长度不超过此上界的所有本质简单闭曲线。对于每条这样的曲线 γ，应用 [CL85] 中定理 2.1 的证明所采用的策略，构造一个包含所有含有 γ 的极小压缩的列表。由此得到所需的列表$\mathcal{C}$ 。这里， ϕ 的压缩由 S 中一组简单闭曲线表示，使得对集合中的所有曲线进行压缩（并在存在球面时将其封闭）后，即可得到压缩体。

步骤 2、3：我们将这两个步骤一并进行。由于列表$\mathcal{C}$ 中的极小压缩在对称性意义下是完备的，因此我们知道，$\mathcal{C}$ 中的每个非极小压缩，在经过对称变换后，都真包含另一个$\mathcal{C}$ 中的压缩。我们声称，对于任意压缩$C \in \mathcal{C}$，都可以列出与 C 通过对称性相关的 ϕ 的所有（有限多个）压缩。由于确定外边界为 S的两个压缩体之间的包含关系很容易，这样便能从$\mathcal{C}$中移除非极小压缩以及重复项。

设 $C \in$C是一个压缩，它可压缩 S的某个伪阿诺索夫片段 S_i 中的曲线。$(S_i, \phi|_{S_i})$的每个对称性都可通过在 S_i之外取恒等映射，延拓为(S, ϕ)的对称性。根据证明开头的观察，我们可以确定对称性作用下 S_i 的所有可能像；此外，对于每个这样的像 S_j，还可以确定这类对称性所产生的所有可能双射 p：$\pi_0(\partial S_i) \to \pi_0(\partial S_j)$。另外，对于每个可实现的 j 和 p：$\pi_0(\partial S_i) \to \pi_0(\partial S_j)$，我们都可以选取一个明确的对称性$c_{j,p}$ 来实现它们。若 c'是实现(j, p)的另一个对称性，那么 c'和 c在S_i 上的差异，是通过预合成$(S_i, \phi|_{S_i})$的一个对称性造成的。选取 $N > 0$ ，使得 $\phi|_{S_i}^N$ 平凡地置换 S_i 的边界分支，并且关于每个边界分支的分数德恩扭转系数都是整数。然后，可以将 $\phi|_{S_i}^N$ 拉直为某个相对边界的 ψ ，它给出$(S_i, \phi|_{S_i})$的一个对称性。根据 RSY20 的证明、命题 3.6] ，或引理 6.6 或 6.7 的证明，可以明确写出$(S_i, \phi|_{S_i})$的一个有限对称性集合$\{c_1, \cdots \ c_K\}$，其中至少包含每个ψ-陪集的一个代表元；这里的陪集取自 $C(S_i, \phi|_{S_i})$，并模去边界扭转。现在，由于 ψ 和边界扭转在C上作用平凡，有限集合$\{(c_{j,p} \circ c_k)_* C\}$包含了所有与 C 通过对称性相关的 ϕ 的压缩。

2.1.1 步骤 1：对于任意与 S_1, S_2 两个不同片段相邻的分支 $\delta_1 \subset \delta$ （按任意顺序排列），检查 S_1，S_2 是否具有相同的拓扑类型，以及它们是否均为伪阿诺索夫片段。若是，则像之前一样定义 S_1^+，S_2^+，并继续寻找以 S_1^+ 和 S_2^+ 为边界的可能乘积区域。首先，选取保持 δ_1 的 $kM > 0$ ，并检查 $\phi^{kM}|_{S_1^+}$ 和 $\phi^{kM}|_{S_2^+}$ 关于 δ_1 的分数德恩扭转系数之和是否为零。若为零，对于任意尊重公共边界自然等同的双射p： $\pi_0(S_1^+) \to \pi_0(S_2^+)$，引理 6.9 可帮助我们确定是否存在一个反向同胚 θ：相对固定边界的 $S_1^+ \to S_2^+$，它诱导 p ，并在同痕意义下（不一定相对边界）交织 $\phi|_{S_i^+}$, $i = 1, 2$。若找到这样的 θ ，根据引理 6.8，我们可以通过边界德恩扭转修改 θ ，使得 θ 在相对固定边界的同痕意义下交织 $\phi|_{S_i^+}$, $i = 1, 2$。这个新的 θ 导出 $C_{\delta_1, p}$ 对 ϕ 的压缩，如第 6.3 节所述。第 6.2 节情形 2.1.1 中的论证表明，除去 (S, ϕ) 的对称性，$C_{\delta_1, p}$ 不依赖于 θ 的选择。若 δ_2 是 δ 的一个分支，且位于与 δ_1 相同的 ϕ- 轨道上，则以 δ_2 开始该过程会得到相同的 S_1, S_2 ，并得到在对称性意义下相同的压缩集合。因此，我们也将 $C_{\delta_1, p}$ 记作 $C_{[\delta_1], p}$ ，其中 $[\delta_1]$ 表示包含 δ_1 的 δ 分支的 ϕ-轨道。现在，令 C 为通过此过程可得到的所有 $C_{[\delta_1], p}$ 的集合，其中 $[\delta_1]$ 遍历 ϕ 的 $\pi_0(\delta)$-轨道，而 p 遍历容许双射 $\pi_0(S_1^+) \cong \pi_0(S_2^+)$； S_1, S_2 是与 $\nu(\delta_1)$ 相邻的 S 的两个片段。这里， ϕ 的一次压缩由上述反向同胚 $S_1^+ \to S_2^+$ 表示，不过很容易将其转换为像之前那样用一组压缩曲线表示。

