arXiv:2603.11115v1 [math.GR] 11 Mar 2026

自同构增长与群分解

ELIA FIORAVANTI

摘要。设 G 是一个有限生成群，具有自同构 $\varphi \in$Aut(G)，或外自同构 $\phi \in$Out(G)。假设 G 分解为若干更简单的部分，且已知 φ 和 ϕ 在这些部分上的增长行为，特别是在直积、自由积或群图的情形下。本文旨在探讨如何推导 φ 和 ϕ 在整个 G 上的增长率这一问题（这往往并非易事）。

1. 引言

设 G 是一个有限生成群。固定一个有限生成集 $S \subseteq G$，并将由此得到的元素 $g \in G$ 的字长 记为 $|g|$。我们也可以类似地考虑共轭长度

$$\|g\| := \min_{h \in G} |hgh^{-1}|.$$

给定一个自同构 $\varphi \in$ Aut(G) 和一个外自同构 $\phi \in$ Out(G)，自然会让人想到这些序列的增长速度

$$n \mapsto |\varphi^n(g)|, \qquad n \mapsto \|\phi^n(g)\|.$$

我们将这类序列视为双利普希茨等价，即对于两个序列 a_n，b_n，若存在常数 $C > 0$ 使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，$a_n \leq Cb_n$ 且 $b_n \leq Ca_n$，则称 $a_n \sim b_n$。在这种等价关系下，序列 $n \mapsto |\varphi^n(g)|$ 和 $n \mapsto \|\phi^n(g)\|$ 完全不依赖于用于定义 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$的群 G 的有限生成集的选择，我们分别称它们为 g 在 φ 和 ϕ作用下的增长率。

给定一个有限生成群 G，其自同构 $\varphi \in$ Aut(G)和 $\phi \in$ Out(G)，要完整描述增长率通常是一个难题。即使对于自由群 F_n，这个问题也无法用初等方法解决，直到相对较近的时期，[Lev09] 才借助 [BH92, BFH00, BFH05, BG10]中发展的精细火车轨道技术解决了这一问题。最近，[CHHL], 宣布完整描述双曲群的自同构的增长率，他们同样使用了 JSJ 分解 [RS97, GL17]。其中，所有增长率都与形如 $n \mapsto n^p\lambda^n$ 的序列双利普希茨等价，其中 $p \in \mathbb{N}$ 且 $\lambda \geq 1$ 是佩龙数。

与此同时，也存在一些有限生成群，其自同构呈现出相当奇异的增长行为；例如参见 [Cou22] 以及下文的例 2.8。关于增长率的一般性质，几乎没有什么是显而易见的，围绕它们仍有无数自然的问题。我们在问题 2.7 中列出了其中几个。

在本文中，我们考虑一个带有自同构 $\varphi \in$自同构群(G) 及其外类 $\phi := [\varphi] \in$Out(G) 的有限生成群，分别在以下三种情形中：

(1) G分裂为 $G_1 \times \ldots \times G_k \times \mathbb{Z}^m$，其中诸群为无中心的直接不可分解群 G_i（第3节）；(2) G 分裂为一个 ϕ–不变群图，并带有未扭曲顶点群 G_i（第 4 节）；(3) G 分裂为自由积 $G_1 * \cdots * G_k * F_m$，其中诸群为自由不可分解群 G_i（第5节）。

在上述每种情形中，假设我们已充分了解 φ 和 ϕ 在 G_i 上的限制的增长率，就可以描述 φ 和 ϕ 在 G 上的增长率。

作者获得德国研究联合会（DFG）埃米·诺特资助项目 515507199 的资助。

这类描述并非难以想象，但具体细节并不总是显而易见，尽管它们基于标准技术（尤其是在自由积情形下使用列车轨道）。

本文的主要结果是推论 3.6、命题 4.2 和命题 5.2，分别对应上述三种情形。这些结果均用于作者关于直角Artin群、直角考克斯特群以及更一般的紧致特殊群自同构增长率的研究 [Fio25]。

致谢。 我谨向 Martin Bridson、Rémi Coulon、Camille Horbez 和 Ric Wade 致谢，感谢他们就本文内容与我进行了有益的讨论。

