arXiv:2603.11038v1 [math.CO] 11 Mar 2026

张量的舒尔补与多重线性交换秩

GUY MOSHKOVITZ[1] 和 DANIEL G. ZHU[2]

摘要。我们证明，矩阵的多重线性形式的三种秩概念彼此等价。该结果推广了 Flanders 的一项经典结果，修正了 Fortin 和 Reutenauer 工作中的一处小疏漏，回答了 Lampert 关于三线性形式的解析秩与切片秩之间关系的问题，并证明了一个特殊情形：张量的解析秩与划分秩等价这一猜想。

1. 引言

任取一个域[1] $\mathbb{F}$ 和一个整数 $d \geq 0$。设 $x_1 = (x_{1,1}, \ldots, x_{1,n})$ 至 $x_d = (x_{d,1}, \ldots, x_{d,n})$ 为 d组变量，其中令 n 为一个无界参数。此外，令 $\mathcal{M}_d$ 表示 $\mathbb{F}$ 上的多线性形式空间，这些形式分别关于 $x_1, \ldots, x_d$是线性的，即形如以下形式的多项式

$$\sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_d} x_{1,i_1} \cdots x_{d,i_d},$$

其中 $a_{i_1,\ldots,i_d}$ 是 $\mathbb{F}$ 中的系数。

设 $M(x_1,\ldots,x_d)$ 是一个 $\mathcal{M}_d$-矩阵，其中在本文余下部分，我们将 L-矩阵定义为元素属于 L 的矩阵。我们考虑定义 M 的秩的三种方式：

- 最大秩 $\mathrm{MR}(M)$，定义为对所有 $x_1,\ldots,x_d \in \mathbb{F}^n$ 的取值，求值 $M(x_1,\ldots,x_d)$ 所能达到的最大秩。
- 交换秩 $\mathrm{CR}(M)$，定义为将 M 视为变量 $x_{i,j}$ 的有理函数域上的矩阵时的秩。等价地，这是使 M 的 $r \times r$ 子式为非零多项式的最大 r，或者对所有 $x_1,\ldots,x_d \in \mathbb{F}^n$ 的取值，求值 $M(x_1,\ldots,x_d)$ 的最大秩。（$\mathbb{F}$ 可以替换为 $\mathbb{F}$ 的任意无限扩张。）
- 划分秩 $\mathrm{PR}(M)$，定义为求和得到 M所需的多重线性外积的最小数目。具体而言，给定集合 $S \subseteq [d]$：$= \{1, 2, \ldots\ldots, d\}$ 以及多重线性向量 $u((x_i)_{i\in S})$和$v((x_i)_{i\in[d]\setminus S})$，外积 $u \otimes v$ 是一个$\mathcal{M}_d$-矩阵。划分秩是使得 M 为 r 个此类矩阵之和的最小 r。（S 的选取在求和中的各矩阵之间可以不同。）

$d = 0$ 的情形对应于标量矩阵的情形，并且由线性代数的一个基本事实可知，在此情形下这些秩都等于标准的秩概念。对于一般的 d，容易看出

$$\mathrm{MR}(M) \leq \mathrm{CR}(M) \leq \mathrm{PR}(M),$$

但这些概念彼此不同。例如，如果 $d = 1$，矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

[1]纽约市立大学（巴鲁克学院与研究生中心）数学系，纽约，NY 10010，美国[2]普林斯顿大学数学系，普林斯顿，NJ 08544，美国
电子邮件地址：guymoshkov@gmail.com，zhd@princeton.edu。第一作者得到美国国家科学基金会奖项 DMS-2302988的资助。第二作者得到美国国家科学基金会研究生研究奖学金计划（美国国家科学基金会资助 DGE-2039656）的资助。[1]虽然本文的某些部分假定$\mathbb{F}$ 是有限的，但大多数结果适用于所有域。这与其他一些结果（例如 [CM22；Der22；CM23；CY25]中的结果）形成对照，后者假定$\mathbb{F}$ 是完美的。

在域 F_2，上的最大秩为 2，但交换秩为 3，而矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

交换秩为 2（因为其行列式为零），但划分秩为 3。（这里 α，β，γ分别是$x_{1,\ 1}$，$x_{1,\ 2}$，$x_{1,\ 3}$的简写。）

在本文中，我们证明这三种秩的概念在常数因子意义下等价：

定理 1.1。我们有

$$\mathrm{PR}(M) \leq (2^d + O_d(|\mathbb{F}|^{-1}))\,\mathrm{CR}(M) \quad \textit{and} \quad \mathrm{CR}(M) \leq \left(1 - \frac{1}{|\mathbb{F}|}\right)^{-d} \mathrm{MR}(M).$$

这里，如果$\mathbb{F}$ 是无限域，则应将 $1/|\mathbb{F}|$ 解释为零。

常数$(1 - 1/|\mathbb{F}|)^{-d}$ 是紧确的（见命题 5.5）。已知常数 2^d 对于$d \leq 1$ [DM18], 是紧确的，但对于更高的 d 则尚不清楚。

1.1. **线性矩阵**。 在 $d = 1$的情形下，我们所考虑的秩归结为若干基础概念。理解低最大秩线性矩阵的问题，等价于理解低秩矩阵的向量空间；事实上，在所有点处对线性矩阵求值会得到一个矩阵向量空间，反之亦然。有界最大秩的线性矩阵一直是长期研究的主题（例如参见 [EH88]及其中的参考文献），其研究可追溯至 Dieudonné [Die49]的工作。尽管对这类空间进行精确分类似乎难以实现 [EH88，第 4], 节，但该领域的一个基本结果是 Flanders 的以下结果：

定理 1.2 （Flanders [Fla62]）。 设 M是一个 $\mathcal{M}_1$-矩阵，并假设 $|\mathbb{F}| > \mathrm{MR}(M) = r$。则存在可逆标量矩阵 P 和 Q 使得

$$PMQ = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

其中 M_{11} 的大小为 $r \times r$。

遵循 Eisenbud 和 Harris [EH88]（另见 [AL81]），如果我们能找到可逆的 P 与 Q 使得

$$PMQ = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

若 M_{11} 的大小为 $r_1 \times r_2$，则称 M 为 $(r_1 + r_2)$-压缩空间；注意，每个 r-压缩空间的交换秩因而最大秩至多为 r。不难证明，PR(M) 是使 M 成为 r-压缩空间的 r 的最小值，因此定理 1.2 表明，在大域上，我们有 PR(M) ≤ 2MR(M)，这本质上就是定理 1.1 对 $d = 1$的陈述。此后已证明常数 2 是紧的 [DM18]。

部分原因在于，关于低秩矩阵空间的早期工作大多（[Mes85]是一个显著例外）是在足够大的域上进行的，使得最大秩与交换秩重合，因此交换秩作为一种固有多项式性质的概念，在代数复杂性理论的背景下大体独立地发展起来；在该理论中，计算交换秩的问题是 Edmonds 的一个经典问题 [Edm67]。“交换秩”这一术语本身要新得多，源于 Fortin 和 Reutenauer [FR04] 将其与非交换秩进行比较的工作（非交换秩最早定义于 [Ber67], ，另见 [Coh71; Coh95]），其中将$x_{1、\ i}$ 视为自由非交换变量。对于线性形式的矩阵 M，Fortin 和 Reutenauer 证明， M 的非交换秩至多为 r 等价于 M 是一个 r-压缩空间，即非交换秩与划分秩相同。应用定理 1.2，Fortin 和 Reutenauer 得出结论：非交换秩至多为交换秩的两倍，不过他们似乎忽略了提及定理 1.2 中对域大小的限制。我们的技术无条件地证明了这一点：

推论 1.3. 对于 M_1-矩阵 M，我们有 $\mathrm{PR}(M) \leq 2\mathrm{CR}(M)$。

1.2. **张量的应用。** 推论 1.3 的一个有趣应用 是研究 3-张量的秩。Adiprasito、Kazhdan 和 Ziegler 的独立研究 [AKZ21] 以及 Cohen 和第一作者 [CM22]确立了以下结果:

定理 1.4 (Adiprasito-Kazhdan-Ziegler [AKZ21][2], Cohen-Moshkovitz [CM22])。 若 $\mathrm{AR}(T)$ 和 $\mathrm{SR}(T)$分别表示有限域 3-张量 T 的解析秩和切片秩$\mathbb{F}_q$ （定义见 第 2 节），则有

$$\mathrm{SR}(T) \le \big(3 + O(\log(q)^{-1})\big)\,\mathrm{AR}(T).$$

然而，定理 1.4 的两种证明都依赖 Derksen [Der22] 在几何不变量理论中的工作。近期，Lampert [Lam 25] 找到了另一种初等证明，证明了 $\mathrm{SR}(T) = O(\mathrm{AR}(T))$，并指出

$$\mathrm{SR}(T) \le 5\,\mathrm{AR}(T) + O\big(\log_q(\mathrm{AR}(T)+1)+1\big).$$

（通过将此界应用于 $T^{\oplus k}$，取足够大的 k，并利用切片秩 [Gow21]和解析秩在直和下可加这一事实，可以将该界提升为 $\mathrm{SR}(T) \le 5\,\mathrm{AR}(T)$；事实上，$\mathrm{SR}(T)/\mathrm{AR}(T) = \mathrm{SR}(T^{\oplus k})/\mathrm{AR}(T^{\oplus k}) \le 5 + o(1)$ 当 $k \to \infty$。）借助推论 1.3，我们得以用初等方法恢复常数 3，从而回答了 Lampert [Lam25] 提出的问题，并改进了次主项:

推论 1.5。 对于任意定义在$\mathbb{F}_q$上的3阶张量 T，

$$\mathrm{SR}(T) \le \left(3 + \frac{2}{q-1}\right)\mathrm{AR}(T).$$

>我们不确定是否应该预期 3 是最优常数。

除次数为 1 的情形外，定理 1.1 也可视为猜想 [Lov19; KZ21; AKZ21] 的一个特例。该猜想认为，张量的解析秩与划分秩等价。事实上，一个 M_d-矩阵 M 自然对应于一个 $(d+2)$-张量 T，并且可以证明 $\mathrm{AR}(T) \le \mathrm{MR}(M)$ 和 $\mathrm{PR}(T) \le \mathrm{PR}(M)$。从这一角度看，我们的结果尤为值得注意，因为解析秩最近已被证明与许多其他张量秩概念等价 [CY25; BL24], ，而划分秩在这方面的研究仍未取得突破。定理 1.1 似乎是首个在小域和任意次数下，给出划分秩与其他秩概念之间线性关系的结果。关于定理 1.1 与张量秩之间关系的详细讨论，请参阅第 7 节。

1.3. **证明概述。** 证明 定理 1.1的主要部分在于上界估计低交换秩矩阵的划分秩。为此，我们将舒尔补从线性代数推广到张量。作为复习，设我们有一个（由标量构成的）矩阵 M，其具有分块分解

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

其中 A 是可逆的，大小为 $r \times r$。那么，舒尔补 $M/A := D - CA^{-1}B$ 具有如下性质：秩$(M/A) = $秩 $M - r$。此外,

$$M - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M/A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix},$$

显然，它是 r 个外积之和。因此，这一过程使我们能够将 M 写成外积之和与一个余项之和，其中余项由舒尔补给出，且具有更低的秩。

现在假设 M 的元素属于$\mathcal{M}_d$。我们可以考虑在有理函数域上取舒尔补，从而得到某个矩阵 M'，使得 $M - M'$是有界个数的外积之和，而 M'的（交换）秩低于 M。然而，这样做会引发一个严重问题：求子矩阵的逆会使多重线性性质丧失。具体而言，$M - M'$的外积分解中的因子以及 M'本身的元素都会变成任意有理函数。幸运的是，在某些情况下，我们能够通过用多重线性多项式近似这些有理函数来解决这一问题。通过反复执行这一过程，我们可以将余项化为零，从而得到一个

[2]在 [AKZ21], 中声称精确常数 3 即可满足要求，且不依赖于 q。然而，我们看不出为何情况会是这样，并认为这可能是一个错误，尤其是因为 [CM22] 使用了本质上相同的证明，却没有得到这个常数。

的完整分解。这些操作与作者先前工作中出现的操作类似 [MZ22],参见第 7 节 了解更多详情。

证明中的另一个关键思路是使用所谓的“重数法”：我们根据这样一个事实推导结果，即次数有界的多项式不可能在每一点都以高阶消失。这一论证用于定理 1.1的两个陈述中。

1.4. **概述**。在第 2 节介绍一些预备定义之后，我们将在第 3 节 中定义一种近似过程，并用它在第 4 节中定义微分舒尔补。我们将在定理 1.1的第 5 节中证明该定理。我们将在推论 1.3 和1.5 的第 6 节中给出证明；由于本文的第 3 节 符号相当繁复，因此我们会在 $d = 1$ 情形下重新证明全部内容，此时论证要简单得多。特别是，第 6 节 基本上是自成一体的。我们将在第 7 节讨论与任意次数的张量秩之间的关系。

2. 预备知识

2.1. 多齐次多项式。对于无界参数 n，令 $x_1 = (x_{1,1}, \dots, x_{1,n})$ $x_2 = (x_{2,1}, \dots, x_{2,n}) \dots$ 为一个变量元组序列；对于正整数 N 的有限子集 S，令 M_S 为 F 上的多线性形式（或多线性齐次多项式）的集合，其中每个多项式分别关于 $(x_i)_{i\in S}$ 线性。这是 $\mathbb{Z}^S_{\geq 0}$-分次环 $\mathrm{R}_S := \mathrm{F}[x_{i,j} : i \in S, j \in [n]]$ 的次数为 $(1, 1, \dots, 1)$ 的分量。为与引言保持一致，令 R_d 和 M_d 分别作为 $\mathrm{R}^{[d]}$ 和 $\mathrm{M}^{[d]}$ 的缩写。

给定 $\boldsymbol{p}_S = (p_i)_{i\in S} \in (\mathrm{F}^n)^S$ 和 $f \in \mathcal{R}_S$，我们可以在 $\boldsymbol{p}_S$ 处对多项式 f 求值，从而得到 $f(\boldsymbol{p}_S) \in \mathrm{F}$。我们还需要部分求值这一概念：给定 $f \in \mathcal{R}_S$ 和 $\boldsymbol{p}_{S\setminus S'} = (p_i)_{i\in S\setminus S'} \in (\mathrm{F}^n)^{S\setminus S'}$，通过令 $x_i = p_i$，可得到某个多项式 $f[\boldsymbol{p}_{S\setminus S'}] \in \mathcal{R}_{S'}$。 S' 的选择应始终根据上下文而明确。

F^n 中的元素用非粗体字母表示，而粗体字母表示这类元素的集合。给定这样的集合 $\boldsymbol{x}$，我们总是令 x_i 为 $\boldsymbol{x}$ 的第 i个元素，并令 $\boldsymbol{x}_S$ 作为 $(x_i)_{i\in S}$的简写。通常， $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$表示第 i个标准基向量。

2.2. **矩阵**。本文研究的主要对象是 L-矩阵，即元素属于 L的矩阵，其中 L 是某个嵌入F-代数中的F-向量空间（例如 $\mathcal{M}_d$）。[3]

类似地，我们将 L-向量定义为元素属于 L的向量，它也可以等价地视为一个F-线性映射$\mathrm{F}^a \to L$。如果 R是一个环，给定两个 R-向量 u和 v，我们可以构造它们的外积 $u \otimes v$，这是一个 R-矩阵。在线性映射的术语中，如果 u和 v分别对应于 $\ell_1 : \mathrm{F}^a \to R$和 $\ell_2 : \mathrm{F}^b \to R$，那么$u \otimes v$对应于双线性映射 $(x, y) \mapsto \ell_1(x)\ell_2(y)$。

如果 R 是一个整环，且 M 是一个 R-矩阵，则我们将 $\mathrm{rank}(M)$ 记为 M的秩，其中将其视为分式域 R上的矩阵。注意，对于 M一个 $\mathcal{M}_d$-矩阵，$\mathrm{CR}(M) = \mathrm{rank}(M)$；根据上下文的不同，我们将使用这两种记号。

给定一个矩阵 M 以及其元素上的函数 φ，我们将 $\varphi(M)$ 记为逐元素应用 φ后所得的矩阵。注意，要使其与基无关， φ 是 F -线性的既是必要条件也是充分条件。

2.3. **张量**。 在本文中， d-张量是 $\mathcal{M}_d$的一个元素。[4] 对于一个 d-张量 $T \in \mathcal{M}_d$，我们定义以下几种秩：

- 如果 $\mathrm{F} = \mathrm{F}_q$，定义 解析秩 $\mathrm{AR}(T) = -\log_q \mathrm{bias}(T)$，其中 $\mathrm{bias}(T) = \Pr_{\boldsymbol{p}\in(\mathbb{F}^n)^{d-1}}[T[\boldsymbol{p}] = 0]$。 在此处以及本文其余部分，$\Pr_a$ 和 E_a 分别表示概率和期望，均取自对 a的均匀随机选择。
- 划分秩 $\mathrm{PR}(T)$ 是最小的 r，使得 T 可以表示为 r 个可约张量之和，即形如 T_1T_2 的张量，其中 $T_1 \in \mathcal{M}_S$ 以及 $T_2 \in \mathcal{M}_{S'}$ 对应某个非平凡划分$S \sqcup S' = [d]$。 （划分的选择可以不同。）
- 切片秩$\mathrm{SR}(T)$的定义与划分秩类似，只是它要求 $\deg(T_1) = 1$ （因此 $|S| = 1$）。

[3]我们定义的每个概念都将独立于 F-基的选择，即在 F 上的基变换下保持不变或具有等变性。换言之，一个 $a \times b$ L-矩阵可以自然地视为一个 F-双线性映射 $B : \mathrm{F}^a \times \mathrm{F}^b \to L$，而且除了它们分别是 a 维和 b 维向量空间之外，我们不会使用 F^a 和 F^b 的任何其他结构。[4]d-张量与由标量构成的 d 维数组自然一一对应：$\sum_{i_1,\dots,i_d\in[n]} c_{i_1,\dots,i_d} x_{1,i_1} \cdots x_{d,i_d}$ 对应于 $(c_{i_1,\dots,i_d})_{i_1,\dots,i_d\in[n]}$。

对于 $d=3$，划分秩与切片秩相等，因为 $\{1,2,3\}$ 的每一个非平凡二划分都含有一个单元素集。若 $d\geq 2$，则任意张量 $T\in\mathcal{M}_d$ 都可以关联到一个 $\mathcal{M}_{d-2}$-矩阵，我们将其记为 $T_{\square}$。具体而言，$T_{\square}=(m_{ij})_{i,j=1}^{n}$，其中 $m_{ij}\in\mathcal{M}_{d-2}$ 是满足以下条件的唯一选择

$$T=\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}x_{d-1,i}x_{d,j}.$$

换句话说，$T(x_1,\dots,x_d)=x_{d-1}^{t}T_{\square}(x_1,\dots,x_{d-2})x_d$。

提醒读者注意，“划分秩”一词用于指代两种略有不同的秩概念。转换回张量的概念后，$\mathrm{PR}(T_{\square})$ 的定义与 T 的划分秩类似，只不过在每个乘积中，$|S\cap\{d-1,d\}|=1$。因此，$\mathrm{PR}(T_{\square})\geq\mathrm{PR}(T)$，但等号未必成立。