步骤 2 自动成立（$\mathcal{C}' = \mathcal{C}$）。

步骤 3：根据证明开头的观察，我们可以确定哪些有序对 $([\delta_1],\ p)$ 通过 $(S,\ \phi)$ 的对称性彼此相关，进而确定哪些 $C_{[\delta_1],\ p}$ 通过对称性彼此相关。这使我们能够从 $\mathcal{C}'$ 中删除重复项。

2.1.2 步骤 1：对于任意与 S_1 中一个片段 S_1 相邻的分支 $\delta_1 \subset \delta$，令 $\Sigma_{1,1}, \cdots \Sigma_{1,M_0}$ 为 S_1 的连通分支，它们在 ϕ 的作用下循环置换，且 $\Sigma_{1,1}$ 与 δ_1 相邻（以这种方式命名 S_1 的分支可能有两种不同的方法；任选其一）。检查 S_1 是否为伪阿诺索夫片段，$M_0 = 2M$ 是否为偶数，以及 $\Sigma_{1,M+1}$ 是否与 δ_1 相邻。若是，则如前定义 S_1^+，其中 $\Sigma_{1,j}^+$ 是相应的连通分支，并继续寻找以 S_1^+ 为边界的可能的扭曲乘积区域。首先，我们选取保定向的 $k > 0$，使其保定向地保持 δ_1，并检查 $\phi^{kM}|_{S_1^+}$ 关于对应于 δ_1 的两个边界分支的分数德恩扭转系数之和是否为零。若是，则应用引理 6.6，找出所有反向同胚 $\theta_1 \colon \Sigma_{1,1}^+ \to \Sigma_{1,M+1}^+$，它们相对于固定边界，且在不一定相对边界的意义下模同痕，其中 $\phi^M|_{\Sigma_{1,1}^+}$ 同伦于 $\theta_1 \circ \phi^M|_{\Sigma_{1,M+1}^+} \circ \theta_1$。每个这样的 θ_1 通过与 ϕ 的迭代共轭，都会导出一个反向定向对合 $\theta \colon S_1^+ \to S_1^+$，它相对于（固定边界上的自然对合）固定边界，交换 $\Sigma_{1,j}^+$ 与 $\Sigma_{1,M+j}^+$，并在不一定相对边界的意义下与 $\phi|_{S_1^+}$ 可交换。于是引理 6.8 表明，我们可以通过边界德恩扭转修改 θ，使其相对于固定边界与 $\phi|_{S_1^+}$ 同痕。这个新的 θ 会导出一个压缩 C_θ of ϕ，如第 6.3 节所述。第 6.2 节中情形 2.1.2 的论证表明，对 θ 采用不同的边界扭转修改，会得到一个与 C_θ 通过对称性相关的压缩（该对称性由沿 $\cup_{i\geq 0}\phi^i$ 中各分支的 $(+1)$ 多重扭转的某个幂给出）。现在，令 C 为对所有 δ_1，通过此过程可得到的全部 C_θ 的集合。

步骤 2 是显然的。步骤 3 与**1.3**中的情况类似：对于任意 $C_\theta \in \mathcal{C}$，我们都可以列出所有通过对称性与 C 相关的 ϕ 压缩；除去预先复合无限循环群 $\mathbb{Z} < C(S,\ \phi)$ 的作用后，这些压缩仍可视为相同。该群由沿 $\cup_{i\geq 0}\phi^i(\delta_1)$ 中各分支的 $(+1)$ 多重扭转生成，其中分支 $\delta_1 \subset \delta$ 取为 θ 的定义域中某个固定边界在 S 中的像。由于很容易检验 ϕ 的两个压缩（尤其是形如 C_θ 的压缩）是否通过这一 $\mathbb{Z}$-作用相关，因此可以据此去除$\mathcal{C}'$中的重复项。

