扩展结构动力学与洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克方程：一种可变形电荷诠释

Patrick BarAvi

摘要

经典电动力学中的辐射反作用传统上由洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克方程（LAD）描述，其点粒子表述会导致一些众所周知的困难，包括逃逸解、预加速以及肖特项地位的模糊性。我们在扩展结构动力学（ESD）框架内分析辐射反作用；在该框架中，带电粒子被建模为具有内部动力学结构的有限系统。

在当前表述中，粒子被表示为一个具有单一径向呼吸模、可描述内部电荷重新分布的有限可变形球体。这个内部自由度引入了有限响应时间，并确保电荷分布的变化以有限速度传播。从完整的粒子–场哈密顿量出发，我们推导出这种可变形电荷的推迟自力，并得到一个同时取决于过去运动和过去内部构型的延迟核。

在绝热区间，核化简为一种有效的因果形式，既不存在预加速度，又呈现带通频率响应，从而抑制与逃逸行为相关的高频不稳定性。研究表明，肖特项对应于储存在内部形变模态中的可逆能量，为这一贡献提供了直接的机械解释。只有在空间范围趋于零且内部动力学被冻结的双重极限下，LAD动力学才会恢复；此时，因果延迟结构退化为熟悉的点粒子近似。

在这一框架中，辐射反作用是有限尺寸可变形电荷的主导阶有效动力学；更高阶修正则体现有限尺寸和内部结构效应，同时既不修改麦克斯韦方程，也不引入临时正则化。

关键词：辐射反作用、洛伦兹-亚伯拉罕-狄拉克方程、扩展电荷模型、肖特能量、经典电动力学

1. 引言

1.1 辐射反作用问题

带电粒子加速时会辐射电磁能。根据能量守恒，这种能量损失必然伴随着作用于粒子本身的反冲力，即辐射反作用。从麦克斯韦方程组推导出这种力的研究已有一个多世纪的历史，而以洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克（LAD）方程的形式解决这一问题，则是经典电动力学的一项经典成就 [洛伦兹，1909；Abraham，1903；Dirac，1938]。然而，这一成就也喜忧参半，因为LAD方程带来了诸多概念上的难题。

对于电荷为q 、裸质量为m的点粒子，LAD方程写作

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}},$$

其中，$\mathbf{v}$ 是速度，$\dot{\mathbf{v}}$ 是加速度，$\ddot{\mathbf{v}}$ 是加加速度。与$\ddot{\mathbf{v}}$成正比的辐射反作用项引入了三个相互关联的病态问题：

1. **逃逸解：**该方程存在这样的解：即使没有外力作用，加速度也会无限制地指数增长。2. **预加速：**在外力作用下，粒子会在外力施加之前开始加速，这违背了朴素的因果性。3. **肖特能量：**系统的能量收支中包含一项$\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}$，其符号会不断振荡，且无法明确解释为动能、势能或辐射能。

这些困难使一些人开始质疑，[Kim & Sessler，2006], 经典电动力学能否对辐射电荷给出一致的描述[Frisch, 2005; Belot, 2007; Vickers, 2008]。另一些人则提出修正麦克斯韦方程组，或引入特设正则化程序[Rohrlich, 1965; Rohrlich, 1997]。本文采取不同观点：这些病态问题并非场方程失效所致，而是源于对带电粒子本身过度理想化的模型。

1.2 点粒子与刚体：两种过度的理想化

LAD方程将带电粒子视为**几何点**。这种理想化在数学上虽便于处理，在物理上却值得怀疑 [Jackson, 1998; Griffiths, 1999; Feynman et al.,1964]。点电荷具有无限大的自能，要定义其质量就必须进行缺乏控制的减除

，而且会对自身场作出瞬时响应，这一过程意味着信号必须以超光速传播。这些特征并非单纯的技术麻烦，而是表明该模型所依据的物理假设已经失效。一种自然的应对方式是以有限尺寸的扩展体取代点粒子。这一思路可追溯至洛伦兹和Abraham最早的电子理论，他们将电子建模为具有有限半径的球体。刚性球引入了一个几何时间尺度，即光穿越时间 $\tau_0 = 2a_0/(3c)$，其自力核在 $[0, 2a_0/c]$ 上具有紧支撑，从而确保时刻 t 的力只取决于过去光穿越间隔内的运动。这消除了预加速；当半径超过经典电子半径 r_e 时，也能消除runaway 解。

然而，刚性球体虽然比点粒子有所改进，却仍保留了一个不具物理意义的特征：它施加了瞬时内部响应。刚体的每一部分都必须同步运动；质心运动的变化会瞬时传遍整个结构。这违反了相对论约束，即任何信号的传播速度都不能超过光速。刚性扩展电荷在数学上虽自洽，却无法在相对论理论中与延迟场实现自洽耦合 [Hammond, 2010；Rohrlich，1997]。

1.3 ESD 提案：可变形性作为最小修正

所需要的是一种同时满足**有限尺寸**（用于规整发散并引入几何截止）和**有限信号速度**（以符合因果性）的模型。最简单的此类模型是具有单个内部自由度的**可变形球体**，其内部自由度为径向呼吸模。关于消除自斥的另一种近期方法，参见 [Sebens，2023]。这正是本文提出的扩展结构动力学（ESD）框架的核心思想。可变形球体保留了刚性模型的几何时间尺度 a_0/c ，但增加了与内部模态相关的动力学时间尺度 $\omega_{\mathrm{def}}^{-1} \sim a_0/c$ 。关键在于，该模态按照自身的运动方程演化，并具有惯性和回复力，从而确保所有内部响应都以有限速度传播。内部自由度并非数学虚构，而是一个能够储存、交换和耗散能量的物理储库。

这一看似不大的扩展具有深远的影响。它将自力从对 LAD 项的纯粹几何平滑转变为真正的动力学相互作用。自力核变得对发射时刻与接收时刻的内部状态都敏感，从而获得对 $\xi(t)$ 和 $\xi(t-\tau)$ 的依赖。在频域中，这产生一个带通

谱，在 ω_{def} 处具有共振增强并伴随高频抑制，这种结构在点粒子模型或刚性模型中都不可能出现。

同样重要的是，内部模态为长期神秘的肖特能量提供了自然的归属。由形变引起的电磁质量变化携带动量和能量；肖特项被揭示为与这些变化相关的动能。其符号振荡反映了平动与内部能量库之间能量的周期性交换，这正是耦合动力系统所应有的表现。

扩展结构动力学（ESD）框架在两篇较早的论文中提出（BarAvi，2025；BarAvi，2026）。第一篇为具有内部形变自由度的有限取向粒子建立了哈密顿相空间描述，并探讨了这一扩展结构的动力学后果。第二篇将同一框架应用于动理学，推导了纳入有限传播速度的广义输运方程。本文通过将带电粒子建模为有限可形变系统，把ESD框架扩展到经典电动力学，并考察由此产生的辐射反作用动力学。

1.4 路线图

本文组织如下。第2节介绍ESD框架，定义构形空间、哈密顿结构和时间尺度层级。第3节推导可形变自力和修正延迟核，展示内部模态如何调制自相互作用。第4节将肖特能量确定为内部机械能，并借助可变形电荷的场动量以及呼吸模态的绝热响应加以说明。第5节在频域中分析自力谱，揭示其带通特性和独特的共振。第6节开展稳定性分析，证明不存在逃逸解，并表明只有在消失尺寸和冻结的内部动力学的双重极限下，才会恢复LAD不稳定性。第7节总结研究结果，将其与既有工作进行比较，并概述未来推广的方向。

全文始终着眼于建模方式的转变：将带电粒子视为有限且可变形的系统，ESD框架便能在不修改麦克斯韦方程组、也不引入临时正则化的情况下，解决辐射反作用的经典病态。LAD方程的困难源于忽略有限尺寸和内部响应的理想化，而非麦克斯韦方程中的任何不一致性。

2. 可变形带电粒子的 ESD 框架

2.1 扩展构形空间

扩展结构动力学（ESD）方法的一个核心前提是，不应将带电粒子理想化为几何点，甚至也不应将其视为完全刚性的刚体。相反，应将其视为具有有限尺寸、空间延展的系统，其内部结构会对电磁应力作出动态响应。点电荷具有奇异的自场和瞬时内部响应，与有限速度的信号传播并不相容。刚体的定义是粒子间距离固定；要使其对外力作出响应，就必须在其结构内部进行瞬时通信，这直接违反了光速因果性。因此，刚性扩展电荷无法与自身的延迟场保持一致地耦合。任何物理上可接受的扩展带电粒子模型都必须是可变形的，并具有以有限速度动态演化的内部自由度。在ESD框架内，呼吸模态 ξ 提供了有限速度内部响应的一种最简机制。相比之下，可变形但尺寸有限的系统能够维持以有限速度传播的内部自由度，从而遵循因果结构。

在这一视角下，单个带电粒子的构形空间取为

$$Q = \mathbb{R}^3 \times SO(3) \times \mathbb{R}_\xi, \qquad (2.1)$$

其中，$R \in \mathbb{R}^3$ 表示质心位置，$\Omega \in SO(3)$表示取向，其中 $\mathbb{R}_\xi$表示式（1.2）中定义的单一内部形变坐标 ξ 。仅对径向呼吸模进行建模是经过审慎考虑的选择：它既保留了球对称性，也分离出与各向同性电磁自压力相容的最简单内部响应。相应的相空间 T^*Q 具有正则坐标（$R, p;\ \Omega, L;\ \xi, \pi$），其中 p 和L 分别为线动量和体坐标系角动量，而 π 是与 ξ共轭的变量。

该粒子带有球对称电荷分布，其瞬时半径取决于形变坐标：

$$a(\xi) = a_0(1 + \xi), \qquad (2.2)$$

其中 $|\xi| \ll 1$。因此，电荷密度为

$$\rho(r,t) = \frac{3q}{4\pi a(\xi)^3}\,\Theta\left(a(\xi) - |\,r - R(t)\,|\right), \qquad (2.3)$$

从而使总电荷保持不变，而空间范围则发生变化。在极限 $\xi \to 0$ 下，该模型退化为熟知的半径为 a_0 的刚性球。引入 ξ 并非旨在涵盖内部动力学的全部复杂性，而是提供一个能够介导有限速度结构响应的最简内部自由度。这反映了这样一种物理要求：经典带电体必须具有内部结构，才能与自身的延迟场一致地相互作用。

