arXiv:2603.11060v1 [cs.SI] 4 Mar 2026

随机区块模型中的林–卢–姚里奇重加权：曲率一致集中与有限时域跟踪

Varun Kotharkar

2026年3月13日

摘要

我们研究平衡双块随机区块模型中由曲率驱动的边重加权，以实现社区恢复。给定一个图 G 及其初始权重 $W^{(0)} = A$，我们通过林–卢–姚（Ollivier 类型）里奇曲率 [Ollivier，2009，Lin 等人， 2011], 迭代更新边权重，同时所有运输代价均在 $unweighted$ 图度量 $W_{xy}^{(t+1)}$中计算 $= \kappa_{W^{(t)}}(x,\ y)\ \mathbb{1}\{\{x,y\} \in E\}$。在中等密度机制下，我们证明了 $uniform$边曲率集中，并表明单次里奇重加权即可产生两级权重，使块内连通性相较于块间连通性得到增强。因此，经过重加权的图上的谱聚类具有严格更大的总体特征间隙；我们进而得到相应的非渐近扰动界和 Davis–Kahan 错聚类保证。此外，我们给出一个明确的充分条件，在该条件下，单步错聚类界有所改善[von Luxburg，2007，Rohe 等人，2011，Lei 和 Rinaldo， 2015]。我们还分析了固定有限时域 T 内的迭代重加权：随机迭代序列在 $t \le T$ 上一致地跟踪确定性双权重递推，从而为典型随机图模型中的社区检测提供了基于原理的有限时域“曲率流”解释。

1 引言

Ollivier–Ricci 曲率及其 Lin–Lu–Yau (LLY) 极限，为图提供了一种基于传输的局部几何刻画 [Ollivier，2009年，Lin 等人， 2011]。这些曲率既被用作描述性网络统计量，也被用作算法流程的基本构件，包括图重加权、曲率驱动去噪/正则化及相关的离散曲率流 [Weber 等人，2017年，Ni 等人，2019年，Sia 等人， 2019]。本文研究平衡两块随机块模型（随机块模型）中的经验LLY曲率，并分析一种简单的里奇重加权方案：为每条观测到的边赋予一个由其经验LLY曲率导出的权重，从而得到一个加权图，再利用其归一化拉普拉斯算子进行谱聚类 [von Luxburg，2007年，Rohe 等人，2011年，Lei 和 Rinaldo， 2015]。全文中，所有曲率均使用无权图距离计算。

不同于以往由曲率驱动的启发式方法和网络里奇流过程——它们主要基于经验，且往往在缺乏有限样本保证的情况下演化底层度量/图权重[Ni 等人，2019年，Sia 等人，2019年，Weber 等人， 2017], 我们在一个典型的随机块模型中给出概率性、非渐近分析：(i) 对所有边一致成立的曲率集中，(ii) 确定性的双权重平均场代理，以及 (iii) 对迭代过程的有限时域跟踪，并给出显式速率。

模型。 我们考虑一个具有 $2n$ 个顶点、两个社区且每个社区大小为 n 的平衡随机块模型。社区内部的边以概率 $p_0 = p_0(n)$ 出现，社区之间的边以概率 $p_1 = p_1(n)$ 出现，其中 $0 < p_1 < p_0 < 1$。记 $\bar{p} := \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$。

贡献。

- **曲率一致集中与双层确定性代理**。 在中等稠密的情形下，我们证明经验LLY曲率 $\kappa(i,\ j)$在所有边上一致地集中于两个确定性水平附近：社区内水平 $w(n),$ 记作 in，以及社区间水平 $w(n),$ 记作 out。

- **一步 Ricci 重加权放大社区对比度**。 利用曲率集中，我们证明单步重加权增大了归一化拉普拉斯算子中社区内与跨社区交互之间的分离：在总体层面，这产生更大的特征值间隙；在样本层面，我们得到相应的扰动界以及改进的谱聚类保证 [Rohe 等人，2011，Lei 和 Rinaldo，2015，Yu 等人， 2015]。

- **有限时域迭代重加权遵循确定性的双标量递推**。对于固定的 T，我们分析迭代曲率重加权，并证明经验加权拉普拉斯矩阵在 $t \leq T$上一致地跟踪确定性的"双权重"基准。基准权重经由一个显式的二维平均场映射演化；特别地，所诱导的基准 对比度与基准特征值间隙关于 t单调。

常设的中等稠密窗口。 为避免在各节中重复陈述略有不同的稀疏性条件，我们采用单一的常设窗口（假设 2.2），其强度足以支撑本文的全部论证（一致的度数与共度数控制、基于匹配的传输下界，以及沿有限次重加权步骤的稳定性）。较早的单步结论在更弱条件下仍然成立；当有助于清晰性时，我们会记录此类最低要求。

组织结构。 第 2 节介绍运输距离、Ollivier 与 LLY 曲率，以及既定的随机块模型窗口。第 3 节证明边上的一致 LLY 曲率集中。第 4 节分析一步 Ricci 重加权及其谱后果。第 5 节将分析扩展到有限时域迭代重加权。

范围与非范围。我们所做的工作： （i）我们分析平衡双块随机块模型上的 α-惰性 Ollivier 曲率及其 Lin–Lu–Yau 极限 [Ollivier，2009年, Lin 等人，2011]；（ii）我们研究固定边集上的里奇曲率驱动的边重加权更新 $W_{(t+1)xy} \quad = \kappa_{W^{(t)}}(x, y)$，该边集为 固定 边集 $E(G)$；（iii）我们证明由确定性双权重递推实现的一致集中与有限时域（$t \leq T$）跟踪；（iv）我们量化归一化拉普拉斯算子的谱后果以及由此得到的错聚类保证 [von Luxburg，2007年, Rohe 等人，2011年, Lei 和 Rinaldo，2015年, Yu 等人， 2015]。这一设计选择将重加权 的效应与度量演化分离开来，并在有限时域内保持传输的局部性与稳定性，从而使一致集中与迭代稳定性估计成为可能。

相关工作。 Ollivier 最初为度量空间上的马尔可夫链引入了粗糙 Ollivier–Ricci 曲率 [2009], ，而 Lin–Lu–Yau 公式则将这一视角推广到图和离散时间极限 [Lin 等人， 2011]。此后，曲率被用作网络描述符，也被用作几何去噪和类流过程的基本工具；例如，可参见复杂网络中的 Forman–Ricci 曲率和几何流 [Weber 等人， 2017] ，以及受 Ricci 流启发的社区检测启发式方法[Ni 等人，2019年，Sia 等人， 2019]。

在统计方面，随机块模型中的社区恢复已有成熟的理论，涵盖精确的阈值和算法相变；参见综述 Abbe [2018]及其中的参考文献。关于稀疏对数 n/n 情形下的精确恢复阈值，参见 Abbe 等人 [2016] 以及有关最优重构和置信传播的研究 [Mossel 等人， 2015, 2016]。随机块模型的谱方法及其扰动分析也已得到充分研究，包括归一化拉普拉斯算子保证

[Rohe 等人，2011年，Lei 和 Rinaldo， 2015]以及标准的特征子空间扰动工具 [Davis 和 Kahan，1970年，Yu 等人， 2015]。

我们的贡献通过对平衡双社区随机块模型中的曲率驱动迭代 边重加权进行有限样本分析，将这些研究方向联系起来：我们证明了曲率一致集中，确定了一个显式的双权重确定性代理，并展示了迭代过程的有限时域跟踪及其在谱性质和聚类错误方面的定量结论。

2 预备知识

渐近框架与常数。 全文中， $n \to \infty$。所有概率陈述均相对于所考虑图模型（通常为随机块模型）的随机性；除非另有说明，概率和期望均在给定社区标签的条件下σ计算。我们用"w.h.p."表示其概率在 $n \to \infty$ 时趋于 1 的事件。在随机块模型的结果中，边概率可以依赖于 n：我们记 $p_0 = p_0(n)$ 和 $p_1 = p_1(n)$，其中 $0 < p_1 < p_0 < 1$。我们记 $\bar{p} := \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$。若某个常数独立于 n，则称其为"绝对"常数；它可以依赖于预先声明的固定参数（例如固定时域 T），也可以依赖于一致的模型界（例如假设 2.1 中的常数ρ）。

索引与渐近记号。 对于整数 $m \geq 1$，写作 $[m] := \{1, \dots, m\}$。对于非负序列 (a_n)，(b_n)：

- $a_n = O(b_n)$ 表示存在 $\exists C < \infty$，使得对于所有充分大的 n，都有 $a_n \leq C b_n$。
- $a_n = o(b_n)$ 表示 $a_n / b_n \to 0$。
- $a_n \lesssim b_n$ 表示对于一个与 n 无关的常数 C，有 $a_n \leq C b_n$。
- $a_n \gtrsim b_n$ 表示 $b_n \lesssim a_n$。
- $a_n \asymp b_n$ 表示 $a_n \lesssim b_n$ 和 $b_n \lesssim a_n$均成立。
- $a_n \sim b_n$ 表示 $a_n / b_n \to 1$。

指示函数与全一对象。我们用 $\mathbb{1}\{\mathcal{E}\}$ 表示事件 $\mathcal{E}$的指示函数。令 $\mathbf{1}_m \in \mathbb{R}^m$表示全一向量，令 $J_m := \mathbf{1}_m \mathbf{1}_m^\top$ 表示全一矩阵 $m \times m$。（维数明确时，我们省略下标。）

作为算子的归一化拉普拉斯算子。对于任意支撑于 E（G）上的对称权重矩阵 $W \geq 0$，若对所有 $x \in V$， d_x（W）> 0，则定义

$$\mathrm{Deg}(W) := \mathrm{diag}\big((d_x(W))_{x \in V}\big), \qquad L(W) := I_{|V|} - \mathrm{Deg}(W)^{-1/2} W \,\mathrm{Deg}(W)^{-1/2},$$

$$S(W) := \mathrm{Deg}(W)^{-1/2} W \,\mathrm{Deg}(W)^{-1/2}.$$

（我们用 D_x， D_{xy}表示未加权度/共度，用 d_x（W），Deg(W) 表示其加权对应量。）

2.1 全文采用的一个稠密随机块模型窗口

假设 2.1 (平衡对比 + 不太稠密)。 存在一个常数 $\rho \in (0,\ 1/2)$，使得对所有充分大的 n，

$$\rho \ \leq \ \frac{p_1}{p_0} \ \leq \ 1 - \rho, \qquad \textit{and} \qquad p_0 \ \leq \ 1 - \rho.$$

符号	含义
$G=(V,\ E)$	顶点集为 V、边集为 E 的有限简单（无权）图
$d(\cdot,\ \cdot)$	无权图距离（若图不连通，则可能为 ∞）
$\Gamma(x)$	邻居集 $\{v:\ \{x,v\}\in E\}$
D_x	（无权）度 $\lvert\Gamma(x)\rvert$
Γ_{xy}	公共邻居集 $\Gamma(x)\cap\Gamma(y)$
D_{xy}	（无权）余度 $\lvert\Gamma_{xy}\rvert$
W	支撑于 E 上的对称非负权重矩阵
$d_x(W)$	加权度 $\sum_u W_{xu}$
度(W)	加权度矩阵 diag $\left((d_x(W))_{x\in V}\right)$
$L(W),\ \ S(W)$	归一化拉普拉斯算子 $I-$度$(W)^{-1/2}W$度$(W)^{-1/2}$ 以及归一化邻接矩阵 $S(W)\ =$度$(W)^{-1/2}W$度$(W)^{-1/2}$
$m^{\alpha}_{x,W}$	α-惰性邻居测度（无权重 / 加权）
$W_1(\cdot,\ \cdot)$	关于 $d(\cdot,\ \cdot)$ 的 1-沃瑟斯坦距离
$\kappa_\alpha(x,\ y)$，$\kappa(x,\ y)$	α–Ollivier 曲率和 Lin–Lu–Yau（LLY）曲率
$\sigma,\ B_1,\ \ B_2$	随机块模型标签和块；$\lvert B_1\rvert=\lvert B_2\rvert=n$
$p_0,p_1,\ p$	块内／块间边概率；$\bar{p}=\frac{1}{2}(p_0+p_1)$
$\varepsilon_n,\ \eta_n$	速率 $\varepsilon_n=\sqrt{\text{对数 } n/(n\bar{p})}$，$\eta_n=\sqrt{\text{对数 } n/(n\bar{p}^3)}$

表1：常用符号

备注 1（为何要施加假设 2.1）。 可比性界意味着 $p_0\asymp_\rho p_1\asymp_\rho\bar{p}$，其中 $\bar{p}:=\frac{1}{2}(p_0+p_1)$。约束 $p_0\le 1-\rho$ 排除了近乎完全图区域；特别是，它确保对于典型的顶点对，其独占邻域 在$n\bar{p}$ 尺度上具有线性大小，这对于基于匹配的传输构造至关重要。

假设 2.2 （固定时域 T 下的中等稠密窗口）。 固定 $T\in\mathbb{N}$。假设假设 *2.1* 成立，且

$$\frac{n\,\bar{p}^3}{\log n}\ \longrightarrow\ \infty\qquad as\ n\to\infty. \tag{1}$$

等价地， $n\,\bar{p}^3\gg$ 对数 n。

注 2（假设 2.2 的直接推论）。 在假设 2.1 下， $p_0\asymp_\rho p_1\asymp_\rho\bar{p}$，因此

$$np_0p_1\ \asymp_\rho\ n\bar{p}^2,\qquad np_1\bar{p}\ \asymp_\rho\ n\bar{p}^2.$$

由于 $\bar{p}\le 1$，(1) 推出 $n\bar{p}^2\gg$ 对数 n 且 $n\bar{p}\gg$ 对数 n。因此，以高概率对所有顶点/点对的一致度和共度集中性均成立，并且可对 $t\le T$ 一致地应用用于曲率下界（及其迭代类比）的基于匹配的论证。

速率。定义

$$\varepsilon_n:=\sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}}},\qquad \eta_n:=\sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}^3}}=\frac{\varepsilon_n}{\bar{p}}.$$

在假设 2.2下， $\varepsilon_n=o(\bar{p})$ 与 $\eta_n=o(1)$。

2.2 图、测度与运输距离

图与距离。 设 $G=(V,E)$ 是一个有限简单图。除非另有说明， G 是无权的，且所有传输距离均在无权图度量 $d(\cdot,\cdot)$ 中计算。若 G 不连通，我们将 $d(x,y)$ 解释为跨连通分支的距离，因此一般而言 W_1 可能为无穷大。本文仅对满足 $d(x,y)\ =1$ 的点对应用 W_1 （从而也应用曲率），即边。

对于 $x \in V$，定义邻居集和（无权）度

$$\Gamma(x) := \{v \in V : \{x, v\} \in E\}, \qquad D_x := |\Gamma(x)|.$$

对于不同的 $x,\ y \in V$，定义公共邻居集和（无权）余度

$$\Gamma_{xy} := \Gamma(x) \cap \Gamma(y), \qquad D_{xy} := |\Gamma_{xy}|.$$

概率测度与耦合。 V上的概率测度是一个函数 $m\colon V \to [0,1]$，满足 $\sum_{v\in V} m(v) = 1$。给定 V上的两个概率测度 $m_1,\ m_2$，$(m_1,\ m_2)$的一个耦合 是定义在 $V \times V$ 上的概率测度 π，其边缘分布为 m_1 和 m_2:

$$\sum_{y\in V} \pi(x,y) = m_1(x), \qquad \sum_{x\in V} \pi(x,y) = m_2(y), \qquad (x, y \in V).$$

1-沃瑟斯坦距离。 m_1 与 m_2 之间的1-沃瑟斯坦距离为

$$W_1(m_1, m_2) \ := \ \inf_{\pi} \sum_{x,y\in V} \pi(x,y)\, d(x,y),$$

其中，下确界取遍 $(m_1,\ m_2)$ 的所有耦合 π （如果测度在不同连通分支上的质量不相同，则可能为 $+\infty$ ）。

Kantorovich–Rubinstein 对偶。 如果函数 $f\colon V \to \mathbb{R}$ 满足对所有 $x,\ y \in V$，均有 $|f(x) - f(y)| \le d(x,\ y)$，则称其为1-利普希茨函数。根据 Kantorovich–Rubinstein 对偶（参见 Villani，2009年，定理 6.1],）

$$W_1(m_1, m_2) \ = \ \sup_{\|f\|_{\mathrm{Lip}} \le 1} \sum_{v\in V} f(v)\,\big(m_1(v) - m_2(v)\big). \tag{2}$$

全变差。对于概率测度 $m_1,\ m_2$ 在 V上，定义全变差距离为

$$\|m_1 - m_2\|_{\mathrm{TV}} := \frac{1}{2} \sum_{v\in V} \big|m_1(v) - m_2(v)\big|.$$

2.3 Ollivier–Ricci 曲率与 Lin–Lu–Yau 曲率

α–惰性随机游走测度。固定 $\alpha \in [0,1)$ 。对于 $x \in V$满足 $D_x \ge 1$，定义

$$m_x^{\alpha} \ := \ \alpha\, \delta_x \ + \ \frac{1-\alpha}{D_x} \sum_{u\in\Gamma(x)} \delta_u. \tag{3}$$

（若 $D_x = 0$ 我们设 $m_x^{\alpha} := \delta_x$，但从不在孤立顶点处使用曲率。）

α–Ollivier 曲率。对于不同的 $x,\ y \in V$且满足 $d(x,\ y) < \infty$，定义

$$\kappa_\alpha(x,y) \ := \ 1 - \frac{W_1(m_x^{\alpha}, m_y^{\alpha})}{d(x,y)}. \tag{4}$$

Lin–Lu–Yau 曲率（LLY）。沿用 Lin 等人的做法 [2011], 定义

$$\kappa(x,y) \ := \ \lim_{\alpha\uparrow 1} \frac{\kappa_\alpha(x,y)}{1-\alpha}, \tag{5}$$

对于有限无权图，在极限存在时，Lin 等人 [2011]。若 $\{x,y\} \in E$，则 $d(x,y) = 1$且 $\kappa_\alpha(x,y) = 1 - W_1(m_x^{\alpha}, m_y^{\alpha})$，因此

$$\kappa(x,y) \ = \ \lim_{\alpha\uparrow 1} \frac{1 - W_1(m_x^{\alpha}, m_y^{\alpha})}{1-\alpha}, \qquad \{x,y\} \in E. \tag{6}$$

加权图。随后我们考虑非负对称边权 $W = (W_{xy})_{x,y\in V}$，其支撑集位于 E。存在权重时，定义加权度和度矩阵

$$d_x(W) := \sum_{u\in V} W_{xu}, \qquad \mathrm{Deg}(W) := \mathrm{diag}\big((d_x(W))_{x\in V}\big),$$

以及（对于 $d_x(W) > 0$）加权邻居测度

$$m_{x,W} := \frac{1}{d_x(W)} \sum_{u\in V} W_{xu}\,\delta_u, \qquad m^{\alpha}_{x,W} := \alpha\delta_x + (1-\alpha)m_{x,W}.$$

我们用 $\kappa_{\alpha,W}(x,y)$ 和 $\kappa_W(x,y)$ 分别表示相应的 α–Ollivier 曲率和 LLY 曲率；除非另有说明，计算时使用无权图距离 $d(\cdot,\cdot)$。

3 随机块模型中的曲率集中

T本节中，所有图传输概念（W_1, m^{α}_x, κ_α, κ）均沿用第 2 节的定义 .