2. 增长率

2.1. **一般性质**。 若 a, b 是两个序列，我们记作 $a \preceq b$，表示存在一个常数 $C > 0$，使得对所有 $n \geq 0$ 都有 $a_n \leq Cb_n$。若 a 和 b 等价，记作 $a \sim b$，则表示 $a \preceq b$ 和 $b \preceq a$ 均成立。我们用 $[1]$ 表示常值序列的等价类。

定义 2.1. 增长率 是序列在 $(\mathbb{R}_{>0})^{\mathbb{N}}$ 中关于 $[a_n] \succeq [1]$的一个 $\sim$–等价类 $[a_n]$。我们将由 $(\mathfrak{G}, \preceq)$ 表示增长率集合，其偏序集结构由关系 $\preceq$诱导。

给定两个增长率 $[a_n], [b_n] \in \mathfrak{G}$，它们的和 $[a_n] + [b_n] := [a_n + b_n]$ 是一个定义良好的增长率。为简化记号且不引起歧义时，我们通常直接写作 $a_n \preceq b_n$ 和 $a_n \sim b_n$，省略方括号。

设 G 是一个具有有限生成集 S的群。我们用 $|\cdot|_S$ 和 $\|\cdot\|_S$ 表示 G 上与 S相关联的字长和共轭长度，定义见引言。若 T 是另一个有限生成集，则 $|\cdot|_T$和 $\|\cdot\|_T$分别与 $|\cdot|_S$和 $\|\cdot\|_S$双 Lipschitz 等价。因此，从现在起我们将直接写作 $|\cdot|$和 $\|\cdot\|$，因为生成集的选择无关紧要。有时，当涉及两个有限生成群 G和 H时，我们会写作 $|\cdot|_G$和 $|\cdot|_H$，以区分这两种长度概念。

有限生成子群 $H \leq G$是非扭曲的，当且仅当包含映射 $(H, |\cdot|_H) \hookrightarrow (G, |\cdot|_G)$ 是双利普希茨的。类似地，若包含映射 $(H, \|\cdot\|_H) \hookrightarrow (G, \|\cdot\|_G)$ 是双利普希茨的，我们就称 H是共轭非扭曲的。一般而言，仅有非扭曲性不足以推出共轭非扭曲性；相反，我们需要某种形式的凸性。

例 2.2。 以下是一些显而易见的观察。

(1) 双曲群的拟凸子群是非扭曲且共轭非扭曲的。(2) 设 $G \curvearrowright X$ 在 CAT(0)空间上有一个适当余紧作用。若 $H \leq G$ 在凸子空间 $Y \subseteq X$上余紧作用，则 H 在 G中是非扭曲且共轭非扭曲的。

现在考虑 $\varphi \in$Aut(G) 及其外类 $\phi \in$ Out(G)。以下是一个经典结果。

Le引理 2.3. 映射 φ: $G \to G$ 相对于 $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$都是双利普希茨的 .

如 引言中所述， φ 和 ψ 为 G的每个元素赋予一个增长率 .

定义 2.4. 元素 $g \in G \setminus \{1\}$ 在 φ 作用下的增长率 是 $\sim$–等价类$[|\varphi^n(g)|]$，属于 $\mathfrak{G}$。类似地， g 在 ϕ 作用下的增长率 是等价类 $[\|\phi^n(g)\|] \in \mathfrak{G}$。

由于 $\|\cdot\| \leq |\cdot|$，我们总有 $\left[\|\phi^n(g)\|\right] \preceq \left[|\varphi^n(g)|\right]$。此外， $\left[|\varphi^n(g)|\right] \sim [1]$ 成立当且仅当 φ 的某个幂固定了 g； $\left[\|\phi^n(g)\|\right] \sim [1]$ 成立当且仅当 ϕ 的某个幂保持了 g的共轭类。因此，尽管单位元的长度为 0，我们仍可以人为地将 G 的单位元的增长率定义为 $[1]$, 。

我们将 $\subseteq \mathfrak{G}$ 和 $\subseteq \mathfrak{G}$ 分别记作 $\mathcal{G}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{g}(\phi)$（若有歧义，则记作 $\mathcal{G}(G, \varphi)$ 和 $\mathfrak{g}(G, \phi)$），它们分别表示 φ 和 ϕ 的所有增长率，其中 g 取遍 G。遵循上述约定，我们