2.2 哈密顿结构

该　耦合粒子–场系统的动力学由哈密顿量支配

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\pi^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_{\mathrm{def}}^2\xi^2 + H_{\mathrm{field}} + H_{\mathrm{int}}(R, \xi, A, \Phi), \qquad (2.4)$$

其中，m为裸质量，μ 为呼吸模态的模态质量，ω_{def}为其固有频率。场哈密顿量为标准的电磁能，

$$H_{\mathrm{field}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int (E^2 + c^2B^2)\, d^3r,$$

相互作用哈密顿量为

$$H_{\mathrm{int}} = \int d^3r\, \rho(r, t; \xi)\Phi(r, t) - \int d^3r\, J(r, t; \xi) \cdot A(r, t), \qquad (2.5)$$

其中，$J = \rho v$ 和$v = \dot{R}$。对ξ的依赖完全通过电荷分布体现。哈密顿量具有规范不变性并且守恒总能量，从而确保内部模态与平移自由度得到同等对待。

固有频率 ω_{def} 由内部回复力决定。对于自束缚电磁结构，量纲分析得出 $\omega_{\mathrm{def}} \sim c/a_0$，因此形变时间尺度 $\tau_{\mathrm{def}} = 1/\omega_{\mathrm{def}}$ 与物体的光穿越时间相当。这种巧合并非偶然：两者都体现了内部应力的有限传播速度。

2.3 时间尺度层级

在整个分析过程中，我们假设存在时间尺度分离：

$$\omega_{\mathrm{COM}} \ll \omega_{\mathrm{def}} \sim \frac{c}{a_0}, \qquad (2.6)$$

其中，ω_{COM} 表征质心运动所受的外部驱动。这种层级关系体现了一个物理要求：相较于带电体的内部响应时间，外场变化缓慢。在此条件下，内部模态相对于平动快速演化，因此可以对 ξ 进行绝热处理。

3. 可变形自力与修正延迟核

3.1 可变形球体的迟滞自相互作用

电磁自力源于电荷分布与其自身延迟场的相互作用。对于扩展体，这种力并非局域量，而是对分布进行积分，并在相应的延迟时刻求值。在 ESD 框架中，这一结构具有了额外的重要意义：自相互作用不仅取决于质心过去的运动，也取决于内部自由度过去和现在的构型。自力为

$$\mathbf{F}_{\mathrm{self}}(t) = \int d^3x\, \rho(\mathbf{x},t)\left[\mathbf{E}_{\mathrm{self}}(\mathbf{R}(t)+\mathbf{x},t) + \frac{\mathbf{v}(t)}{c}\times \mathbf{B}_{\mathrm{self}}(\mathbf{R}(t)+\mathbf{x},t)\right]. \quad (3.1)$$

对于半径固定为 a_0 的刚性球，这一表达式可简化为众所周知的形式

$$\mathbf{F}_{\mathrm{self}}^{\mathrm{rigid}}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^{2a_0/c} K_{\mathrm{rigid}}(\tau)\,\dot{\mathbf{v}}(t-\tau)\,d\tau, \quad (3.2)$$

其中，核 $K_{\mathrm{rigid}}(\tau)$ 描述了球体内两两光传播时间的分布，而 $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}, \ddot{\mathbf{v}}$ 分别是粒子的速度、加速度和加加速度。该核在 $[0, 2a_0/c]$ 上的紧支撑揭示了一个直观的物理事实：自相互作用由以有限速度穿过有限大小物体传播的信号所介导。对于半径为 a_0 的刚性球，自力核由 [Yaghjian 2006] 给出

$$K_{\mathrm{rigid}}(\tau) = \frac{3c^3}{4a_0^3}\,\tau\left(\frac{2a_0}{c}-\tau\right), 0 \le \tau \le 2a_0/c,$$

特征记忆时间为 $\tau_0 = \int^{2a_0} \tau/_0 \quad ^c \; K_{\mathrm{rigid}}(\tau)d\tau = 2a_0/(3c)$。随后通过求导得到形变核：

$$K_{\mathrm{def}}(\tau) = a_0\frac{\partial K_{\mathrm{rigid}}}{\partial a_0} = \frac{3c^2}{a_0^2}\tau\left(\frac{3c}{4a_0}\tau - 1\right), \qquad 0 \le \tau \le 2a_0/c.$$

$\tau = a_0/c$ 处的符号变化反映了这样一个事实：增大半径会增强短延迟相互作用（邻近电荷之间的相互作用），同时抑制长延迟相互作用（电荷与其对侧之间的相互作用）。

当球体可形变时，情况会以概念上重要的方式发生变化。时刻 t 的延迟场由时刻 $t-\tau$ 的电荷分布所产生，此时半径为 $a(\xi(t-\tau))$，而力作用于时刻 t 的分布，其半径为 $a(\xi(t))$。因此，自相互作用取决于两个不同时刻的内部构型：

$$\mathbf{F}_{\text{self}}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^{2a_{\max}/c} K(\tau;\xi(t),\xi(t-\tau))\ \dot{\mathbf{v}}(t-\tau)\,d\tau, \quad (3.3)$$

其中 $a_{\max} = \max\ (a(\xi(t)), a(\xi(t-\tau)))$. 这种对延迟区间两端的依赖并非模型的人为产物，而是将粒子视为具有演化空间范围的物理系统的直接结果。

3.2 线性化核

在小变形 ξ 的一阶近似下，该核可展开为

$$K(\tau;\xi(t),\xi(t-\tau)) = K_{\text{rigid}}(\tau) + \xi(t)K_1(\tau) + \xi(t-\tau)K_2(\tau) + \mathcal{O}(\xi^2). \quad (3.4)$$

函数 K_1 和 K_2 分别源于接收时刻与发射时刻半径的变化。对于均匀球体，二者均通过对距离分布关于半径求导得到：

$$K_1(\tau) = \frac{\partial K_{\text{rigid}}}{\partial a}\Big|_{a=a_0}\ a_0, \qquad K_2(\tau) = \frac{\partial K_{\text{rigid}}}{\partial a}\Big|_{a=a_0}\ a_0. \quad (3.5)$$

由对称性，$K_1 = K_2 \equiv K_{\text{def}}$。显式地，

$$K_{\text{def}}(\tau) = \frac{3c^2}{a_0^2}\tau\left(\frac{3c}{4a_0}\tau - 1\right), 0 \le \tau \le 2a_0/c \quad (3.6)$$

形变核继承了K_{rigid} 的紧支撑，并满足 $\int_0^{2a_0/c} K_{\text{def}}(\tau)d\tau = 0$，这反映出形变会在时间上重新分配自相互作用，但不会改变其总冲量。核在 $\tau = 2a_0/c$ 处改变符号，增强短延迟贡献并抑制长延迟尾部。这种符号变化有明确的物理解释：增大半径会在对距离较短时，将更多电荷分布到中心附近

但会降低相距较远的电荷对的相对权重。从概念上说，这表明内部结构如何改变自相互作用的时间轮廓，而不仅仅是对其大小进行重新归一化。

将线性化核代入 (3.3)，得到

$$\mathbf{F}_{\mathrm{self}}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^{2a_0/c} \left[K_{\mathrm{rigid}}(\tau) + \xi(t)K_{\mathrm{def}}(\tau) + \xi(t-\tau)K_{\mathrm{def}}(\tau)\right]\dot{\mathbf{v}}(t-\tau)\,d\tau. \quad (3.7)$$

这一表达式通过纳入形变引起的延迟核随时间变化的调制，对刚性球体自力作了推广。结果揭示了一个更普遍的物理要点：一旦考虑内部结构，自力便会对该结构的历史产生依赖，而核也从固定的几何函数变成了一个动力学对象。

3.3 绝热消去后的有效核

在由 $\omega_{\mathrm{COM}} \ll \omega_{\mathrm{def}}$ 定义的绝热区间内，内部坐标 ξ 准静态地跟随质心加速度。为推导这一关系，我们首先考察作用于呼吸模态的各个力。

3.3.1 内部模态上的线性化力

内部坐标 ξ 受到束缚势 $-\mu\omega_{\mathrm{def}}^2\xi$产生的恢复力，以及电磁场产生的驱动力。在 v/c 和 ξ 的最低阶近似下，该驱动力源于两种效应：电磁自能随形变的变化，以及作用于运动表面的辐射压力。

半径为 $a = a_0(1+\xi)$ 的带电球体的电磁自能 i s

$$U_{\mathrm{em}}(\xi) = \frac{3}{5}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}(1 - \xi + \mathcal{O}(\xi^2)).$$

系数 3/5 是均匀体分布特有的；若为面电荷，则系数为 1/2。依赖于 ξ 的部分会对 ξ 的运动方程产生一项，但该项关于 ξ 呈线性，仅会重新归一化回复频率。它不会直接与加速度耦合。

球体运动时，非对称辐射压力会对内部模态产生与加速度相关的力。对于缓慢加速的球体，其表面受到的合力与动量流的变化率成正比。详细计算（附录 A 中概述）表明，保留加加速度 $\dddot{\mathbf{v}}$ 的一阶项可得，

$$f_{\mathrm{em}}^{(\mathrm{linear})}(t) = C\,\dddot{\mathbf{v}}(t)\cdot\hat{n},$$

其中，$\hat{n}$ 是加速度的方向，常数 C 为

$$C = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}.$$

C 的量纲论证很直接：作用于质心的辐射反作用力为 $\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}$。这种力源于场中的动量传递，其对内部模态的作用应具有类似的标度，但还需额外乘以 $1/a_0$ ，以便将力密度转换为模态振幅。因此，$C \sim q^2/(\epsilon_0 c^2 a_0)$，其中数值因子由球形几何确定。

3.3.2 绝热响应

因此，内部模态的运动方程为

$$\mu\ddot{\xi}(t) + \mu\omega_{\mathrm{def}}^2\xi(t) = C\,\ddot{\mathbf{v}}(t). \quad (3.8)$$

在绝热区间内，$\ddot{\mathbf{v}}(t)$的变化时间尺度远长于$\omega_{\mathrm{def}}^{-1}$。解由特解主导，

$$\xi(t) \approx \frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\,\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathcal{O}(\omega_{\mathrm{COM}}^2/\omega_{\mathrm{def}}^2). \quad (3.9)$$

被忽略项的相对阶为$(\omega_{COM}/\omega_{def})^2$，其贡献与第3.3.3节中的$\dddot{\mathbf{v}}$项同阶；在相同的近似阶次下，两者都被舍去。为推导自力的主导修正，准静态近似已足够。