3.1 模型和基本量

平衡双块随机块模型。固定一个划分 $\sigma : [2n] \to \{1,2\}$，其块为 $B_a := \sigma^{-1}(a)$ 和$|B_1| = |B_2| = n$。设 $G \sim$随机块模型$(2n, p_0, p_1, \sigma)$，其中 $0 < p_1 < p_0 < 1$，这意味着对于 $x < y$,

$$\mathbb{1}\{\{x,y\} \in E\} \;\sim\; \begin{cases} \mathrm{Ber}(p_0), & \sigma(x) = \sigma(y), \\ \mathrm{Ber}(p_1), & \sigma(x) \neq \sigma(y), \end{cases}$$

独立地 在无序对上。记 $\bar p := \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$，并定义共同的期望度

$$d_0 \;:=\; \mathbb{E}[D_x \mid \sigma] \;=\; (n-1)p_0 + np_1 \;\asymp_\rho\; n\bar p, \tag{7}$$

其中最后一个关系式使用了假设 2.1。

3.2 集中工具

引理 3.1（伯努利和的伯恩斯坦–切尔诺夫）。设 $X_1, \dots, X_m$ 相互独立，且 $X_i \sim \mathrm{Ber}(p_i)$，并令 $S = \sum_{i=1}^m X_i$ 与 $\mu = \mathbb{E}S = \sum_i p_i$。则对任意 $\lambda \geq 0$,

$$\Pr(S \leq \mu - \lambda) \leq \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2\mu}\Big), \qquad \Pr(S \geq \mu + \lambda) \leq \exp\Big(-\frac{\lambda^2}{2\mu + \frac{2}{3}\lambda}\Big).$$

证明。利用 $|X_i - p_i| \leq 1$与 $\sum_i \mathrm{Var}(X_i) \leq \sum_i p_i = \mu$，对 $\sum_i (X_i - p_i)$ 应用伯恩斯坦不等式。左尾界可由对 $\mu - S$ 应用右尾界得到。 □

引理 3.2 (度集中). 假设 $n\bar p \geq c\log n$，其中$c > 0$为充分大的绝对常数。则存在一个绝对常数 $C > 0$，使得以至少 $1 - n^{-8}$的概率，对所有 $x \in [2n]$同时成立,

$$\big|D_x - d_0\big| \;\leq\; C\sqrt{n\bar p\,\log n}.$$

特别地，在此事件上，对所有充分大的 n,– 最小值$_x\, D_x \geq \frac{1}{2}d_0$ 且最大值$_x\, D_x \leq 2d_0$ 。

证明。固定 x。度 D_x 是均值为 $d_0 \leq 2n\bar p$ 的独立伯努利随机变量之和。令 $\lambda = C\sqrt{n\bar p}$log n，应用引理 3.1，并取足够大的 C，使得每个尾部概率都不超过 $\leq n^{-10}$。对 $2n$ 个顶点应用并集界，可得概率至少为 $1 - n^{-8}$。 □

引理 3.3（共度集中）。假设 $n\bar{p}^2 \geq c\log n$，其中 $c > 0$ 是足够大的绝对常数。则存在一个绝对常数 $C > 0$，使得以至少 $1 - n^{-8}$ 的概率，对所有无序对 $\{x, y\}$，以下结论同时成立：

$$\big|D_{xy} - \mathbb{E}[D_{xy} \mid \sigma]\big| \;\leq\; C\sqrt{n\bar{p}^2 \log n}.$$

此外，

$$\mathbb{E}[D_{xy} \mid \sigma] = \begin{cases} (n-2)p_0^2 + np_1^2, & \sigma(x) = \sigma(y), \\ (2n-2)p_0 p_1, & \sigma(x) \neq \sigma(y). \end{cases}$$

证明。固定 $\{x, y\}$。对于每个 $z \notin \{x, y\}$，指示变量 $\mathbb{1}\{z \in \Gamma_{xy}\}$ 服从伯努利分布，且在z上相互独立。分情况计算其成功概率，即可得到所述公式；并注意，在假设 2.1 下，$\mathbb{E}[D_{xy} \mid \sigma] \lesssim_\rho n\bar{p}^2$。应用引理 3.1，取 $\lambda = C\sqrt{n\bar{p}^2 \log n}$，并对 $\binom{2n}{2}$个点对使用并集界。 □

引理 3.4 (分块度集中**)**。对于一个块 $B \in \{B_1, B_2\}$，定义分块度$D_x^{(B)} := |\Gamma(x) \cap B|$。给定 σ，以至少 $1 - Cn^{-8}$ 的概率，对所有顶点x一致地，若 $\sigma(x) = 1$，则

$$D_x^{(B_1)} = (n-1)p_0 \pm C\sqrt{n\bar{p}\log n}, \qquad D_x^{(B_2)} = np_1 \pm C\sqrt{n\bar{p}\log n},$$

当 $\sigma(x) = 2$ 时，也有类似结论（交换 B_1、B_2）。

证明。在给定 σ 的条件下，对每个固定顶点 x，分块度 $D^{(B_{\sigma(x)})\,x} \sim$ 服从 $\mathrm{Bin}(n-1, p_0)$，且 $D^{(B^c_{\sigma(x)})\,x} \sim$ 服从 $\mathrm{Bin}(n, p_1)$。对每个变量应用引理 3.1，取偏差 $C\sqrt{n\bar{p}\log n}$，并对 $2n$ 个顶点及两个块应用并集界。 □

引理 3.5 (分块共度集中**)**。假设 $n\bar{p}^2 \geq c\log n$。对于一个块 $B \in \{B_1, B_2\}$，定义 $D_{xy}^{(B)} := |\Gamma(x) \cap \Gamma(y) \cap B|$。在给定 σ 的条件下，以至少 $1 - Cn^{-8}$ 的概率，对所有无序对 $\{x, y\}$ 和每个块 B 一致地成立：

$$D_{xy}^{(B)} = \mathbb{E}\Big[D_{xy}^{(B)} \mid \sigma\Big] \;\pm\; C\sqrt{n\bar{p}^2 \log n}.$$

证明。每个 $D_{xy}^{(B)}$ 都是相互独立的伯努利指示变量之和，对应于事件 $\{(x,z) \in E, (y,z) \in E\}$，其中指标遍历 $z \in B$，成功概率为 $p_{xz}p_{yz} \in \{p_0^2, p_0p_1, p_1^2\}$。应用引理 3.1，并对 O 个 n^2 对及两个块应用并集界。 □

引理3.6 (集中条件下的比值展开**)**。设 $b_n \to \infty$，并将 $A = \mu_A + \delta_A$、$B = \mu_B + \delta_B$写作 $\mu_B \geq cb_n$且 $|\delta_A|$、$|\delta_B| \leq C\sqrt{b_n}$对数 n，其中 c、$C > 0$为常数。另假设，对于某个 $C_A < \infty$，有 $|\mu_A| \leq C_A b_n$。那么，对于所有充分大的 n，

$$\left|\frac{A}{B} - \frac{\mu_A}{\mu_B}\right| \;\leq\; C'\sqrt{\frac{\log n}{b_n}},$$

其中常数 C'仅取决于$(c、\ C、\ C_A)$。

证明。令

$$\frac{A}{B} - \frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{\delta_A\mu_B - \mu_A\delta_B}{B\mu_B}.$$

由于 $\mu_B \geq cb_n$和 $|\delta_B| \leq C\sqrt{b_n \log n}$，当 n足够大时，我们有 $|B| \geq \mu_B - |\delta_B| \geq \frac{1}{2}\mu_B$。通过直接估计即可得到所声称的界。 □

3.3 确定性曲率界

引理 3.7 (确定性 KR 上界)。 设 $\{x,y\}\in E$。则

$$\kappa(x,y)\;\le\;\frac{D_{xy}+2}{D_x},\qquad \kappa(x,y)\;\le\;\frac{D_{xy}+2}{D_y}.$$

证明。 我们证明 $\kappa(x,y)\le (D_{xy}+2)/D_x$；由对称性可得关于 D_y 的界。固定 $\alpha\in[0,1)$，并令 $\beta:=1-\alpha$。根据 Kantorovich–Rubinstein 对偶 (2)，对任意 1–利普希茨 f，有

$$W_1(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\;\ge\;\sum_{v\in V} f(v)\big(m_x^\alpha(v)-m_y^\alpha(v)\big).$$

取 $f(v):=d(v,y)$，它是 1–利普希茨的。由于 $\{x,y\}\in E$，我们有 $d(x,y)=1$。在 m_y^α 下，位于 y 的原子距离为 0，而 y 的每个邻居距离均为 1，因此 $\mathbb{E}_{m_y^\alpha}[d(\cdot,y)]=\beta$。在 m_x^α 下，位于 x 的原子贡献 $\alpha\cdot 1$；在 x 的邻居中，顶点 y 贡献 0，共同邻居贡献 1，独占邻居贡献 2。因此

$$\mathbb{E}_{m_x^\alpha}[d(\cdot,y)]=\alpha+\frac{\beta}{D_x}\Big(D_{xy}\cdot 1+(D_x-1-D_{xy})\cdot 2\Big)=\alpha+\frac{\beta}{D_x}(2D_x-2-D_{xy}).$$

Thus

$$W_1(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\;\ge\;\alpha+\beta\,\frac{D_x-2-D_{xy}}{D_x},$$

从而

$$1-W_1(m_x^\alpha,m_y^\alpha)\;\le\;\beta\,\frac{D_{xy}+2}{D_x}.$$

除以 β 并令 $\alpha\uparrow 1$，即可得到所述结论。 □

引理 3.8 (由单射得到的耦合下界)。 设 $\{x,y\}\in E$，并假设 $D_x\le D_y$。定义独占邻域

$$U_x:=\Gamma(x)\setminus\big(\Gamma(y)\cup\{y\}\big),\qquad U_y:=\Gamma(y)\setminus\big(\Gamma(x)\cup\{x\}\big).$$

若 $\phi:\,U_x\to U_y$ 是单射，则

$$\kappa(x,y)\;\ge\;1+\frac{1}{D_y}\;-\;\frac{1}{D_y}\sum_{u\in U_x} d\big(u,\phi(u)\big)\;-\;3\,\frac{D_y-D_x}{D_y}. \tag{8}$$

证明。 固定 $\alpha\in[1/2,1)$，并记 $\beta:=1-\alpha$。按如下方式构造 m_x^α 和 m_y^α 的耦合 π s.

令 $T:=U_y\setminus\phi(U_x)$，于是 $|T|=|U_y|-|U_x|=D_y-D_x$。

(i) x 处的质量。令 $\pi(x,x):=\beta/D_y$ 且 $\pi(x,y):=\alpha-\beta/D_y$ （非负，因为 $\alpha\ge 1/2$）。

(ii) y 与共同邻居的对角输运。令 $\pi(y,y):=\beta/D_y$ 且对每个 $z\in\Gamma_{xy}$ 令 $\pi(z,z):=\beta/D_y$。

(iii) 经由 ϕ 路由 x 的独占邻居。对每个 $u\in U_x$，令 $\pi(u,\phi(u)):=\beta/D_y$。

(iv) 分配剩余量以填满 T。每个 $s\in\Gamma(x)$ 具有源质量 β/D_x，但在 (ii)–(iii) 中已使用 β/D_y，留下剩余量 $\beta(\frac{1}{D_x}-\frac{1}{D_y})\ge 0$。等份地，在 (ii)–(iii) 之后，每个邻居行已指派 β/D_y 质量，并且必须分配剩余的 $\beta/D_x-\beta/D_y$ 质量，以达到所需的行和 β/D_x。将此剩余量一致地分配到 T 上，方法是对 $t\in T$ 设定

$$\pi(s,t):=\beta\Big(\frac{1}{D_x}-\frac{1}{D_y}\Big)\cdot\frac{1}{|T|}.$$

直接检验表明，行和等于 m_x^α，列和等于 m_y^α。就运输成本而言，所有对角指派具有零成本；$x \to y$ 的成本为 1；$u \to \phi(u)$ 的成本为 $d(u,\ \phi(u))$；并且对于 (iv)，若 $s \in \Gamma(x)$ 且 $t \in T \subseteq U_y \subseteq \Gamma(y)$，则 $d(s,\ t) \le 3$ 经由路径 $s - x - y - t$。因此

$$W_1(m_x^\alpha, m_y^\alpha) \ \le\ \Big(\alpha - \frac{\beta}{D_y}\Big) \ +\ \frac{\beta}{D_y} \sum_{u \in U_x} d(u, \phi(u)) \ +\ 3\beta\Big(1 - \frac{D_x}{D_y}\Big),$$

这意味着两边同时除以 β 并令 $\alpha \uparrow 1$，即可得到 (8)。 □

引理 3.9（随机二部图中的左完美匹配）。设 H 是定义在 $L \cup R$ 上的随机二部图，其中具有 $|L| = m$、$|R| = \ell \ge m$ 和 $\ell \le \Lambda m$，其中某个固定的 $\Lambda \ge 1$，且各边以概率 p 独立出现。那么，对任意 $q > 0$，存在 $C = C(\Lambda,\ q) > 0$，使得如果

$$p\ell \ge C \log m,$$

then

$$\Pr\{H \text{ contains a matching saturating } L\} \ge 1 - m^{-q}.$$

证明。根据霍尔定理，H 不包含饱和 L 的匹配，当且仅当存在一个非空的$S \subseteq L$，使得 $|N(S)| \le |S| - 1$。

固定 $s \in \{1, \dots, m\}$，并固定满足 $|S| = s$ 的 $S \subseteq L$。若 $|N(S)| \le s - 1$，则存在 $T \subseteq R$，满足$|T| = s - 1$，使得 $N(S) \subseteq T$；等价地，S 与 $R \setminus T$ 之间没有边。对于固定的 $(S,\ T)$，

$$\Pr\{N(S) \subseteq T\} = (1-p)^{s(\ell-(s-1))} \le \exp\{-p\, s(\ell - s + 1)\}.$$

对 (S, T) 作联合界，得到

$$\Pr(\text{Hall fails}) \le \sum_{s=1}^{m} \binom{m}{s} \binom{\ell}{s-1} \exp\{-p\, s(\ell - s + 1)\}. \tag{9}$$

令 $a := p\ell$，并使用 $\ell \le \Lambda m$。我们分成两个范围。

范围 I：$1 \le s \le \ell/2$。于是 $\ell - s + 1 \ge \ell/2$，所以 $\exp\{-p\, s(\ell - s + 1)\} \le \exp\{-(a/2)s\}$。此外，对于$s \ge 1$,

$$\binom{m}{s} \le \Big(\frac{em}{s}\Big)^s, \qquad \binom{\ell}{s-1} \le \Big(\frac{e\ell}{\max\{1, s-1\}}\Big)^{s-1} \le \Big(\frac{2e\ell}{s}\Big)^s,$$

（其中，最后一个不等式对所有 $s \ge 1$ 都成立；如有需要，可将 $s = 1$ 单独处理。）因此，(9) 中的每一项都至多为

$$\Big(\frac{2e^2\, m\ell}{s^2}\, e^{-a/2}\Big)^s \le \Big(\frac{2e^2\Lambda}{s^2}\, m^2\, e^{-a/2}\Big)^s.$$

如果 $a \ge C \log m$，那么 $e^{-a/2} \le m^{-C/2}$，因此第 s 项至多为

$$\Big(\frac{2e^2\Lambda}{s^2}\, m^{2 - C/2}\Big)^s.$$

例如，选择 $C \ge 4(q+3)$，使得 $2 - C/2 \le -(q+1)$。那么第 s 项为 $\le c(\Lambda)^s\, m^{-(q+1)s}$，对 $s \ge 1$ 求和可得

$$\sum_{s=1}^{\lfloor \ell/2 \rfloor} \binom{m}{s} \binom{\ell}{s-1} e^{-ps(\ell-s+1)} \le m^{-(q+1)} \sum_{s \ge 1} c(\Lambda)^s m^{-qs} \le \tfrac{1}{2} m^{-q}$$

对所有充分大的 m。

范围 *II:* $\ell/2 < s \le m$. 令 $k := \ell - s + 1 \in \{1, \dots, \lfloor \ell/2 \rfloor\}$，从而 $s - 1 = \ell - k$。选取大小为$s-1$ 的 T等价于选取其补集 $U := R \setminus T$（大小为 k），因此

$$\binom{\ell}{s-1} = \binom{\ell}{k}.$$

此外，由于 $s \le m$ 我们有 $\ell - k + 1 = s \le m$，因此

$$\binom{m}{s} = \binom{m}{\ell - k + 1} \le \binom{m}{k} \le \Big(\frac{em}{k}\Big)^k.$$

另外 $\binom{\ell}{k} \le (e\ell/k)^k \le (e\Lambda m/k)^k$ 且$\exp\{-p\, s(\ell - s + 1)\} = \exp\{-p(\ell - k + 1)k\} \le \exp\{-(a/2)k\}$因为 $\ell - k + 1 \ge \ell/2$。因此第 k项至多

$$\Big(\frac{e^2 \Lambda m^2}{k^2}\, e^{-a/2}\Big)^k \le \Big(\frac{e^2\Lambda}{k^2}\, m^{2 - C/2}\Big)^k.$$

With 同一选择 $C \ge 4(q+3)$，对 $k \ge 1$ 求和在 m充分大时给出另一个 $\le \frac{1}{2} m^{-q}$.