3. 近似

本节将介绍一种用多线性形式近似有理函数的过程，这对于定义微分舒尔补至关重要。本节是本文技术性最强的部分。

3.1. 有理函数的近似。对于 $\boldsymbol{p}\in(\mathbf{F}^n)^d$，令 $\mathcal{R}_{d,\boldsymbol{p}}$ 表示通过求逆所有在 $\boldsymbol{p}$ 处不消失的齐次多项式而得到的 $\mathcal{R}_d$ 的局部化，即 $\mathbf{F}(x_1,\dots,x_d)$ 中所有在 $\boldsymbol{p}$ 处有定义的齐次有理函数构成的环。注意，该环继承了 $\mathcal{R}_d$ 的 $\mathbf{Z}^d$-分次，其中令 $\deg(A/B)=\deg A-\deg B\in\mathbf{Z}^d$。令 $\mathcal{M}_{d,\boldsymbol{p}}$ 表示 $\mathcal{R}_{d,\boldsymbol{p}}$ 的次数为 $(1,1,\dots,1)$ 的分量。现在我们定义一种基于在 $\boldsymbol{p}$ 处取 d 方向导数的逼近映射。

定义 3.1. 映射 $[-]_{\boldsymbol{p}}\colon\mathcal{M}_{d,\boldsymbol{p}}\to\mathcal{M}_d$ 定义为

$$[f]_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{y})=\frac{\partial}{\partial t_1}\cdots\frac{\partial}{\partial t_d}f(p_1+t_1y_1,\dots,p_d+t_dy_d)\Big|_{t_1=\cdots=t_d=0}.$$

等价地，

$$[f]_{\boldsymbol{p}}=\sum_{i_1,\dots,i_d\in[n]}c_{i_1,\dots,i_d}x_{1,i_1}\cdots x_{d,i_d}\in\mathcal{M}_d$$

其中

$$c_{i_1,\dots,i_d}=\frac{\partial^d f}{\partial x_{1,i_1}\cdots\partial x_{d,i_d}}(\boldsymbol{p}).$$

注意，若 $f\in\mathcal{M}_d$，则 $[f]_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{y})$ 是 $f(p_1+t_1y_1,\dots,p_d+t_dy_d)$ 中 $t_1\cdots t_d$ 的系数，而这正是 $f(\boldsymbol{y})$。特别地，$[[f]_{\boldsymbol{p}}]_{\boldsymbol{p}}=[f]_{\boldsymbol{p}}$。

例 3.2. 假设 $d=1$ 和

$$f=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1+\alpha_2}\in\mathcal{M}_{1,e_1},$$

其中 α_i 是 $x_{1,\,i}$ 的简写。那么

$$\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}=\frac{\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2-\alpha_2^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\quad\text{and}\quad\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}=\frac{-\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2},$$

其值为 1，并且 -1 在 e_1处。因此 $[f]_{e_1}=\alpha_1-\alpha_2$。

定义 3.1 使用起来出人意料地困难，因为它没有将 $\mathcal{M}_d$ 视为 $\mathcal{M}_{d,\boldsymbol{p}}$的子集，因此下文将使用逼近映射的另一种定义。为表述该定义，对于 $i\in[d]$，令 $\mathfrak{p}_i\subseteq\mathcal{R}_{d,\boldsymbol{p}}$表示由在 $x_i=p_i$处消失的齐次有理元素生成的理想。

命题 3.3。 对于 $f\in M_{d,\boldsymbol{p}}$，逼近 $[f]_{\boldsymbol{p}}$ 是唯一的 $\bar{f}\in M_d$，满足 $f-\bar{f}\in\sum_{i\in[d]}\mathfrak{p}_i^2$。

例 3.4。 如果 f 如例 3.2中所示，那么

$$f-[f]_{e_1}=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1+\alpha_2}-\frac{\alpha_1^2-\alpha_2^2}{\alpha_1+\alpha_2}=\frac{2\alpha_2^2}{\alpha_1+\alpha_2},$$

它在 $\mathfrak{p}_1^2$ 中，如 $\alpha_2\in\mathfrak{p}_1$ 所示。

在证明命题 3.3之前，我们先具体描述一下$\mathcal{M}_{d,\ \boldsymbol{p}}$这将有助于后续计算。为此，假设对于所有 i，$p_i = e_1$。设

$$z_i = (x_{i,2}/x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}/x_{i,1})$$

对于 $i \in [d]$，$\mathcal{R}_d$ 中每个次数为 $(k_1, k_2, \ldots, k_d)$ 的齐次多项式都可以写成

$$x_{1,1}^{k_1} x_{2,1}^{k_2} \cdots x_{d,1}^{k_d} f(z_1, \ldots, z_d)$$

其中 f 是一个（不一定是齐次的）多项式，它在 z_i 中的（总）次数至多为 k_i。如果 f 有非零常数项，那么这个多项式在 $\boldsymbol{p}$ 处不为零。因此，$\mathcal{R}_{d,\boldsymbol{p}}$ 中次数为 $(k_1, \ldots, k_d)$ 的元素具有如下形式

$$x_{1,1}^{k_1} x_{2,1}^{k_2} \cdots x_{d,1}^{k_d} g(z_1, \ldots, z_d)$$

其中 g 是任意一个在 0 处有定义的有理函数。由此刻画可推出 $\mathfrak{p}_i = \langle z_{i,2}, \ldots, z_{i,d} \rangle$。

¯命题的证明 命题 *3.3*。 不失一般性，设 $p_i = e_1$ 对所有 i。我们首先证明存在一个 f 满足 $f - \bar{f} \in \sum_{i\in[d]} \mathfrak{p}_i^2$，然后证明任何这样的 $\bar{f}$都必须等于 $[f]_{\boldsymbol{p}}$。

设 $g(z_1, \ldots, z_d) = f/(x_{1,\ 1} \cdots x_{d,\ 1})$ 是一个在 $z_i = 0$ 处有定义的有理函数。我们希望找到一个多项式$\bar{g}(z_1, \ldots, z_d)$，使其为多重仿射的（即关于每个单独的 z_i 都是仿射的），并满足 $g - \bar{g} \in \sum_{i\in[d]} \mathfrak{p}_i^2$。如果我们找到了这样的¯一个 $\bar{g}$，就可以令 $f = x_{1,\ 1} \cdots x_{d,\ 1} \bar{g}$。

写作 $g = A/B$，其中 A，B 是环 $\mathcal{R}' = \mathrm{F}[z_{i,j}]$ 中的多项式。令 $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{R}'$ 为由$\sum_i \langle z_{i,\ 2}, \ldots, z_{i,\ d} \rangle^2$ 给出的理想。由于 $\mathcal{R}'/\mathfrak{a}$ 是一个局部环，其极大理想为 $\langle z_{i,\ j} \rangle$，且 B 不属于这个极大理想，因此存在某个 $C \in \mathcal{R}'$ 使得 $BC - 1 \in \mathfrak{a}$。因此，

$$g - AC = \frac{A - ABC}{B} \in \sum_{i\in[d]} \mathfrak{p}_i^2$$

因此 g 模 $\sum_{i\in[d]} \mathfrak{p}_i^2$ 等价于某个多项式。所有在某个 z_i 中次数至少为2的单项式都在$\mathfrak{p}_i^2$中，因此我们可以删除所有这些单项式，从而得到一个多重仿射的 $\bar{g}$，正如所需。

为了证明 $\bar{f} = [f]_{\boldsymbol{p}}$，我们首先断言：若 $h \in \mathfrak{p}_i^2$，则 $[h]_{\boldsymbol{p}} = 0$。事实上，对 x_j 取方向导数与对$(x_{j,1}, z_j)$取方向导数是相同的。若 $i \neq j$，则这将 $\mathfrak{p}_i^2$的元素映到 $\mathfrak{p}_i^2$的元素，而对于 $i = j$，这将 $\mathfrak{p}_i^2$的元素映到 $\mathfrak{p}_i$的元素。因此

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \cdots \frac{\partial}{\partial t_d} h(x_1 + t_1 y_1, \ldots, x_d + t_d y_d)\Big|_{t_1 = \cdots = t_d = 0} \in \mathfrak{p}_i,$$

并且在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ 处求值得到 $[h]_{\boldsymbol{p}} = 0$。

因此，我们有 $[f]_{\boldsymbol{p}} - [f]_{\boldsymbol{p}} = [f - f]_{\boldsymbol{p}} = 0$，故 $[f]_{\boldsymbol{p}} = [f]_{\boldsymbol{p}}$。然而，由于 $f \in \mathcal{M}_d$，我们有 $[f]_{\boldsymbol{p}} = f$。至此证明完毕。□

在接下来的一节中，我们还需要一个看起来有些奇特的辅助结果。为了陈述它，定义环$\mathcal{S} = \mathcal{R}_{d,\ \boldsymbol{p}}[y_1, \ldots, y_d]$，其中 $y_1, \ldots, y_d$ 是自由标量变量。通过指定 y_i 与x_i 具有相同的次数（即 $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$），它仍然是一个$\mathbb{Z}^d$-分次环。定义F-线性保次数映射$Y$：$\mathcal{M}_{d,\boldsymbol{p}} \to \mathcal{S}$，由下式给出

$$Y(f) = \sum_{S\subseteq[d]} f[\boldsymbol{p}_S] \cdot \prod_{i\in S} y_s.$$

最后，令 $\mathfrak{q} \subseteq \mathcal{S}$ 为由在 $x_i = p_i$和 $y_i = -1$处求值时为零的齐次元素所生成的理想。

引理 3.5. 若 $f \in \mathcal{M}_{d,\boldsymbol{p}}$，则 $Y(f) \in \mathfrak{q}^d$。若进一步 $f \in \mathfrak{p}_i^2$对某个 i，则 $Y(f) \in \mathfrak{q}^{d+1}$.