3.3.3 核的展开

将此表达式代入线性化自力（3.7）需要计算$\xi(t) + \xi(t-\tau)$。将$\xi(t-\tau)$按τ展开至一阶，

$$\xi(t-\tau) \approx \xi(t) - \tau\dot{\xi}(t) = \xi(t) - \tau\frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\ddot{\mathbf{v}}(t).$$

与主导项相比，与 $\dddot{\mathbf{v}}(t)$ 成正比的项为 $(\omega_{COM}/\omega_{def})^2$ 阶；按照式 (3.9) 中已采用的绝热近似，将其一致地忽略。为验证一致性：保留的核修正为 $C/(\mu\omega_{def}^2)\sim\tau_0^2$ 阶，而被忽略的 $\dddot{\mathbf{v}}$ 项为 $\tau_0^2\cdot(\omega_{COM}/\omega_{def})^2$，阶，它还受到一个额外因子的抑制

$(\omega_{COM}/\omega_{def})^2 \ll 1$。因此，绝热展开关于 $\tau \in [0,2a_0/c]$ 是一致的。仅保留主导项，我们得到

$$\xi(t) + \xi(t-\tau) \approx 2\xi(t) = \frac{2C}{\mu\omega_{\text{def}}^2}\,\ddot{\mathbf{v}}(t). \quad (3.10)$$

将其代入式 (3.7) 得

$$\mathbf{F}_{\text{self}}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^{2a_0/c}\left[K_{\text{rigid}}(\tau) + \frac{2C}{\mu\omega_{\text{def}}^2}\ddot{\mathbf{v}}(t)K_{\text{def}}(\tau)\right]\dot{\mathbf{v}}(t-\tau)\,d\tau. \quad (3.11)$$

由于 $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ 变化缓慢，在最低阶近似下可将其提出积分号外，从而得到有效核

$$K_{\text{eff}}(\tau) = K_{\text{rigid}}(\tau) + \frac{2C}{\mu\omega_{\text{def}}^2}\,\ddot{\mathbf{v}}(t)K_{\text{def}}(\tau). \quad (3.12)$$

在绝热区间内，若内部形变模态的弛豫时间尺度远短于质心运动的变化时间尺度，则可将有效核按小参数 a_0/c 的幂次展开。保留最低个非零阶项，得到

$$F_{\text{self}}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}(t) + O\left(\frac{a_0}{c}\right).$$

最低阶项恰好重现洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克辐射反作用力。因此，ESD 表述在最低阶上与标准点粒子结果一致，而高阶项则体现了可变形电荷模型的有限尺寸效应和内部动力学修正。

严格来说，有效核应当仅是 τ 的函数，与 t 无关。式 (3.12) 中出现 $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ 表明，在时域中，修正项并非纯粹的卷积，而是涉及当前跃度与过去的加速度的乘积。然而，在频域中，这种结构会变为乘法传递函数，如第4节所示。

3.3.4 因果结构的保持

这一结果有两个特征值得强调。首先，修正项保留了核在 $[0, 2a_0/c]$ 上的紧支撑，因为 $K_{\text{def}}(\tau)$ 从 $K_{\text{rigid}}(\tau)$ 继承了这一支撑。

因果性得以保持：时刻 t 的自力仅取决于过去光穿越间隔内的加速度。

其次，这一修正并非自由参数，而是由内部动力学通过组合 $C/(\mu\omega_{\mathrm{def}}^2)$ 确定。对于自束缚电磁结构，量纲分析给出 $\mu\omega_{\mathrm{def}}^2 \sim q^2/a_0^3$，而 $C \sim q^2/(\epsilon_0 c^2 a_0)$。因此

$$\frac{2C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2} \sim \frac{q^2/(\epsilon_0 c^2 a_0)}{q^2/a_0^3} = \frac{a_0^2}{\epsilon_0 c^2} \sim \left(\frac{a_0}{c}\right)^2,$$

其量级为 τ_0^2。因此，这一修正在绝热区间内较小，但它在频域中的共振增强（第4节）仍可能产生可观测效应。由此，绝热消去得到一个有效自力核，它在保留有限尺寸所决定的因果结构的同时，纳入了内部动力学的影响。内部模态不会引入对未来加速度的任何依赖；它只是以符合自身有限响应时间的方式调节过去加速度的权重。这与刚性延展电荷模型形成鲜明对比：后者要求瞬时内部响应，因此无法与相对论因果性相容。

4. 肖特能量作为内部机械能

4.1 肖特项及其概念上的难题

洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克（LAD）方程包含一项与加速度的时间导数成正比，

$$\mathbf{F}_{\mathrm{Schott}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,\ddot{\mathbf{v}}(t), \quad (4.1)$$

其物理解释长期以来一直是一个概念上的难题。其伴随功率

$$P_{\mathrm{Schott}} = \mathbf{F}_{\mathrm{Schott}} \cdot \mathbf{v} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v},$$

会导出肖特能量，

$$E_{\mathrm{Schott}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\,\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}. \quad (4.2)$$

这一量既不是粒子的动能，也不是辐射至无穷远的能量，更不是静态电磁自能。它可以取正值或负值，并在周期运动中振荡变号

。传统观点将其视为确保全局能量守恒的一种记账工具，但并未将其归因于某种具体的物理机制 [Frisch, 2005；Belot, 2007；Muller, 2007；Vickers, 2008]。

ESD框架提供了一种不同的视角：一旦赋予带电粒子内部结构，肖特项便可理解为储存在该内部自由度中的能量，以及与之交换的能量。

4.2 可变形电荷的场动量

扩展电荷周围的电磁场携带动量，

$$\mathbf{P}_{\text{field}} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E}_{\text{self}} \times \mathbf{B}_{\text{self}}) d^3 r. \, (4.3)$$

对于瞬时半径为a、缓慢运动的带电球体，按v/c的最低阶展开，场动量为，

$$\mathbf{P}_{\text{field}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a}\, \mathbf{v} + \mathcal{O}(v^2/c^2) \equiv m_{\text{em}}(\xi)\, \mathbf{v}, \, (4.4)$$

其中，电磁质量$m_{\text{em}}(\xi) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a\ \xi}$ ()通过$a(\xi) = a_0(1+\xi)$依赖于形变坐标。

因此，粒子-场系统的总动量为

$$\mathbf{P}_{\text{total}} = (m + m_{\text{em}}(\xi))\mathbf{v} = m_{\text{eff}}(\xi)\, \mathbf{v}, \, (4.5)$$

其中 $m_{\text{eff}}(\xi) = m + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0 (1+\xi)}$。对时间求导并使用运动方程可得

$$\frac{d}{dt}[m_{\text{eff}}(\xi)\mathbf{v}] = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{rad}}, \, (4.6)$$

其中 $\mathbf{F}_{\text{rad}}$ 是辐射反作用力。展开左侧可得 s

$$m_{\text{eff}}\dot{\mathbf{v}} + \frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\, \mathbf{v} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{rad}}. \, (4.7)$$

第二项，

$$\frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\, \mathbf{v} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}\, \dot{\xi}\, \mathbf{v}, \, (4.8)$$

是可变形模型引入的关键新贡献。它表示平动与内部形变模态之间的动量交换。从概念上讲，这一项表达了一个简单却重要的观点：如果电磁质量取决于内部构型，那么构型的变化必然伴随着动量和能量。由此看来，肖特项并非抽象的修正，而是这种内部交换的体现。

4.3 绝热关系与辨识

根据第3.3节推导出的内部模态动力学，我们得到线性化力

$$\mu\ddot{\xi} + \mu\omega_{\mathrm{def}}^2\xi = C\,\ddot{\mathbf{v}}, \quad (4.9)$$

其中耦合常数为 $C = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}$。在绝热区间（$\omega_{\mathrm{COM}} \ll \omega_{\mathrm{def}}$）内，解由特解主导，

$$\xi(t) \approx \frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\,\ddot{\mathbf{v}}(t), \qquad \dot{\xi}(t) \approx \frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\,\dddot{\mathbf{v}}(t). \quad (4.10)$$

将 $\dot{\xi}$ 代入动量交换项 (3.8)，得到

$$\frac{dm_{\mathrm{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\,\mathbf{v} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}\cdot\frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\,\mathbf{v}\cdot\dddot{\mathbf{v}}. \quad (4.11)$$

利用 $C = q^2/(6\pi\epsilon_0 c^2 a_0)$，可得

$$\frac{dm_{\mathrm{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\,\mathbf{v} = -\left(\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}\right)^2\frac{1}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\,\mathbf{v}\cdot\dddot{\mathbf{v}}. \quad (4.12)$$

现在应用第3.3.4节推导出的量纲关系。对于自束缚电磁结构，

$$\frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2} = \frac{5}{4}\tau_0^2, \text{ with } \tau_0 = \frac{2a_0}{3c}. \quad (4.13)$$

代入后，

$$\frac{dm_{\mathrm{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\,\mathbf{v} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{a_0}{c}\,\mathbf{v}\cdot\dddot{\mathbf{v}}. \quad (4.14)$$

关键的观察是，肖特能量的时间导数为

$$\frac{dE_{\text{Schott}}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}(\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}^2), (4.15)$$

其中包含项 $\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}$。与式 (4.14) 比较可知，动量交换项具有完全相同的结构，差别仅在于一个数量级为 1 的数值因子，以及一个数量级为 a_0/c 的小修正。对于 a0/c 的最低阶，这重现了肖特能量的时间导数。在绝热近似下，这一对应关系成立，其相对修正量为 $a_0/c \sim \tau_0\omega_{def} \ll 1$:

$$E_{\text{Schott}} = \frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\,\xi\,\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}. (4.16)$$

这一认定源于刻画任意自束缚电磁结构的量纲关系。内部模态提供了一个物理储库，用于储存和释放肖特能量，从而使其从数学上的虚构量转变为在力学上得以实现的量。

4.4 耦合的量纲分析

这一关系中出现的各个量并非彼此独立，而是由自束缚电磁结构的物理性质联系在一起。对于这类物体，静电能按以下规律变化

$$U_{\text{es}} \sim \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

呼吸模态上的恢复力，是总内能（包括静电能和内聚贡献）对形变的二阶导数。

由于 ξ 是无量纲的（$a = a_0$（$1 + \xi$）），因此有

$$\mu\omega_{\text{def}}^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \sim \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \cdot \frac{1}{a_0^2} \cdot a_0^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3}.$$

该 fa 因子 a_0^2 出现，是因为每对 ξ 求一次导数，就会带下一个因子 $da/d\xi = a_0$ 中的 a_0；最后的 a_0^2 则恢复了量纲一致性。更准确地说，对于均匀球体，详细计算结果为

$$\mu\omega_{\text{def}}^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3},$$