合并两个范围可得Pr(Hall 失败) $\le m^{-q}$，对所有充分大的 m。 □

3.4 曲率集中与总体水平

总体曲率水平。定义

$$w_{\text{in}}^{(n)} := \frac{(n-2)p_0^2 + np_1^2}{(n-1)p_0 + np_1}, \qquad w_{\text{out}}^{(n)} := \frac{(2n-2)p_0 p_1}{(n-1)p_0 + np_1}. \tag{10}$$

引理 3.10（总体层级为 $\asymp \bar{p}$）。 假设假设 *2.1* 成立。则存在常数$0 < c_\rho < C_\rho < \infty$，使得对所有充分大的 n,

$$c_\rho\, \bar{p} \;\le\; w_{\text{out}}^{(n)} \;\le\; w_{\text{in}}^{(n)} \;\le\; C_\rho\, \bar{p}.$$

证明。 在假设 2.1 下， $p_0 \asymp_\rho p_1 \asymp_\rho \bar{p}$ 且 $d_0 \asymp_\rho n\bar{p}$。(10) 中的两个分子均为 $\asymp_\rho n\bar{p}^2$，因此比值为 $\asymp_\rho \bar{p}$。此外，由于 $p_1/p_0 \le 1 - \rho$，差距 $p_0 - p_1 \gtrsim_\rho \bar{p}$，故对所有充分大的 n，主阶比较 $(p_0^2 + p_1^2) > (2p_0p_1)$ 占主导地位，超过 (10) 中的 $O(1/n)$ 修正项，从而得到 $w^{(n)}_{\text{内部}} \ge w^{(n)}_{\text{外部}}$。 □

定理 3.11（边上的一致 LLY 曲率集中）。 设 $G \sim$随机块模型$(2n, p_0, p_1, \sigma)$，其中$0 < p_1 < p_0 < 1$，并假设假设 *2.1* 成立。设 $n\bar{p}^2 \ge c_0$对数 n，其中绝对常数 $c_0 > 0$ 充分大。则存在 $C > 0$ （仅依赖于 ρ），使得以至少$1 - n^{-2}$的概率，对所有边 $\{x, y\} \in E(G)$同时成立，

$$\kappa(x,y) = \begin{cases} w_{\text{in}}^{(n)} \;\pm\; C\,\varepsilon_n, & \sigma(x) = \sigma(y), \\ w_{\text{out}}^{(n)} \;\pm\; C\,\varepsilon_n, & \sigma(x) \ne \sigma(y), \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_n = \sqrt{\log n/(n\bar{p})}$。此外，对于任意固定的一对 $\{x, y\}$（不依赖于 n），

$$\kappa(x,y) = \begin{cases} w_{\text{in}}^{(n)} + O_p\big((n\bar{p})^{-1/2}\big), & \sigma(x) = \sigma(y), \\ w_{\text{out}}^{(n)} + O_p\big((n\bar{p})^{-1/2}\big), & \sigma(x) \ne \sigma(y). \end{cases}$$

证明。 令 $\mathcal{E}_{\text{deg}}$ 表示引理 3.2 中的事件，令 $\mathcal{E}_{\text{codeg}}$ 表示引理 3.3 中的事件。由于 $n\bar{p}^2 \ge c_0 \log n$ 蕴含 $n\bar{p} \ge c_0 \log n$，两个事件发生的概率均至少为 $1 - 2n^{-8}$。

固定一个无序对 $\{x,y\}$，并（对于下界）假设 $\{x,y\}\in E$。记 $D_x=d_0+\delta_x$、$D_y=d_0+\delta_y$ 和 $D_{xy}=\mu_{xy}+\eta_{xy}$，其中 $\mu_{xy}=\mathbb{E}[D_{xy}\mid\sigma]$。在 $\mathcal{E}_{\deg}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{codeg}}$ 上，

$$|\delta_x|+|\delta_y|\ \lesssim\ \sqrt{n\bar{p}\log n},\qquad |\eta_{xy}|\ \lesssim\ \sqrt{n\bar{p}^{\,2}\log n}.$$

上界。若 $\{x,y\}\in E$，引理 3.7 给出 $\kappa(x,\ y)\ \le (D_{xy}+2)/D_x$。应用引理3.6，并取 $A=D_{xy}+2$、$B=D_x$ 和 $b_n=n\bar{p}$，可得

$$\kappa(x,y)\ \le\ \frac{\mu_{xy}}{d_0}\ \pm\ C\,\varepsilon_n\qquad \text{on } \mathcal{E}_{\deg}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{codeg}},$$

利用 $\bar{p}\le 1$ 将共度波动吸收到相同的 ε_n 尺度中。

通过匹配得到下界。假设 $\{x,y\}\in E$，并在必要时重新标记，使得 $D_x\le D_y$。按照引理 3.8 定义 U_x，U_y。在给定 $\Gamma(x)\ \Gamma(y)\ \sigma$ 的条件下，$U_x\times U_y$ 中的边相互独立，其成功概率属于 $\{p_0,p_1\}\ge p_1$。因此，条件分布随机支配 $U_x\cup U_y$ 上成功概率为 p_1 的独立同分布 Ber 二分图。

在 $\mathcal{E}_{\deg}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{codeg}}$ 上，假设 2.1 蕴含 $D_x,\ D_y\asymp n\bar{p}$ 和 $D_{xy}\asymp n\bar{p}^2$。此外，对于 x 与 y 之间的任一社区关系，根据引理 3.3 直接计算可得 $d_0-\mu_{xy}\asymp_\rho n\bar{p}$（此处使用了 $p_0\le 1-\rho$），因此

$$|U_x|=D_x-1-D_{xy}\ \asymp_\rho\ n\bar{p},\qquad |U_y|=D_y-1-D_{xy}\ \asymp_\rho\ n\bar{p},$$

并且特别地，对于某个 $\Lambda(\rho)<\infty$，有 $|U_y|\le\Lambda(\rho)|U_x|$。事实上，根据引理 3.3，若 $\sigma(x)=\sigma(y)$，则

$$d_0-\mu_{xy}=(n-1)p_0+np_1-\big((n-2)p_0^2+np_1^2\big)=(n-2)p_0(1-p_0)+p_0+np_1(1-p_1),$$

并且若 $\sigma(x)\ne\sigma(y)$，则

$$d_0-\mu_{xy}=(n-1)p_0+np_1-(2n-2)p_0p_1=(n-1)p_0(1-p_1)+np_1(1-p_0)+p_0p_1.$$

在假设 2.1 下（特别是 $p_0\le 1-\rho$），二者均为 $\asymp_\rho n\bar{p}$。

由于 $p_1\asymp_\rho\bar{p}$ 和 $|U_y|\asymp n\bar{p}$，我们有 $p_1|U_y|\asymp_\rho n\bar{p}^2$。取足够大的 c_0，引理 3.9（取 $q=10$）表明，在给定 $\Gamma(x)\ \Gamma(y)\ \sigma$ 的条件下，以至少 $1-|U_x|^{-10}$ 的概率，存在一个单射 $\phi\colon U_x\to U_y$，使得对所有 $u\in U_x$，都有 $\{u,\phi(u)\}\in E$，因此 $d(u,\ \phi(u))=1$。

在此匹配事件上，由引理 3.8 可得

$$\kappa(x,y)\ \ge\ \frac{D_{xy}}{D_y}\ -\ 2\frac{D_y-D_x}{D_y}\ +\ \frac{2}{D_y}.$$

将引理3.6应用于 D_{xy}/D_y，并取 $b_n=n\bar{p}$，可得 $\frac{D_{xy}}{D_y}=\frac{\mu_{xy}}{d_0}\pm C\varepsilon_n$ 在 $\mathcal{E}_{\deg}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{codeg}}$ 上成立；而 $\frac{D_y-D_x}{D_y}\lesssim\varepsilon_n$ 在 $\mathcal{E}_{\deg}$ 上成立，且 $1/D_y\lesssim\ (n\bar{p})^{\ -1}=o\ (\varepsilon_n)$。因此

$$\kappa(x,y)\ \ge\ \frac{\mu_{xy}}{d_0}\ -\ C\,\varepsilon_n\qquad \text{on } \mathcal{E}_{\deg}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{codeg}}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{match}}(x,y),$$

其中，$\mathcal{E}_{\mathrm{match}}\ (x,\ y)$ 表示上述匹配事件。

边上的均匀化。在 $\mathcal{E}_{\deg}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{codeg}}$ 上，我们有 $|U_x|\ge c\,n\bar{p}$，因此 $\Pr(\mathcal{E}_{\mathrm{match}}(x,\ y)^c\mid\Gamma(x)\ \Gamma(y)\ \sigma)\ \le (c\,n\bar{p})^{-10}$。取期望并对所有 $\binom{2n}{2}\le 2n^2$ 个无序对应用联合界，可得

$$\Pr\Big(\exists\,\{x,y\}\in E\colon\ \mathcal{E}_{\mathrm{match}}(x,y)^c\Big)\ \le\ 2n^2\,(c\,n\bar{p})^{-10}.$$

结合 $\Pr((\mathcal{E}_{\deg}\cap\mathcal{E}_{\mathrm{codeg}})^c)\ \le 2n^{-8}$，可得总体失败概率

$$\le 2n^{-8}+2n^2\,(c\,n\bar{p})^{-10}\ =\ o(1).$$

特别地，对所有充分大的 n，这都是 $\le n^{-2}$。

最后，当 $\sigma(x)\ =\sigma(y)$ 时，μ_{xy}/d_0 等于 $w^{(n)}$ 内，否则等于 $w^{(n)}$ 外。固定对细化可通过相同论证得到，无需使用均匀联合界。 □

引理 3.12 (曲率权重的一致正性)。 假设假设 *2.1* 和 *2.2* 成立。则存在常数 $c = c(\rho) > 0$ ，使得

$$\Pr\Big(\min_{\{x,y\}\in E(G)} \kappa(x,y) \;\geq\; c\,\bar{p} \Big) \;\longrightarrow\; 1.$$

特别地，一步 *Ricci* 重加权 $W_{xy}^{(1)} := \kappa(x,y)\mathbb{1}\{\{x,y\} \in E\}$ 以高概率产生非负边权重，且其加权度满足

$$\min_{x\in[2n]} d_x(W^{(1)}) \;\geq\; c\,n\bar{p}^2 \qquad w.h.p.$$

证明。 由引理 3 10 $c_0 = c_0\ \rho\ > 0$ n } ≥ . 可知，存在 ( ), $c_0\bar{p}$ $\mathcal{E}$ 3 11 使得对所有充分大的， min{$w^{(n)}$ 中 $w^{(n)}$ 外。设 为定理 中的事件；在该事件上，对所有边同时有 (,) $w^{(n)}\big|\kappa\ x\ y\ -_{\text{type(x,y)}}\big| \le C\varepsilon_{n_\circ}$ 由于 $\varepsilon_n/\bar{p} = \eta_n \to 0$ 在假设 2.2 下，当 n 充分大时，我们有 $C\varepsilon_n \le \frac{1}{2}c_0\bar{p}$，因此在 $\mathcal{E}$上，对所有 $\{x,y\} \in E$均有 $\kappa(x,y) \ge \frac{1}{2}c_0\bar{p}$。 这就证明了第一个结论。

对于度界，在 $\mathcal{E}$ $\kappa\ x\ y\ \geq c\bar{p}$ $d_x\ W^{(1)}\ = \sum_{y\ \{x,y\}\in E}\kappa\ x\ y\ \geq$ 上， $c\bar{p}\,D_x$ 2 2 $n\bar{p}\ \gg$ n 3 2 $_x D_x \asymp n\bar{p}$ 我们对每条边都有 (,)，因此 ( ) : (,) 。在假设 . 下，log，因此引理 . 给出以高概率成立的 min w.h.p.，从而 $\min_x d_x($ $W^{(1)}) \gtrsim n\bar{p}^2$ w.h.p. □

4 单步 Ricci 重加权与谱聚类 g

基本模型与记号。我们研究 $V = [2n]$ 上的平衡双块随机块模型，其固定标签为 $\sigma\colon\ [2n] \to \{1,2\}$，块 $B_a\colon = \sigma^{-1}(a)$，以及 $|B_1| = |B_2| = n_\circ$ 记 $\bar{p}\colon = \frac{1}{2}(p_0 + p_1)$，并且 $-$

$$r \;:=\; \frac{p_0 - p_1}{p_0 + p_1} \;\in (0,1),$$

注意到 $p_0 = p_0(n)$ 和 $p_1 = p_1(n)$ 可能依赖于 $n_\circ$ 在假设 2.1 下， $p_1/p_0 \in [\rho, 1-\rho]$蕴含

$$\frac{\rho}{2-\rho} \;\le\; r \;\le\; \frac{1-\rho}{1+\rho},$$

因此， r 在 n 中一致地远离 0 和 1。

令 $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{2n}$ 为全 1 向量，并设

$$f \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2n}}(\mathbf{1}_n, -\mathbf{1}_n)^\top \in \mathbb{R}^{2n}.$$

我们用 $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ 表示算子范数，用 $\|\cdot\|_{\max}$ 表示逐项最大范数。对称矩阵的特征值按递增顺序排列: $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$。

示例对象。 令 $A \in \{0,1\}^{2n\times 2n}$ 为 G 的（空心、对称）邻接矩阵，因此 $\backsim A_{ii} = 0$。定义无权度 $D_i := \sum_j A_{ij}$ 以及度矩阵 $D_0 := \mathrm{Deg}(A)$（第 2 节）。对于每条边 $\{i,j\} \in E$，令 $\kappa(i,\ j)$表示 G 的（随机）Lin–Lu–Yau 曲率（第 3 节）。 ⌢定义单步曲率加权邻接矩阵 W 如下:

$$\widehat{W}_{ij} := \kappa(i,j)\,\mathbb{1}\{\{i,j\} \in E\}, \qquad \widehat{W}_{ii} = 0,$$

^ ⌢ ⌢ ^ ⌢及其加权度 $d_{1,i} := d_i(W) = \sum_j W_{ij}$ 以及加权度矩阵 $D_1 := \mathrm{Deg}(W)$。未加权的归一化拉普拉斯算子与单步曲率加权归一化拉普拉斯算子为

$$\widehat{L}_0 := L(A) = I_{2n} - \widehat{D}_0^{-1/2} A\, \widehat{D}_0^{-1/2}, \qquad \widehat{L}_1 := L(\widehat{W}) = I_{2n} - \widehat{D}_1^{-1/2}\widehat{W}\, \widehat{D}_1^{-1/2}.$$

注（符号舍入的中心化）。 对于 $L(W) = I - D(W)^{-1/2} W D(W)^{-1/2}$，零特征向量为 $D(W)^{1/2}\mathbf{1}$（而非 $\mathbf{1}$），因此 $\widehat{L}_k$ 的 λ_2-特征向量未必满足 $\widehat{v}_k \perp \mathbf{1}$。为应用引理 4.6，我们因而在取符号之前通过投影算子 $\Pi := I_{2n} - \frac{1}{2n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ 对特征向量进行中心化。 —