[1]注意， $\phi^n(g)$ 并不是 G 中定义良好的元素，但它是定义良好的共轭类。

通常用字母 $\mathcal{O}$ 表示自同构的增长率，用字母 $\mathfrak{o}$ 表示外自同构的增长率。

注 2.5. 考虑一个子群 $H \leq G$，并设 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 保持 G–H 的共轭类。我们可以通过选取 ϕ 的一个代表元 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，使其满足 $\varphi(H) = H$，再考虑外类 $[\varphi|_H] \in \mathrm{Out}(H)$，从而定义一个"限制" $\phi|_H \in \mathrm{Out}(H)$。然而，这个限制 $\phi|_H$ 并非唯一确定：记 $N_G(H)$ 为 H 的正规化子，则共轭作用 $N_G(H) \curvearrowright H$ 确定了一个子群 $C_H^G \leq \mathrm{Out}(H)$，而只有陪集 $\phi|_H \cdot C_H^G$ 是唯一的。

尽管如此，如果 $H \leq G$ 是共轭非扭曲的，那么增长率集合 $\mathfrak{g}(\phi|_H)$ 就是良定义的。事实上，任意两个可能的限制 $\phi|_H \in \mathrm{Out}(H)$，相差一个内自同构在 H 上的限制，而共轭长度在它们的幂作用下以相同的速度增长。（由于 H 是共轭非扭曲的，因此使用 $\|\cdot\|_H$ 还是 $\|\cdot\|_G$ 并无影响。）

我们还可以将 $\mathfrak{G}$ 的另外两个元素分别与 φ 和 ϕ 联系起来。从某种意义上说，它们在集合 $\mathcal{G}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{g}(\phi)$ 中起着"最大值"的作用，但必须强调的是，先验地说，它们**并不**属于 $\mathcal{G}(\varphi)$ 或 $\mathfrak{g}(\phi)$。固定任意一个有限生成集 $S \subseteq G$，记：

$$\overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi) := \big[\sigma_S(\varphi^n)\big], \qquad \text{where} \quad \sigma_S(\varphi) := \max_{s\in S} |\varphi(s)|,$$
$$\overline{\mathfrak{o}}_{\mathrm{top}}(\phi) := \big[\tau_S(\phi^n)\big], \qquad \text{where} \quad \tau_S(\phi) := \min_{x\in G} \max_{s\in S} |x\varphi(s)x^{-1}|.$$

注意，$\overline{\mathcal{O}_{\mathrm{top}}}(\varphi)$ 以及 $\overline{\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}}(\phi)$ 与 S 的选取无关，并且有 $\overline{\mathcal{O}_{\mathrm{top}}}(\varphi) \preceq \overline{\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}}(\phi)$.

引理 2.6. 对于所有 $\mathcal{O} \in \mathcal{G}(\overline{\varphi})$，都有 $\mathcal{O} \preceq \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$；对于所有 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{g}(\overline{\phi})$，都有 $\mathfrak{o} \preceq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$。

证明。对于所有 $g \in G$ 和 $n \in \mathbb{N}$，都有 $|\varphi^n(g)| \leq |g|_S \cdot \sigma^S(\varphi^n)$ 以及 $\|\phi^n(g)\| \leq \|g\|_S \cdot \tau^S(\phi^n)$。该引理直接由这两个不等式得出。□

如前所述，关于一般自同构的增长率，许多自然问题似乎仍未解决。这里列出一些我认为有趣的问题。似乎没有理由认为其中任何一个问题的答案必然是"是"。

问题 2.7。设 G 有限表示。考虑 $\varphi \in$ 自同构群(G)及其外类 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$。

(1) 集合 $\mathcal{G}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{g}(\phi)$ 是否总有一个 $\preceq$最大值? (2) 增长率 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$ 是否总分别属于 $\mathcal{G}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{g}(\phi)$? (3) 集合 $\overline{\mathcal{G}(\varphi)}$ 和 $\overline{\mathfrak{g}(\phi)}$ 是否总是有限的? (4) 当 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$ 至少以指数型增长时，是否有 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \backsim \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$?_(5) 伸缩因子 $\mathrm{str}(\phi) := \sup_{g\in G} \limsup_n \|\phi^n(g)\|^{1/n}$ 是否总是代数整数? (6) 对于元素 $g \in G$，极限 $\lim_n |\varphi^n(g)|^{1/n}$ 和 $\lim_n \|\phi^n(g)\|^{1/n}$ 是否总是存在? (7) 如果 $\mathcal{G}(\varphi)\cup\mathfrak{g}(\phi)$ 中的一个元素增长得比任何多项式都快，那么它是否至少以指数型增长?