证明。 假设 th 在 $p_i = e_1$ 对所有 i。 记$f = x_{1,1}\dots x_{d,1}g(z_1,\dots,z_d)$与$y_i' = x_{i,1} + y_i \in \mathfrak{q}$，我们有 e

$$\begin{aligned} Y(f) &= \sum_{S\subseteq[d]} \left(\prod_{i\in[d]\setminus S} x_{i,1} \cdot \prod_{i\in S} y_i \cdot g(\boldsymbol{z}_{S\to 0}) \right) \\ &= \sum_{S\subseteq[d]} \left(\prod_{i\in[d]\setminus S} x_{i,1} \cdot \prod_{i\in S} (y_i' - x_{i,1}) \cdot g(\boldsymbol{z}_{S\to 0}) \right) \\ &= \sum_{S'\subseteq S\subseteq[d]} \left((-1)^{|S|-|S'|} \prod_{i\in[d]\setminus S'} x_{i,1} \cdot \prod_{i\in S'} y_i' \cdot g(\boldsymbol{z}_{S\to 0}) \right) \\ &= \sum_{S'\subseteq[d]} \left(\prod_{i\in[d]\setminus S'} x_{i,1} \cdot \prod_{i\in S'} y_i' \cdot \sum_{S\supseteq S'} (-1)^{|S|-|S'|} g(\boldsymbol{z}_{S\to 0}) \right). \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{z}_{S\to 0}$表示（z_1，…，z_d），但对所有 $i \in S$，将 z_i替换为 0。对于给定的每个 S'，我们有 $\prod_{i\in S'} y_i' \in \mathfrak{q}^{|S'|}$，因为 $y_i' \in \mathfrak{q}$，且有理函数

$$g_{S'} \coloneqq \sum_{S\supseteq S'} (-1)^{|S|} g(\boldsymbol{z}_{S\to 0})$$

具有这样的性质：当任意一个满足 $i \notin S'$ 的 z_i取 0 时，它的值为 0。因此它属于 $\prod_{i\notin S'} \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{q}^{d-|S'|}$。这说明 $Y(f) \in \mathfrak{q}^d$。

若 $f \in \mathfrak{p}_i^2$，则对所有 S， $g(\boldsymbol{z}_{S\to 0})$ 都属于 $\mathfrak{p}_i^2$，且当 $i \in S$时为零。因此，若 $i \in S'$，则有 $g_{S'} = 0$；若 $i \notin S'$，则有 $g_{S'} \in \mathfrak{p}_i^2 \cap \prod_{i\notin S'} \mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i \cdot \prod_{i\notin S'} \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{q}^{d+1-|S|}$。故 $Y(f) \in \mathfrak{q}^{d+1}$。□

3.2. **矩阵的逼近**。 由于 $[-]_{\boldsymbol{p}}$是 $\mathbb{F}$-线性的，对于一个 $\mathcal{M}_{d,\,\boldsymbol{p}}$-矩阵 M现在我们可以构造 $[M]_{\boldsymbol{p}}$，回想一下，这意味着逐项应用 $[-]_{\boldsymbol{p}}$ 到 M 上。我们证明这一运算的两个结论。这两个界都是紧的（见 例 4.9）。

命题 3.6。 若 u 和 v 是齐次的 $R_{d,\,\boldsymbol{p}}$-向量，且 $u \otimes v$ 是一个 $M_{d,\,\boldsymbol{p}}$-矩阵，则$\mathrm{PR}([u \otimes v]_{\boldsymbol{p}}) \le 2^d$。

证明。 同样，假设对所有 i都有 $p_i = e_1$，并令 m为可逆元 $x_{1,\,1}x_{2,\,1}\dots x_{d,\,1}$。由于 $\mathcal{R}_{d,\,\boldsymbol{p}}$的所有次数上都存在可逆元，我们可以假设 u的次数为 (1，1，…，1)，而 v的次数为 (0，0，…，0)。令 $w = mv$，于是 $[u \otimes v]_{\boldsymbol{p}} = [m^{-1}(u \otimes w)]_{\boldsymbol{p}}$。由于 $\sum_{i\in[d]} \mathfrak{p}_i^2$是一个理想，我们有$[m^{-1}(u \otimes w)]_{\boldsymbol{p}} = [m^{-1}([u]_{\boldsymbol{p}} \otimes [w]_{\boldsymbol{p}})]_{\boldsymbol{p}}$，因此可以假设 u 和 w 属于 $\mathcal{M}_d$。

现在我们可以显式描述 $[m^{-1}(u \otimes w)]_{\boldsymbol{p}}$。我们可以唯一分解

$$u = \sum_{S\subseteq[d]} u_S \prod_{i\notin S} x_{i,1} \quad \text{and} \quad w = \sum_{S\subseteq[d]} w_S \prod_{i\notin S} x_{i,1},$$

其中 u_S 和 w_S 是不涉及 $x_{i,1}$ （对任意 $i \in S$）的 $\mathcal{M}_S$-向量。观察

$$\left[\frac{u_S \prod_{i\notin S} x_{i,1} \otimes w_{S'} \prod_{i\notin S'} x_{i,1}}{m} \right]_{\boldsymbol{p}} = \left[\frac{u_S \otimes w_{S'}}{\prod_{i\in S\cap S'} x_{i,1}} \cdot \prod_{i\notin S\cup S'} x_{i,1} \right]_{\boldsymbol{p}}.$$

如果 $S \cap S'$包含元素 j，则 $u_S \otimes w_{S'}$的每一项都在 $\mathfrak{p}_j^2$中，并且应用 $[-]_{\boldsymbol{p}}$得到零。否则，量 $u_S \otimes w_{S'} \cdot \prod_{i\notin S\cup S'} x_{i,1}$ 已经是一个 $\mathcal{M}_d$-矩阵，近似不起作用。对 S和 S'求和，我们得出

$$\left[\frac{u \otimes w}{m} \right]_{\boldsymbol{p}} = \sum_{S\cap S'=\varnothing} u_S \otimes w_{S'} \prod_{i\notin S\cup S'} x_{i,1} = \sum_{S\subseteq[d]} u_S \otimes \left(\sum_{S\cap S'=\varnothing} w_{S'} \prod_{i\notin S\cup S'} x_{i,1} \right),$$

其划分秩确实至多为 2^d。 □

命题 3.7. 若 M是一个 $M_{d,\boldsymbol{p}}$-矩阵，则 秩$([M]_{\boldsymbol{p}}) \le \sum_{S\subseteq[d]}$秩 $M[\boldsymbol{p}_S]$

证明。 我们将证明

$$\sum_{S\subseteq[d]} \operatorname{rank} M[\boldsymbol{p}_S] \overset{(1)}{\geq} \operatorname{rank} Y(M) \overset{(2)}{\geq} \operatorname{rank} Y([M]_{\boldsymbol{p}}) \overset{(3)}{=} \operatorname{rank}([M]_{\boldsymbol{p}}).$$

不等式 (1) 由秩的次可加性立即得出。

为证明 (2)，令 $r = \operatorname{rank} Y([M]_{\boldsymbol{p}})$。存在一个 $r \times r$ 子矩阵，其行列式非零。由于该行列式是关于 x_i 和 y_i 的次数恰为 dr 的多项式，它在 $x_i = p_i$ 和 $y_i = -1$ 处的消失阶数至多为 dr，也就是说，它不属于 $\mathfrak{q}^{dr+1}$。由引理 3.5，$Y(M)$ 中的每个元素都属于 $\mathfrak{q}^d$，且 $Y(M) - Y([M]_{\boldsymbol{p}})$ 的每个元素都属于 $\mathfrak{q}^{d+1}$。因此，$Y(M)$ 的相应子式模 $\mathfrak{q}^{dr+1}$ 与原子式相同，故非零。于是 $\operatorname{rank} Y(M) \geq r$。

为证明 (3)，考虑单同态 $Y' \colon \mathcal{R}_d \to \mathcal{S}$，它将 $x_{i,j} \mapsto x_{i,j} + p_{i,j} y_i$ 送至相应元素。容易看出，这在 $\mathcal{M}_d$ 上与 Y 一致，因此

$$\operatorname{rank}([M]_{\boldsymbol{p}}) = \operatorname{rank}(Y'([M]_{\boldsymbol{p}})) = \operatorname{rank}(Y([M]_{\boldsymbol{p}})). \qquad \square$$

4. 舒尔补运算

4.1. 环上的舒尔补。本节回顾线性代数中的舒尔补概念，并将其推广到 R-矩阵。

设 R 是一个整 $\mathbf{F}$-代数，且 M 是一个 R-矩阵。若 A 是 M 的一个可逆（方）子矩阵，我们定义舒尔补 M/A 如下：若 A 是 M 的左上子矩阵，并且

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

我们定义

$$M/A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D - BA^{-1}C \end{pmatrix}.$$

如果 A 不是 M 的左上子矩阵，则存在置换矩阵 P 和 Q，使得 A 是 PMQ 的左上子矩阵；我们令 $M/A = P^{-1}(PMQ/A)Q^{-1}$。不难证明，这一构造与 P 和 Q 的选择无关。

注 4.1。这一记号与舒尔补的标准处理方式（见本文引言）略有不同；在标准处理方式中，假设 A 是左上子矩阵，因此可以在定义 M/A 时省略零行和零列。这一区别纯粹是记号上的，为了避免假设（不失一般性） A 是左上子矩阵。

注 4.2. 上述定义虽然具体，但或许并不令人满意，因为它没有解释舒尔补在基变换下如何表现，而下面的无坐标方法旨在弥补这一点。给定双线性映射 $B \colon \mathbf{F}^a \times \mathbf{F}^b \to R$ 以及 r 维子空间 $U \subseteq \mathbf{F}^a$ 和 $V \subseteq \mathbf{F}^b$，可以将 B 限制以得到映射 $B' \colon U \times V \to R$。若 B' 的行列式为单位，则存在唯一的投影映射 $P \colon \mathbf{F}^a \to U \otimes R$ 和 $Q \colon \mathbf{F}^b \to V \otimes R$，使得对所有 $x \in \mathbf{F}^a$ 和 $y \in V$ 有 $\tilde{B}'(P(x), y) = B(x, y)$，并且对所有 $x \in U$ 和 $y \in \mathbf{F}^b$ 有 $\tilde{B}'(x, Q(y)) = B(x, y)$，其中 $\tilde{B}' \colon (U \otimes R) \times (V \otimes R) \to R$ 是 B' 的唯一 R- 双线性扩张。于是，舒尔补 B/B' 由下式给出

$$(B/B')(x, y) = B(x, y) - \tilde{B}'(P(x), Q(y)).$$

特别地，双线性形式的舒尔补仅取决于子空间 U 和 V 的选择。从分块定义来看，这一点并不显然，因为直接翻译会导致分解 $\mathbf{F}^a = U \oplus U'$ 和 $\mathbf{F}^b = V \oplus V'$。然而，$U'$ 和 V' 的选择并不重要。