本节的固定窗口。 在第 4 节中，我们始终假设假设 2.1 和 2.2。特别地，$n\bar{p} \gg \log n$ and $n\bar{p}^2 \gg \log n$（注 2），因此：(i) $\min_i D_i \geq 1$ w.h.p.，故 $\widehat{L}_0$ 有良好定义；且 (ii) 边上的曲率以高概率一致为正（引理 3.12），故 $\min_i d_{1,i} > 0$ w.h.p.，且 L_1 有良好定义。

4.1 总体代理

总体邻接。 在给定 σ 的条件下，定义 $P^{\mathrm{pop}} := \mathbb{E}[A \mid \sigma]$。于是 $\mathrm{Deg}(P_{\text{总体}}) = d_0 I_{2n}$，其中

$$d_0 = \mathbb{E}[D_i \mid \sigma] = (n-1)p_0 + np_1 \asymp_\rho n\bar{p},$$

并定义

$$L_0^{\mathrm{pop}} := I_{2n} - d_0^{-1} P^{\mathrm{pop}}.$$

总体曲率水平与总体加权拉普拉斯算子。 回顾 (10) 中的 $w^{(n)}{}_{\text{入}} w^{(n)}{}_{\text{出}}$。引入大-$n$代理量

$$w_{\mathrm{in}}^{\mathrm{pop}} := \frac{p_0^2 + p_1^2}{p_0 + p_1} = \bar{p}(1 + r^2), \qquad w_{\mathrm{out}}^{\mathrm{pop}} := \frac{2p_0 p_1}{p_0 + p_1} = \bar{p}(1 - r^2), \tag{11}$$

使得 $|w^{(n)}{}_{\text{入}} - w^{\mathrm{pop}}{}_{\text{入}}| \lesssim_\rho \bar{p}/n$ 且 $|w^{(n)}{}_{\text{出}} - w^{\mathrm{pop}}{}_{\text{出}}| \lesssim_\rho \bar{p}/n$。

令 $K^{(n)}$ 为分块常数掩码，其中 $K_{ij}^{(n)} = w^{(n)}{}_{\text{in}}$ 当 $\sigma(i) = \sigma(j)$ 时，$K_{ij}^{(n)} = w^{(n)}{}_{\text{out}}$ 当 $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ 时，且 $K_{ii}^{(n)} = 0$。定义总体加权邻接矩阵

$$W_1^{\mathrm{pop}} := K^{(n)} \circ P^{\mathrm{pop}}, \qquad d_1 := (n-1)p_0 w_{\mathrm{in}}^{(n)} + np_1 w_{\mathrm{out}}^{(n)}.$$

则 $\mathrm{Deg}(W_1^{\mathrm{pop}}) = d_1 I_{2n}$，并令

$$L_1^{\mathrm{pop}} := I_{2n} - d_1^{-1} W_1^{\mathrm{pop}}.$$

在假设 2.1 下，引理 3.10 推出 $d_1 \asymp_\rho n\bar{p}^2$。

4.2 曲率夹逼与正性

推论 4.1 (一致曲率夹逼 +正性)。 假设假设 *2.1* 和 *2.2*。则存在常数 $c, C > 0$（仅取决于 ρ），使得以至少 $1 - n^{-2}$ 的概率，对所有边 $\{i,j\} \in E$ 一致地有，

$$\kappa(i,j) = \begin{cases} w_{\mathrm{in}}^{(n)} \pm C\,\varepsilon_n, & \sigma(i) = \sigma(j), \\ w_{\mathrm{out}}^{(n)} \pm C\,\varepsilon_n, & \sigma(i) \neq \sigma(j), \end{cases} \qquad \varepsilon_n = \sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}}}, \tag{12}$$

并且在同一事件上，还有，

$$\min_{\{i,j\} \in E} \kappa(i,j) \geq c\bar{p}, \qquad \text{and} \qquad \|\widehat{W}\|_{\max} \leq C\,\bar{p}. \tag{13}$$

特别地，D_1 具有严格正对角元，且 L_1 是良定义的。

证明。夹逼式 (12) 即为定理 3.11。根据假设 2.2，$\varepsilon_n = o(\bar{p})$，因此结合引理 3.10 和 (12)，可得 $\min_{\{i,j\} \in E} \kappa(i,j) \geq c\bar{p}$，对所有充分大的 n 均成立。最后，$W_{ij} = \kappa(i,j)\mathbb{1}\{\{i,j\} \in E\}$ 意味着在同一事件上有 $\|W\|_{\max} \leq \max_{\{i,j\} \in E} \kappa(i,j) \lesssim \bar{p}$。 □

4.3 总体谱与平均场增益

引理 4.2（分块形式下的总体谱）。固定 $(w_{\mathrm{in}},\ w_{\mathrm{out}})$ 并设 $a := p_0 w_{\mathrm{in}},\ b := p_1 w_{\mathrm{out}}$，以及 $d_* := (n-1)a + nb$。令

$$W = \begin{pmatrix} a\,(J_n - I_n) & b\,J_n \\ b\,J_n & a\,(J_n - I_n) \end{pmatrix}, \qquad L = I_{2n} - \frac{1}{d_*} W.$$

于是 $\mathrm{Deg}(W) = d_* I_{2n}$，$\lambda_1(L) = 0$，其特征向量为 $\mathbf{1}$，并且：

- 块内零和方向的$2(n-1)$ 特征值为 $1 + a/d_*$；
- 在块常数子空间中，剩余的特征对为 $(\lambda_2(L)\ f)$，其中

$$\lambda_2(L) = 1 - r_n(w_{\mathrm{in}}, w_{\mathrm{out}}), \qquad r_n(w_{\mathrm{in}}, w_{\mathrm{out}}) := \frac{(n-1)p_0 w_{\mathrm{in}} - n p_1 w_{\mathrm{out}}}{(n-1)p_0 w_{\mathrm{in}} + n p_1 w_{\mathrm{out}}}.$$

证明。设 u 支撑于 B_1，且 $\sum_{i \in B_1} u_i = 0$（另一块的情形相同）。则$J_n u_{B_1} = 0$ 和（$J_n - I_n$）$u_{B_1} = -u_{B_1}$，而非对角块会湮灭 u。因此 $Wu = -au$和 $Lu =$（$1 + a/d_*$）u。

对于块常数向量 $x =$（$c_1\mathbf{1}_n,\ c_2\mathbf{1}_n$），

$$Wx = \big(((n-1)a\,c_1 + nb\,c_2)\mathbf{1}_n,\ (nb\,c_1 + (n-1)a\,c_2)\mathbf{1}_n\big),$$

因此，在基底 $\{(\mathbf{1}_n,\ 0),\ (0,\ \mathbf{1}_n)\}$ 下，W的限制等于 $\begin{pmatrix} (n-1)a & nb \\ nb & (n-1)a \end{pmatrix}$，其特征向量为$\mathbf{1}$ 和 f，对应的特征值为 $d_* = (n-1)a + nb$ 和 $(n-1)a - nb$。用 d_* 归一化后，即得到 L的所述特征值。

□

引理 4.3（平均场特征间隙增益与曲率对比）。设 $\Gamma_k^{\mathrm{pop}} := \lambda_3(L_k^{\mathrm{pop}}) - \lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}})$，其中 $k \in \{0,1\}$，并定义

$$r_n^{(0)} := r_n(1,1) = \frac{(n-1)p_0 - n p_1}{(n-1)p_0 + n p_1}, \qquad r_n^{(1)} := r_n\big(w_{\mathrm{in}}^{(n)}, w_{\mathrm{out}}^{(n)}\big).$$

此外，在假设 *2.1* 下，一致地有：

$$\Gamma_k^{\mathrm{pop}} = r_n^{(k)} + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \qquad k \in \{0,1\}. \tag{14}$$

此外，记 $r = (p_0 - p_1)/(p_0 + p_1)$ 并定义

$$r_{\mathrm{curv}} := \frac{p_0 w_{\mathrm{in}}^{\mathrm{pop}} - p_1 w_{\mathrm{out}}^{\mathrm{pop}}}{p_0 w_{\mathrm{in}}^{\mathrm{pop}} + p_1 w_{\mathrm{out}}^{\mathrm{pop}}} = \frac{r}{1 - r + r^2}, \tag{15}$$

我们有

$$r_n^{(0)} = r + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \qquad r_n^{(1)} = r_{\mathrm{curv}} + O\Big(\frac{1}{n}\Big), \tag{16}$$

因此

$$\Gamma_1^{\mathrm{pop}} - \Gamma_0^{\mathrm{pop}} = \big(r_{\mathrm{curv}} - r\big) + O\Big(\frac{1}{n}\Big) = \frac{r^2(1-r)}{1 - r + r^2} + O\Big(\frac{1}{n}\Big). \tag{17}$$

在假设 *2.1* 下，主导项 $r_{\mathrm{curv}} - r$ 有一个正的下界，该下界仅取决于 ρ。

证明。应用引理 4.2。对于 L_0^{pop}，取 $(w_{\mathrm{in}}, w_{\mathrm{out}}) = (1, 1)$。对于 L_1^{pop}，取 $(w_{\mathrm{in}}, w_{\mathrm{out}}) = (w^{(n)}$ in $w^{(n)}$ out)。两种情况下，$\lambda_3(L) = 1 + a/d_*$ 都一致地满足 $a/d_* = O(1/n)$，而 $\lambda_2(L) = 1 - r_n(\cdot,\cdot)$，由此得到 (14)。展开式 (16) 可通过以下步骤得到：(i) 将 $n-1$ 替换为 n，代价为 $O(1/n)$；(ii) 使用 (11)，将 $(w^{(n)}$ in $w^{(n)}$ out) 替换为 $(w^{\mathrm{pop}}$ in w^{pop} out)，代价为 $O(1/n)$。(15) 中的恒等式是代数恒等式。最后，根据假设 2.1，r 在 (0, 1) 的一个紧子集内取值，因此在该范围内 $\inf(r_{\mathrm{curv}} - r) > 0$。

□

4.4 辅助扰动引理

引理 4.4（行/列和界）。 对于任意实矩阵 M，

$$\|M\|_{\mathrm{op}} \;\le\; \sqrt{\|M\|_1\,\|M\|_\infty},$$

其中 $\|M\|_\infty := \max_i \sum_j |M_{ij}|$ 且 $\|M\|_1 := \max_j \sum_i |M_{ij}|$。特别地，若 M 为对称矩阵，则 $\|M\|_{\mathrm{op}} \le \|M\|_\infty$。

证明。 标准： $\|M\|_{\mathrm{op}}^2 = \|M^\top M\|_{\mathrm{op}} \le \|M^\top M\|_1 \le \|M^\top\|_1 \|M\|_1 = \|M\|_\infty \|M\|_1$。 □

引理 4.5（对角矩阵上的逆平方根扰动）。 设 $A = \mathrm{diag}(a)$ 且 $B = \mathrm{diag}(b)$，其中 $a_i,\ b_i \ge m > 0$ 对所有 i。则

$$\|A^{-1/2} - B^{-1/2}\|_{\mathrm{op}} \;\le\; \tfrac{1}{2}\, m^{-3/2}\, \|a - b\|_\infty .$$

证明。 对 $\varphi(t) = t^{-1/2}$ 逐坐标应用标量中值定理。 □

引理 4.6（从主角到符号错误）。 设 $f = (\mathbf{1}_n,\ -\mathbf{1}_n)^\top/\sqrt{2n}$，且设 $v \perp \mathbf{1}$ 为单位向量。设 $\widehat{\sigma}_v$ 为由 v 诱导的符号聚类，其误分类率为

$$\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_v) := \frac{1}{2n} \min\Big\{ \big|\{i : \widehat{\sigma}_v(i) \ne \sigma(i)\}\big|,\ \big|\{i : \widehat{\sigma}_v(i) = \sigma(i)\}\big| \Big\}.$$

Then

$$\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_v) \;\le\; \min\Big\{ \frac{1}{2},\ \tan^2 \angle(v, f) \Big\}.$$

证明。 选择 v 的全局符号，使得 $\langle v, f\rangle \ge 0$，并将 $v = \alpha f + g$ 写成 $g \perp f$、 $\alpha = \cos\theta$、$\|g\|_2 = \sin\theta$、$\theta = \angle(v, f) \in [0, \pi/2]$。令 M 为误分类集合（在最优全局翻转之后）。对于 $i \in M$， v_i 与 f_i 符号相反，因此 $|v_i - \alpha f_i| \ge \alpha |f_i| = \alpha/\sqrt{2n}$。故

$$\sin^2\theta = \|g\|_2^2 = \|v - \alpha f\|_2^2 \;\ge\; \sum_{i \in M} (v_i - \alpha f_i)^2 \;\ge\; |M| \cdot \frac{\alpha^2}{2n},$$

所以误差为 $\widehat{\sigma}_v = |M|/(2n) \le \sin^2\theta/\alpha^2 = \tan^2\theta$。 □

4.5 度与谱控制

引理 4.7（度、加权度与邻接矩阵谱界）。 假定假设 *2.1* 和 *2.2*。存在常数 c、$C > 0$，使得以至少 $1 - Cn^{-6}$ 的概率，

$$\min_i D_i \ge c\, n\bar{p}, \qquad \max_i |D_i - d_0| \le C\sqrt{n\bar{p}\log n}, \tag{18}$$

$$\min_i \widehat{d}_{1,i} \ge c\, d_1, \qquad \max_i |\widehat{d}_{1,i} - d_1| \le C\sqrt{n\bar{p}\log n}, \tag{19}$$

$$\|A - P^{\mathrm{pop}}\|_{\mathrm{op}} \le C\sqrt{n\bar{p}\,\text{对数}\ n}, \tag{20}$$

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \le C\, n\bar{p}. \tag{21}$$

证明。这 些度数界 (18) 由引理 3.2 得出，因为假设 2.2 蕴含 $n\bar{p} \gg$ 对数 n .

对于 (20)，在给定 σ 的条件下，对 $A - P^{\mathrm{pop}}$ 应用矩阵 Bernstein 不等式。然后，由 $\|A\|_{\mathrm{op}} \le \|A - P_{\text{群体}}\|_{\mathrm{op}} + \|P^{\mathrm{pop}}\|_{\mathrm{op}}$ 和 $\|P_{\text{群体}}\|_{\mathrm{op}} \asymp n\bar{p}$ 可得 (21)。

对于 (19)，对每个 i 进行分解：

$$\widehat{d}_{1,i} = \sum_{j \ne i} A_{ij}\kappa(i,j) = \sum_{j \ne i} A_{ij} K_{ij}^{(n)} + \sum_{j \ne i} A_{ij}\big(\kappa(i,j) - K_{ij}^{(n)}\big) =: S_i + R_i.$$

在给定 σ 的条件下， S_i 是一组独立随机矩阵、有界变量之和，其均值为 $\mathbb{E}[S_i \mid \sigma] = d_1 \asymp_\rho n\bar{p}^2$，且各项的上界为 $\|K^{(n)}\|_{\max} \lesssim_\rho \bar{p}$，因此由伯恩斯坦不等式和并集界可得 $\max_i |S_i - d_1| \lesssim \sqrt{n\bar{p}^3 \log\, n} + \bar{p} \log\, n$。在推论 4.1 的事件上， $\|\kappa - K^{(n)}\|_{\max} \lesssim \varepsilon_n$，因此

$$\max_i |R_i| \le \|\kappa - K^{(n)}\|_{\max} \max_i D_i \lesssim \varepsilon_n\,(n\bar{p}) = \sqrt{n\bar{p}\log n},$$

利用（18）。吸收 $\sqrt{n\bar{p}^3 \log\, n} + \bar{p}\log\, n \le \sqrt{n\bar{p}} \log\, n$（对 $\bar{p} \le 1$ 和 $n\bar{p} \gg \log\, n$）后，得到（19）中所述的（较宽松）偏差界。最后，在假设 2.2 下， $\sqrt{n\bar{p}} \log\, n = o(d_1)$，因此对所有充分大的 n，在同一事件上均有 $\min_i \widehat{d}_{1,\,i} \ge c d_1$。 □

4.6 代理分解与算子范数集中

引理 4.8 (代理分解)。 定义代理拉普拉斯矩阵

$$\widetilde{L}_1 := I_{2n} - d_1^{-1}\widehat{W}.$$

Then

$$\widehat{L}_1 - L_1^{\mathrm{pop}} = (\widehat{L}_1 - \widetilde{L}_1) + d_1^{-1}\big(K^{(n)} \circ (A - P^{\mathrm{pop}})\big) + d_1^{-1}\big(\widehat{W} - K^{(n)} \circ A\big), \tag{22}$$

且归一化因子的余项满足

$$\widehat{L}_1 - \widetilde{L}_1 = \; -\Big(\widehat{D}_1^{-1/2} - d_1^{-1/2} I\Big)\widehat{W}\,\widehat{D}_1^{-1/2} \;-\; d_1^{-1/2}\widehat{W}\Big(\widehat{D}_1^{-1/2} - d_1^{-1/2} I\Big).$$

证明。 加上并减去 $d_1^{-1}\widehat{W}$，然后展开

$$\widehat{W} - W_1^{\mathrm{pop}} = \widehat{W} - (K^{(n)} \circ P^{\mathrm{pop}}) = K^{(n)} \circ (A - P^{\mathrm{pop}}) + \big(\widehat{W} - K^{(n)} \circ A\big).$$

第二个恒等式是对 $\widehat{D}_1^{-1/2}\widehat{W}\widehat{D}_1^{-1/2} - d_1^{-1}\widehat{W}$ 的极化展开。 □