2.2 步骤 1：对于 S 中仅与一个片段 S_1 相邻的任意分支 $\delta_1 \subset \delta$，设 S_1 的连通分支为 $\Sigma_{1,1}, \cdots \Sigma_{1,M}$，它们在 ϕ 的作用下循环置换，且 $\Sigma_{1,1}$ 与 δ_1 相邻。检查 S_1 是否为伪阿诺索夫片段，以及 δ_1 是否两侧均与 $\Sigma_{1,1}$ 相邻。若是，则像之前一样定义 S_1^+，其中 $\Sigma_{1,j}^+$ 是对应的连通分支，并继续寻找以 S_1^+ 为界的可能扭曲乘积区域。首先，我们选取保定向的 ϕ^{kM}，使其保向地保持 δ_1，并检查 $\phi^{kM}|_{S_1^+}$ 关于对应于 δ_1 的两个边界分支的分数德恩扭转系数之和是否为零。若是，则应用引理 6.7，找出所有反向定向对合 $\iota_1 \colon \Sigma_{1,1}^+ \to \Sigma_{1,1}^+$（相对于固定边界），其范围取模同痕，且不一定相对边界。滤除具有不动点的对合（可用引理 6.9 检查该对合是否属于自由反向定向对合的唯一共轭类）。每个剩余的此类 ι_1 都会导出一个反向定向自由对合 $\iota \colon S_1^+ \to S_1^+$（相对于固定边界，即自然对合），它保持每个分支，并与 $\phi|_{S_1^+}$ 在不一定相对边界的同痕意义下交换。接着，引理 6.8 表明，我们可以通过边界德恩扭转修改 ι，使其与 $\phi|_{S_1^+}$ 在相对于固定边界的同痕意义下交换。这个新的 ι 会导出一个 ϕ 的压缩 C_ι，如第 6.3 节所述。第 6.2 节情形 2.2 中的论证表明，对 ι 采用不同的边界扭转修改，会得到一个与 C_ι 通过对称性相关的压缩。现在，令 C 为通过这一过程、对所有 δ_1 得到的全部 C_ι 的集合。

步骤 2 自动成立。步骤 3 与**2.1.2**中的情形类似。 □

7. 非简单纤维结的带状共边

在本节中，我们运用第 6.3 节中将曲面同胚的极小压缩归类为六种典范形式的分类，给出 Miyazaki [Miy 94], avoiding the heavy use of the characteristic submanifold theory of Jaco–Shalen [JS79] and Johannson [Joh79]相关结果的另一种证明，而不必大量运用 Jaco–Shalen 和 Johannson 的特征子流形理论。

本节对非简单纤维结的研究视角，比定理 1.6 的证明运用了更多关于纤维化的性质。具体而言，我们将用到这样一个事实：若 K 是纤维结，那么其补集中的每个 JSJ 块都属于尊重自然边界参数化的纤维化类；并且 K 的单值化由其补集中各 JSJ 块的单值化（按适当重数）拼接而成。

7.1. 例： (2，1)**-缆结** 8 **纽结**。 Miyazaki [Miy94, 例 2] 证明，$C_{2,\ 1}(4_1)$，即八字结的 (2，1)-缆结，在任何同伦4-球中都不是强同伦带状纽结。这个纽结（及其变体）近年来备受关注； [Dai+24、KPT24、KPT25], 的研究表明它不是切片纽结，从而排除了它成为切片-带状猜想反例的可能性。

作为第 6.3 节分类的一个例证，我们对 $C_{2,1}(4_1)$ 的单值化的所有压缩进行分类；特别是，我们将看到它不能压缩到 id_{D^2}，由此根据定理 1.7 可知，$C_{2,1}(4_1)$ 不是强同伦带状的，从而以一种自成一体的方式重新证明 Miyazaki 的结果。