若 M 是一个 R-矩阵，且 A 是一个 $r \times r$ 可逆子矩阵，则舒尔补具有以下基本性质：

- 如果 $\varphi \colon R \to S$ 是一个同态，那么 $\varphi(M/A) = \varphi(M)/\varphi(A)$。特别地，基环的选择不会影响舒尔补。

- 秩(M/A) $=$ 秩(M) $-r$。这来自恒等式

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

  其中右侧的秩为 $\mathsf{rank}(M/A) + r$。
- 存在 R-向量 $u_1, \dots, u_r$, $v_1, \dots, v_r$，使得 $M - M/A = u_1 \otimes v_1 + \cdots + u_r \otimes v_r$。这是因为在 A 为左上子矩阵的情况下，我们有

$$M - M/A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

4.2. 微分舒尔补。 设 M 为一个 $\mathbf{M}_d$-矩阵，A 为 M的一个 $r \times r$ 子矩阵，并且$\boldsymbol{p} \in (\mathbf{F}^n)^d$ 满足 $A(\boldsymbol{p})$ 可逆。由于 $A(\boldsymbol{p})$ 可逆，$\det A$ 在 $\mathbf{R}_d$ 中关于 $(r, r, \dots, r)$ 是齐次的，次数为（并且在 $\boldsymbol{p}$处非零），因此在 $\mathbf{R}_{d,\boldsymbol{p}}$中可逆。因此，$A$ 在 $\mathbf{R}_{d,\boldsymbol{p}}$ 中可逆，我们可以在 $\mathbf{R}_{d,\boldsymbol{p}}$中取 M/A 的舒尔补。由于 $AA^{-1} = I$ 的次数为零，A^{-1} 的次数为 $(-1, -1, \dots, -1)$，这意味着 M/A 是一个 $\mathbf{M}_{d,\boldsymbol{p}}$-矩阵。

定义 4.3。 微分舒尔补 是$\mathcal{M}_d$-矩阵 $[M/A]_{\boldsymbol{p}}$，它是在$\mathcal{M}_{d,\boldsymbol{p}}$环中取舒尔补后，再逐项应用映射 $[-]_{\boldsymbol{p}}$ 得到的。

应用 命题 3.6 和 3.7 可得以下结果：

命题 4.4。 $\mathrm{PR}(M - [M/A]_{\boldsymbol{p}}) \leq 2^d r$。

证明。 根据(4.1)，我们可以写成

$$M - M/A = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes v_i$$

其中，对每个 $i \in [r]$, u 和 v 都是齐次的 $\mathcal{R}_{d,\boldsymbol{p}}$-向量，且 $u \otimes v$ 是一个 $\mathcal{M}_{d,\boldsymbol{p}}$-矩阵。应用命题 3.6，可得

$$\mathrm{PR}(M - [M/A]_{\boldsymbol{p}}) = \mathrm{PR}([M - M/A]_{\boldsymbol{p}}) = \mathrm{PR}\left(\sum_{i=1}^{r} [u_i \otimes v_i]_{\boldsymbol{p}}\right) \leq \sum_{i=1}^{r} \mathrm{PR}([u_i \otimes v_i]_{\boldsymbol{p}}) \leq 2^d r. \qquad \square.$$

命题 4.5。 秩$([M/A]_{\boldsymbol{p}}) \leq \sum_{S \subseteq [d]}$(秩 $M[\boldsymbol{p}_S] - r$)。

证明。 由于部分求值是一个同态，我们有

$$(M/A)[\boldsymbol{p}_S] = M[\boldsymbol{p}_S]/A[\boldsymbol{p}_S],$$

其秩为 秩 $M[\boldsymbol{p}_S] - r$。因此，由 命题 3.7，我们有

$$\mathrm{rank}([M/A]_{\boldsymbol{p}}) \leq \sum_{S \subseteq [d]} (M/A)[\boldsymbol{p}_S] = \sum_{S \subseteq [d]} (\mathrm{rank}\, M[\boldsymbol{p}_S] - r). \qquad \square$$

4.3. 例子。 对于本节中的每个例子，$\boldsymbol{p} = (e_1, \dots, e_1)$、$\alpha_i$、$\beta_i$和 γ_i 分别是$x_{1,i}$、$x_{2,i}$和$x_{3,i}$的简写。

例 4.6 ($d = 1$)。 假设 M 是一个$\mathcal{M}_1$-矩阵，且存在相容的分块分解

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M(e_1) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，由于 $B(e_1)$ 和 $C(e_1)$ 均为零，$CA^{-1}B$ 中的每个元素都属于 $\mathfrak{p}_1^2$，因此可用 0 近似。由此可见，$[M/A]_{\boldsymbol{p}}$ 非常简单：

$$[M/A]_{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

例 4.7 ($d = 2$)。 假设 M 是一个 $\mathcal{M}_2$-矩阵，满足

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M(e_1, e_1) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 B 和 C 不含 $\alpha_1\beta_1$ 项，我们可以写成 $B = \beta_1 B_1 + \alpha_1 B_2 + B_{12}$ 和 $C = \beta_1 C_1 + \alpha_1 C_2 + C_{12}$，其中 B_1 和 C_1 是不含 α_1 项的 $\mathcal{M}^{\{1\}}$-矩阵， B_2 和 C_2 是不含 β_1 项的 $\mathcal{M}^{\{2\}}$-矩阵，而 B_{12} 和 C_{12} 是不含 α_1 或 β_1 项的 $\mathcal{M}^{\{1,2\}}$-矩阵。在 $CA^{-1}B$ 的展开式中，经过近似后不会立即变为零的唯一项是 $\alpha_1\beta_1 C_1 A^{-1} B_2 + \alpha_1\beta_1 C_2 A^{-1} B_1$。

注意，如果 E 是一个次数为 $(0, \ldots, 0)$、元素属于 $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2$ 的矩阵，则有 $[C_1 E B_2]_{\boldsymbol{p}} = 0$，因为 C_1 中的所有元素都属于 $\mathfrak{p}_1$，而 B_2 中的所有元素都属于 $\mathfrak{p}_2$。此外， $\alpha_1\beta_1 A^{-1} - I$ 也是这样的矩阵，因为它在 (e_1, e_1) 处为零。因此，$[\alpha_1\beta_1 C_1 A^{-1} B_2]_{\boldsymbol{p}} = [C_1 I B_2]_{\boldsymbol{p}} = C_1 B_2$。类似地， $[\alpha_1\beta_1 C_2 A^{-1} B_1]_{\boldsymbol{p}} = C_2 B_1$。因此

$$[M/A]_{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D - C_1 B_2 - C_2 B_1 \end{pmatrix}.$$

计算 $[CA^{-1}B]_{\boldsymbol{p}}$ 时， $d = 2$ 可归结为计算 $[CB/(\alpha_1\beta_1)]_{\boldsymbol{p}} = C_1 B_2 + C_2 B_1$ （一种乘积法则），但对于 $d \geq 3$，情况则更为复杂。

例 4.8 ($d = 3$)。 假设 M 是一个 $\mathcal{M}_3$-矩阵，满足

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad M(e_1, e_1, e_1) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若对 $d = 2$ 情形采用相同的步骤，最终便需要计算诸如$[\alpha_1\beta_1\gamma_1^2 C_1 A^{-1} B_2]_{\boldsymbol{p}}$ 的项，其中 C_1 是一个 $\mathcal{M}^{\{1\}}$-矩阵， B_2 是一个 $\mathcal{M}^{\{2\}}$-矩阵。然而，这在很大程度上取决于A^{-1}，例如，一个 γ_2/γ_1 项会影响所得近似。虽然可以利用 A^{-1}的幂级数展开写出 $[M/A]_{\boldsymbol{p}}$的显式公式，但它相当复杂，因此我们就此打住。

例 4.9。 命题 4.4 和4.5 中的界是紧的。为简化记号，我们考虑 $d = 2$的情形，但以下例子的直接推广适用于所有 d。

设 M 为如下给出的 5×5 $\mathcal{M}_2$-矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 & \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_1\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

若令 A 为 M的 1×1 左上子矩阵，则可计算

$$[M/A]_{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1\beta_1 & -\alpha_1\beta_2 & -\alpha_2\beta_1 & -\alpha_2\beta_2 \\ 0 & -\alpha_1\beta_2 & 0 & -\alpha_2\beta_2 & 0 \\ 0 & -\alpha_2\beta_1 & -\alpha_2\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2\beta_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然，秩$([M/A]_{\boldsymbol{p}}) = 4$。此外，$\mathrm{PR}(M - [M/A]_{\boldsymbol{p}}) = 4$ 亦然；事实上，$M - [M/A]_{\boldsymbol{p}}$ 的前两行相同，因此其划分秩至多为 4，而且其 4×4 右下子矩阵的秩——因而划分秩——至少为 4。这与命题 4.4和4.5中的界相符。特别地，这意味着命题 3.6 和 3.7 也是紧的。

5. 定理 1.1的证明

5.1. 多项式方法。 对于 F 上的多项式 $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ 以及点 $p \in \mathrm{F}^n$，令 $\mathrm{mult}(f, p) = \mathrm{mindeg}\ f(x + p)$，即 $f(x + p)$ 的支撑中任意单项式的最小次数。注意

$f(p) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{mult}(f,p) \geq 1$。作为一个简单的例子，

$$\mathrm{mult}(x_1x_2,(p_1,p_2)) = \mathrm{mindeg}((x_1+p_1)(x_2+p_2)) = \begin{cases} 2 & (p_1,p_2)=(0,0) \\ 1 & (p_1,p_2)\neq(0,0), p_1p_2=0 \\ 0 & p_1p_2\neq 0 \end{cases}.$$