据我所知，除了已由 [Cou22]解决的条目（7）之外，上述问题对于有限生成群也仍未解决。以下是 Martin Bridson 告诉我的另一种构造奇异例子的简单方法。

例 2.8. 存在有限呈示群 G 及其自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 和$\phi \in \mathrm{Out}(G)$，它们具有各种增长率，这些增长率都被某个多项式函数从上方界定，但本身并非恰好为多项式。特别是，可以安排使得 $\preceq$ 不是 $\mathcal{G}(\varphi)$ 或 $\mathfrak{g}(\phi)$ 上的全序。下面简要说明这一构造。

设 $\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ 是一个次可加函数，使得对所有 n 有 $\alpha^{-1}(0) = \{0\}$ 且 $\alpha(n) = \alpha(-n)$，并且原像 $\alpha^{-1}([0,n])$ 的基数关于 n 至多指数地增长。设 H 是一个有限生成群，含有元素 $h \in H$，使得函数 $n \mapsto |h^n|_H$ 与 α 双 Lipschitz 等价。这样的对 (H,h) 总是存在，依据 [Ols99]；并且，若 α 是可计算函数，则总可以取 H 为有限表示的 [Ols97]。

现在，考虑自由群 $F = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$，其中 $m \geq 2$ 为某个值。设 $\psi \in \mathrm{Aut}(F)$ 为固定 x_1 并对所有 $k \geq 2$ 映射 $x_k \mapsto x_k x_{k-1}$ 的自同构。注意到 $\psi^n(x_k) = x_k \cdot x_{k-1}\psi(x_{k-1}) \dots \psi^{n-1}(x_{k-1})$，容易推出 $|\psi^n(x_k)|_F \sim n^{k-1}$。

像上面那样选取 (H, h)，我们可以构造融合积

$$G := F \underset{x_1=h}{*} H,$$

若 H 是有限生成的（分别地，有限呈示的），则该融合积也是有限生成的（分别地，有限呈示的）。自同构 ψ 可扩展为自同构 $\varphi := \psi * \mathrm{id}_H \in \mathrm{Aut}(G)$，我们用 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 表示其外类。

(1) 对于元素 x_2，我们总有

$$\|\phi^n(x_2)\|_G \sim |\varphi^n(x_2)|_G \sim |x_2 x_1^n|_G \sim |h^n|_H \sim \alpha(n).$$

特别地，增长率 $[\alpha(n)]$ 同时属于 $\mathcal{G}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{g}(\phi)$。

(2) 为了描述 $k \geq 3$ 下 x_k 的增长率，我们需要对 α 施加更严格一些的限制：假设限制映射 $\alpha|_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 是弱递增的。这意味着 $\sum_{j=1}^{n} \alpha(j) \sim n\alpha(n)$。事实上，单调性给出 $\frac{n}{2}\alpha(\frac{n}{2}) \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha(j) \leq n\alpha(n)$，而次可加性则推出 $\frac{n}{2}\alpha(\frac{n}{2}) \succeq_4 \alpha(n)$。利用这一等价关系，我们对所有 $k \geq 3$ 都有：

$$\|\phi^n(x_k)\|_G \sim |\varphi^n(x_k)|_G \sim \sum_{j=1}^{n-1} |\varphi^j(x_{k-1})|_G \sim n^{k-2}\alpha(n).$$

因此，对于每个 $0 \leq k \leq m-2$，增长率 $[n^k\alpha(n)]$ 属于 $\mathcal{G}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{g}(\phi)$。

(3) 最后，我们考虑上述构造的一个双重版本。设 $\alpha, \beta: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ 是示例开头所述的函数，并设 (H, h) 和 (L, ℓ) 是相应的群与元素对。设 $F' = \langle x_1, x_2, y_1, y_2 \rangle$ 是由四个生成元生成的自由群，并考虑自同构 $\psi' \in \mathrm{Aut}(F')$：它固定 x_1 和 y_1，并将 $x_2 \mapsto x_2 x_1$ 和 $y_2 \mapsto y_2 y_1$ 映射为……。