缆模式 $C_{2,1} \subset S^1 \times D^2$ 是一种纤维化模式，其纤维是一个双孔圆盘，记作 D_2^2，单值化 $\phi_{C_2,1}$ 与圆盘的半周旋转自由同伦，该旋转交换两个孔。作为相对边界的映射类，$\phi_{C_2,1}$ 关于带孔圆盘边界的分数德恩扭转系数为 $1/2$，而 $\phi^2_{C_2,1}$ 关于每个内边界的分数德恩扭转系数为 -2。八字结 4_1 是一个纤维结，其纤维是亏格一曲面，具有一个边界 $S_{1,1}$；其单值化 ϕ_{4_1} 由矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 给出（作为自由映射类），关于边界的分数德恩扭转系数为 0。因此，缆纽结 $C_{2,1}(4_1)$ 是一个纤维结，其纤维为 $\Sigma := D_2^2 \cup (S_1^{(1)}{}_{,1} \sqcup S_{1\,1}^{(2)}{}_{,})$，其中 $S_{1\,1}^{(i)}{}_{,}$'s 是 $S_{1,1}$ 的相同副本；其单值化 $\phi = \phi_{C_2,1}(4_1)$ 在 D_2^2 上限制为 $\phi_{C_2,1}$，通过恒等映射将 $S_{1\,1}^{(1)}{}_{,}$ 映至 $S_{1\,1}^{(2)}{}_{,}$，并通过 ϕ_{4_1} 将 $S_{1\,1}^{(2)}{}_{,}$ 映至 $S_{1\,1}^{(1)}{}_{,}$。

单值化 ϕ 有一个周期部分和一个伪阿诺索夫片段。周期部分 D_2^2 不含本质曲线，因此 ϕ不存在形式为**1.2**的极小压缩。形式为**1.3**的压缩会使相关伪阿诺索夫片段的每个连通分支的亏格至少减少 2，因此 ϕ 不存在形式为**1.3**的极小压缩。显然也不存在形式为**2.1.1, 2.1.2, 2.2** 的极小压缩。因此，ϕ 的每一个极小压缩都具有形式**1.1**。Σ 上的两条约化曲线位于同一 ϕ-轨道上，并且它们与 $\partial\Sigma$ 共同围成一个平面曲面；因此沿这两条曲线的压缩是非极小的。我们得出结论：ϕ 的唯一极小压缩是沿 $\partial\Sigma$的压缩，它给出单值化 ϕ_1：$\Sigma_1 \to \Sigma_1$，其中 Σ_1是 D^2与 $S_1^{(1)}{}_{,1} \cup S_{1\,1}^{(2)}{}_{,}$的不交并，$\phi_1$在 D^2上为恒等映射，并交换 $S_{1\,1}^{(1)}{}_{,}$与 $S_{1\,1}^{(2)}{}_{,}$。此外，ϕ_1^2在 $S_{1\,1}^{(i)}{}_{,}$的每一个上都与$\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$自由同伦，且 ϕ_1^2 关于其两侧约化曲线的分数德恩扭转系数之和为 $-4 \neq 0$。

单值化 ϕ_1 只有一个由约化曲线隔开的伪阿诺索夫片段。显然，ϕ_1 不具有形式为 **1.2, 1.3, 2.1.1, 2.2** 的极小压缩。分数德恩扭转系数的条件意味着，ϕ_1 也不具有形式为 **2.1.2** 的极小压缩

因此， ϕ_1 唯一的极小压缩是形式为 **1.1** 的压缩，它由压缩唯一的约化曲线得到。这给出单值化 ϕ_2： $\Sigma_2 \to \Sigma_2$，其中 $\Sigma_2 = D^2 \sqcup T^2 \sqcup T^2$、$\phi_2$ 是 D^2 上的 id_{D^2}，将第一个 T^2 分支恒等映射到第二个，并通过（$_{2\,1\,1\,1}$）将第二个映射到第一个。

单值化 ϕ_2 不再允许进一步的极小压缩。因此， ϕ_1 和 ϕ_2 是 ϕ所有可能的非平凡压缩。不过，我们注意到， ϕ_2 是零余边界的（即与id_{D^2}余边界等价： $D^2 \to D^2$），因为 $\phi_2|_{T^2 \sqcup T^2}$可延拓至 $I \times T^2$，这是由于（$_{2\,1\,1\,1}$）具有一个反定向平方根（$_{1\,1\,1\,0}$）。

7.2. **Miyazaki 的结果的证明**。我们再次请读者参阅 [Bud06]，了解纽结补空间的 JSJ 分解。

定理*1.13*的证明。充分性显然，因为对所有 $i > m$，都有 $U \leq J_i\#(-J_i)$。我们通过对 $K_1\# \cdots \#K_n$ 的亏格进行归纳来证明必要性。当亏格为0时， $m = n = 0$，结论显然成立。假设亏格为正。若 $n = 1$，结论显然成立，因此我们还假设 $n > 1$。设 $K = K_1\# \cdots \#K_n$ 和 $J = J_1\# \cdots \#J_m$。不妨设 $J \neq K$。由于假设和结论在 $\leq_h$下都具有传递性，我们还可以假设不存在中间纽结 I 满足 $J \leq_h I \leq_h K$。