引理 4.9 （与算子范数集中性有关 L_0 和 L_1）。 假设假设 *2.1* 和 *2.2*。存在常数 $C > 0$，使得以至少 $1 - Cn^{-6}$ 的概率，

$$\delta_0 := \|\widehat{L}_0 - L_0^{\mathrm{pop}}\|_{\mathrm{op}} \;\le\; C\,\varepsilon_n, \qquad \varepsilon_n = \sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}}}, \tag{23}$$

and

$$\delta_1 := \|\widehat{L}_1 - L_1^{\mathrm{pop}}\|_{\mathrm{op}} \;\le\; C\big(\varepsilon_n + \eta_n\big), \qquad \eta_n := \sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}^3}}. \tag{24}$$

证明。 在引理 4.7 和推论 4.1 所述的高概率事件上进行讨论。

步骤 *1*：界定 δ_0。记

$$\widehat{L}_0 - L_0^{\mathrm{pop}} = \Big(\widehat{D}_0^{-1/2} - d_0^{-1/2} I\Big) A\,\widehat{D}_0^{-1/2} + d_0^{-1/2}(A - P^{\mathrm{pop}}) d_0^{-1/2} + d_0^{-1/2} P^{\mathrm{pop}}\Big(\widehat{D}_0^{-1/2} - d_0^{-1/2} I\Big).$$

由于 $d_0 \asymp n\bar{p}$ 且 $\max_i |D_i - d_0| \lesssim \sqrt{n\bar{p}\log\, n}$,

$$\|\widehat{D}_0^{-1/2} - d_0^{-1/2} I\|_{\mathrm{op}} = \max_i \Big|D_i^{-1/2} - d_0^{-1/2}\Big| \lesssim d_0^{-3/2} \max_i |D_i - d_0| \lesssim \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n\bar{p}}}.$$

此外，根据引理 4.7， $\|A\|_{\mathrm{op}} \lesssim n\bar{p}$ 且 $\|A - P^{\mathrm{pop}}\|_{\mathrm{op}} \lesssim \sqrt{n\bar{p}\log\, n}$，并且 $\|P_{\mathrm{pop}}\|_{\mathrm{op}} \asymp n\bar{p}$。结合这些界可得 $\|\widehat{L}_0 - L_0^{\mathrm{pop}}\|_{\mathrm{op}} \lesssim \varepsilon_n$。

步骤 *2*：通过引理 *4.8* 界定 δ_1。使用 (22)。

(*i*) 独立核心项。令 $M := K^{(n)} \circ (A - P^{\mathrm{pop}})$。给定 σ，由矩阵 Bernstein 不等式可得$\|M\|_{\mathrm{op}} \lesssim \sqrt{n\bar{p}^3 \log n} + \bar{p}\log n \lesssim \sqrt{n\bar{p}^3 \log n}$，其中用到了 $n\bar{p} \gg \log n$和 $\|K^{(n)}\|_{\max} \lesssim \bar{p}$。由于 $d_1 \asymp n\bar{p}^2$，

$$\|d_1^{-1} M\|_{\mathrm{op}} \lesssim \frac{\sqrt{n\bar{p}^3 \log n}}{n\bar{p}^2} = \varepsilon_n.$$

(*ii*) 曲率波动项。按元素来看，$\widehat{W} - K^{(n)} \circ A = (\kappa - K^{(n)}) \circ A$。因此，由引理 4.4 可得，

$\|\widehat{W} - K^{(n)} \circ A\|_{\mathrm{op}} \le$最大值$_i \sum A_{ij}\,|\kappa(i,j) - K_{ij}^{(n)}| \le \|\kappa - K^{(n)}\|_{\max}$最大值$_i D_i \lesssim \varepsilon_n (n\bar{p}) = \sqrt{n\bar{p}}$ 对数 nj

因此

$$\|d_1^{-1}(\widehat{W} - K^{(n)} \circ A)\|_{\mathrm{op}} \lesssim \frac{\sqrt{n\bar{p}\log n}}{n\bar{p}^2} = \eta_n.$$

(*iii*) 度归一化因子余项。由引理 4.7，$\min_i \widehat{d}_{1,\,i} \asymp d_1$ 且 $\max_i |\widehat{d}_{1,\,i} - d_1| \lesssim \sqrt{n\bar{p}\log n}$，因此由引理 4.5 可得

$$\big\|\widehat{D}_1^{-1/2} - d_1^{-1/2} I\big\|_{\mathrm{op}} \lesssim \frac{\sqrt{n\bar{p}\log n}}{d_1^{3/2}} \asymp \frac{\sqrt{\log n}}{n\,\bar{p}^{5/2}}.$$

此外，$\|\widehat{D}_1^{-1/2}\|_{\mathrm{op}} \lesssim d_1^{-1/2} \asymp (n\bar{p}^2)^{-1/2}$ 且 $\|\widehat{W}\|_{\mathrm{op}} \le \|\widehat{W}\|_\infty = \max_i \widehat{d}_{1,\,i} \lesssim n\bar{p}^2$。代入$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ 引理 4.8 得到 $\|L_1 - L_1\|_{\mathrm{op}} \lesssim \eta_n$。

结合 (i)–(iii) 可得 (24)。 □

4.7 特征值间隙增益与误分类界

定理 4.10（一步 Ricci：间隙增益与误差控制）。 假设假设 *2.1* 和 *2.2*。设

$$\Gamma_k := \lambda_3(\widehat{L}_k) - \lambda_2(\widehat{L}_k), \qquad \Gamma_k^{\mathrm{pop}} := \lambda_3(L_k^{\mathrm{pop}}) - \lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}}), \qquad k \in \{0,1\}.$$

存在 $C > 0$，使得以至少 $1 - Cn^{-6}$ 的概率：

(***i***) 样本特征间隙比较。

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 \;\ge\; (\Gamma_1^{\mathrm{pop}} - \Gamma_0^{\mathrm{pop}}) \;-\; 2(\delta_0 + \delta_1), \tag{25}$$

因此，根据引理 *4.3* 和 *4.9*，

$$\Gamma_1 - \Gamma_0 \;\ge\; \big(r_{\mathrm{curv}} - r\big) \;-\; C\big(\varepsilon_n + \eta_n\big) \;-\; Cn^{-1}. \tag{26}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ (***ii***) 通过 ***Davis–Kahan*** 分析误分类。令 $\widehat{v}_k$ 为 L_k 对应于 $\lambda_2(L_k)$ 的单位特征向量（除符号外唯一）。定义中心化投影算子和中心化单位向量

$$\Pi := I_{2n} - \frac{1}{2n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top, \qquad \widetilde{v}_k := \frac{\Pi \widehat{v}_k}{\|\Pi \widehat{v}_k\|_2},$$

并令 $\widehat{\sigma}_k$ 为 $\widetilde{v}_k$的符号聚类。如果 $\delta_k \le \frac{1}{4}\Gamma_k^{\mathrm{pop}}$，则

$$\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_k) \;\le\; C\left(\frac{\delta_k}{\Gamma_k^{\mathrm{pop}}}\right)^2, \qquad k \in \{0,1\}. \tag{27}$$

证明。对于 (i)，由 Weyl不等式可得 $|\lambda_j(\widehat{L}_k) - \lambda_j(L_k^{\mathrm{pop}})| \le \delta_k$ 对 $j = 2,3$ 成立，因此 $\Gamma_k \ge \Gamma_k^{\mathrm{pop}} - 2\delta_k$，从而得到 (25)。代入 (17) 和 (23)–(24)，可得 (26)。

对于 (ii)，由引理 4.2 可知，f 是 $\lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}})$对应的 L_k^{pop} 特征向量，并且

$$\lambda_1(L_k^{\mathrm{pop}}) = 0, \qquad \Gamma_k^{\mathrm{pop}} = \lambda_3(L_k^{\mathrm{pop}}) - \lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}}).$$

此外，由引理 4.2 还可得，

$$\lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}}) = 1 - r_n^{(k)} + O(1/n), \qquad \Gamma_k^{\mathrm{pop}} = r_n^{(k)} + O(1/n),$$

并且在假设 2.1 下，对于所有充分大的 n，我们有 $r_n^{(k)} \in [c(\rho)\ 1-c(\rho)]$，因此 $\lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}})$ 与其余谱之间的间隔满足

$$\mathrm{sep}_k^{\mathrm{pop}} \quad :\overline{\mathrm{m}}\mathrm{in}\{\lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}}) - \lambda_1(L_k^{\mathrm{pop}}),\ \lambda_3(L_k^{\mathrm{pop}}) - \lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}})\} = \min\{\lambda_2(L_k^{\mathrm{pop}}), \Gamma_k^{\mathrm{pop}}\} \ \ge\ c'(\rho)\,\Gamma_k^{\mathrm{pop}}$$

因此，由 Davis–Kahan 可得

$$\sin\angle(\widehat{v}_k, f) \le C\,\frac{\delta_k}{\mathrm{sep}_k^{\mathrm{pop}}} \le C(\rho)\,\frac{\delta_k}{\Gamma_k^{\mathrm{pop}}}.$$

假设 $\delta_k \le \Gamma_k^{\mathrm{pop}}/4$，则对于所有充分大的 n，$\angle(\widehat{v}_k,\ f) \le \pi/6$，因此 $\tan^2\angle(\widehat{v}_k,\ f) \lesssim (\delta_k/\Gamma_k^{\mathrm{pop}})^2$。

接下来，设 $\Pi := I_{2n} - \frac{1}{2n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top$ 和 $\widetilde{v}_k = (\Pi\widehat{v}_k)/\|\Pi\widehat{v}_k\|_2$。由于 $\widehat{v}_k$ 不平行于$\mathbf{1}$（因为$\sim\lambda_2(L_k) > 0$），我们有 $\Pi\widehat{v}_k \ne 0$。选取 $\widehat{v}_k$的全局符号，使得 $\langle\widehat{v}_k, f\rangle \ge 0$，并将$\widehat{v}_k = \alpha f + g$写为 $g \perp f$, $\alpha = \cos\theta$, $\|g\|_2 = \sin\theta$, $\theta = \angle(\widehat{v}_k, f) \in [0, \pi/2]$。由于 $f \perp \mathbf{1}$，我们有$\Pi f = f$；根据 Π的对称性，$\langle\Pi g, f\rangle = \langle g, \Pi f\rangle = \langle g, f\rangle = 0$。因此

$$\Pi\widehat{v}_k = \alpha f + \Pi g, \qquad \|\Pi g\|_2 \le \|g\|_2 = \sin\theta, \qquad \|\Pi\widehat{v}_k\|_2^2 = \alpha^2 + \|\Pi g\|_2^2 \ge \alpha^2,$$

这意味着

$$\tan\angle(\widetilde{v}_k, f) = \frac{\|\Pi g\|_2}{\alpha} \le \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\angle(\widehat{v}_k, f).$$

最后，按构造，$\widetilde{v}_k \perp \mathbf{1}$，因此将引理 4.6 应用于 $\widetilde{v}_k$ 可得

$$\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_k) \le \tan^2\angle(\widetilde{v}_k, f) \le \tan^2\angle(\widehat{v}_k, f) \lesssim \left(\frac{\delta_k}{\Gamma_k^{\mathrm{pop}}}\right)^2,$$

这就是 (27)。 □

推论4.11（假设 2.2 下的严格特征间隙改进）。假设假设 *2.1* 和 *2.2*。则对所有充分大的 n，以至少 $1 - Cn^{-6}$ 的概率，

$$\lambda_3(\widehat{L}_1) - \lambda_2(\widehat{L}_1) \ > \ \lambda_3(\widehat{L}_0) - \lambda_2(\widehat{L}_0).$$

证明。由引理 4.3 和假设 2.1，$(r_{\mathrm{curv}} - r) \ge c(\rho) > 0$。在假设 2.2 下，$\varepsilon_n + \eta_n \to 0$，因此 (26) 表明，在所述高概率事件上，对所有充分大的 n，$\Gamma_1 - \Gamma_0 > 0$。 □

推论 4.12（单步重加权何时改进 Davis–Kahan 错分界）。假设假设 *2.1* 和 *2.2*。在 *(27)* 对两个 $k \in \{0, 1\}$ 均成立的事件上（如定理 *4.10* 所述），我们有

$$\frac{\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_1)}{\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_0)} \ \le\ C\Big(\frac{\delta_1}{\delta_0}\Big)^2\Big(\frac{\Gamma_0^{\mathrm{pop}}}{\Gamma_1^{\mathrm{pop}}}\Big)^2.$$

特别地，如果

$$\frac{\delta_1}{\Gamma_1^{\mathrm{pop}}} \ \le\ \frac{\delta_0}{\Gamma_0^{\mathrm{pop}}}, \tag{28}$$

然后，在同一事件上，$\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_1) \le C\mathrm{err}(\widehat{\sigma}_0)$。

5 有限时域迭代里奇重加权

我们分析平衡双块随机块模型中由曲率驱动的边重加权的固定时域 $T \in \mathbb{N}$。加权图的所有Ollivier/LLY概念均遵循第 2 节中的定义。全文的运输成本均按非加权图度量计算。

基本假设与速率。 固定 $T \in \mathbb{N}$。在第 5 节中，我们始终假设假设 2.1 和假设 2.2。回顾 $\bar{p} = (p_0 + p_1)/2$，并定义

$$\varepsilon_n := \sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}}}, \qquad \eta_n := \frac{\varepsilon_n}{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}^3}}. \tag{29}$$

在假设 2.2 下，$\varepsilon_n = o(\bar{p})$ 和 $\eta_n = o(1)$。

用于迭代跟踪的有限时域强化。 为了获得误差趋于零的简洁关于 $t \le T$ 的一致迭代跟踪界，我们还将在明确说明时假设更强的条件

$$n\,\bar{p}^{\,2T+1} \gg \log n, \qquad \text{equivalently} \qquad \eta_{n,T} := \frac{\varepsilon_n}{\bar{p}^{\,T}} = \sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}^{\,2T+1}}} = o(1). \tag{MDT(T)}$$

特别地，(MDT(T)) 蕴含 $\varepsilon_n/\bar{p}^{T-1} = o(\bar{p})$。直观而言，单步曲率映射仅在 $1/\bar{p}$ 尺度上满足利普希茨连续性，因为邻居概率的量级为 $1/(n\bar{p})$，而加权度的量级为 $n\bar{p}^2$。因此，权重的最大范数误差在每次迭代中会被放大 $\asymp 1/\bar{p}$ 倍。条件 (MDT(T)) 确保放大后的误差对于 $t \le T$ 一致地保持为 $o(1)$。

5.1 迭代与双层基准递归

令 $G \sim \mathrm{SBM}(2n,\ p_0,\ p_1,\ \sigma)$ 表示具有块 $B_1,\ B_2$、每块大小为 n、邻接矩阵为 A 的 $V = [2n]$。我们在固定的 边支撑上迭代里奇重加权:

$$W^{(0)} := A, \qquad W^{(t+1)} := \kappa_{W^{(t)}} \circ A \quad (t \ge 0), \tag{30}$$

其中 $(\kappa_W)^{xy} := \kappa_W(x,\ y)$，当 $\{x, y\} \in E$ 时成立，否则为 0。因此，每个 $W^{(t)}$ 都是对称、非负的，且支撑在 E 上。

观测到的两层基准。 对于 $(a,\ b) \in (0,\ \infty)^2$ 定义

$$W^\star(a,b) := K(a,b) \circ A, \qquad K(a,b)_{xy} := \begin{cases} a, & \sigma(x) = \sigma(y), \\ b, & \sigma(x) \ne \sigma(y), \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{31}$$

平均场映射与确定性基准递归。 定义 $\Phi_n : (0,\ \infty)^2 \to (0,\ \infty)^2$为

$$\Phi_n(a,b) := \big(\varphi_{\mathrm{in}}^{(n)}(a,b),\ \varphi_{\mathrm{out}}^{(n)}(a,b)\big), \tag{32}$$

其中

$$\varphi_{\mathrm{in}}^{(n)}(a,b) := \frac{(n-2)p_0^2\,a + np_1^2\,b}{(n-1)p_0\,a + np_1\,b}, \qquad \varphi_{\mathrm{out}}^{(n)}(a,b) := \frac{(2n-2)p_0p_1\,b}{(n-1)p_0\,a + np_1\,b}. \tag{33}$$

令 $w^{(0)}{}_{\mathrm{in}} = w^{(0)}{}_{\mathrm{out}} = 1$，并定义 $t \ge 0$

$$\big(w_{\mathrm{in}}^{(t+1)}, w_{\mathrm{out}}^{(t+1)}\big) := \Phi_n\big(w_{\mathrm{in}}^{(t)}, w_{\mathrm{out}}^{(t)}\big). \tag{34}$$

写作 $K^{(t)} := K(w^{(t)}{}_{\text{in}}\, w^{(t)}{}_{\text{out}})$，并且

$$W^{\star,(t)} := W^{\star}\big(w_{\text{in}}^{(t)}, w_{\text{out}}^{(t)}\big) = K^{(t)} \circ A.$$

引理 5.1（基准权重为 $\asymp \bar{p}$ 对于 $t \geq 1$）。 固定 $T \in \mathbb{N}$ 并假设假设 *2.1*。则存在常数 $0 < c_{T,\ \rho} \leq C_{T,\ \rho} < \infty$，使得对所有 $t \in \{1, \ldots, T\}$,

$$c_{T,\rho}\, \bar{p} \leq w_{\text{out}}^{(t)} \leq w_{\text{in}}^{(t)} \leq C_{T,\rho}\, \bar{p}.$$