以下是施瓦茨-齐佩尔引理的一个推广，见 [DKSS13]。为完整起见，我们给出一个初等证明。

引理 5.1([DKSS13])。若 $f\in\mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]$ 是总次数为 d 的非零多项式，且 $S\subseteq\mathbb{F}$ 是一个有限子集，则 n

$$\sum_{p\in S^n}\mathrm{mult}(f,p)\leq d\cdot|S|^{n-1}.$$

证明。我们对 n 和 $\deg f$ 进行双重归纳。$n=0$ 的情形显然，因为 f 是常数，且左边为零。对于某个 $n>0$，$d=0$ 的情形显而易见。若 $d>0$，则先假设 f 不被任何 x_n-s 整除。于是，我们有

$$\sum_{p\in S^n}\mathrm{mult}(f,p)=\sum_{s\in S}\sum_{p'\in S^{n-1}}\mathrm{mult}(f,(p',s))\leq\sum_{s\in S}\sum_{p'\in S^{n-1}}\mathrm{mult}(f(-,s),p')\leq\sum_{s\in S}d\cdot|S|^{n-2}=d\cdot|S|^{n-1},$$

其中我们对非零多项式 $f(-,s)$ 使用了归纳假设，$s\in S$ 的总次数至多为 d。

否则，对于某个 g，我们有 $f=(x_n-s)g$。在这种情况下，我们有

$$\sum_{p\in S^n}\mathrm{mult}(f,p)=\sum_{p\in S^n}\mathrm{mult}(x_n-s,p)+\mathrm{mult}(g,p)\leq|S|^{n-1}+(d-1)\cdot|S|^{n-1}=d\cdot|S|^{n-1},$$

这里我们对 g 使用了归纳假设。 □

现在我们可以证明定理 1.1的前半部分了。

引理 5.2. 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$，且 M 是某个 $d\geq 1$ 的 $\boldsymbol{M}_d$-矩阵。那么

$$\mathbb{E}_{p_d\in\mathbb{F}^n}\mathrm{CR}(M[p_d])\geq\left(1-\frac{1}{q}\right)\mathrm{CR}(M).$$

证明。令 $\mathrm{CR}(M)=r$。将 M 替换为一个具有满交换秩的 $r\times r$ 子矩阵不会改变右侧，而左侧不会增大。因此，不妨假设 M 是 $r\times r$。

多项式 $\det M$ 非零，且是次数为 $(r,r,\dots,r)$ 的齐次多项式。特别地，对于 $\mathcal{R}_{d-1}$ 中任意次数为 $(r,r,\dots,r)$ 的单项式 $m=m(x_1,\dots,x_{d-1})$，存在一个次数为 r 的多项式 $f_m(x_d)\in\mathcal{R}^{\{d\}}$，使得 $\det M=\sum_m f_m\cdot m$。选取某个 m，使得 f_m 非零。

令 $p_d\in\mathbb{F}^n$。注意，根据行列式的多重线性性，我们有

$$\det M[x_d+p_d]=\det(M[x_d]+M[p_d])=\sum_{S\subseteq[r]}\det M_S,$$

其中 M_S 是“混合矩阵”：由 S 标记的行来自 $M[p_d]$，其余行来自 $M[x_d]$。若 $|S|>\mathrm{CR}(M[p_d])$，则来自 $M[p_d]$ 的行线性相关，因此 $\det M_S=0$。因此，$\det M[x_d+p_d]$ 中的每个单项式在 x_d 中的次数至少为 $r-\mathrm{CR}(M[p_d])$，这意味着 $\mathrm{mult}(f_m,p)\geq r-\mathrm{CR}(M[p_d])$。将引理 5.1 应用于 f_m（它是非零的，次数为 r）以及 $S=\mathbb{F}$，可得

$$r-\mathbb{E}_{p_d}\mathrm{CR}(M[p_d])\leq\mathbb{E}_{p_d}[\mathrm{mult}(f_m,p_d)]\leq r/q,$$

因此 $\mathbb{E}_{p_d}\mathrm{CR}(M[p_d])\geq(1-1/q)r$，证毕。 □

推论 5.3。假设 $\mathbb{F}=\mathbb{F}_q$ 且 M 是一个 $\boldsymbol{M}_d$-矩阵。则

$$\mathrm{MR}(M)\geq\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}\in(\mathbb{F}^n)^d}[\mathrm{rank}\,M(\boldsymbol{p})]\geq\left(1-\frac{1}{q}\right)^d\mathrm{CR}(M).$$

证明。 左侧不等式显然成立，因为 $\mathrm{MR}(M) \geq$秩 $M(\boldsymbol{p})$总是成立。为证明右侧不等式，反复应用 引理 5.2 可得

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_{[d]}}[\mathrm{CR}(M[\boldsymbol{p}_{[d]}])] \geq \left(1-\frac{1}{q}\right)\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_{[d-1]}}[\mathrm{CR}(M[\boldsymbol{p}_{[d-1]}])] \geq \cdots \geq \left(1-\frac{1}{q}\right)^{d-1}\mathbb{E}_{\boldsymbol{p}_{[1]}}[\mathrm{CR}(M[\boldsymbol{p}_{[1]}])] \geq \left(1-\frac{1}{q}\right)^{d}\mathrm{CR}(M).$$

最左侧的量就是 $\mathbf{E}_{\boldsymbol{p}}[$秩 $M(\boldsymbol{p})],$，因此得证。 □

注 5.4。 如果 $d > 0$和 $M \neq 0$，事实上我们有 $\mathrm{MR}(M) > (1-1/q)^d\mathrm{CR}(M)$。这是因为秩 $M(\mathbf{0}) = 0 <$ $\mathrm{MR}(M)$，这意味着秩 $M(\boldsymbol{p})$ 不是常数随机变量，因此 $\mathrm{MR}(M) > \mathbf{E}_{\boldsymbol{p}}[$秩 $M(\boldsymbol{p})]$。

命题 5.5。 常数 $(1-1/q)^d$ 无法改进。

证明。 在 $d = 1$的情况下，对于任意 $k \geq 1$，我们可以构造一个大小为 $(q^k-1)/(q-1)$ 的对角矩阵 M_k，其对角元素由 $x_{1,1}, \ldots, x_{1,k}$ 中所有非零线性形式按比例缩放后组成。于是 $\mathrm{CR}(M_k) = (q^k-1)/(q-1)$。此外，注意到，

$$\operatorname{rank} M_k(p) = \begin{cases} q^{k-1} & (p_1, \ldots, p_k) \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases},$$

因此 $\mathrm{MR}(M_k) = q^{k-1}$。于是，$\mathrm{MR}(M_k)/\mathrm{CR}(M_k) = (1-1/q^k)/(1-1/q)$，因此 $\lim_{k\to\infty}\mathrm{MR}(M_k)/\mathrm{CR}(M_k) = 1-1/q$。

对于 $d \geq 2$，考虑 $\mathcal{M}_d$-矩阵 $M_{k,\,d} = M_k(x_1) \boxtimes \cdots \boxtimes M_k(x_d)$，其中 $\boxtimes$表示矩阵的克罗内克积。于是 $\mathrm{MR}(M_{k,\,d}) = \mathrm{MR}(M_k)^d$ 且 $\mathrm{CR}(M_{k,\,d}) = \mathrm{CR}(M_k)^d$，因此 $\lim_{k\to\infty}\mathrm{MR}(M_{k,\,d})/\mathrm{CR}(M_{k,\,d}) = (1-1/q)^d$。 □

引理 5.6。 设 M是一个 M_d-矩阵。若 $\mathbb{F}$是无限集，则 $\mathrm{PR}(M) \leq 2^d\mathrm{CR}(M)$。若 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$，则

$$\mathrm{PR}(M) \leq \frac{2^d(q-1)^d}{(2^d-1)(q-1)^d - (2^d-2)q^d}\,\mathrm{CR}(M),$$

前提是分母为正（当 q 相对于 d 足够大时，这一点成立）。

可以证明， $q \geq d2^d$ 就足够了。

证明。若 $d = 0$，则结果显然，故假设 $d \geq 1$。

设 $C = C(d,q)$为该陈述中的常数。我们注意到

$$Cq^d = 2^d(q-1)^d + C(2^d-1)(q^d-(q-1)^d). \tag{5.1}$$

特别地， $Cq^d \geq 2^d(q-1)^d + C(q^d-(q-1)^d)$，整理后可得 $C \geq 2^d$。

我们对 $k = \mathrm{CR}(M)$使用归纳法。情形 $k = 0$是平凡的，故假设 $k > 0$。选取某个 $\boldsymbol{p} \in (\mathbf{F}^n)^d$，使得 $r =$秩 $M(\boldsymbol{p}) = \mathrm{MR}(M)$。若F是无限的，则 $r = k$。若$\mathbf{F} = \mathbf{F}_q$，则由推论 5.3，我们有$r \geq (1-1/q)^d k$。设 A为 M的一个 $r \times r$ 子矩阵，使得 $A(\boldsymbol{p})$可逆。于是，我们有

$$\mathrm{PR}(M) \leq \mathrm{PR}(M - [M/A]_{\boldsymbol{p}}) + \mathrm{PR}([M/A]_{\boldsymbol{p}}) \leq 2^d r + \mathrm{PR}([M/A]_{\boldsymbol{p}}),$$

利用命题 4.4。此外，由命题 4.5，

$$\mathrm{CR}([M/A]_{\boldsymbol{p}}) \leq \sum_{S\subseteq[d]}(\operatorname{rank} M[\boldsymbol{p}_S] - r) = \sum_{S\subsetneq[d]}(\operatorname{rank} M[\boldsymbol{p}_S] - r) \leq (2^d-1)(k-r).$$

如果 F 是无限域，这意味着 $[M/A]_{\boldsymbol{p}} = 0$，因此得证。在有限域的情形下，我们有

$$(2^d-1)(k-r) \leq (2^d-1)\cdot\frac{q^d-(q-1)^d}{q^d}\cdot k$$

小于 k if $(2^d-1)(q-1)^d > (2^d-2)q^d$。我们对 $[M/A]_{\boldsymbol{p}}$ 使用归纳假设，得到

$$\mathrm{PR}(M) \leq 2^d r + C(2^d-1)(k-r).$$

右端关于 r（弱）单调递减；事实上， r 的系数为 $2^d - C(2^d-1) \le 2^d - 2^d(2^d-1) \le 0$。由于 $r/k \ge (1-1/q)^d$，我们有

$$\frac{\mathrm{PR}(M)}{\mathrm{CR}(M)} \le \frac{2^d(q-1)^d + C(2^d-1)(q^d-(q-1)^d)}{q^d} = C,$$