但对于当前论证而言，重要的是这种标度关系。

耦合常数 C 的量纲为力除以加速度，即质量。根据其表达式，

$$C = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0} \sim \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 a_0}.$$

构造出现在绝热响应中的比值,

$$\frac{C}{\mu\omega_{\text{def}}^2} \sim \frac{q^2/(4\pi\epsilon_0 c^2 a_0)}{q^2/(4\pi\epsilon_0 a_0^3)} = \frac{a_0^2}{c^2} \sim \left(\frac{a_0}{c}\right)^2 = \tau_0^2.$$

因此，$C/(\mu\omega_{\text{def}}^2)$ 的量级为 τ_0^2，即光穿越时间的平方。这并非经过精细调节的数值，而是电磁自相互作用所遵循的量纲尺度直接导致的结果。恢复力的标度以及相关 4/3问题的解决方法，将在 [Khokonov & Andersen; 2019] 中讨论。

4.5 代入动量交换项

将绝热关系代入动量交换项,

$$\frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\,\mathbf{v} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}\cdot\frac{C}{\mu\omega_{\text{def}}^2}\,\mathbf{v}\cdot\dddot{\mathbf{v}}.$$

利用 $C = q^2/(6\pi\epsilon_0 c^2 a_0)$，可得

$$\frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\,\mathbf{v} = -\left(\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}\right)^2\frac{1}{\mu\omega_{\text{def}}^2}\,\mathbf{v}\cdot\dddot{\mathbf{v}}.$$

现在应用量纲关系 $C/(\mu\omega_{\text{def}}^2) \sim \tau_0^2 = (2a_0/3c)^2$。更确切地说，我们需要得到正确数值因子的组合，以匹配肖特项。利用 $\mu\omega_{\text{def}}^2 = (3/5)q^2/(4\pi\epsilon_0 a_0^3)$ 和 $C = q^2/(6\pi\epsilon_0 c^2 a_0)$，计算得

$$\frac{C}{\mu\omega_{\text{def}}^2} = \frac{q^2/(6\pi\epsilon_0 c^2 a_0)}{(3/5)q^2/(4\pi\epsilon_0 a_0^3)} = \frac{5}{6}\cdot\frac{4\pi}{6\pi}\cdot\frac{a_0^2}{c^2} = \frac{5}{9}\cdot\frac{a_0^2}{c^2}.$$

与此同时，$\tau_0^2 = (2a_0/3c)^2 = 4a_0^2/9c^2$。因此

$$\frac{C}{\mu\omega_{\text{def}}^2} = \frac{5}{4}\tau_0^2.$$

数值因子 5/4 取决于具体的电荷分布（均匀球体），但其量级为 1。关键在于，这一比值由几何和静电学决定，而不是为了拟合肖特项而调整的。

现在，动量交换项变为

$$\frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\,\mathbf{v} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}\cdot\frac{5}{4}\tau_0^2\,\mathbf{v}\cdot\,\ddot{\mathbf{v}}.$$

但 $\tau_0 = 2a_0/3c$，因此 $\tau_0^2 = 4a_0^2/9c^2$。代入，

$$\frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\dot{\xi}\,\mathbf{v} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4a_0^2}{9c^2}\,\mathbf{v}\cdot\,\ddot{\mathbf{v}} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{a_0}{c}\,\mathbf{v}\cdot\,\ddot{\mathbf{v}}.$$

因子 $a_0/c = (3/2)\tau_0$ 是光穿越时间。在点粒子极限 $a_0 \to 0$ 下，该项如预期般消失。对于有限的 a_0，它表示对主导肖特行为的一个小修正。

关　键的观察则是，肖特能量的时间导数为

$$\frac{dE_{\text{Schott}}}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}(\ddot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}^2),$$

其中包含项 $\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}$。其时间导数，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}\right) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}(\ddot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}^2),$$

与上述结构相符。若我们设定

$$E_{\text{Schott}} = \frac{dm_{\text{eff}}}{d\xi}\,\xi\,\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}. \quad (4.17)$$

这一对应关系在 a_0/c 的最低阶近似下成立。组合项 $C/(\mu\omega_{def}^2)\sim\tau_0^2$ 仅由量纲分析即可得出，无需微调；该修正与绝热展开中忽略的所有其他项处于同一阶。内部模态提供了物理储库，用于储存和释放肖特能量，从而使其从数学上的假象转变为机械上实现的量。

5. 形变的修正：带通结构

5.1 频域分析

自力的时间结构编码在延迟核中，当在频域中对其进行考察时，其物理含义尤为清晰。对第 2 节中推导出的有效自力表达式进行傅里叶变换，可得

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\text{self}}(\omega) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\, \widetilde{K}_{\text{eff}}(\omega)\, (i\omega)\, \tilde{\mathbf{v}}(\omega), (5.1)$$

其中，$\widetilde{K}_{\text{eff}}(\omega) = \int_0^\infty K_{\text{eff}}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ 是核的传递函数，$\tilde{\mathbf{v}}(\omega)$是速度的傅里叶变换。因子（$i\omega$）将速度转换为频域中的加速度，这反映出自力在时域积分中作用于$\dot{\mathbf{v}}(t-\tau)$这一事实。该表示揭示了一个概念性要点：自力充当了作用于加速度的频率依赖滤波器。核的结构决定了运动的哪些时间特征会被放大、抑制或不加改变地传递。

从哲学角度来看，这种频域视角阐明了内部结构如何塑造自相互作用的因果特征。点粒子对应于平坦（白噪声）响应，不具有特征时间尺度。有限刚性球体引入几何时间尺度 a_0/c，从而形成低通滤波器。可变形球体则引入额外的动力学时间尺度 ω_{def}^{-1}，由此产生更丰富的谱结构。

5.2 刚性核函数的传递函数

对于附录 A 中推导的刚性抛物线核函数，

$$K_{\text{rigid}}(\tau) = \frac{3c^3}{4a_0^3}\, \tau \left(\frac{2a_0}{c} - \tau\right), 0 \le \tau \le 2a_0/c,$$

其傅里叶变换为

$\widetilde{K}_{rigid}(\omega) = (3/\Omega^2)[1 - (2/\Omega)sin\Omega - cos\Omega] + i[(2/\Omega)cos\Omega + sin\Omega - 2/\Omega], (5.2a)$ 其中 $\Omega = 2\omega a_0/c = 3\omega\tau_0$ 和 $\tau_0 = 2a_0/(3c)$ 是特征记忆时间（核的第一矩）。其幅值满足

$$|\, \widetilde{K}_{\text{rigid}}(\omega)\, | \to 1 \text{as } \omega \to 0, (5.2b)$$

在低频下恢复 LAD 极限，并且

$$|\, \widetilde{K}_{\text{rigid}}(\omega)\, | \sim \frac{c}{\omega a_0} \text{as } \omega \to \infty, (5.2c)$$

表明对高频分量的抑制。

这种低通特性反映了电荷分布的有限尺寸：加速度的快速变化无法在光穿越时间内传遍球体。

从概念上说，刚性核体现了一种纯几何形式的时间平滑。它

引入了截止频率，却没有内部共振，因为刚体没有能够动态储存或交换能量的内部自由度。

5.3 形变修正：带通结构

纳入形变后，有效核会增加一项由内部模态介导的贡献。根据第3.3.4节推导的结构，频域传递函数变为

$$\widetilde{K}_{\mathrm{eff}}(\omega) = \widetilde{K}_{\mathrm{rigid}}(\omega) + \frac{2C}{\mu}\frac{\widetilde{K}_{\mathrm{def}}(\omega)}{\omega_{\mathrm{def}}^2 - \omega^2}, \qquad (5.3)$$

其中，$\widetilde{K}_{\mathrm{def}}(\omega)$ 是形变核的傅里叶变换。该表达式直接由第3.3节中的绝热消去得到：内部模态如同谐振子一样响应驱动跃度，从而产生特征分母 $\omega_{\mathrm{def}}^2 - \omega^2$。形变核 $K_{\mathrm{def}}(\tau)$ 继承了 $K_{\mathrm{rigid}}(\tau)$ 的紧支撑，并且根据式（3.6），其显式形式为

$$K_{\mathrm{def}}(\tau) = \frac{3c^2}{a_0^2}\tau\left(\frac{3c}{4a_0}\tau - 1\right), 0 \le \tau \le 2a_0/c. \qquad (5.4)$$

该表达式满足 $\int_0^{2a_0\ c} K_{\mathrm{def}/}(\tau)d\tau = 0$，这证实了形变会调制自相互作用的时间轮廓，但不会对总冲量作出贡献。其傅里叶变换表现出类似的高频抑制，但权重不同，这反映了形变会以不对称的方式调制随时间变化的对距离分布。

幅值 $|\widetilde{K}_{\mathrm{eff}}(\omega)|$ 表现出三个不同的区间：

5.3.1 低频区间（$\omega \ll \omega_{\mathrm{def}} \sim c/a_0$）

在此区间，形变项化为静态修正。共振分母 $\omega_{\mathrm{def}}^2 - \omega^2 \approx \omega_{\mathrm{def}}^2$，因此

$$\widetilde{K}_{\mathrm{eff}}(\omega) \approx \widetilde{K}_{\mathrm{rigid}}(\omega)\left(1 + \frac{2C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\cdot\frac{\widetilde{K}_{\mathrm{def}}(\omega)}{\widetilde{K}_{\mathrm{rigid}}(\omega)}\right) \approx \widetilde{K}_{\mathrm{rigid}}(\omega)(1 + \mathrm{const}).$$

恢复了刚性球行为，仅前置因子经过重整化。此区间对应的运动过于缓慢，无法激发内部模态，因此粒子实际上表现为刚体。

5.3.2 共振区间（$\omega \approx \omega_{\mathrm{def}}$）

内部模态发生共振，从而增强自力。在共振附近，分母 $\omega_{\mathrm{def}}^2 - \omega^2$ 变小，导致形变项占据主导地位。

幅值 $|\widetilde{K}_{\mathrm{eff}}(\omega)|$ 在 $\omega \approx \omega_{\mathrm{def}}$处出现峰值，其高度取决于与极点的接近程度。这种共振放大是内部结构的直接体现。它反映了这样一个事实：自力不仅仅是几何效应，更是平动与内部自由度之间的动力学相互作用。共振宽度由（目前省略的）阻尼项决定，这些阻尼项会使极点正则化；尽管纳入此类项超出了本次最低阶分析的范围，但这样做将得到有限的品质因数$Q \sim \omega_{\mathrm{def}}/\gamma$。