根据定理 1.7， ϕ_K： $F_K \to F_K$ 的单值化可在某个压缩体 C 中压缩为 J的单值化。

纽结 K 是沿钥匙链链环 H_n将 K_1，$\cdots$ K_n 拼接而成的。钥匙链链环模式 H_n是纤维化的，其单值化由 n孔圆盘 D^2_n上的恒等映射给出。单值化ϕ_K 由 $id_{D^2_n}$ 与 ϕ_{K_i} 的并组成： $F_{K_i} \to F_{K_i}$、 $i = 1, \cdots n$，并按标准方式沿边界分支粘合。

如果存在 C 的极小子压缩 C'，它来自某个 i的压缩 ϕ_{K_i}，那么对于某个只有一个边界的连通曲面 F_i 以及某个（可能为空或不连通的）闭曲面 S，有 $\partial_i C' = D^2_n \cup (F_i \sqcup (\sqcup_{j \neq i} F_{K_j})) \sqcup S$。由于 $\partial_i C$ 没有闭分支， S在 $C \backslash C'$中压缩为 $\emptyset$。因此， ϕ_{K_i} 可压缩为 F_i 上的一个单值化，而它必然是某个（可能是平凡或复合）纽结 K_i'的单值化，这意味着 $K_i' \leq_h K_i$。由极小性可知， K_i'的素因子与 $j \neq i$对应的纽结 K_j恰好由纽结$\{J_1$、$\cdots$ $J_m\}$组成，从而证明了所需结论。

现在假设不存在由某个ϕ_{K_i}的压缩所产生的 C 的极小子压缩。

情形1：某条 $D^2_n \subset F_K$ 上的非平凡曲线 $\gamma \neq \partial F_K$ 可在 C中压缩。

那么，沿着 γ 压缩 ϕ_K，得到 C的一个子压缩 C'，其内边界为$\phi_{K_1\# \cdots \#K_r}$ 与$\hat{}\phi_{K_{r+1}\# \cdots \#K_n}$ 的不交并，其中 $1 \leq r \leq n-1$（对 K_i重新排序），而$\hat{}\phi$ 表示一个相对边界的曲面同胚 ϕ 的封盖。由于 $\partial_i C$ 没有闭分支，$\hat{}\phi_{K_{r+1}\# \cdots \#K_n}$ 在 $C \backslash C'$中可压缩到 $id_\emptyset$。因此我们有 $U \leq_h K_{r+1}\# \cdots \#K_n$，故由极小性可得$J = K_1\# \cdots \#K_r$。将归纳假设应用于 $U \leq_h K_{r+1}\# \cdots \#K_n$并结合极小性，我们知道 $r = n-1$或 $r = n-2$且 $K_n = -K_{n-1}$，两种情形下结论均成立。

情形 2： C 中不存在可在 $D^2_n \subset F_K$ 上压缩的非平凡曲线 $\gamma \neq \partial F_K$。

根据第 6.3 节对极小压缩的分类，ˆ ˆC 的唯一极小子压缩 C' 是 ∂F_K 的压缩，它将 ϕ_K 压缩到 $id_{D^2} \sqcup \phi_K$。我们得出结论：ϕ_K 在 $C \backslash C'$ 中压缩到$id_\emptyset$，且 $J = U$ 是平凡结。若 $n \geq 3$，鉴于分类结果，我们的假设 ˆ意味着 ϕ_K 不可压缩，这就产生矛盾。因此 $n = 2$。我们断言 $K_2 = -K_1$，这将完成证明。注意，当 K_1 （或 K_2）是双曲的，ϕ_K 唯一可能的压缩 ˆ是第 6.3 节中的 **2.1.1** 形式，这意味着 K_1, K_2 的单值化互为镜像，从而得到所需结论。在一般情形下，当 K_1, K_2 是非双曲的，我们需要逐一进行分析。