考虑双重融合积

$$G' := L \underset{\ell=y_1}{*} F' \underset{x_1=h}{*} H,$$

以及由 $\varphi' := \mathrm{id}_L * \psi' * \mathrm{id}_H$ 给出的自同构 $\varphi' \in \mathrm{Aut}(G')$。再次设 $\phi' \in \mathrm{Out}(G')$ 为其外类。与上文完全一样，现在两个增长率 $[\alpha(n)]$ 和 $[\beta(n)]$ 都属于 $\mathcal{G}(\varphi')$ 和 $\mathfrak{g}(\phi')$。我们可以选择 α 和 β，使这两个增长率不可比较：例如，可以任意选择 α，然后按如下方式构造 β。函数 β交替地在 $\mathbb{N}$的长区段上保持为常数，并在 $\mathbb{N}$的其他长区段上以非常小的斜率线性增长。技术性验证留给读者：可以安排使 $\beta \not\preceq \alpha$ 和 $\alpha \not\preceq \beta$，同时确保 β 可计算、次线性，且初始段原像的大小有指数上界。

这给出了集合 $\mathcal{G}(\varphi')$ 和 $\mathfrak{g}(\phi')$，在这些集合上，$\preceq$ 并非全序。不过，这些集合仍然有 $\preceq$极大元，由增长率 $[\alpha(n) + \beta(n)]$，给出，该增长率在 $x_1 y_1 \in G$ 上实现。

2.2. 驯服性与驯顺性。 鉴于例 2.8 和问题 2.7 中所述的病态情形，通常可以将范围限制为增长率属于以下类型的自同构，因为这涵盖了所有最自然的例子。

定义 2.9。 抽象增长率 $[x_n] \in \mathfrak{G}$ 是：

(1) 若存在 $\lambda > 1$ 和 $p \in \mathbb{N}$，使得 $[x_n] \sim [n^p \lambda^n]$ 为纯；(2) 若存在 $\lambda > 1$ 和 $p \in \mathbb{N}$，且对于满足 $[1] \preceq [a_n] \preceq [n^p]$ 的弱递增序列 a_n，有 $[x_n] \sim [a_n \lambda^n]$，则称 (λ, p)–温和。

纯增长率显然是温和的，但反过来并不成立。此外，纯增长率构成 $(\mathfrak{G}, \preceq)$ 的一个全序子集，而温和增长率则不然。还需注意，温和增长率至少是指数型的，因为我们要求 $\lambda > 1$。在研究直角Artin群和特殊群的自同构时，温和增长率尤其有用，因为在这些群中，即使纯性仍然难以企及，有时也能证明驯服性 [Fio25]。

回想一下，对于任意具有外类 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 的 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，我们有 $\overline{\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)} \succeq \overline{\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)}$.

定义 2.10. 设 G 为有限生成的。考虑具有外类 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 的 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$。

(1) 若满足 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \sim \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$，则自同构 φ 是**健全的**。若其所有代表元 $\varphi' \in \mathrm{Aut}(G)$ 都是健全的，则外自同构 ϕ 是**健全的**。(2) 若自同构 φ 同时满足自身健全且 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$ 温和，则称其为**温顺的**。若 φ 温顺，则称外自同构 ϕ 为**温顺的**（根据下面的注 2.12，这与代表元的选择无关）。如果我们希望明确指定使速率 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$ 和 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$ 为 (λ, p)–温和的参数，也会称 φ 和 ϕ 为 (λ, p)– 温顺的。

如果在迭代作用下，字长的增长不会比共轭长度快得多，那么自同构就是健全的：对自同构取幂并不会得到这样的元素——其字长的大部分都源于未能“循环约化”。自由群和曲面群的指数增长自同构都是健全的 [BH92, Lev09, Thu88]，，而内自同构显然并非如此。

注 2.11. 如果 $[x_n] \in \mathfrak{G}$ 是温和的，则有 $\left[\sum_{i\le n} x_i\right] \sim [x_n]$。事实上，由于 $[x_n] \sim [a_n\lambda^n]$ 对弱递增序列 a_n 按定义成立，我们得到 $\sum_{i\le n} a_i\lambda^i \le a_n \sum_{i\le n} \lambda^i \preceq a_n\lambda^n$。