5.3.3 高频区（$\omega \gg \omega_{\mathrm{def}}$）

$\widetilde{K}_{\mathrm{rigid}}(\omega)$ 和 $\widetilde{K}_{\mathrm{def}}(\omega)$ 均按 $1/(\omega a_0/c)$ 衰减，从而强烈抑制超高频分量。对于 $\omega \gg \omega_{\mathrm{def}}$，形变项中的共振分母表现为 $-\omega^2$，因此形变贡献也会衰减。这种抑制消除了 LAD方程特有的失控模态；这些模态对应于无界的高频增长。

5.3.4 总结：带通自力

刚性有限尺寸电荷产生低通自力谱，其截止频率为 c/a_0。可形变 ESD 电荷产生带通谱：自力在内部共振 $\omega_{\mathrm{def}} \sim c/a_0$ 附近增强，而在该频率以下和以上均受到抑制。这种共振结构是可变形模型的一项独特预测，在点粒子和刚性球处理这两种方法中都不存在。

5.3.5 物理解释与可观测特征

这种频域结构蕴含着深刻的物理意义。自力不仅取决于电荷分布的几何形态，也对其内部构成的动力学敏感。带通特性反映出，粒子并非被动的物体，而是一个能够在不同时间尺度上储存和释放能量的系统。

ω_{def} 处的共振提供了一种潜在的观测特征：在接近其内部共振的频率下，外场驱动的带电粒子将经历增强的辐射反作用，从而导致其平动出现反常阻尼或加热。相反，在远高于ω_{def}的频率下，自力会受到强烈抑制，使该理论免受困扰点粒子描述的渐近失控不稳定性影响。

对这种带通结构的实验研究，或可为本文提出的内部形变模态提供间接证据，具体可能通过在高频加速器或激光等离子体环境中对辐射反作用进行精密测量来实现。

6. 稳定性分析：无失控解

6.1 耦合系统

ESD框架给出了一个描述质心加速度与内部形变模态的耦合动力系统。平动满足

$$m_{\text{eff}}\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^{2a_0/c} K_{\text{eff}}(\tau;\xi)\,\ddot{\mathbf{v}}(t-\tau)\,d\tau, \quad (6.1)$$

而内部模态满足

$$\mu\ddot{\xi}(t) + \mu\omega_{\text{def}}^2\xi(t) = \frac{C}{c^2}\,\ddot{\mathbf{v}}(t). \quad (6.2)$$

这些方程描述了一个时滞微分/常微分系统，其中内部自由度介导了部分自相互作用。这种结构体现了一种概念上的转变：自力不再是对牛顿定律的单方程修正，而是平动与内部动力学相互作用所产生的结果。当粒子被视为没有内部构成的点状物体时，就会出现逃逸解；一旦承认其内部结构，自相互作用便成为一种受有限传播速度和内部响应时间支配的动力学过程。

6.2 化简为特征方程

为获得闭式稳定性条件，我们将精确有效核近似为具有相同特征记忆时间 $\tau_0 = 2a_0/(3c)$ 的单一时间尺度指数：

$$K_{\text{eff}}(\tau) \approx \frac{1}{\tau_0}e^{-\tau/\tau_0}.$$

有效辐射反作用项的出现，可以理解为内部结构动力学与外部观测运动之间存在时间尺度分离的结果。内部形变模态以特征时间尺度 $\tau_s \sim \omega_{\text{def}}^{-1}$ 弛豫，假设该时间尺度远短于外力变化所经历的时间尺度。在此情形下，内部自由度可以被绝热消去，从而得到一个关于质心运动的有效方程，其中包含类似于 LAD 辐射反作用项的高阶导数修正。

这一近似的合理性如下。通过对 $[0,2a_0/c]$ 进行拉普拉斯变换，可以得到精确紧支撑核的特征方程，其形式为$P(s, e^{-2sa_0/c}) = 0$，其中P 是一个拟多项式。这类方程的劳斯–赫尔维茨条件取决于核的矩 $\int \tau^n K(\tau) d\tau$。第一矩 τ0 控制稳定性边界 $Re(s)= 0$的位置；更高阶矩会定量地移动根，但不会改变满足 $a_0 \gtrsim r_e$的参数下$Re(s)$的符号。指数近似精确保留了τ0，因此能够重现正确的稳定性边界。为分析稳定性，考虑加速度和内部坐标的指数解：

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}_0 e^{st}, \xi(t) = \xi_0 e^{st},$$

具有复增长率 s。将 $\xi(t)$ 的试探解代入 (6.2)，得到

$$\mu s^2 \xi_0 e^{st} + \mu \omega_{\text{def}}^2 \xi_0 e^{st} = \frac{C}{c^2} s^2 \dot{\mathbf{v}}_0 e^{st}.$$

消去公因子 e^{st} 并对 ξ_0 求解，得到

$$\xi_0 = \frac{C s^2}{\mu c^2 (\omega_{\text{def}}^2 + s^2)} \dot{\mathbf{v}}_0. \quad (6.3)$$

现在将指数试探解代入运动方程 (6.1)。为进行稳定性分析，我们考虑齐次方程（$\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$）。自力项涉及对过去的加速度 $\ddot{\mathbf{v}}(t-\tau) = s\dot{\mathbf{v}}(t-\tau) = s\dot{\mathbf{v}}_0 e^{s(t-\tau)} = s\dot{\mathbf{v}}(t) e^{-s\tau}$ 的积分。为便于解析处理，我们用能刻画其基本时间尺度的指数形式来近似有效核：

$$K_{\text{eff}}(\tau) \approx \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0}, \text{with} \tau_0 = \frac{2a_0}{3c}.$$

该近似保留了特征记忆时间 τ_0 （精确核的一阶矩），同时使积分易于处理。代入 (6.1) 得到

$$m_{\text{eff}} s \dot{\mathbf{v}}_0 e^{st} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\infty \frac{1}{\tau_0} e^{-\tau/\tau_0} \cdot s\dot{\mathbf{v}}(t) e^{-s\tau} d\tau.$$

计算该积分，$\int_0^\infty e^{-\tau(1/\tau_0+s} \, d\tau = {}_1{}^1)/\tau_0+s = \frac{\tau_0}{1+s\tau_0}$，我们得到

$$m_{\text{eff}} s = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{s^2}{1 + s\tau_0}. \quad (6.4)$$

这是刚性球结果。可变形修正增加了第二项，该项源于与内部模态的耦合，并通过依赖于 ξ 的核修正项体现出来。

根据第3.3.4节推导出的有效核的结构，这一额外贡献的形式为

$$\Delta F_{\text{self}}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \frac{2C}{\mu\omega_{\text{def}}^2} \int_0^{2a_0/c} K_{\text{def}}(\tau)\dddot{\mathbf{v}}(\dot{t})\mathbf{v}(t-\tau)d\tau.$$

在频域中，并对核的记忆项采用相同的指数近似，该项会产生一个与 $\frac{s}{\omega^2+s^2}$定义 成正比的因子。经过详细计算（或与式（4.3）的结构相匹配），可得完整的特征方程:

$$m_{\text{eff}}s = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{s^2}{1+s\tau_0} + \frac{2C^2}{\mu c^2}\frac{s}{\omega_{\text{def}}^2+s^2}. \quad (6.5)$$

除以 $s \neq 0$ 并定义无量纲参数

$$\alpha = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_{\text{eff}}}, \beta = \frac{2C^2}{\mu c^2 m_{\text{eff}}},$$

我们得到紧凑形式的特征方程:

$$1 = \frac{\alpha s}{1+s\tau_0} + \frac{\beta}{\omega_{\text{def}}^2+s^2}. \quad (6.6)$$

清除分母后，该方程是关于 s 的三次多项式。三次多项式的出现，而非刚性模型中的线性特征方程，反映了内部模态的存在。从概念上说，这一点意义重大：内部自由度引入了额外的动力学通道，使系统能够耗散或重新分配能量，从而以具有物理意义的方式改变稳定性结构。

6.3 稳定性分析

6.3.1 特征方程的推导

为分析耦合系统的稳定性，我们针对齐次情形（$\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$）寻找形式为$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{v}}_0 e^{st}$ 和$\xi(t) = \xi_0 e^{st}$ 的指数解。将这些试探解代入耦合方程（ 6.1 ） — （ 6.2 ），并消去（ 6.5 ）中的分母，得到特征方程

$$(1+s\tau_0)(\omega_{\text{def}}^2+s^2) = \alpha s(\omega_{\text{def}}^2+s^2) + \beta(1+s\tau_0). \quad (6.7)$$

展开并合并s 的各次幂，得到三次多项式

$$(\tau_0-\alpha)s^3 + s^2 + (\tau_0\omega_{\text{def}}^2 - \alpha\omega_{\text{def}}^2 - \beta\tau_0)s + (\omega_{\text{def}}^2 - \beta) = 0. \quad (6.8)$$

这个三次多项式具有实系数。出现的参数为

$$\tau_0 = \frac{2a_0}{3c}, \alpha = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_{\text{eff}}}, \beta = \frac{2C^2}{\mu c^2 m_{\text{eff}}},$$

其中 $C = q^2/(6\pi\epsilon_0 c^2 a_0)$ 来自附录 A。

6.3.2 劳斯-赫尔维茨稳定性条件

劳斯-赫尔维茨判据给出了使所有根满足 $\text{Re}(s) < 0$ 的充要条件。对于具有 $a_3 > 0$ 的三次多项式 $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$，这些条件为：

1. 所有系数 $a_i > 0$
2. $a_2 a_1 > a_3 a_0$

将这些条件应用于 (6.8)，可得三个具体条件。

条件 (I)： $\tau_0 - \alpha > 0$

这与刚性球模型中出现的几何条件相同。根据上述定义，

$$\tau_0 > \alpha \Leftrightarrow \frac{2a_0}{3c} > \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_{\text{eff}}}.$$

简化后，

$$a_0 > \frac{3q^2}{12\pi\epsilon_0 c^2 m_{\text{eff}}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m_{\text{eff}}}.$$

右侧恰好就是经典电子半径 r_e（相差一个数量级为 1 的因子）。

因此，对于所有物理上合理的半径 $a_0 \gtrsim r_e$，条件 (I) 均成立。这种几何稳定化反映了电荷分布有限的光穿越时间。

条件 (II)： $\omega_{\text{def}}^2 - \beta > 0$

该条件确保内部模态不会因与平动的耦合而失稳。利用从自束缚电磁结构推导出的量纲估算，

$$C \sim \frac{q^2}{\epsilon_0 c^2 a_0}, \mu\omega_{\text{def}}^2 \sim \frac{q^2}{\epsilon_0 a_0^3}.$$

代入 β 的定义，

$$\beta = \frac{2C^2}{\mu c^2 m_{\text{eff}}} \sim \frac{(q^2/(\epsilon_0 c^2 a_0))^2}{(q^2/(\epsilon_0 a_0^3))c^2 m_{\text{eff}}} = \frac{q^2 a_0}{\epsilon_0 c^4 m_{\text{eff}}}.$$

与内部频率的平方相比较，

$$\omega_{\text{def}}^2 \sim \frac{q^2}{\epsilon_0 a_0^3 m_{\text{eff}}}.$$

因此，该比值为

$$\frac{\beta}{\omega_{\text{def}}^2} \sim \frac{a_0^4}{c^4} = \left(\frac{a_0}{c}\right)^4 \ll 1,$$

where 不等式由 $a_0 \ll c/\omega_{\text{def}}$ 得出，这在绝热区间内成立 .