证明。对于 $t = 1$, 由（33）可得 $w^{(1)}$ 在 $w^{(1)}$ 中的出值为 $\asymp_{\rho} \bar{p}$，因为在假设 2.1 下，每个分子都是 $\Theta(n\bar{p}^2)$, 分母是$\Theta(n\bar{p})$。若 $0 < b \leq a$ 且 $a,\ b \asymp \bar{p}$, 则分母（$n-1$）$p_0 a + np_1 b \asymp n\bar{p}^2$, 并且 $\varphi^{(n)}$ 在（$a,\ b$）$\varphi^{(n)}$ 出（$a,\ b$）$\asymp \bar{p}$，其中 $\varphi^{(n)}$ 在（$a,\ b$）$\geq \varphi^{(n)}$ 出（$a,\ b$），因为 $p_0 - p_1 \gtrsim_{\rho} \bar{p}$（假设 2.1）且 $a \geq b$。对 $t \leq T$迭代。 □

引理 5.2 (对比度递推及向不动点的单调递减**)**。 假设假设 *2.1*。令 $s_t :=$ $w^{(t)}$ 出$/w^{(t)}$ 内$\in$ $(0, 1]$。则 $s_0 = 1$ 且

$$s_{t+1} = f_n(s_t), \qquad f_n(s) := \frac{2(n-1)p_0 p_1\, s}{(n-2)p_0^2 + np_1^2\, s}.$$

此外， f_n 在 $(0, 1]$, 上递增，并且 f_n（s）$/s$ 在 $(0, 1]$上严格递减。定义

$$s_{\star} := \max\Big\{0,\ \frac{2(n-1)p_0 p_1 - (n-2)p_0^2}{np_1^2}\Big\} \in [0, 1), \qquad \Delta_t^{(n)} := \frac{(n-1)p_0 - np_1 s_t}{(n-1)p_0 + np_1 s_t}.$$

于是（s_t）*</style}*不增并收敛到 $s_{\star}$，且 $t \mapsto \Delta_t^{(n)}$ 不减。

证明。 求导可得 $f_n'(s) > 0$。此外

$$\frac{f_n(s)}{s} = \frac{2(n-1)p_0 p_1}{(n-2)p_0^2 + np_1^2 s}$$

关于 s严格递减。不等式 $f_n(s) \leq s$ 等价于 $s \geq s_{\star}$。由于 $s_0 = 1 \geq s_{\star}$ 且$f_n([s_{\star}, 1]) \subseteq [s_{\star}, 1]$, 我们得到 $s_{t+1} \leq s_t$ 和 $s_t \downarrow s_{\star}$。最后， $\Delta_t^{(n)}$ 关于 s_t严格递减。 □

5.2 总体基准特征值间隙单调性

设 $P^{\text{pop}} := \mathbb{E}[A \mid \sigma]$。定义总体基准

$$W_{\text{pop}}^{\star,(t)} := K^{(t)} \circ P^{\text{pop}}, \qquad L_{\text{pop}}^{\star,(t)} := L(W_{\text{pop}}^{\star,(t)}), \qquad \Gamma_{\text{pop}}^{(t)} := \lambda_3(L_{\text{pop}}^{\star,(t)}) - \lambda_2(L_{\text{pop}}^{\star,(t)}).$$

引理 5.3（总体基准间隙等于 $\Delta_t^{(n)} + O$（$1/n$）） 。 固定 $T \in \mathbb{N}$ 并假设假设 *2.1*。对每个 $t \leq T$,

$$\Gamma_{\text{pop}}^{(t)} = \Delta_t^{(n)} + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

因此 $t \mapsto \Gamma_{\text{pop}}^{(t)}$ 直至 $O(1/n)$是非递减的。

证明。 $W^{\star,}{}_{\text{pop}}^{(t)}$具有引理 4.2 的 2×2 分块形式，其中 $a_t := p_0 w^{(t)}$ 内且 $b_t := p_1 w^{(t)}$ 外。因此

$$\lambda_2(L_{\text{pop}}^{\star,(t)}) = 1 - \frac{(n-1)a_t - nb_t}{(n-1)a_t + nb_t} = 1 - \Delta_t^{(n)}, \qquad \lambda_3(L_{\text{pop}}^{\star,(t)}) = 1 + \frac{a_t}{(n-1)a_t + nb_t} = 1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

相减。 □

5.3 基图上的一个一致良好事件

Write $\Gamma(x) := \{z : A_{xz} = 1\}$ 对于（无权）邻域。对于一条边 $x \sim y$，定义

$$U_x := \Gamma(x) \setminus (\Gamma(y) \cup \{y\}), \qquad U_y := \Gamma(y) \setminus (\Gamma(x) \cup \{x\}).$$

定义权重类型 的独占邻域（相对于端点）：

$$U_{\mathrm{in}}(x,y) := U_x \cap B_{\sigma(x)}, \qquad U_{\mathrm{out}}(x,y) := U_x \cap B^c_{\sigma(x)},$$
$$V_{\mathrm{in}}(x,y) := U_y \cap B_{\sigma(y)}, \qquad V_{\mathrm{out}}(x,y) := U_y \cap B^c_{\sigma(y)}.$$

定义不平衡

$m_{\mathrm{in}}(x,y) := \big||U_{\mathrm{in}}(x,\ y)|-|V_{\mathrm{in}}(x,\ y)|\big|, \qquad m_{\mathrm{out}}(x,y) := \big||U_{\mathrm{out}}(x,\ y)|-|V_{\mathrm{out}}(x,\ y)|\big|, \qquad m(x,\ y) := m_{\mathrm{in}}(x,\ y)+m_{\mathrm{out}}(x,\ y)$。

引理 5.4 (一致好事件 $\mathcal{E}_T$)。 固定 $T \in \mathbb{N}$ 并假设假设 *2.1* 和 *2.2*。存在一个事件 $\mathcal{E}_T$，满足 $\Pr(\mathcal{E}_T) \geq 1 - C_{T,\ \rho} n^{-2}$ 使得在 $\mathcal{E}_T$ 上：

(i) 引理 *3.4* 和 *3.5* 对所有顶点和点对一致成立。

(ii) 对每条边 $x \sim y$，由 $U_{\mathrm{in}}(x,y) \cup V_{\mathrm{in}}(x,y)$ 以及由 $U_{\mathrm{out}}(x,y) \cup V_{\mathrm{out}}(x,y)$ 诱导的二分图均包含一个饱和较小侧的匹配。

(iii) 对所有边 $x \sim y$，$m(x,y) \lesssim \sqrt{n\bar{p}}$ 对数 n。

证明。 (i) 由引理 3.4 和引理 3.5 以及并集界得出；假设 2.2 蕴含 $n\bar{p} \gg \log n$ and $n\bar{p}^2 \gg \log n$ （注 2）。

(ii) 固定一条有序边 (x,y)，并考虑 $U_{\mathrm{in}}(x,y)$ 与 $V_{\mathrm{in}}(x,y)$ 之间的二分图。给定 $\sigma, \Gamma(x)\ \Gamma(y)$ 后，这些集合之间的边相互独立，且每条边的成功概率至少为 $p_1 \asymp_\rho \bar{p}$。在 (i) 中的事件成立时，对 $x \sim y$ 一致地有 $|U_{\mathrm{in}}(x,y)|, |V_{\mathrm{in}}(x,y)| \asymp_\rho n\bar{p}$，且纵横比有常数 $\Lambda(\rho)$ 作为上界。此外，$p_1|V_{\mathrm{in}}| \asymp_\rho n\bar{p}^2 \gg \log n$。引理 3.9 适用（取 $q = 10$）。同样的论证也适用于 $(U_{\mathrm{out}}, V_{\mathrm{out}})$。对 $O(n^2)$ 条有序边应用并集界，可得总体失败概率至多为 $C\, n^2\, (c\, n\bar{p})^{-10} = o(1)$，特别地，对于所有充分大的 n，有 $\leq n^{-2}$。

(iii) $|U_{\mathrm{in}}|$、$|V_{\mathrm{in}}|$、$|U_{\mathrm{out}}|$、$|V_{\mathrm{out}}|$ 均为分块度和分块共度的带符号线性组合，因此在 (i) 中的事件上，一致地集中到 $O(\sqrt{n\bar{p}} \log\ n)$。求和后得到 $m(x,y) \lesssim \sqrt{n\bar{p}} \log\ n$，且一致成立。 □

5.4 双层重加权的谱集中

引理 5.5 （双层重加权随机块模型的谱集中）。 固定 $T \in \mathbb{N}$ 并假设满足假设 *2.1* 和 *2.2*。令 （a、b）满足 $0 < b \leq a$ 和 $a \asymp_{T,\rho} \bar{p}$、$b \asymp_{T,\rho} \bar{p}$。令

$W^\star(a,\ b) = K(a,b) \circ A, \qquad W^\star_{\mathrm{pop}}(a,b) = K(a,b) \circ P^{\mathrm{pop}}, \qquad L(W) := I - \mathrm{Deg}(W)^{-1/2} W\, \mathrm{Deg}(W)^{-1/2}.$

于是存在 $C_{T,\rho} < \infty$，使得以至少 $1 - C_{T,\rho} n^{-2}$ 的概率，

$$\big\| L(W^\star(a,b)) - L(W^\star_{\mathrm{pop}}(a,b)) \big\|_{\mathrm{op}} \ \leq\ C_{T,\rho}\, \varepsilon_n.$$

因此，对于每个固定的 k，

$$\big| \lambda_k(L(W^\star(a,b))) - \lambda_k(L(W^\star_{\mathrm{pop}}(a,b))) \big| \ \leq\ C_{T,\rho}\, \varepsilon_n.$$

证明。 在给定 σ 的条件下，令 $\Delta W := K(a,\ b) \circ (A - P^{\mathrm{pop}})$。矩阵 Bernstein 不等式给出 $\|\Delta W\|_{\mathrm{op}} \lesssim \sqrt{n\bar{p}^3} \log\ n$，以高概率成立，因为 $\|K(a, b)\|_{\max} \asymp \bar{p}$。此外，$d_x(W^\star(a,\ b)) \asymp n\bar{p}^2$ 一致地成立，且 $\|d(W^\star(a,\ b)) - d\ W^\star\ \ a\ \ b\ \|_\infty \lesssim \sqrt{n\bar{p}^3}$ 6 4 $m \asymp n\bar{p}^2$ $\|W^\star\ a\ b\ \|_{\mathrm{op}}\ \|W^\star_{\mathrm{pop}}\ a\ b\ \|_{\mathrm{op}} \lesssim$ (总体(,)) log w.h.p. 应用引理 。并 $n\bar{p}^2$ 注意到 (,), (,) 。这就得到

$$\|L(W^\star(a,b)) - L(W^\star_{\mathrm{pop}}(a,b))\|_{\mathrm{op}} \ \lesssim\ \frac{\sqrt{n\bar{p}^3 \log n}}{n\bar{p}^2} = \varepsilon_n.$$

特征值控制由 Weyl 定理得出。 □

5.5 双层基准的曲率与集中

对于支撑于 A 的加权邻接矩阵 W，记 $d_x(W) := \sum_{z\sim x} W_{xz}$ 以及 $p_{x,\,W}(z) := W_{xz}/d_x(W)$ 为 $z \sim x$。对于一条边 $x \sim y$，定义重叠泛函

$$\mathrm{Ov}_{xy}(W) := p_{x,W}(y) + p_{y,W}(x) + \sum_{z\in\Gamma(x)\cap\Gamma(y)} \min\{p_{x,W}(z), p_{y,W}(z)\}, \tag{35}$$

并设

$$p_{\max}(W; x, y) := \max\Big\{\max_{u\sim x} p_{x,W}(u),\ \max_{v\sim y} p_{y,W}(v)\Big\}.$$

另外，定义局部度数失配

$$\Delta_{\deg}(W; x, y) := \frac{|d_x(W) - d_y(W)|}{\min\{d_x(W), d_y(W)\}}.$$

引理 5.6（确定性重叠上界）。对于任意支撑于 A 的加权 W 以及任意边 $x \sim y$，

$$\kappa_W(x, y) \ \le\ \mathrm{Ov}_{xy}(W).$$

证明。固定 $\alpha \in [1/2, 1)$ 并写作 $m^{\alpha}_{x,\,W} := \alpha\delta_x + (1-\alpha)\sum_{z\sim x} p_{x,\,W}(z)\delta_z$。对于 $(m^{\alpha}_{x,\,W},\ m^{\alpha}_{y,\,W})$ 的任意耦合 π，由于 $d(u,\,v) \ge 1$ 对于 $u \ne v$，

$$\sum_{u,v} \pi(u, v) d(u, v) \ \ge\ 1 - \sum_{u} \pi(u, u).$$

在所有耦合上最大化对角质量，得到 $\sum_u \min\{m^{\alpha}_{x,W}(u), m^{\alpha}_{y,W}(u)\}$。对于 $\alpha \ge 1/2$，我们显式计算这一重叠。记作 $\beta := 1 - \alpha$。在 $\beta\, p_{y\,W}\ x \ \le \beta \le \alpha$ $\{m^{\alpha}_{x,W}\ x\ \ m^{\alpha}_{y\,W}\ x\} = \beta\, p_{y\,W}\ x$ $\{m^{\alpha}_{x,W}\ y\ \ m^{\alpha}_{y\,W}\ y$ 处，有 $m^{\alpha}_{x,}$（）以及 $m^{\alpha}_{y,}$（）、（），因此 min（）、（）、（）。类似地，min（）、（）$\beta\, p_{x\,W}\ y$ $z \in \Gamma\ x \cap \Gamma\ y\ \ m^{\alpha}_{x\,W}\ z\ = \beta p_{x\,W}\ z$ $m^{\alpha}_{y\,W}\ z\ = \beta p_{y\,W}\ z$ $\}=$，（）。对于（）（），（）、（）以及，（）、（），因此其贡献为 $\beta\min\{p_{x,W}(z)\, p_{y,W}(z)\}$，而所有其他顶点的贡献均为 0。求和得到 $\sum_u \min\{m^{\alpha}_{x,W}(u)\, m^{\alpha}_{y,W}(u)\} = \beta\,\mathrm{Ov}_{xy}(W)$。因此 $\kappa_{\alpha,W}(x, y) = 1 - W_1(m^{\alpha}_{x,W}, m^{\alpha}_{y,W}) \le (1-\alpha)\,\mathrm{Ov}_{xy}(W)$。除以（$1-\alpha$）并令 $\alpha \uparrow 1$。

□

引理 5.7（由类型匹配得到的重叠下界（两层情形））。假设 W 具有双层形式 $W = W^{\star}(a, b) = K(a, b) \circ A$。设 $x \sim y$，并令 $U_{\mathrm{in}}, U_{\mathrm{out}}, V_{\mathrm{in}}, V_{\mathrm{out}}$ 如第 *5.3* 节所述，其中 $m(x, y)$ 在该节中定义。假设由 $U_{\mathrm{in}} \cup V_{\mathrm{in}}$ 和 $U_{\mathrm{out}} \cup V_{\mathrm{out}}$ 诱导的二分图包含饱和较小侧的匹配。那么对每个 $\alpha \in [1/2, 1)$，

$$\kappa_{\alpha,W}(x, y) \ \ge\ (1-\alpha)\,\mathrm{Ov}_{xy}(W) \ -\ 3(1-\alpha)\Big(p_{\max}(W; x, y)\, m(x, y) \ +\ 2\,\Delta_{\deg}(W; x, y)\Big),$$

因此，令 $\alpha \uparrow 1$，

$$\kappa_W(x, y) \ \ge\ \mathrm{Ov}_{xy}(W) \ -\ 3\,p_{\max}(W; x, y)\, m(x, y) \ -\ 6\,\Delta_{\deg}(W; x, y).$$

证明。固定 $\alpha \in [1/2, 1$ $\beta = 1 - \alpha$ $m^{\alpha}_{x\,W} = \alpha\delta_x +)$ 并写作：。我们构造 .:.( ) 与 .:.( ) 的一个耦合。$\beta\sum_{z\sim x} p_{x\,W}\ z\ \delta_z$ $m^{\alpha}_{y\,W} = \alpha\delta_y + \beta\sum_{z\sim y} p_{y\,W}\ z\ \delta_z$

步骤 *1*（对角质量等于重叠）。设 $\pi(z,\ z) := \min\{m^{\alpha}_{x,W}(z)\, m^{\alpha}_{y,\,W}(z)\}$，对所有 z 均成立。对于 $\alpha \ge 1/2$，在 x 和 y 处的最小值分别为 $\beta p_{y,\,W}(x)$ 和 $\beta p_{x,\,W}(y)$；在共同邻居处的最小值为 $\beta\min\{p_{x,W}(z)\, p_{y,\,W}(z)\}$。因此，对角质量总和等于 $\beta\,\mathrm{Ov}_{xy}(W)$。

步骤 *2*（匹配专属类型；界定剩余质量总量）。由于 W 是双层的，每个类型集合上的邻居概率均为常数：在 U_{in}、$p_{x,\,W}(\cdot) = a/d_x(W)$ 上；在 U_{out}、$p_{x,\,W}(\cdot) = b/d_x(W)$ 上；对 y 也同样如此。