使用(5.1)。证明完毕。 □

5.2. **极小的域**。 推论 5.3 证明了定理 1.1的前半部分，而引理 5.6 则证明了对于足够大的定理 1.1 的后半部分。为处理剩余情形，我们转到一个域扩张。

设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ 是一个有限域，并令 $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{q^k}$ 为 $\mathbb{F}$ 的次数为 k 的扩域。令 $\mathcal{M}_d^{\mathbb{F}}$ 和 $\mathcal{M}_d^{\mathbb{K}}$ 分别表示在 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{K}$ 上考虑的 $\mathcal{M}_d$。给定一个 $\mathcal{M}_d^{\mathbb{F}}$-矩阵 $M^{\mathbb{F}}$，也可以将其视为一个 $\mathcal{M}_d^{\mathbb{K}}$-矩阵，我们将其称为 $M^{\mathbb{K}}$。

由于交换秩可以用子式的消失来描述，而这与基域无关，因此有 $\mathrm{CR}(M^{\mathbb{K}}) = \mathrm{CR}(M^{\mathbb{F}})$。下面的引理是 [CM23中推论 1]的一个变体。

引理 5.7. $\mathrm{PR}(M^{\mathbb{F}}) \le k\,\mathrm{PR}(M^{\mathbb{K}})$.

证明。 设 $\beta_1, \dots, \beta_k$ 是 $\mathbb{K}$ 的一个 $\mathbb{F}$-基，并任取一个 $\mathbb{F}$-线性投影 $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{F}$。我们声称，对于任意 $\mathcal{M}_d^{\mathbb{K}}$-矩阵 M，都有 $\mathrm{PR}(\varphi(M)) \le k\,\mathrm{PR}(M)$。为证明这一点，只需考虑划分秩为 1 的 M，也就是形如 $u \otimes v$ 的 M，其中 u 是一个 $\mathcal{M}_S^{\mathbb{K}}$-向量， v 是一个 $\mathcal{M}_{[d]\setminus S}^{\mathbb{K}}$-向量。将 $u = \sum_{i\in[k]} u_i\beta_i$ 写作$\mathcal{M}_S^{\mathbb{F}}$-向量 u_i，因此有

$$\varphi(M) = \sum_{i\in[k]} \varphi(u_i \otimes \beta_i v) = \sum_{i\in[k]} u_i \otimes \varphi(\beta_i v),$$

其划分秩确实至多为 k。 □

定理 *1.1* 的证明 定理 *1.1*。 鉴于推论 5.3和 引理 5.6，只需证明，对于任意固定的有限域 $\mathbb{F}$，都有 $\mathrm{PR}(M) \lesssim_d \mathrm{CR}(M)$，其中 $\lesssim_d$表示一个相差至多为某个依赖于 d的常数的关系。选取某个 使得 引理 5.6 对上述 $\mathbb{K}$ 成立。于是，由 引理 5.7 可得

$$\mathrm{PR}(M^{\mathbb{F}}) \lesssim_d \mathrm{PR}(M^{\mathbb{K}}) \lesssim_d \mathrm{CR}(M^{\mathbb{K}}) = \mathrm{CR}(M^{\mathbb{F}}),$$

正如所需。 □

6. Degree-1 Applications

6.1. **划分秩与交换秩**。 推论 1.3 恰好是 $d = 1$ 引理 5.6 的 情形。这里我们给出一个独立且更简短的证明。在此之前，我们回顾一下，正如引言中提到的，$\mathcal{M}_1$-矩阵的划分秩有如下自然的解释：

事实 6.1。 对于一个$\mathcal{M}_1$-矩阵 M，$\mathrm{PR}(M) \le r$ 当且仅当存在可逆标量矩阵 P和 Q，使得

$$PMQ = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 M_{11} 的大小为 $r_1 \times r_2$ ，且 $r_1 + r_2 \le r$。

其原因在于，给定任意一种写法

$$M(x_1) = \sum_{i=1}^{r_1} u_i \otimes v_i(x_1) + \sum_{i=1}^{r_2} u_i'(x_1) \otimes v_i'$$

对于标量向量 u_i 和 v_i' 以及$\mathcal{M}_1$-向量 v_i 和 u_i'，我们可以更换基，使所有 u_i 都属于由 $\mathbb{F}^n$ 的前 r_1 个基向量生成的子空间，而所有 v_i 都属于由 $\mathbb{F}^n$ 的前 r_2 个基向量生成的子空间。这恰好对应于上述对 PMQ的分块分解。

推论 *1.3* 的证明推论 *1.3*。设 $\alpha_i = x_{1,\ i}$。我们对 $k = \mathrm{CR}(M)$ 使用归纳法，其中 $k = 0$ 情形显然成立。若 $k > 0$，取某个 p，使得 $M(p)$ 非零，并令 $r =$秩 $M(p)$。不失一般性，假设 $p = e_1$。若我们更换基，使得

$$M(p) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

我们有

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 I + A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 A、B、C 和 D 是不依赖于 α_1 的 $\mathcal{M}_1$-矩阵。我们断言 $\mathrm{CR}(D) \le k - r$，这将完成证明，因为我们将有

$$\mathrm{PR}(M) \le \mathrm{PR}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 I + A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}\right) + \mathrm{PR}(D) \le 2r + 2(k-r) = 2k,$$

由关于 D的归纳假设。

若 $\mathrm{CR}(D) \ge k - r + 1$，我们可以删除 M 的行和列，从而得到一个矩阵

$$M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 I + A & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

使得 D' 为 $(k - r + 1) \times (k - r + 1)$ 且 $\det D' \neq 0$。我们断言 $\det M' \neq 0$，这将导致矛盾，因为它蕴含 $\mathrm{CR}(M) \ge \mathrm{CR}(M') \ge k + 1$。

M' 的行列式是关于 α_1、……、α_n 的多项式；我们断言，作为关于 α_2、……、α_n 的多项式，其 α_1^r 次项的系数恰好是 $\det D'$。事实上，在 $\det M'$ 的展开中，任取一项，若其关于 α_1 的次数至少为 r，那么它必定包含 $\alpha_1 I$ 中所有非零元素。所有这些项的和为 $\alpha_1^r \det D'$，再加上关于 α_1 的次数较低的项，从而证明了这一断言。因此，$\det M' \neq 0$，如所求。□

6.2. **3-张量**。本节中，我们假设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$。我们运用所建立的方法证明 推论 1.5，由此得到目前已知的 $\sup_T \mathrm{SR}(T)/\mathrm{AR}(T)$ 的最佳界，其中 T 遍历所有 $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F})$。

对于 3-张量 $T \in \mathbf{M}_{3,}$，回忆一下，$T_\square$ 表示相应的 $\mathbf{M}_1$-矩阵，它是一个 $n \times n$ 矩阵，其元素 $m_{j,k}$ 是由 $T(x, y, z) = \sum_{j,k=1}^{n} m_{j,k}(x) y_j z_k$ 给出的线性形式。我们先给出一个引理，它将 3-张量 T 的解析秩与某个（大）子空间中随机点处 $T_\square$ 的平均秩联系起来。这是对 [MZ22] 中一个引理的小幅改编（另见 [Lam25]）。

引理 6.2. 对于任意两个 3-张量 T 和 $a \ge 0$，存在一个子空间 $U \subseteq \mathbb{F}^n$，使得

$$a\mathbb{E}_{x \in U}[\mathrm{rank}\, T_\square(x)] + \mathrm{codim}\, U \le (a+1)\,\mathrm{AR}(T).$$

证明. 令 $B\colon (\mathbf{F}^n)^2 \to \mathbf{F}^n$ 为对应于 T的双线性映射，即 $T(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n} B_k(x, y) z_k$。令 $Z = B^{-1}(0) \subseteq (\mathbf{F}^n)^2$ 为 B的零点集。我们首先证明

$$\mathbb{E}_{(x,y) \in Z}[\mathrm{rank}\, B(x, -)] \le \mathrm{AR}(T).$$

注意到 $\Pr_{(x,y) \in Z}[x = a] = q^{n - \mathrm{rank}\, B(a,-)}/|Z|$。因此，

$$\mathbb{E}_{(x,y) \in Z} q^{\mathrm{rank}\, B(x,-)} = \sum_{a \in \mathbb{F}^n} \Pr_{(x,y) \in Z}[x = a] q^{\mathrm{rank}\, B(a,-)} = \sum_{a \in \mathbb{F}^n} q^n/|Z| = q^{2n}/|Z| = 1/\,\mathrm{bias}(T) = q^{\mathrm{AR}(T)}.$$

最后，对凸函数 $z \mapsto q^z$应用詹森不等式。

注意到，类似地有 $\mathbf{E}_{(x,y) \in Z}$秩 $B(-, y) \le \mathbf{AR}(T)$。现在，根据期望的线性性，

$$\mathbb{E}_{(x,y) \in Z}[a \cdot \mathrm{rank}\, B(x, -) + \mathrm{rank}\, B(-, y)] \le (a+1)\,\mathrm{AR}(T).$$

注意到 $(x, y) \in Z$当且仅当 $x \in \ker B(-, y)$。因此，存在 $y_0 \in \mathbf{F}^n$，使得子空间$U = \ker B(-, y_0)$ 满足

$$\mathbb{E}_{x \in U}[a \cdot \mathrm{rank}\, B(x, -)] + \mathrm{rank}\, B(-, y_0) \le (a+1)\,\mathrm{AR}(T).$$

证明 f现在可由以下事实得出：$\mathrm{rank}\ B(x, -) = \mathrm{rank}\ T_\square(x)$，且 $\mathrm{rank}\ B(-, y_0) =$余维数 U。 □