因此，对于所有自束缚电磁结构，条件 (II) 都自动满足。

条件（III）：劳斯–赫尔维茨交叉条件。完整的劳斯–赫尔维茨条件要求

$$(\tau_0 - \alpha)(\tau_0\omega_{\text{def}}^2 - \alpha\omega_{\text{def}}^2 - \beta\tau_0) > (\tau_0 - \alpha)^2(\omega_{\text{def}}^2 - \beta).$$

为对此进行评估，将已确立的不等式 $\tau_0 > \alpha$ 和 $\beta \ll \omega_{\text{def}}^2$ 代入。左侧变为

$$(\tau_0 - \alpha)(\tau_0\omega_{\text{def}}^2 - \alpha\omega_{\text{def}}^2 - \beta\tau_0) \approx (\tau_0 - \alpha)^2\omega_{\text{def}}^2 + \mathcal{O}(\beta).$$

右侧展开为

$$(\tau_0 - \alpha)^2(\omega_{\text{def}}^2 - \beta) = (\tau_0 - \alpha)^2\omega_{\text{def}}^2 - (\tau_0 - \alpha)^2\beta.$$

因此，两侧之差为

$$\text{LHS} - \text{RHS} \approx (\tau_0 - \alpha)^2\beta + \mathcal{O}(\beta^2) > 0$$

对于任意 $\beta > 0$ 均成立。因此，对于所有物理相关参数，条件（III）都严格满足。

6.3.3 稳定性结果

劳斯–赫尔维茨分析得出了明确结论：

稳定性结果：对于所有物理上允许的可变形 ESD 结构，只要它们满足 $a_0 \gtrsim r_e$ 并符合绝热层级 $\omega_{\text{COM}} \ll \omega_{\text{def}}$，特征方程 (6.7) 就没有实部为正的根。平动–内部耦合系统不存在逃逸解。将精确的紧支撑核近似为指数形式，并不会影响这一结论的稳健性。稳定性条件仅取决于特征记忆时间 τ_0 （核的第一矩）以及内部模态参数 ω_{def} 和 β，这些量均不受此近似影响。随后，标准的沃尔泰拉理论保证，对于所有有界外力 [，解均存在、唯一且有界（Bauer & Dürr, 2001; Komech & Spohn, 2000]）。

6.3.4 物理解释

这一稳定性结果凸显了 ESD 框架的核心主张：逃逸解并非经典电动力学中不可避免的特征，而是将带电粒子建模为无结构点粒子的结果。LAD方程的病态源于两个同时采用的理想化处理：

1. **消失尺寸** ($a_0 \to 0$)，这消除了几何稳定化（$\tau_0 \to 0$）

2. **冻结的内部动力学** ($\mu \to \infty$)，这消除了动力学稳定化（$\beta \to 0$）。只有在这两个特征都被消除后，不稳定的LAD行为才会出现。一旦引入具有有限传播速度和动力学响应的内部结构，病态解便会消失。恢复稳定性并非依靠施加特设约束或修改麦克斯韦方程组，而是通过为带电粒子采用一种在物理上更为自洽的本体论。

内部模态充当被动能量库，吸收高频涨落，防止其增长为 runaway 解。这种力学稳定化在概念上类似于其他物理系统中内部自由度抑制不稳定性的作用，涵盖流体动力学和结构力学等领域。

6.4 在极限 $\xi \to 0$ 下恢复刚性逃逸

当内部模态被冻结时，形式上，$\mu \to \infty$ 且 $C/\mu \to 0$，耦合常数 $\beta = \frac{2C^2}{\mu c^2 m}$ eff 消失。条件 (II) 变得平凡，而条件 (III) 则变得多余。三次特征方程 (6.7) 随即分解为

$$[(\tau_0 - \alpha)s + 1](s^2 + \omega_{\text{def}}^2) = 0.$$

第一个因子的根，

$$s = -\frac{1}{\tau_0 - \alpha} < 0,$$

恢复了稳定刚球模式。其余的根 $s = \pm i\omega_{\text{def}}$ 对应于无阻尼内部振荡，这正如预期：被冻结的模式已与动力学脱耦。在进一步的极限 $a_0 \to 0$ 下，光穿越时间 $\tau_0 = 2a_0/3c$ 趋于零，而 $\alpha = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m}$ eff 保持有限。刚球根变为

$$s \to +\frac{1}{\alpha} = \frac{6\pi\epsilon_0 c^3 m_{\text{eff}}}{q^2}.$$

使用经典电子半径 $r_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m \quad c^2}$ eff 后，该式可简化为

$$s = \frac{3c}{2r_e} > 0,$$

这正是 LAD逃逸增长率。

因此，ESD框架明确揭示了逃逸解产生的两步机制：

- 消除**有限尺寸**（$a_0 \to 0$）会移除几何稳定化（$\tau_0 \to 0$）。
- 消除**可变形性**（$\mu \to \infty$）会移除动力学稳定化（$\beta \to 0$）

On只有当两种特征都不存在时，病态LAD行为才会出现。

7. 总结及与既有工作的比较

本文提出的可变形电荷表述，通过改变带电粒子的基础本体论，重新审视了长期以来与洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克（LAD）方程相关的难题。ESD框架并未将粒子视为点粒子或刚性延展体，而是将其建模为一种具有内部形变模态的有限系统，该模态会对电磁应力作出动态响应。这一建模假设的转变带来了一系列技术和概念上的成果，既解决了辐射反作用的经典病态，又保留了因果结构和物理可解释性。

表1总结了可变形ESD模型的主要成果，并将其与点粒子LAD方程和刚性有限尺寸方法的预测进行了对比。每项对比都凸显了内部结构的引入如何改变自力的行为，并阐明了传统表述中那些晦涩或存在问题的量所具有的物理意义。

表1：辐射反作用框架比较

特征	**点粒子 LAD**	**刚性有限尺寸**	**ESD（本文）**
预加速	存在；源于 非因果性 LAD方程的结构 LAD方程	不存在；有限 光穿越时间 确保因果性	不存在；因果延迟 即使核保持不变 伴随形变
失控解	存在；由于 无界高- 频率响应	对 $a_0 \geq$ 不存在 r_e；几何 截止频率可稳定	对 $a_0 \geq$ 不存在 r_e 和 $\omega_{\mathrm{COM}} \ll \omega_{\mathrm{def}}$； 内部模态增加 动力学稳定化
自力谱	白噪声；无内禀 时间尺度	低通；截止频率 在 c/a_0	带通；共振 在 $\omega_{\mathrm{def}} \sim c/a_0$ 和 对高频的抑制 频率

特征	点粒子 LAD	刚性有限尺寸	ESD（本工作）
肖特能量	形式的 记账项； 没有物理 子系统	解释为场 动量，但并非 动态地 实现	识别为内部 机械能 相关的 形变
相容性 与狭义 相对论	因.....而定义不明确 点奇点	有限；刚体 违反 有限信号速度	完全兼容； 内部动力学 以有限速度传播
新颖 预测	None	除.....之外没有 对 LAD 的平滑化	共振自力 峰值；机械 肖特项的实现 term

7.1 ESD 的新增内容：超越刚性

洛伦兹将电子建模为一个由庞加莱应力稳定的刚性球体 [Poincaré, 1906]。Abraham认识到，处于电磁应力作用下的带电体必定会发生形变，但他的模型在解析上难以处理，因此这项研究计划被放弃了 [Abraham, 1903]。随后出现的刚性球理想化为求得数学上的便利而舍弃了可变形性，也因此助长了LAD方程中各种病态问题的产生。

Dirac、Rohrlich 和 Yaghjian 后来的分析 [Dirac（1938）；Rohrlich（1965、1997）；Yaghjian（1992、2006）] 表明，只要半径大于经典电子半径 $r_e = q^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)$，有限尺寸本身就能消除 runaway 解。Yaghjian 对刚性球形分布的处理证明，自力核具有紧支撑，从而确保因果性并稳定动力学。然而，概念上的缺口依然存在：刚性延展电荷模型假定瞬时内部响应，违背了相对论因果性。刚体没有内部动力学；其构型是人为规定的，而非由物理规律决定。[Ford 与 O'Connell[1991, 1993] 的论文同样认识到，结构能够使理论正则化，并引入截止频率以消除 runaway 解。他们的方法仍停留在唯象层面；ESD模型则为这一认识提供了具体的力学实现

ESD框架通过引入一个具有模态质量 μ和固有频率 $\omega_{\mathrm{def}} \sim c/a_0$的动力学内部坐标 ξ，弥补了这一空缺。它以因果有限速的内部动力学取代了刚性模型中不符合物理规律的瞬时响应

。在加速运动过程中，内部模态提供了真正的能量交换通道，使自力从对 LAD 项进行几何平滑转变为具有共振增强和带通滤波效应的动力学相互作用。从这个意义上说，ESD 延续了从点粒子到刚体，再到可变形动态结构电荷的历史演进。

7.2 肖特能量的力学解释

本分析的一项关键技术成果是，可变形电荷模型在小参数 a_0/c 的最低阶上重现了洛伦兹–亚伯拉罕–狄拉克（LAD）方程。在绝热区间内，内部形变模态的弛豫时间尺度远短于质心运动的演化时间尺度，此时扩展电荷的因果延迟动力学可约化为一个有效的局域方程，其第一个非零项恰好就是 LAD 辐射反作用力。因此，ESD框架在最低阶上恢复了标准的点粒子结果，同时提供了一个系统展开，将有限尺寸效应和内部结构修正纳入其中。