正是由于需要注 2.11，我们才在定义 2.9 中要求序列 a_n 弱递增（并且 $\lambda \neq 1$）。我们将在多处（第 4 节和第5节）以不同形式使用前面的注记，其中一种如下。给定 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 和一个元素$g \in G$，我们可以定义元素 $g_n := g\varphi(g)\varphi^2(g)\ \ldots\varphi^n(g)$。如果增长率 $\left[|\varphi^n(g)|\right]$ 是温和的，那么 $|g_n| \preceq |\varphi^n(g)|$。由此得到下一个观察：

注 2.12. 如果 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 有一个温顺的代表元 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，那么它的所有代表元都是温顺的。事实上，假设 φ 是温顺的，并令 $\psi(x) = g\varphi(x)g^{-1}$ 是另一个代表元。一方面，我们立即得到 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\psi) \succeq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \sim \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$。另一方面，再次设 $g_n := g\varphi(g)\varphi^2(g)\ \ldots\varphi^n(g)$，则有

$$|\psi^n(x)| = |g_{n-1}\varphi^n(x)g_{n-1}^{-1}| \le 2|g_{n-1}| + |\varphi^n(x)|,$$

对所有 $x \in G$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 都成立。因此，回顾注 2.11 以及 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\cdot)$ 的定义，我们还得到 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\psi) \preceq \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$。总之，$\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\psi) \sim \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$，这意味着 ψ 是温顺的。

最后，如果一个元素 $[x_n] \in \mathfrak{G}$ 满足 $[x_n] \preceq [n^p]$（其中某个 $p \in \mathbb{N}$），我们称其为次多项式的。若一个自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 满足 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$ 是次多项式的，则称其为次多项式的。请注意，原则上，外类 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 具有次多项式的 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$，并不意味着任何代表 ϕ 的自同构都是次多项式的。不过，我们有如下与注 2.12 类似的结论。

注 2.13. 如果 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 有一个代表元 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，满足 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq n^p$ 对于某个 $p \in \mathbb{N}$，那么 $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ 中的所有 ϕ 代表元都满足较弱的不等式 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\psi) \preceq n^{p+1}$。证明方法与前一条注释相同：如果 $\psi(x) = g\varphi(x)g^{-1}$，我们有 $|\psi^n(x)| \le 2|g_{n-1}| + |\varphi^n(x)|$，并且：

$$|g_n| \le \sum_{i\le n} |\varphi^i(x)| \preceq \sum_{i\le n} i^p \le n^{p+1}.$$

3. 直积

3.1. 阿贝尔因子。 考虑形如 $G = H \times A$ 的乘积，其中 H 是一个中心平凡的有限生成群，并且 $A \cong \mathbb{Z}^N$ 对某个 $N \geq 1$ 成立。自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 可描述如下。考虑形式矩阵 $\mathcal{M}(H, A)$ 的集合

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ \alpha & \psi \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

其中 $\varphi \in \mathrm{Aut}(H)$，$\psi \in \mathrm{Aut}(A) \cong \mathrm{GL}_N(\mathbb{Z})$，且 $\alpha \in \mathrm{H}^1(H, A)$；换言之，$\alpha$ 是一个同态 $H \to A$。我们可以通过赋予 $\mathcal{M}(H, A)$ 自然的乘法结构，使其成为一个群：

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \alpha_1 & \psi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2 & 0 \\ \alpha_2 & \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1\varphi_2 & 0 \\ \alpha_1\varphi_2 + \psi_1\alpha_2 & \psi_1\psi_2 \end{pmatrix}.$$

存在一个作用 $\mathcal{M}(H, A) \curvearrowright G$，其定义如下：

$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ \alpha & \psi \end{pmatrix} \cdot (h, a) = (\varphi(h), \alpha(h) + \psi(a)),$$

这对应于一个同态 $\iota\colon \mathcal{M}(H, A) \to \mathrm{Aut}(G)$。

引理 3.1。 若 $G = H \times A$ 如上所述，则映射 $\iota\colon \mathcal{M}(H, A) \to \mathrm{Aut}(G)$ 是一个群同构。