情形 2.1：环带 ˆ $D_2^2 \subset$ ˆF_K 中的核心曲线不包含在 ϕ_K 的典范约化系统中。

于是，K_1、K_2 各自都是环面纽结或缆纽结。环面纽结 $T_{p,q}$ $(p, |q| > 1)$ 的单值化 $\phi_{T_{p,q}}$ 自由同伦于 $S_{(p-1)(|q|-1)}$ 上的一个周期同胚，其周期为 1，且其商轨形 $D^2(p, |q|)$ 是一个带有一个 p 阶奇点和一个 $|q|$ 阶奇点的圆盘。缆模式 $C_{p,q}$ $(p > 1)$ 的单值化 $\phi_{C_{p,q}}$ 自由同伦于 $S_{(p-1)(|q|-1),p+1}$ 上的一个周期同胚，其周期为 $p|q|$，且其商轨形 $A(p)$ 是一个带有 p 阶奇点的环带。$\phi_{T_{p,q}}$ 和 $\phi_{C_{p,q}}$ 关于根边界的分数德恩扭转系数均为 $1/pq$。记 $K_1 = C_{p_1,q_1}(K_1')$ 和 $K_2 = C_{p_2,q_2}(K_2')$ 为某些（不一定是 ˆ非平凡的）纤维结 K_1', K_2'。根据假设，D_2^2 两侧的周期映射拼接成一个周期映射，这意味着 $1/p_1q_1 + 1/p_2q_2 = 0$，即 $p_1q_1 + p_2q_2 = 0$。

如果 K_1、K_2 都是环面纽结，那么由经典论证可知，K_2 与 $-K_1$ 合痕意味着 $K_2 = -K_1$ 。如果 K_1 是环面纽结，而 K_2 是缆纽结，那么包含环带 ˆ D_2^2 的 ˆF_K 的周期部分商为轨形 $D^2(p_1, |q_1|, p_2)$，并带有一个映射h：$H_1(D^2(p_1, |q_1|, p_2)) \to \mathbb{Z}/p_1|q_1|$，如第 6.3 节 1.2 中所述。根据假设，$\phi_K$ 唯一可能的极小压缩是 1.2 中形式的压缩，它压缩本质曲线 $\bar{\gamma} \subset D^2(p_1, |q_1|, p_2)$ 的提升；该曲线恰好围住两个阶数为 p_2、p_1 或 p_2、$|q_1|$的奇点。如果 $h(\bar{\gamma}) \neq 0$，压缩后，我们会看到一个商为具有三个轨形奇点的 S^2 的周期分支，而它无法压缩到 $\emptyset$，矛盾。因此 $h(\bar{\gamma}) = 0$，但此时相应的压缩违反了 1.2 中规定的极小性条件（第 6.4 节 1.2 的步骤 2 中对此有更明确的陈述），矛盾。

ˆ最后，我们考虑 K_1、K_2 均为缆结的情形。包含 ˆD_2^2 的 F_K 的周期部分商为轨形 $A(p_1, p_2)$，其中 A 表示环带。ϕ_K 唯一可能的极小 ˆ压缩是形式 1.2 的压缩，它对曲线 $\bar{\gamma} \subset A(p_1, p_2)$ 的提升进行压缩，该曲线围成一个包含两个奇点的圆盘。由与上文相同的论证，我们得到 $h(\bar{\gamma}) = 0$，从而 $p_1 = p_2$、$q_1 = -q_2$。由 $\bar{\gamma}$ 确定的极小压缩将 $C_{p_1,\ q_1}$ 的单值化“折叠”到 $C_{p_2,\ q_2}$ 上，所得曲面同胚为 $(\hat{\phi}_{K_1'} \# _{K_2'})^{1/p_1}$。这里，对于曲面同胚 ϕ：$S \to S$，$\phi^{1/k}$ 指 $\sqcup_{i=1}^k S$ 上的曲面同胚，它将 S 的第 j 个副本恒等地映到第 $(j+1)$ 个副本（对 $j < k$），并将最后一个副本通过 ϕ 映到第一个副本。由于 $\phi^{1/k}$ 的压缩与 ϕ 的压缩一一对应，我们知道 ˆ$\phi_{K_1'} \# _{K_2'}$ 与 $(\hat{\phi}_{K_1'} \# _{K_2'})^{1/p_1}$ 一样可压缩到 $id_\emptyset$，从而由定理 1.7 得 $U \leq_h K_1' \# K_2'$。由归纳假设，$K_2' = -K_1'$，从而 $K_2 = -K_1$，即为所求。