肖特项的重新诠释同样重要。在点粒子表述中，引入肖特能量是为了确保能量守恒，但并未明确指出承载这部分能量的物理子系统；它既能振荡又能取正负值，这一特性长期以来使其含义晦涩难明。在 ESD 框架中，肖特项获得了具体的力学解释：它是储存在电荷分布的内部形变模态中的能量，也是与该模态交换的能量。因此，内部自由度提供了一个动力学储能库，用以解释肖特项所表征的瞬态能量交换。

在 ESD模型中，肖特能量获得了直观的物理解释。这种力学解释补充了[Rowland；2010] 以场为基础的观点；在该观点中，肖特能量存在于加速电荷的束缚场形变之中。而在这里，它存在于材料形变本身，这是同一物理现象的另一种实现。形变引起的电磁质量变化携带动量和能量；肖特项恰好就是加速运动期间储存在内部模态中的动能。其符号的振荡反映了平动与内部形变之间的周期性能量交换，这正是耦合动力系统所应有的表现。

这一对应关系并非牵强拟合。耦合常数C、模态质量μ和内部频率ω_{def}并非为了重现肖特项而选取的可调参数；它们由自束缚电荷分布的物理性质所确定。仅凭量纲分析即可得到

$$\frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2} \sim \tau_0^2,$$

数值因子由几何决定。因此，肖特能量自然源自内部动力学，并非额外设定的公理，而是将带电粒子视为可变形物理系统这一做法的必然结果。

Spohn 提出了一种相关的解决方案 [Spohn，2004] 将 LAD方程 限制在其中心流形上，从而在不修改粒子模型的情况下恢复朗道–利夫希茨方程 [Landau & Lifshitz，1975] 。ESD 的解决方案性质不同：它并非从病态方程中筛选物理解，而是通过丰富本体论来消除病态。两种方法对 r_e/a_0 的最低阶物理轨迹给出相同结果，但只有 ESD 能预测带通自力谱和肖特能量的机械实现。

7.3 关键结果讨论

表1中的比较凸显了三个核心主题。第一，LAD方程的病态问题——预加速、runaway 解和含糊不清的能量核算——并非经典电动力学固有的，而是源于将带电粒子理想化为无结构点粒子。第二，刚性有限尺寸模型通过引入几何时间尺度解决了其中一些问题，但仍不完善，因为它们假定瞬时内部响应，这与相对论约束不相容。第三，可变形ESD模型通过引入具有有限传播速度的最小内部自由度，克服了这些局限，从而恢复了动力学稳定性和物理可解释性。

自力谱的带通特性尤为重要。这表明，自相互作用并非只是对LAD力进行几何平滑，而是一个受粒子内部构成影响的动力学过程。在ω_{def} 处的共振反映了内部模态储存和释放能量的能力，而高频抑制则消除了困扰点粒子理论的逃逸解。

同样重要的是对上述肖特能量所作的机械性重新诠释。内部结构阐明了一个原本显得抽象而费解的量的含义。这是刚性模型和点粒子模型无法带来的概念进展。

8. 结论与展望

长期以来，经典辐射反作用、逃逸解、预加速以及令人费解的肖特项等难题，常被视为电动力学存在根本不一致性的证据。洛伦兹-亚伯拉罕-狄拉克方程似乎要求修改麦克斯韦理论，或引入临时正则化方案。本研究的结果指向另一种结论：这些病态现象并非源于场方程，而是源于对带电粒子的描述不完整。

扩展结构动力学（ESD）框架以一种精简但具有物理依据的模型取代点粒子和刚体理想化：有限电荷分布，其半径通过内部呼吸模态动态响应。这一个自由度恢复了任何真实带电物体都必须具备的两个特征：有限尺寸和有限内部响应时间。呼吸模态确保电荷分布的变化以有限速度传播，从而引入自然时间尺度 $\omega_{\mathrm{def}}^{-1} \sim a_0/c$ ，并保持相对论因果性。

从完整的粒子–场哈密顿量出发，我们推导出可变形电荷的推迟自力。所得延迟核取决于过去的质心运动，以及发射和接收时的内部构型。在绝热区间内，内部动力学相较于外部驱动较快，此核可化简为一种有效形式，同时保持因果性并避免预加速。其傅里叶变换呈现带通结构：在内部共振 ω_{def} 附近增强，在高频处受到抑制。对于所有物理上合理的参数，这种频谱形状都能消除逃逸解；只有在消失尺寸和冻结的内部动力学这一双重极限下，才会重现LAD不稳定性。

该框架还为肖特项提供了自然的力学解释。形变引起的电磁质量变化会携带动量和能量；肖特能量由此显现为加速运动期间储存在内部模态中的动能。其符号振荡反映了平动与内部形变之间的周期性能量交换，这正是耦合动力系统所预期的情形。这解开了一个长期存在的概念难题，也使点粒子描述中看似纯粹形式化的量具有了物理上的可理解性。

尽管本文聚焦于最简单的内部结构——单一的球对称呼吸模态，ESD框架并不局限于球对称性。一种自然的推广方式是引入多个内部形变坐标 ξ_k，每个坐标都有各自的模态质量 μ_k、固有频率 ω_k和耦合常数 C_k。此时，有效核将变为共振贡献之和，

$$\widetilde{K}_{\mathrm{eff}}(\omega) = \widetilde{K}_{\mathrm{rigid}}(\omega) + \sum_k \left[\frac{2C_k}{\mu_k}\ \frac{\widetilde{K}_{\mathrm{def},k}(\omega)}{\omega_k^2 - \omega^2}\right],$$

从而产生一个多频带自力谱，并在每个 ω_k处出现一个共振。肖特能量相应地分布在多个内部能量库中，每个能量库都提供一个独立的动量交换通道。第4节中的单一对应关系可推广为这类项的总和，其中每一项都由其模态的几何特性决定。对于各向异性内部结构，耦合常数 C_k 会呈现方向性，核将具有张量特性，而自力则会表现出相对于形变主轴的取向依赖性；这一效应在点粒子模型和刚性球模型中均不存在。

至关重要的是，这些推广均不改变核心结论。因果性逐模态得以保持，因为每一个$\widetilde{K}_{\mathrm{def},k}$ 都继承了$\widetilde{K}_{\mathrm{rigid}}$的紧支撑。稳定性得以加强：每一个附加模态都向稳定参数β贡献一个正定项，并且劳斯–赫尔维茨条件仍通过对每个模态独立应用的同一量纲论证而得到满足。无论模态数目如何，预加速均不存在。仅在所有模态同时被冻结且尺寸取为零的极限下，才会恢复LAD发散。因此，此处所处理的单一呼吸模态并非碰巧有效的特例，而是一大类情形的最小代表，在该类情形中，本质物理，

有限尺寸、有限内部响应以及因果自相互作用，已经完全呈现。肖特识别中的数值因子5/4是球对称单模几何所特有的唯一结果；在一般情形下，它变为由几何确定的、依赖于模态的张量，而不再具有普适性。

发展完整的多模框架，包括含有$\omega_k \sim \omega_{\mathrm{COM}}$且无法被绝热消去的模式，仍是未来工作的一个重要方向。更广泛地说，扩展结构动力学方法揭示了一条普遍启示：经典电动力学中的疑难或许并不需要修改麦克斯韦方程，而是需要丰富作为其源的带电物质的本体论。认真对待粒子具有内部结构这一观念，便可在不改变场方程、也不引入临时正则化的情况下，获得对辐射反作用连贯、因果且可作物理解释的说明。

参考文献

1. Abraham, M.（1903）。“电子动力学原理。”物理学年鉴，315(1)，105–179。2. BarAvi, P.（2025）。扩展结构动力学：可逆动力学中涌现的不可逆性。arXiv:2505.09650 [physics.class-ph]。3. BarAvi, P.（2026）。扩展结构动力学中的结构黏度、热波与姆潘巴效应。arXiv:2603.02249 [physics.class-ph]。4. Bauer, G.，& Dürr, D.（2001）。“刚性电荷的麦克斯韦–洛伦兹系统。”亨利·庞加莱年刊，2，179–196。5. Belot, G.（2007）。“经典电动力学是一种不一致的理论吗？”加拿大哲学杂志，37(2)，263–282。6. Dirac, P. A. M.（1938）。“辐射电子的经典理论。”伦敦皇家学会会刊A辑，167(929)，148–169。7. Feynman, R. P.、Leighton, R. B. 与 Sands, M.（1964）。费曼物理学讲义，第二卷。Addison-Wesley。8. Ford, G. W. 与 O'Connell, R. F.（1991）。电动力学中的辐射反作用及逃逸解的消除。物理快报A辑，157(4–5)，217–220。9. Ford, G. W. 与 O'Connell, R. F.（1993）。辐射反作用的相对论形式。物理快报A辑，174(3)，182–184。

10. Frisch, M.（2005）。不一致性、不对称性与非局域性：对经典电动力学的哲学探究。牛津大学出版社。11. Griffiths, D. J.（1999）。电动力学引论，第3版。普伦蒂斯·霍尔。12. Hammond, R. T.（2010）。“电动力学与辐射反作用。”《物理学基础》，40，667–674。13. Jackson, J. D.（1998）。经典电动力学，第3版。威利出版社。14. Khokonov, M. Kh. 与 Andersen, J. U.（2019年）。“经典电子模型中自能与自质量的等价性。”《物理学基础》，49(7)，750–782。15. Kim, K.-J. 与 Sessler, A. M.（2006）。“电子的运动方程：经典物理学与量子物理学中的一场争论。”《物理学杂志：会议系列》，50，437–444。16. Komech, A. 与 Spohn, H.（2000）。“耦合麦克斯韦–洛伦兹方程的长时间渐近行为。”《偏微分方程通讯》，25，559–584。17. Landau, L. D. 与 Lifshitz, E. M.（1975）。场的经典理论，第4版。佩加蒙出版社。18. Lorentz, H. A.（1909）。电子理论。泰布纳出版社。19. Medina, R.（2006）。“经典准刚性扩展粒子的辐射反作用。”《物理学杂志 *A*：数学与通用》，39(14)，3801–3816。20. Moniz, E. J. 与 Sharp, D. H.（1977）。“非相对论量子电动力学中的辐射反作用。”《物理评论 *D*》，15(10)，2850–2865。21. Muller, F. A.（2007）。“经典电动力学中的不一致性？”《科学哲学》，74(2)，253–277。22. Poincaré, H.（1906年）。“论电子动力学。”《巴勒莫数学学会会刊》，21，129–176。23. Rohrlich, F.（1965）。经典带电粒子：其理论基础。Addison

-

Wesley. 24. Rohrlich, F. (1997). “带电球体与电子的动力学。”《美国物理学杂志》, 65(11), 1051–1056. 25. Rowland, D. R. (2010). 加速点电荷肖特能量的物理解释以及匀加速电荷是否辐射的问题。《欧洲物理学杂志》, 31(5), 1037–1051

26. Sebens, C. T. (2023). “消除电子自斥力。”《物理学基础》, 53(4), 73. 27. Spohn, H. (2004). 带电粒子及其辐射场的动力学. 剑桥大学出版社. 28. Vickers, P. (2008). “Frisch、Muller与Belot论经典电动力学中的不一致性。”英国科学哲学杂志, 59(4), 767–792. 29. Yaghjian, A. D. (1992). 带电球体的相对论动力学：更新洛伦兹 - 亚伯拉罕模型. 施普林格. 30. Yaghjian, A. D. (2006). 带电球体的相对论动力学, 第2版. 施普林格.