推论 *1.5* 的证明推论 *1.5*。 对于任意 $\mathcal{M}_1$-矩阵 M,

$$\mathrm{PR}(M) \le 2\,\mathrm{CR}(M) \le \frac{2}{1-1/q}\mathbb{E}_x[\operatorname{rank} M(x)]$$

其中第一个不等式是推论 1.3，第二个不等式是引理 5.2。

回顾$\mathrm{SR}(T) = \mathrm{PR}(T) \le \mathrm{PR}(T_\square)$。将引理 6.2 应用于 T与 $a = 2/(1-1/q)$，并令 $U \subseteq \mathbb{F}^n$为所得子空间。则

$$\begin{aligned}\mathrm{SR}(T) &\le \mathrm{SR}(T|_{U\times\mathbb{F}^n\times\mathbb{F}^n}) + \text{余维数 } U \le \mathrm{PR}(T_\square|_U) + \text{余维数 } U \\ &\le a\mathbb{E}_{x\in U}[\operatorname{rank} T_\square(x)] + \operatorname{codim} U \le (a+1)\,\mathrm{AR}(T).\end{aligned}$$

为完成证明，注意到 $a+1 = \frac{3q-1}{q-1} = 3+\frac{2}{q-1}$，即为所需。 □

7. 与解析秩—划分秩问题的关系

在本节中，我们假设 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_q$。

张量秩研究中的一个重要问题是以下猜想:

猜想 7.1 ([Lov19; KZ21; AKZ21])。对于任意 $d \ge 2$，存在常数 C_d，使得对于任意 d阶张量T，在任意有限域上，$\mathrm{PR}(T) \le C_d\,\mathrm{AR}(T)$。

不难证明$\mathrm{AR}(T) \le \mathrm{PR}(T)$，因此这个猜想常被描述为解析秩与划分秩等价。情形 $d=2$ 是平凡的，因为二者相同；而情形 $d=3$已由定理 1.4解决，我们在推论 1.5中略作改进。对于情形 $d \ge 4$，目前已知的最佳界来自作者此前的工作:

定理 7.2 ([MZ22])。$\mathrm{PR}(T) \le C_d\,\mathrm{AR}(T)\cdot(1+\log_q(1+\mathrm{AR}(T)))$。

特别是，这意味着 猜想 7.1 对所有大小至少为 $\mathrm{AR}(T)$ 的多项式级别的域都成立，因此对数因子仅与小域有关。

或许令人惊讶的是，这个对数项已被证明相当难以消除，因为它似乎反映了我们对多项式在小有限域上可能表现得多么病态这一问题的认知中存在的根本性缺口。此外，这一缺口似乎是划分秩所特有的，因为小域上的解析秩已与许多其他概念联系起来 [CY25; BL24]。

从这个角度来看，定理 1.1 似乎是首个突破这一对数障碍的结果：尽管只在特殊情形下，它为小有限域上的划分秩建立了线性界。事实上，$\mathrm{AR}(T) \le \mathrm{MR}(T_\square)$，这意味着低最大秩矩阵是低解析秩张量的特殊情形。具体而言，给定 $T \in \mathbf{M}_d$ 和 $\boldsymbol{p}_{[d-2]} \in (\mathbf{F}^n)^{d-2}$，均匀随机选取的 $p_{d-1} \in \mathbf{F}^n$ 满足 $T[\boldsymbol{p}_{[d-1]}] = 0$ 的概率恰好为 $q^{-\operatorname{rank}(T_\square[\boldsymbol{p}_{[d-2]}])} \ge q^{-\mathrm{MR}(T_\square)}$。由于 $\mathrm{PR}(T) \le \mathrm{PR}(T_\square)$，定理 1.1 表明，对于那些因对应矩阵具有低最大秩而具有低解析秩的张量，猜想 7.1 成立。

此外，本文中发展的技巧与 [MZ22]中的技巧密切相关。在 [MZ22], 中，我们定义了张量的局部秩，而定理 7.2 的证明首先证明解析秩较低的张量具有较低的局部秩，随后证明所有局部秩较低的张量都具有较低的划分秩。多重线性矩阵的交换秩是局部秩的一种特殊情形。（采用 [MZ22], 中的记号，我们有 $\mathrm{LR}_0(T) = (\mathrm{CR}(T_\square)\,0,\dots,0)$；见 [MZ22，例 5。5]。）

如果应用 [MZ22第 7], 节中的技巧，就会得到如下结论:

命题 7.3 (本质上是 [MZ22，定理 1 的一个特殊情形。5])。 若 M 是一个 $\mathcal{M}_d$-矩阵，且 $\mathrm{CR}(M) = \mathrm{MR}(M)$，则 $\mathrm{PR}(M) \le 2^d r$。

不过，这也可以由我们的舒尔补运算理论推出，因为如果 $\mathrm{CR}(M) = \mathrm{MR}(M) = r$，我们就可以找到一个 $r\times r$ 子矩阵和某个 $\boldsymbol{p}$，使得 $A[\boldsymbol{p}]$ 可逆。相对于这个 A 和 $\boldsymbol{p}$ 取舒尔补，便可得到 $[M/A]_{\boldsymbol{p}} = 0$，从而 $\mathrm{PR}(M) = \mathrm{PR}(M - [M/A]_{\boldsymbol{p}}) \le 2^d r$。事实上，尽管看起来截然不同， [MZ22] 和本文针对这一情形的论证实际上是相同的（尤其是，它们得出了相同的划分秩分解）。

本文在概念上的主要进展，是提出了分多步分解低秩矩阵/张量的思路，而不是一次性完成分解。后一种方法适用于大域，但依赖一些条件（我们在 *LR* 稳定性 中称之为 [MZ22]），而这些条件在小域上难以企及。为了解决这个问题，我们改为分解矩阵/张量的大部分，并对余项的秩进行界定。如果这个余项的秩低于原张量的秩，那么迭代这一过程最终就会得到完整的分解。

这一思路引出了一种证明 猜想 7.1 的潜在方法。 [MZ22], 我们通过构造公式，证明了命题 7.3 的一个重大推广：在特定条件下，这些公式能够分解所有局部秩较低的张量。一个自然而然的问题是，我们能否也利用这些公式分解张量的大部分，而不是全部？事实上，这是可行的，并由此引出了“多层舒尔补”的概念。

之所以这不能立即证明 猜想 7.1，是因为缺少与 推论 5.3 类似的结果。在 定理 1.1 的证明中，推论 5.3 表明，总能相对于一个大小几乎达到交换秩的子矩阵取舒尔分量，这对于防止舒尔补的秩失控增长是必要的。然而，局部秩由次数高得多的多项式决定，因此，仅凭次数考量无法证明张量几乎全部都能通过单步分解。如何开发一种替代方法来保证几乎完全分解，是目前正在研究的课题。

参考文献

[AKZ21] 卡里姆·阿迪普拉西托、戴维·卡兹丹和塔玛·齐格勒。关于三线性形式的施密特秩与解析秩。预印本。2021年。arXiv: 2102.03659.[AL81] M. D. 阿特金森和 S. 劳埃德。有界秩矩阵的本原子空间。《澳大利亚数学会杂志 A 辑》30，473–482。1981年。[Ber67] 乔治·M·伯格曼。自由代数中的交换元素及环论相关主题。博士论文。哈佛大学，1967年。[BL24] 本杰明·贝利和阿米凯·兰珀特。强度受伯奇秩线性界定。预印本。2024年。arXiv: 2410.00248.[CM22] 亚历克斯·科恩和 GUY MOSHKOVITZ。双线性映射的结构与随机性。《离散分析》2022:12。2022年。[CM23] 亚历克斯·科恩和 GUY MOSHKOVITZ。在大域上，划分秩与解析秩等价。《杜克数学杂志》172，2433–2470。2023年。[Coh71] P. M. 科恩。自由理想环在斜域中的嵌入。《伦敦数学会会刊》第三辑 23，193–213。1971年。[Coh95] P. M. 科恩。《斜域：一般除环理论》。剑桥大学出版社，1995年。[CY25] 陈启元和叶科。域扩张下秩的稳定性。《离散分析》2025:27。2025年。[Der22] 哈姆·德克森。张量的 G-稳定秩与帽集问题。《代数与数论》16，1071–1097。2022。[Die49] 让·迪厄多内。关于将正交群推广到四个变量的情形。《数学文献》1，282–287。1949年。[DKSS13] 泽埃夫·德维尔、斯瓦斯蒂克·科帕蒂、舒班吉·萨拉夫和马杜·苏丹。重数方法的推广及其在凯克亚集与合并器中的应用。《SIAM 计算杂志》42，2305–2328。2013年。[DM18] 哈姆·德克森和维苏·马卡姆。关于非交换秩与张量秩。《线性与多线性代数》66，1069–1084。2018年。[Edm67] 杰克·埃德蒙兹。互异代表系与线性代数。《美国国家标准局研究杂志 B 辑》71B，241–245。1967年。[EH88] 戴维·艾森巴德和乔·哈里斯。低秩矩阵的向量空间。《数学进展》70，135–155。1988年。[Fla62] H. 弗兰德斯。关于有界秩线性变换空间。《伦敦数学会杂志》37，10–16。1962年。[FR04] 马克·福坦和克里斯托夫·勒特瑙尔。线性矩阵的交换秩／非交换秩，以及低秩矩阵的子空间。《洛塔尔组合学研讨会》52，B52f。2004年。[Gow21] W. T. 高尔斯。直和的切片秩。预印本。2021年。arXiv: 2105.08394.[KZ21] 戴维·卡兹丹和塔玛·齐格勒。代数组合学在代数几何中的应用。《印度数学杂志》新系列 32，1412–1428。2021年。[Lam25] 阿米凯·兰珀特。三线性形式的切片秩与解析秩。《离散分析》2025:25。2025年。[Lov19] 沙哈尔·洛维特。张量的解析秩及其应用。《离散分析》2019:7。2019年。

[Mes85] Roy Meshulam. 矩阵子空间中的极大秩。 牛津数学季刊 2**36**, 2252291985nd ser. –..[MZ22] Guy Moshkovitz 和 DanielG. Zhu。划分与解析秩之间的拟线性关系。预印本。2022。arXiv: 2211.05780。