情形 2.2：环带ˆ $D_2^2 \subset$ ˆF_K 中的核心曲线包含在ˆ ϕ_K的典范约化系统中。

根据第 6.3 节中极小压缩的分类，我们发现， C 的唯一极小子压缩是 2.1.1 形式的压缩，它将 ϕ_{K_1} 的根块（必为伪阿诺索夫）“折叠”到 ϕ_{K_2}的根块上。特别地， K_i 是若干纤维结 $K_i^{(1)}$、⋯ $K_i^{(r)}$ 沿双曲拼接模式 P_i拼接而成的，其中，按定义， P_i 是 S^3中 r分支平凡链环 U_r 补集里的一个双曲纽结， $i=1$为 2，且 $r>0$ 与 i无关。根据假设，每个P_i 都是具有某个单值化 ϕ_{P_i}的纤维化模式： $F_{P_i}\to F_{P_i}$；并且存在反向同胚 θ： $F_{P_1}\to F_{P_2}$，它在相对固定边界（根边界）的同痕意义下交织 ϕ_{P_1}与 ϕ_{P_2}。按照 Miy94 引理 2.2],中对边界环面的参数化进行考察，可以证明 θ 实际上在相对边界的同痕意义下交织 ϕ_{P_1}与 ϕ_{P_2} 。这意味着$P_2=-P_1$，并且极小压缩后得到的曲面同胚为 $\sqcup_{i=1}^{r}\hat{}$ $\phi^{1/w_i(P_1)}\,K_1^{(i)}\,\#K_2^{(i)}$ （经重新排序后），其中 $w_i(P_1)$表示 P_1 与 S^3中第 i个平凡结分支之间的链接数（必不为零），且取为正值。和之前一样，由归纳假设可得，对所有 i都有 $K_2^{(i)}=-K_1^{(i)}$，因此 $K_2=-K_1$。□

推论*1.14*的证明。 (1) 设 K_1， K_2 为相对于 $\le_h$均为极小的协边纤维化结。由切片-带状， $U\le K_1\#(-K_2)$，从而 $U\le_h K_1\#(-K_2)$。由定理1.13，这意味着 K_1 的素因子集合与 $-K_2$ 的素因子集合（由假设，每一个相对于$\le_h$ 都是极小的）可以分成镜像对。由极小性，任何有序对都不能出现在单个 K_i的素因子中，由此我们得出 $K_1=-(-K_2)=K_2$。

(2) 设 K 是一个纤维结，其在协边群中的类是阶为 $n\ge 2$的挠元。我们证明 $n=2$。由光滑四维庞加莱猜想， $J\le_h K$ 蕴含 J 与 K合痕。因此，不失一般性，我们可以取 K 相对于 $\le_h$为极小。由切片-带状， $U\le nK$，从而 $U\le_h nK$。由定理1.13， K的素因子集合在复制 n次后可以分成镜像对。由于由极小性， K 本身的素因子集合不含镜像对，故 K 的每个素因子必为（负）可逆手性。这蕴含 $K=-K$，因此 $2K=K\#(-K)$是带状的，从而 $n=2$。□

参考文献

[Ago11] I. Agol, 《伪阿诺索夫映射环面的理想三角剖分》, 载于: 《三维拓扑与几何》, 第 560 卷, Contemp. Math., 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2011 年, 1–17。[Ago22] I. Agol, 《纽结的带状共边构成偏序》, Comm. Amer. Math. Soc. 2 09, 374 2022 379 ( ), no. – 。[Bak16] K. L. Baker, 《关于纤维结共边的一则注记》, J. Topol. 9 (2016), no. 1, 1–4。[BHS26] J. A. Baldwin、J. Hanselman 和 S. Sivek, 《带状共边与纤维化前驱, II: 一般情形》, arXiv 预印本 arXiv:2602.21109 (2026)。[BS25] J. A. Baldwin 和 S. Sivek, 《带状共边与纤维化前驱》, arXiv 预印本 arXiv:2510.02214 (2025)。[Bay14] İ. Baykur, 《平坦丛与换位子长度》, Michigan Math. J. 63 (2014), no. 2, 333–344。[BKM13] R. Baykur、M. Korkmaz 和 N. Monden, 《曲面丛的截面与 Lefschetz 纤维化》, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), no. 11, 5999–6016。[BP92] R. Benedetti 和 C. Petronio, 《双曲几何讲义》, Universitext, Springer-Verlag, 柏林, 1992, xiv+330。[BJM13] I. Biringer、J. Johnson 和 Y. Minsky, 《将伪阿诺索夫映射延拓到压缩体中》, J. Topol. 6 (2013), no. 4, 1019–1042。[Bon83] F. Bonahon, 《曲面自同构的配边》, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4 2, 237 16 1983 270) ( ), no. – 。[Bud06] R. Budney, 《纽结与链环补空间的 JSJ分解》, 载于 S^3, Enseign. Math. (2) 52 (2006), 319–359。[CL85] A. Casson 和 D. Long, 《曲面自同构的算法压缩》, Invent. Math. 81 (1985), no. 2, 295–303。