附录 A：内部模态上线性化力的推导

本附录详细推导作用于可变形带电球呼吸模态的线性化力 $f_{em}^{(linear)}(t) = C\dot{a}(t)$。推导分为几个阶段：从球面上的电磁应力出发，系统地展开至加速度和形变的一阶项。

A.1 加速面上的辐射压力

考虑一个瞬时半径为 $a(t) = a_0(1 + \xi(t))$ 的均匀带电球，其总电荷 q 均匀分布在整个体积内。当球体以质心加速度 $\mathbf{a}(t)$ 加速时，由于推迟自场的作用，其表面会受到不均匀的辐射压力。

在与球体中心瞬时共动的静止系中，电磁应力张量 T^{ij} 给出作用于单位面积表面元上的力：

$$\mathbf{f}_{\text{surf}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_{\text{self}},$$

其中，$\mathbf{n}$ 为向外的单位法向量。对于缓慢加速的球体（$v \ll c$），可将自场按 $1/c$ 的幂次展开。主要的辐射贡献来自场中 $1/c^3$ 阶的项。

A.2 自场的展开

加速球体的延迟场可通过对电荷分布积分 Lienard–Wiechert势得到。在 $1/c^3$ 阶下，表面上的点粒子 $\mathbf{r}$ 处的电场为

$$\mathbf{E}_{\text{self}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_{\text{Coul}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) + \mathcal{O}(1/c^4),$$

其中$\mathbf{E}_{\text{Coul}}$ 是瞬时库仑场（阶为$1/c^0$），$\mathbf{E}_{\text{rad}}$ 是辐射场（阶为$1/c^3$）。磁场的阶为 $1/c$，并通过交叉项在$1/c^3$ 阶对应力有贡献。

对于球形分布，角积分会大为简化。加速带电球体的推迟电场，是将Lienard–Wiechert场对电荷分布积分而得到的。按照Yaghjian [Yaghjian；2006], ，在相对于加速度方向极角为θ 的表面点处，自场的辐射贡献至$1/c^3$阶为：

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\theta,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3}\cdot\frac{2}{3}\,\dot{\mathbf{v}}(t)\cdot\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right)\hat{\mathbf{n}} + \text{angular terms},$$

其中$\hat{\mathbf{n}}$ 是径向单位向量。详细的角依赖关系对我们的目的并非必需，因为我们将对球体进行积分。

A.3 呼吸模态上的净力

呼吸模态响应辐射压力的球对称分量，即倾向于使球体均匀膨胀或收缩的那一部分。该分量通过对径向力密度在球体上取平均而得到：

$$F_{radial}(t) = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega\,\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{n}\cdot\mathbf{T}_{\text{self}}).$$

阶数为 $1/c^3$ 的应力张量包含与 $\dot{\mathbf{v}}$ 成正比的项。球对称分量通过对立体角积分 $\hat{n}\cdot(n\cdot T_{self})$ 得到。库仑贡献因对称性而消失。辐射贡献则由恒等式$\int d\Omega\,(\hat{\mathbf{n}}\otimes\hat{\mathbf{n}}) = \frac{4\pi}{3}\,I$ 以及 $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ 的显式形式得出。计算角积分后得到径向力

$$\int d\Omega\,\hat{\mathbf{n}}\cdot(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{T}_{\text{self}}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\Omega\,[E_{\text{rad}}^2\,\hat{\mathbf{n}} - 2(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E}_{\text{rad}})\,\mathbf{E}_{\text{rad}}] = \frac{q^2}{6\pi\,\varepsilon_0 c^3 a_0}\,\ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathcal{O}(\xi, c^{-4}).$$

数值因子 $1/(6\pi)$ 来自角平均

$$\int d\Omega \sin^2\theta \cos^2\theta = \frac{4\pi}{15},$$

结合将体电荷分布归一化为其有效表面贡献的结果。

$$F_{\text{radial}}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 a_0} \cdot \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathcal{O}(\xi, 1/c^4),$$

其中，$\ddot{\mathbf{v}}(t)$ 是沿运动方向的加速度大小。之所以出现 $1/a_0$，是因为必须对力密度（单位体积的力）在球体体积上进行积分，才能得到净模态力；体积元贡献了 a_0^3，而辐射场振幅与 a_0 无关，因此总体呈现 $1/a_0$ 的依赖关系。

A.4 形变线性化

上述表达式假设半径 a_0 固定。为了得到关于 ξ 线性化的力，我们必须考虑辐射压力如何依赖于瞬时半径。延迟场取决于延迟时刻的电荷分布，其中涉及 $a(t-\tau)$。对 ξ 展开至一阶，

$$\frac{1}{a(t-\tau)} \approx \frac{1}{a_0}(1 - \xi(t-\tau)).$$

因此，辐射力获得了一个与 $\xi(t-\tau)$ 成正比的项。然而，为了推导与 $\dot{a}$ 的主导绝热耦合，我们可以在当前半径处计算该力，然后使用 ξ 与 $\dot{a}$ 之间的绝热关系。对 ξ 保留至线性阶，力为

$$f_{em}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 a_0} \ddot{\mathbf{v}}(t) \cdot [1 + \alpha\xi(t) + \beta\xi(t-\tau) + \cdots].$$

系数 α 和 β 可通过对完整的推迟表达式关于 a求导来计算。对于均匀球体，根据对称性，最低阶时必须有 $\alpha = \beta$，因此

$$f_{em}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 a_0} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 a_0} \cdot \gamma[\xi(t) + \xi(t-\tau)]\ddot{\mathbf{v}}(t),$$

其中 γ 是一个数量级为 1 的数值因子。

A.5 绝热区间中的简化

在绝热区间内，$\xi(t-\tau) \approx \xi(t)$ 在最低阶近似下成立（因为 $\tau \sim a_0/c$ 且 ξ 的变化时间尺度为 $\omega_{COM}^{-1} \gg \tau$）。因此

$$\xi(t) + \xi(t-\tau) \approx 2\xi(t).$$

代入绝热关系 $\xi(t) = \frac{C}{\mu\omega_{def}^2}\ddot{\mathbf{v}}(t)$（将自洽地导出），我们得到

$$F_{em}(t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 a_0}\ddot{\mathbf{v}}(t) + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 a_0} \cdot 2\gamma \frac{C}{\mu\omega_{def}^2}\ddot{\mathbf{v}}(t)^2 + \cdots$$

关于 $\ddot{\mathbf{v}}$ 的二次项在绝热展开中属于更高阶，对线性自力没有贡献。

上述推导似乎假定了绝热关系

$$\xi(t) = \frac{C}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\ddot{\mathbf{v}}(t)$$

同时又在确定 C。这一表面上的循环论证可如下解决。设真实耦合常数取某个未知值 C^*。对式 (3.8) 中的内部模态进行绝热消去，则得到

$$\xi(t) = \frac{C^*}{\mu\omega_{\mathrm{def}}^2}\ddot{\mathbf{v}}(t).$$

将此表达式代入辐射压力积分，并提取关于$\dot{a}(t)$的线性项，得到如下形式的力

$$F_{\mathrm{em}} = C^*\,\ddot{\mathbf{v}}(t),$$

其中，乘在 $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ 前的系数不依赖于所假设的 C^* 值。因此，最终结果

$$C = \frac{q^2}{6\pi\varepsilon_0 c^2 a_0}$$

对于任意初始选择的 C^* 都成立。因此，绝热代换不会对C施加任何约束；自洽条件自动满足。实际上，C 完全由电荷分布的几何形状和电磁场的有限传播速度决定，而非由内部模态的动力学决定。

线性项恰好具有 $C\ddot{\mathbf{v}}(t)$ 的形式，其中

$$C = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}.$$

注意分母的变化：第一个表达式中的因子 c^3 变为 c^2，因为一个 $1/c$ 因子已被吸收到内部模态所受的力与质心所受的力的定义中。这与量纲分析一致：C 必须具有质量的量纲（力/加速度），而 $q^2/(\epsilon_0 c^2 a_0)$ 确实具有质量的单位。

A.6 基于能量的 C 估算

系数 C 的标度关系可以更直观地从带电球体的电磁自能随其半径的变化关系中得到。对于半径为 a 的球壳,

$$U_{\mathrm{em}} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}.$$

令半径发生小变形 $a(t) = a_0 + \xi(t)$。展开至一阶可得

$$U_{\mathrm{em}}(a) \approx \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a_0^2}\xi.$$

作用于内部坐标的电磁力由 $f_{\mathrm{em}} = -\partial U_{\mathrm{em}}/\partial\xi$ 得出。当质心加速时，迟滞效应在球体范围内引入时间尺度a_0/c。将迟滞自相互作用按 a_0/c 的最低阶展开，会产生一个与 $\ddot{\mathbf{v}}$ 成正比的项，从而得到

$$F_{\mathrm{em}}(t) = C\,\ddot{\mathbf{v}}(t), C = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}.$$

数值因子 $1/(6\pi)$ 来自对球面上的延迟自场进行角积分，这与标准的刚性球体自力计算相同。

A.7 总结

因此，呼吸模态上的线性化力为

$$f_{em}^{(linear)}(t) = C\ddot{\mathbf{v}}(t), C = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^2 a_0}.$$

该表达式用于第2.3节，以推导内部模态的绝热响应和有效核。推导表明，C 并非自由参数，而是由决定质心辐射反作用力的同一组物理尺度所确定。其数值取决于电荷分布的几何形状和有限光速，这进一步印证了 ESD哲学：内部结构与因果传播密不可分。