考虑 $(U_{\mathrm{in}},\ V_{\mathrm{in}})$。令 ϕ_{in} 为沿匹配边从较小侧到较大侧的一个单射。对于每个匹配点对 $(u,\ \phi_{\mathrm{in}}(u))$，从源顶点向其配对顶点转移数量为 $\beta\min\{a/d_x(W)\ a/d_y(W)\}$ 的质量（成本为 1，因为匹配点对是边）。较大侧上的未匹配顶点贡献的剩余质量至多为 $\beta\,p_{\max}(W;\ x,\ y)\ m_{\mathrm{in}}(x,\ y)$。

此外，即使在匹配的顶点中，归一化不匹配 $d_x(W)\ \neq d_y(W)$ 也会导致剩余质量。其总 贡献有如下界：

$$\beta\cdot\min\{|U_{\mathrm{in}}|,|V_{\mathrm{in}}|\}\cdot\Big|\frac{a}{d_x(W)}-\frac{a}{d_y(W)}\Big|\ \le\ \beta\,\frac{|d_x(W)-d_y(W)|}{\min\{d_x(W),d_y(W)\}}=\beta\,\Delta_{\deg}(W;x,y),$$

因为 $\min\{|U_{\mathrm{in}}|,|V_{\mathrm{in}}|\}\le\min\{d_x(W)\ d_y(W)\}/a$（这是因为 $a|U_{\mathrm{in}}|\le d_x(W)$ 且 $a|V_{\mathrm{in}}|\le d_y(W)$）。在 $(U_{\mathrm{out}},V_{\mathrm{out}})$ 上执行相同的构造，可得到至多为 $\beta\,p_{\max}(W;\ x,y)m_{\mathrm{out}}(x,y)+\beta\,\Delta_{\deg}(W;\ x,y)$ 的剩余质量。

因此，步骤 2 后的总 剩余质量至多为

$$\ell\ \le\ \beta\,p_{\max}(W;x,y)\,m(x,y)\ +\ 2\beta\,\Delta_{\deg}(W;x,y).$$

步骤 *3*（以成本 ≤ 3 路由剩余质量）。所有剩余质量都支撑在 $\Gamma(x)\cup\Gamma(y)$ 上。给定任意 $s\in\Gamma(x)$ 和 $t\in\Gamma(y)$，$d(s,t)$ 可通过 $s-x-y-t$ 得到。因此，我们可以通过路由所有剩余质量来完成耦合，单位成本至多为 3。

步骤 4（结论）。放置在对角线上的质量等于 $\beta\,\mathrm{Ov}_{xy}(W)$。在剩余质量中，沿匹配边执行的所有传输每单位成本为 1，而剩余质量 ℓ 的单位传输成本至多为 3。因此

$$W_1(m^{\alpha}_{x,W},m^{\alpha}_{y,W})\le(1-\beta\ \mathrm{Ov}_{xy}(W)-\ell)\cdot 1+3\ell=1-\beta\ \mathrm{Ov}_{xy}(W)+2\ell\le 1-\beta\ \mathrm{Ov}_{xy}(W)+3\ell,$$

Thus

$$\kappa_{\alpha,W}(x,y)=1-W_1(m^{\alpha}_{x,W},m^{\alpha}_{y,W})\ \ge\ \beta\ \mathrm{Ov}_{xy}(W)-3\ell,$$

代入 ℓ 的界即可得到 α-惰性不等式。除以 β 并令 $\alpha\uparrow 1$。 □

引理 5.8（两级基准的核最大值）。固定 $T\in\mathbb{N}$ 并假设 $c_{T,\ \rho}\bar{p}\le b\le a\le C_{T,\ \rho}\bar{p}$。在 $\mathcal{E}_T$ 上，对每条边 $x\sim y$，

$$p_{\max}\big(W^{\star}(a,b);x,y\big)\ \lesssim_{T,\rho}\ \frac{1}{n\bar{p}}.$$

证明。在 $\mathcal{E}_T$ 上，$\Theta\ n\bar{p}$ $d_x\ W^{\star}\ a\ b\ =a\,|\Gamma\ x\ \cap B_{\sigma(x)}|+$ (i) $b\,|\Gamma\ x\ \cap B^{c}_{\sigma(x)}|\asymp_{T\,\rho}\ n\bar{p}^2$ $\le\ a\lesssim\bar{p}$ $\lesssim$ 分块度一致地为 ( )，因此 ((，)) ( ) ( ) . 。每个非零权重均为 ，因此每个邻居概率一致地为 $\bar{p}/(n\bar{p}^2)=1/(n\bar{p})$。 □

引理 5.9 (双尺度比值展开)。设 $\bar{p}=\bar{p}(n)\in(0,1]$。设 $A=\mu_A+\delta_A$ 和 $B=\mu_B+\delta_B$ 为实随机变量。假设对于某些常数 c、C_1、C_2、$C_3>0$，在事件 $\mathcal{G}$ 上：

(I)（$n\bar{p}^2$–尺度） $\mu_B\ge c\,n\bar{p}^{\,2}$、$|\mu_A|\le C_1\,n\bar{p}^{\,3}$，且 $|\delta_B|\le C_2\sqrt{n\bar{p}^{\,3}\text{对数 }n}$、$|\delta_A|\le C_3\sqrt{n\bar{p}^{\,4}\text{对数 }n;}$ 或

(II)（$n\bar{p}$–尺度） $\mu_B\ge c\,n\bar{p}$，$|\mu_A|\le C_1\,n\bar{p}^{\,2}$，且 $|\delta_B|\le C_2\sqrt{n\bar{p}\text{对数 }n,}$ $|\delta_A|\le C_3\sqrt{n\bar{p}^{\,2}\text{对数 }n}$。

那么在 $\mathcal{G}$ 上，对所有充分大的 n，

$$\left|\frac{A}{B}-\frac{\mu_A}{\mu_B}\right|\ \le\ C\,\varepsilon_n,\qquad \varepsilon_n=\sqrt{\frac{\log n}{n\bar{p}}},$$

其中 C 仅取决于 (c,C_1,C_2,C_3)。

证明。记

$$\frac{A}{B}-\frac{\mu_A}{\mu_B}=\frac{\delta_A\mu_B-\mu_A\delta_B}{B\mu_B}.$$

在 $\mathcal{G}$ 上，无论处于机制（I）还是（II），根据假设 2.2，$|\delta_B|=o(\mu_B)$，因此当 n 足够大时，$|B|\geq\mu_B/2$。因此

$$\left|\frac{A}{B}-\frac{\mu_A}{\mu_B}\right|\leq\frac{2}{\mu_B^2}\Big(|\delta_A|\mu_B+|\mu_A||\delta_B|\Big)=2\Big(\frac{|\delta_A|}{\mu_B}+\frac{|\mu_A||\delta_B|}{\mu_B^2}\Big).$$

在情形（I）中，

$$\frac{|\delta_A|}{\mu_B}\ \lesssim\ \frac{\sqrt{n\bar{p}^4\log n}}{n\bar{p}^2}=\bar{p}\sqrt{\frac{\log n}{n}}\ \leq\ \varepsilon_n,$$

and

$$\frac{|\mu_A||\delta_B|}{\mu_B^2}\ \lesssim\ \frac{n\bar{p}^3\cdot\sqrt{n\bar{p}^3\log n}}{n^2\bar{p}^4}=\sqrt{\frac{\bar{p}\log n}{n}}\ \leq\ \varepsilon_n.$$

情形（II）在尺度核算中将 $\bar{p}^2$ 替换为 $\bar{p}$ 后，证明完全相同。 □

引理 5.10 (基准迭代的重叠集中)。固定 $T\in\mathbb{N}$，并假设条件 *2.1* 和假设 *2.2* 成立。在 $\mathcal{E}_T$ 上，对所有 $t\leq T-1$ 以及所有边 $x\sim y$,

$$\Big|\,\mathrm{Ov}_{xy}(W^{\star,(t)})-K_{xy}^{(t+1)}\Big|\ \leq\ C_{T,\rho}\,\varepsilon_n.$$

证明。固定 $t\leq T-1$ 和边 $x\sim y$。记 $a_t:=w^{(t)}{}_{\text{内}}$、$b_t:=w^{(t)}{}_{\text{外}}$，以及 $W^\star:=W^\star(a_t,\ b_t)$。

在 $\mathcal{E}_T$(i) 上，对于 $t\geq1$，我们有 $a_t,\ b_t\asymp\bar{p}$（引理 5.1），并且

$$d_x(W^\star)=(n-1)p_0a_t+np_1b_t\ \pm\ O\big(\sqrt{n\bar{p}^3\log n}\big),$$

对 x 一致成立，因此 $d_x(W^\star)=\Theta(n\bar{p})$ 以及 $d_x(W^\star)/d_y(W^\star)=1+O(\varepsilon_n)$ 均一致成立。

块内边。如果 $\sigma(x)=\sigma(y)$，那么对于本块中的共同邻居，两个核分别贡献 a_t/d_x 和 a_t/d_y；对于对侧块，两个核分别贡献 b_t/d_x 和 b_t/d_y，因此 min 取较小的分母。于是

$$\mathrm{Ov}_{xy}(W^\star)=\frac{a_t\,D_{xy}^{(\mathrm{home})}+b_t\,D_{xy}^{(\mathrm{opp})}}{\max\{d_x(W^\star),d_y(W^\star)\}}\ +\ O\Big(\frac{1}{n\bar{p}}\Big),$$

其中端点项 $p_{x,\ W}(y)+p_{y,\ W}(x)=O((n\bar{p})^{-1})=o(\varepsilon_n)$，因为在假设 2.2 下 $n\bar{p}\gg\log\ n$。应用引理 5.9（对于 $t\geq1$ 采用机制（I），对于 $t=0$ 采用机制（II）），并结合 $\mathcal{E}_T$(i) 上的分块共度集中。这得到

$$\mathrm{Ov}_{xy}(W^{\star,(t)})=\varphi_{\mathrm{in}}^{(n)}(a_t,b_t)\ \pm\ C_{T,\rho}\varepsilon_n=K_{xy}^{(t+1)}\ \pm\ C_{T,\rho}\varepsilon_n.$$

跨块边。若 $\sigma(x)\neq\sigma(y)$，则在 $B_{\sigma(x)}$ 中的共同邻居上，核贡献 a_t/d_x对 b_t/d_y，而在 $B_{\sigma(y)}$ 中它们贡献 b_t/d_x 对 a_t/d_y。对于 $t\geq1$，引理 5.2 蕴含$b_t/a_t\leq1-c(\rho)$，而 $d_x/d_y=1+O(\varepsilon_n)$ 一致地成立，因此对所有充分大的 n，我们有 $a_t/d_x\geq b_t/d_y$ 和 $a_t/d_y\geq b_t/d_x$；从而最小值在 $B_{\sigma(x)}$ 上选取 b_t/d_y，在 $B_{\sigma(y)}$上选取 b_t/d_x。因此 $\mathrm{Ov}_{xy}(W^\star)$ 是两个形如 $b_tD_{xy}^{(B)}/d_{\cdot}(W^\star)$ 的比值之和加上端点项 $o(\varepsilon_n)$，再一次应用引理 5.9 即得

$$\mathrm{Ov}_{xy}(W^{\star,(t)})=\varphi_{\mathrm{out}}^{(n)}(a_t,b_t)\ \pm\ C_{T,\rho}\varepsilon_n=K_{xy}^{(t+1)}\ \pm\ C_{T,\rho}\varepsilon_n.$$

□

命题 5.11（双层基准曲率集中在 Φ_n附近）。 固定 $T \in \mathbb{N}$，并采用假设 *2.1* 和 *2.2*。在 $\mathcal{E}_T$ 上，对所有 $t \le T-1$ 以及所有边 $x \sim y$,

$$\left|\kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y) - K_{xy}^{(t+1)}\right| \;\le\; C_{T,\rho}\,\varepsilon_n, \qquad \textit{equivalently} \qquad \left\|\kappa_{W^{\star,(t)}} \circ A - W^{\star,(t+1)}\right\|_{\max} \;\le\; C_{T,\rho}\,\varepsilon_n.$$

证明。固定 $t \le T-1$ 以及一条边 $x \sim y$。

上界。引理 5.6 给出$\kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y) \le \mathrm{Ov}_{xy}(W^{\star,(t)})$。

下界。在 $\mathcal{E}_T$上，引理 5.4(ii) 提供了类型匹配，因此引理 5.7 适用于$W^{\star,(t)}$:

$$\kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y) \ge \mathrm{Ov}_{xy}(W^{\star,(t)}) - 3\,p_{\max}(W^{\star,(t)};x,y)\,m(x,y) - 6\,\Delta_{\deg}(W^{\star,(t)};x,y).$$

由引理 5.8 与引理 5.4(iii)，$p_{\max}(W^{\star,(t)};x,y)\;m(x,y) \lesssim \varepsilon_n$一致地。此外在 $\mathcal{E}_T$(i)上，$d_x(W^{\star,(t)}) = \Theta(n\bar{p}^2)$且 $|d_x(W^{\star,(t)}) - d_y(W^{\star,(t)})| \lesssim \sqrt{n\bar{p}^3}\log n$一致地，因此 $\Delta_{\deg}(W^{\star,(t)};x,y) \lesssim \varepsilon_n$一致地。于是

$$\kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y) = \mathrm{Ov}_{xy}(W^{\star,(t)}) \pm C_{T,\rho}\varepsilon_n.$$

结合引理 5.10。 □

5.6 最大范数下的迭代跟踪

引理 5.12（通过邻居总变差得到的曲率稳定性）。 固定 $T \in \mathbb{N}$ 并在 $\mathcal{E}_T$ 上工作。令 $t \in \{1,\dots,T\}$，并假设 W 支撑在 A 上且满足

$$\|W - W^{\star,(t)}\|_{\max} \le \delta, \qquad \min_x d_x(W) \;\ge\; c_{T,\rho}\,n\bar{p}^2.$$

那么，对每条边 $x \sim y$,

$$\left|\kappa_W(x,y) - \kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y)\right| \;\le\; C_{T,\rho}\,\frac{\delta}{\bar{p}}.$$

证明。 固定 $x \sim y$ 和 $\alpha \in [1/2,1)$，并记 $\beta := 1-\alpha$。由 W_1的三角不等式,

$$\left|W_1(m^\alpha_{x,W}, m^\alpha_{y,W}) - W_1(m^\alpha_{x,W^\star}, m^\alpha_{y,W^\star})\right| \le W_1(m^\alpha_{x,W}, m^\alpha_{x,W^\star}) + W_1(m^\alpha_{y,W}, m^\alpha_{y,W^\star}).$$

因此

$$|\kappa_{\alpha,W}(x,y) - \kappa_{\alpha,W^\star}(x,y)| \le W_1(m^\alpha_{x,W}, m^\alpha_{x,W^\star}) + W_1(m^\alpha_{y,W}, m^\alpha_{y,W^\star}).$$

$m^\alpha_{x,W}$ 和 $m^\alpha_{x,W^\star}$ 的支撑集包含于 $\{x\} \cup \Gamma(x)$ 中，其图直径至多为 2，因此

$$W_1(m^\alpha_{x,W}, m^\alpha_{x,W^\star}) \le 2\,\|m^\alpha_{x,W} - m^\alpha_{x,W^\star}\|_{\mathrm{TV}} = 2\beta\,\|p_{x,W} - p_{x,W^\star}\|_{\mathrm{TV}},$$

对 y 也同理。两边除以 β，并令 $\alpha \uparrow 1$，得到

$$|\kappa_W(x,y) - \kappa_{W^\star}(x,y)| \le 2\Big(\|p_{x,W} - p_{x,W^\star}\|_{\mathrm{TV}} + \|p_{y,W} - p_{y,W^\star}\|_{\mathrm{TV}}\Big).$$

为了界定$\|p_{x,\,W} - p_{x,\,W^\star}\|_{\mathrm{TV}}$，令 $d_x := d_x(W)$，并令 $d^\star_x := d_x(W^\star)$。于是

$$\sum_{u\sim x}\left|\frac{W_{xu}}{d_x} - \frac{W^\star_{xu}}{d^\star_x}\right| \le \frac{1}{d_x}\sum_{u\sim x}|W_{xu} - W^\star_{xu}| + \left|\frac{1}{d_x} - \frac{1}{d^\star_x}\right|\sum_{u\sim x} W^\star_{xu}.$$

由于 $\sum_{u\sim x} W^\star_{xu} = d^\star_x$ 和 $|d_x - d^\star_x| \le \sum_{u\sim x}|W_{xu} - W^\star_{xu}| \le D_x\delta$，我们得到

$$\sum_{u\sim x}\left|\frac{W_{xu}}{d_x} - \frac{W^\star_{xu}}{d^\star_x}\right| \le \frac{D_x\delta}{d_x} + \frac{|d_x - d^\star_x|}{d_x} \le \frac{2D_x\delta}{d_x}.$$

因此$\|p_{x,\,W} - p_{x,\,W^\star}\|_{\mathrm{TV}} \le D_x\delta/d_x$。在 $\mathcal{E}_T$ 上，$D_x \lesssim n\bar{p}$一致地成立，并且根据假设 $d_x \ge c\,n\bar{p}^2$，因此$\|p_{x,\,W} - p_{x,\,W^\star}\|_{\mathrm{TV}} \lesssim \delta/\bar{p}$一致地成立；对于 y，同样如此。 □