[CG83] A. J. Casson 和 C. M. Gordon，《对偶空间与纤维带状纽结的环定理》，Invent. Math. 74 (1983)，no. 1，119–137。[Dai+24] I. Dai、S. Kang、A. Mallick、J. Park 和 M. Stoffregen，《八字纽结的 (2, 1)-缆不是光滑切片》，Invent. Math. 238 (2024)，no. 2，371–390。[DG25] N. M. Dunfield 和 S. Gong，《带状协合与切片障碍：实验与实例》，arXiv 预印本 arXiv:2512.21825 (2025)。[FM11] B. Farb 和 D. Margalit，《映射类群入门》，第 49 卷，普林斯顿大学出版社，2011。[FLP79] A. Fathi、F. Laudenbach 和 V. Poénaru，《瑟斯顿关于曲面的研究——奥赛研讨会》，Astérisque 66-67，法国数学会，1979。[Gab83] D. Gabai，《Murasugi 和是一种自然的几何运算》，载于：《低维拓扑》，第 20 卷，Contemp. Math.，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1983 年，131–143。[Gil84] P. M. Gilmer，《带状共边与 S-等价类上的偏序》，Topology Appl. 18 (1984)，no. 2-3，313–324。[Gor81] C. M. Gordon，《三维球面中纽结的带状共边》，Math. Ann. 257 (1981)，no. 2，157–170。[GL89] C. M. Gordon 和 J. Luecke，《纽结由其补空间确定》，J. Amer. Math. Soc. (1989)，371–415。[Gro82] M. Gromov，《体积与有界上同调》，Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1982)，no. 56，5–99 (1983)。[GL22] O. S. Gujral 和 A. S. Levine，《Khovanov同调与分裂链环之间的配边》，J. Topol. 15 (2022)，no. 3，973–1016。[Hem79] G. Hemion，《二维流形同胚的分类与三维流形的分类》，Acta Math. 142 (1979)，123–155。[JS79] W. H. Jaco 和 P. B. Shalen，《三维流形中的塞弗特纤维空间》，Mem. Amer. Math. Soc. 21 (1979)，no. 220，viii+192。[Joh79] K. Johannson，《带边界三维流形的同伦等价》，第 761 卷，Lecture Notes in Mathematics，Springer，柏林，1979，ii+303。[KPT24] S. Kang、J. Park 和 M. Taniguchi，《通过实 Frøyshov 不变量研究八字纽结的缆》，arXiv 预印本 arXiv:2405.09295 (2024)。[KPT25] S. Kang、J. Park 和 M. Taniguchi，《八字纽结缆的光滑协合》，arXiv 预印本 arXiv:2505.03720 (2025)。[Koc06] D. H. Kochloukova，《一些冯·诺依曼有限的诺维科夫环与类纽结群》，Comment. Math. Helv. 81 (2006)，no. 4，931–943。[LZ19] A. S. Levine 和 I. Zemke，《Khovanov同调与带状协合》，Bull. Lond. Math. Soc. 51 (2019)，no. 6，1099–1103。[MS13] H. Masur 和 S. Schleimer，《圆盘复形的几何》，J. Amer. Math. Soc. 26 (2013)，no. 1，1–62。[MM99] H. A. Masur 和 Y. N. Minsky，《曲线复形的几何 I：双曲性》，Invent. Math. 138 (1999)，no. 1，103–149。[McC82] J. D. McCarthy，《伪阿诺索夫映射类的正规化子与中心化子》，预印本 (1982)。[Miy94] K. Miyazaki，《非简单的带状纤维结》，Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994)，no. 1，1–44。[RSY20] K. Rafi、N. Selinger 和 M. Yampolsky，《映射类群中的中心化子与瑟斯顿等价的可判定性》，Arnold Math. J. 6 (2020)，no. 2，271–290。[Sil92] D. Silver，《关于类纽结群与带状共边》，J. Pure Appl. Algebra 82 (1992)，no. 1，99–105。[Thu88] W. P. Thurston，《曲面微分同胚的几何与动力学》，Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 19 (1988)，no. 2，417–431。[Wu92] Y. Q. Wu，《手术三维流形中曲面的不可压缩性》，Topology 31 (1992)，no. 2，271–279。[Zem19] I. Zemke，《纽结 Floer 同调对带状共边的阻碍》，Ann. of Math. (2) 190 (2019)，no. 3，931–947。

数学系，加利福尼亚大学，伯克利，伯克利，加利福尼亚州 94720，USA

电子邮件地址：ianagol@berkeley.edu

数学系，加利福尼亚大学伯克利分校，伯克利，加利福尼亚州 94720，美国

电子邮件地址：qiuyu_ren@berkeley.edu