定理 5.13（迭代与观测到的两层基准相符）。固定 $T \in \mathbb{N}$，并假设满足假设 *2.1*、*2.2* 以及（MDT(T)）。存在 $C_{T,\rho} < \infty$，使得以至少 $1 - C_T$ 的概率 ρn^{-2}，对所有 $t \le T$ 同时成立，

$$\left\| W^{(t)} - W^{\star,(t)} \right\|_{\max} \;\le\; C_{T,\rho}\, \frac{\varepsilon_n}{\bar{p}^{\,T-1}}.$$

更精确地，对每个 $t \in \{1,\dots,T\}$，

$$\left\| W^{(t)} - W^{\star,(t)} \right\|_{\max} \;\le\; C_{t,\rho}\, \frac{\varepsilon_n}{\bar{p}^{\,t-1}}.$$

证明。在 $\mathcal{E}_T$ 上进行。设 $\delta_t := \|W_{(t)} - W^{\star,(t)}\|_{\max}$，于是 $\delta_0 = 0$。由于 $W^{(0)} = W^{\star,(0)} = A$，命题 5.11 在 $t=0$ 处给出 $\delta_1 \le C\varepsilon_n$。

固定 $t \in \{1,\dots,T-1\}$。对于任意边 $x \sim y$，

$$|W_{(t+1)xy} - W^{\star}_{,(t+1)_{xy}}| = |\kappa_{W^{(t)}}(x,y) - K^{(t+1)}_{xy}| \le |\kappa_{W^{(t)}}(x,y) - \kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y)| + |\kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y) - K^{(t+1)}_{xy}|.$$

根据命题 5.11，第二项为 $\le C\varepsilon_n$。对于第一项，我们应用引理 5.12。接下来只需验证 $W^{(t)}$ 所需的度下界。

在 $\mathcal{E}_T$ 上且对于 $t \ge 1$，$\min_x d_x(W^{\star,(t)}) \asymp n\bar{p}^2$（因为 $w^{(t)}_{\text{在中}}{}_{w}{}^{(t)}_{\text{out}} \asymp \bar{p}$ 且度为 $\Theta(n\bar{p})$）。此外，

$$\min_x d_x(W^{(t)}) \;\ge\; \min_x d_x(W^{\star,(t)}) - (\max_x D_x)\,\delta_t \;\ge\; c\,n\bar{p}^2 - C(n\bar{p})\delta_t.$$

在归纳界 $\delta_t \le C_{t,\rho}\varepsilon_n/\bar{p}^{t-1}$ 和 (MDT(T)) 的条件下，我们有 $(n\bar{p})\delta_t = o(n\bar{p}^2)$ 对 $t \le T$ 一致成立，因此对于所有充分大的 n，$\min_x d_x(W^{(t)}) \ge c' n\bar{p}^2$，于是引理 5.12 适用。

因此，在所有边上都一致地，

$$|\kappa_{W^{(t)}}(x,y) - \kappa_{W^{\star,(t)}}(x,y)| \le C\,\frac{\delta_t}{\bar{p}}.$$

对边取最大值可得递推关系

$$\delta_{t+1} \;\le\; C\frac{\delta_t}{\bar{p}} + C\varepsilon_n.$$

对固定的 T 迭代此递推关系，可得 $\delta_t \le C_{t,\rho}\varepsilon_n/\bar{p}^{t-1}$，因此 $\sup_{t\le T}\delta_t \le C_{T,\rho}\varepsilon_n/\bar{p}^{T-1}$。 □

推论 5.14 (迭代权重与度的统一正性)。固定 $T \in \mathbb{N}$，并假设满足假设 *2.1*、*2.2* 以及 $(\mathrm{MDT}(T))$。则以至少 $1 - C_T$ 的概率，ρn^{-2}，对所有 $t \le T$ 和所有边 $x \sim y$ 同时成立，

$$W^{(t)}_{xy} \;\ge\; c_{T,\rho}\,\bar{p},$$

并且对所有 $t \ge 1$，还有 $\min_x d_x(W^{(t)}) \ge c_{T,\rho}\, n\bar{p}^2$。

证明。在 $\mathcal{E}_T$ 上，引理 5.1 给出 $\min\{w^{(t)}{}_{\text{in}}\, w^{(t)}{}_{\text{out}}\} \ge c_{T,\rho}\bar{p}$，对 $t \ge 1$ 成立。由定理 5.13，$\|W_{(t)}$ $W^{\star\ t}\|_{\max} \le C_{T\,\rho}\varepsilon_n/\bar{p}^{T-1}$ T $\varepsilon_n/\bar{p}^{T-1} = o\ \bar{p}$ n $C_{T\,\rho}\varepsilon_n/\bar{p}^{T-1} \le$ ，(), 。在 (MDT( )) 条件下，( )，因此对所有充分大的 ，$\frac{1}{2}c_{T,\rho}\bar{p}$。因此，对每条边都有 $W_{(t)xy} \ge \frac{1}{2}c_{T,\rho}\bar{p}$。

对 $\mathcal{E}_T$ 上的 $\Theta(n\bar{p})$ 个邻居求和，可得对于 $t \ge 1$，$\min_x d_x(W^{(t)}) \gtrsim n\bar{p}^2$。 □

5.7 归一化拉普拉斯算子跟踪与特征值间隙稳定性

回顾 $L(W) := I - \mathrm{Deg}(W)^{-1/2} W \mathrm{Deg}(W)^{-1/2}$。

推论 5.15 （拉普拉斯矩阵跟踪）。 固定 $T \in \mathbb{N}$ 并假设满足假设 *2.1*、*2.2* 以及 （MDT(T)）。以至少 $1 - C_{T,\rho} n^{-2}$的概率，对所有 $t \le T$同时成立：

$$\left\| L(W^{(t)}) - L(W^{\star,(t)}) \right\|_{\mathrm{op}} \;\le\; C_{T,\rho}\, \eta_{n,T}.$$

因此，对每个固定的 k，

$$\left| \lambda_k(L(W^{(t)})) - \lambda_k(L(W^{\star,(t)})) \right| \;\le\; C_{T,\rho}\, \eta_{n,T}.$$

证明。 固定 $t \in \{1, \dots, T\}$。根据推论 5.14，在 $\mathcal{E}_T$上，对于充分大的 n，有 $\min_x d_x(W^{(t)}) \asymp n\bar{p}^2$ 且 $\min_x d_x(W^{\star,(t)}) \asymp n\bar{p}^2$ 。取 $m \asymp n\bar{p}^2$，应用引理 6.4。

此外，在 $\mathcal{E}_T$上（i），

$$\|W^{(t)} - W^{\star,(t)}\|_{\mathrm{op}} \le \|W^{(t)} - W^{\star,(t)}\|_{\infty} \le (\max_x D_x)\, \|W^{(t)} - W^{\star,(t)}\|_{\max} \;\lesssim\; (n\bar{p}) \cdot \frac{\varepsilon_n}{\bar{p}^{T-1}}.$$

除以 $n\bar{p}^2$后，得到阶为 $\varepsilon_n / \bar{p}^T = \eta_{n,T}$的第一项扰动项。引理 6.4 中的度差项也可类似地控制，因为 $\|d(W^{(t)}) - d(W^{\star,(t)})\|_{\infty} \le (\max_x D_x) \|W^{(t)} - W^{\star,(t)}\|_{\max}$且 $\|W^{(t)}\|_{\mathrm{op}} + \|W^{\star,(t)}\|_{\mathrm{op}} \lesssim n\bar{p}^2$对 $t \ge 1$成立。特征值控制由 Weyl 定理得到。 □

推论 5.16 （经验特征值间隙在误差趋于零的意义下单调）。 固定 $T \in \mathbb{N}$ 并假设假设 *2.1*、*2.2* 及 (MDT(T))。令

$$\Gamma^{(t)} := \lambda_3(L(W^{(t)})) - \lambda_2(L(W^{(t)})).$$

于是，以至少 $1 - C_{T,\rho} n^{-2}$ 的概率，对所有 $1 \le t \le T$，

$$\Gamma^{(t)} \;\ge\; \Gamma^{(t-1)} \;-\; C_{T,\rho}\eta_{n,T} \;-\; O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

证明。 由推论 5.15，对 $t \le T$ 一致地，

$$\Gamma^{(t)} = \Gamma^{\star,(t)} + O(\eta_{n,T}), \qquad \Gamma^{\star,(t)} := \lambda_3(L(W^{\star,(t)})) - \lambda_2(L(W^{\star,(t)})).$$

对每个固定的 $t \ge 1$，引理 5.5 结合 $a = w^{(t)}$ 入、 $b = w^{(t)}$ 出可得 $\Gamma^{\star,(t)} = \Gamma^{(t)}_{\mathrm{pop}} + O(\varepsilon_n)$。最后，引理 5.3 给出 $\Gamma^{(t)}_{\mathrm{pop}} = \Delta^{(n)}_t + O(1/n)$，且由引理 5.2， $\Delta^{(n)}_t$ 非递减。对 t 和 $t-1$ 合并这些关系，并利用 $\varepsilon_n \le \eta_{n,T}$（因为 $\bar{p} \le 1$ 和 $T \ge 1$）。 □

注 3 T 5 16 $O\ \eta_{n\,T}$ +(严格单调性)。 O $\Gamma^{(t)} > \Gamma^{(t-1)}$ 对于固定的 ，推论 . 给出了直到 (.) $(1/n)$ 的单调性。若要保证一致的严格 增量，就需要对 $\Delta^{(n)}_t - \Delta^{(n)}_{t-1}$ 给出一个确定性下界，使其支配 $\eta_{n,T}$；但仅凭假设 2.1 无法保证这一界具有一致性。

6 附录

我们汇总了第 5 节中用到的标准矩阵扰动工具。

定理 6.1 (Weyl不等式 [Bhatia, 1997, 推论 III.2。6])。 **</style}若 、为对称矩阵且 ，其特征值按 (**·) $\le \cdots \le \lambda_d(\cdot)$的顺序排列，则 $\left|\lambda_j(B) - \lambda_j(A)\right| \le \|E\|_{\mathrm{op}}$ 对所有 j均成立。因此，对于任意 $i < j$，

$$\lambda_j(B) - \lambda_i(B) \;\ge\; \lambda_j(A) - \lambda_i(A) - 2\|E\|_{\mathrm{op}}.$$

定理 6.2 (Davis–Kahan 正弦Θ)。 **</style}设 、为对称矩阵，且 （分别为 ）是 （分别为 ）对应于单特征值 （分别为 ）的单位特征向量。若 间隙：** $=$ 最小值$\{\lambda_+ - \lambda, \lambda - \lambda_-\}$ 是 A中 λ 周围的谱间隙，则

$$\sin\angle(u, v) \;\le\; \frac{\|A - B\|_{\mathrm{op}}}{\mathrm{gap}}.$$

定理 6.3 (自伴和的矩阵 Bernstein 不等式 [Tropp，2012年，定理 1.6。2])。 设 $\{X_k\}_{k=1}^m$为 $\mathbb{R}^{d\times d}$中的独立随机矩阵、零均值自伴随机矩阵。假设其一致有界条件$\|X_k\|_{\mathrm{op}} \le L$ 几乎必然成立。定义方差代理量

$$v := \left\| \sum_{k=1}^m \mathbb{E}\big[X_k^2\big] \right\|_{\mathrm{op}}.$$

那么对所有 $t \ge 0$,

$$\Pr\!\left(\Big\| \sum_{k=1}^m X_k \Big\|_{\mathrm{op}} \ge t \right) \;\le\; 2d \cdot \exp\!\left(-\frac{t^2/2}{v + Lt/3} \right).$$

特别地，以至少 $1 - d^{-c}$ 的概率，

$$\Big\| \sum_{k=1}^m X_k \Big\|_{\mathrm{op}} \;\le\; C\Big(\sqrt{v\,\log d} + L\,\log d \Big),$$

其中 c、$C > 0$ 为绝对常数。

~**引理 6.4** (有界度下的归一化拉普拉斯矩阵扰动)。 设 W、W 为对称矩阵、非负矩阵，并令 D:$=\mathrm{Deg}(W)$、 $D:=\mathrm{Deg}(W)$，其中 、。假设$\min_i d_i \ge m$ 且$\min_i d_i \ge m$ ，对某个 $m > 0$成立。那么

$$\|L(W) - L(\widetilde{W})\|_{\mathrm{op}} \;\le\; \frac{1}{m}\,\|W - \widetilde{W}\|_{\mathrm{op}} \;+\; \frac{\|d - \widetilde{d}\|_\infty}{m^2}\,\big(\|W\|_{\mathrm{op}} + \|\widetilde{W}\|_{\mathrm{op}}\big).$$

证明。 写出 $S(W) := D^{-1/2} W D^{-1/2}$使得 $L(W) = I - S(W)$。加上再减去:

$$S(W) - S(\widetilde{W}) = (D^{-1/2} - \widetilde{D}^{-1/2}) W D^{-1/2} + \widetilde{D}^{-1/2}(W - \widetilde{W}) D^{-1/2} + \widetilde{D}^{-1/2}\widetilde{W}(D^{-1/2} - \widetilde{D}^{-1/2}).$$

取算子范数，并利用 $\|D^{-1/2}\|_{\mathrm{op}}, \|\widetilde{D}^{-1/2}\|_{\mathrm{op}} \le m^{-1/2}$ 得到

$$\|S(W) - S(\widetilde{W})\|_{\mathrm{op}} \le \|D^{-1/2} - \widetilde{D}^{-1/2}\|_{\mathrm{op}}\,(\|W\|_{\mathrm{op}} + \|\widetilde{W}\|_{\mathrm{op}})\,m^{-1/2} + \frac{1}{m}\|W - \widetilde{W}\|_{\mathrm{op}}.$$

对 $t \mapsto t^{-1/2}$逐项应用标量中值定理,

$$\|D^{-1/2} - \widetilde{D}^{-1/2}\|_{\mathrm{op}} = \max_i \big| d_i^{-1/2} - \widetilde{d}_i^{-1/2} \big| \le \tfrac{1}{2}\, m^{-3/2}\, \|d - \widetilde{d}\|_\infty.$$

~合并这些界，并将因子 $1/2$吸收到常数中。由于 $\|L(W) - L(W)\|_{\mathrm{op}} = \|S(W) - \sim S(W)\|_{\mathrm{op}}$, 结论成立。 □

参考文献

Emmanuel Abbe. 社区检测与随机区块模型：近期进展。《机器学习研究期刊》，18(177):1–86, 2018年。

Emmanuel Abbe、Afonso S. Bandeira 和 Georgina Hall. 随机区块模型中的精确恢复。*IEEE* 信息论汇刊，62(1):471–487，2016年。doi: 10.1109/TIT.2015. 2490670. Rajendra Bhatia. 矩阵分析，数学研究生教材第169卷。Springer，纽约，1997。ISBN 978-0-387-94846-3. doi: 10.1007/978-1-4612-0653-8. Chandler Davis 和 W. M. Kahan. 扰动导致特征向量旋转。III. *SIAM* 数值分析杂志，7(1):1–46，1970。doi: 10.1137/0707001. Jing Lei 和 Alessandro Rinaldo. 随机区块模型中谱聚类的一致性。统计年刊，43(1):215–237，2015年。doi: 10.1214/14-AOS1274. Yong Lin、Linyuan Lu 和 丘成桐. 图的里奇曲率。东北数学杂志，63: 605–627，2011年。Elchanan Mossel、Joe Neeman 和 Allan Sly. 植入划分模型中的重构与估计。概率论及相关领域，162:431–461，2015年。doi: 10.1007/s00440-014-0576-6. Elchanan Mossel、Joe Neeman 和 Allan Sly. 区块模型阈值猜想的证明。应用概率年刊，26(4):2211–2256，2016年。doi: 10.1214/15-AAP1145. Chun-Chieh Ni、Yu-Yao Lin、Feng Luo 和 Jie Gao. 基于里奇流的网络社区检测。科学报告，9:9984，2019年。doi: 10.1038/s41598-019-46380-9. Yann Ollivier. 度量空间上马尔可夫链的里奇曲率。泛函分析杂志，256:810–864，2009年。Karl Rohe、Sourav Chatterjee 和 Bin Yu. 谱聚类与高维随机区块模型。统计年刊，39(4):1878–1915，2011年。doi: 10.1214/11-AOS887. J. Sia、E. Jonckheere 和 P. Bogdan. 基于 Ollivier–Ricci 曲率的复杂网络社区检测方法。科学报告，9:9800，2019年。doi: 10.1038/s41598-019-46079-x. Joel A. Tropp. 随机矩阵和的易用尾界。机器学习基础与趋势，4(1):1–113，2012年。doi: 10.1561/2200000048. C´edric Villani. 最优传输：旧与新。Springer，2009年。Ulrike von Luxburg. 谱聚类教程。统计与计算，17(4):395–416，2007。doi: 10.1007/s11222-007-9033-z. M. Weber、E. Saucan 和 J. Jost. 运用 Forman–Ricci 曲率及相关几何流刻画复杂网络。复杂网络杂志，5(4):527–550，2017年。doi: 10.1093/ comnet/cnw030. Yi Yu、Tengyao Wang 和 Richard J. Samworth. 面向统计学家的 Davis–Kahan 定理实用变体。统计年刊，43(1):24–57，2015年。doi: 10.1214/14-AOS1280.