证明。单射性显然，因此我们只需证明 ι 是满射。由于 H 的中心平凡，A 是 G 的中心，且它在 $\mathrm{Aut}(G)$ 的所有元素作用下保持不变。给定 $\chi \in \mathrm{Aut}(G)$，我们可以令 $\psi := \chi|_A \in \mathrm{Aut}(A)$。将 π_H, π_A 记作 G的两个因子投影，我们还令 $\alpha := \pi_A \circ \chi|_H \in \mathrm{H}^1(H, A)$ 和 $\varphi := \pi_H \circ \chi|_H$。目前 φ 只是一个同态 $H \to H$，但我们当然可以将 χ 写成 $\chi(h, a) = (\varphi(h)\ \alpha(h) + \psi(a))$。我们有 $\chi(G) \subseteq \varphi(H) \times A$，且 χ 是一个同构，因此 $\varphi\colon H \to H$ 必为满射。同理，我们有 $\chi(\ker \varphi) \subseteq A$ 且 $\chi(A) = A$，所以 χ 的单射性蕴含 φ的单射性。这表明 $\varphi \in \mathrm{Aut}(H)$，因此 χ 属于映射$\iota\colon \mathcal{M}(H, A) \to \mathrm{Aut}(G)$的像。由于 $\chi \in \mathrm{Aut}(G)$ 是任意的，至此引理得证。□

为简化行内记号，此后我们将用 $\mathcal{M}(\varphi, \psi, \alpha)$ 表示自同构群(G) 中的元素，它是方程 (3.1) 中的矩阵在 ι 下的像。对每个 $n \geq 1$，我们有 $\chi^n = \mathcal{M}(\varphi^n, \psi^n, \alpha_n)$，其中 $\alpha_n = \sum_{j=1}^{n} \psi^{j-1}\alpha\varphi^{n-j}$。因此，$\mathcal{M}(\varphi, \psi, \alpha)$ 及其到 $\mathrm{Out}(G)$ 的投影的增长率，可以相当容易地用 φ 和 ψ 的增长率来描述。

对于有限生成群 Q，我们用 Q_{ab} 表示 Q 的阿贝尔化的自由部分。每个自同构 $\chi \in$自同构群(Q) 自然地下降为 $\chi_{\mathrm{ab}} \in$ 自同构群(Q_{ab}) 的一个自同构，并且每个元素 $q \in Q$ 等变地投影到一个元素 $q_{\mathrm{ab}} \in Q_{\mathrm{ab}}$。

引理 3.2. 设 $G = H \times A$ 如上。对每个自同构 $\chi = \mathcal{M}(\varphi, \psi, \alpha) \in$ 自同构群(G) 以及每个元素 $g = (h, a) \in G$，在抽象增长率集合 $\mathfrak{G}$ 中我们有如下等式：

$$|\chi^n(g)| \sim |\varphi^n(h)| + |\chi^n_{\mathrm{ab}}(g_{\mathrm{ab}})|, \qquad \|\chi^n(g)\| \sim \|\varphi^n(h)\| + |\chi^n_{\mathrm{ab}}(g_{\mathrm{ab}})|.$$

此外，存在一个代数整数 $\lambda \geq 1$ 和 $p \in \mathbb{N}$，使得 $|\chi^n_{\mathrm{ab}}(g_{\mathrm{ab}})| \sim n^p\lambda^n$。

证明。元素 $\chi^n(g)$ 在 H和 A中的坐标分别为 $\varphi^n(h)$ 和 $\alpha_n(g) + \psi^n(a)$，其中α_n 是上文所述的同态。我们有 $G_{\mathrm{ab}} = H_{\mathrm{ab}} \oplus A$，并且同态$\alpha_n\colon H \to A$ 通过 H_{ab}分解。因此，$\chi^n_{\mathrm{ab}}(g_{\mathrm{ab}})$ 沿 A 的坐标与$\chi^n(g)$ 的坐标相同。由此得到不等式

$$|\chi^n(g)| \sim |\varphi^n(h)| + |\alpha_n(g) + \psi^n(a)| \preceq |\varphi^n(h)| + |\chi^n_{\mathrm{ab}}(g_{\mathrm{ab}})|,$$

以及关于 $\|\chi^n(g)\|$的类似不等式。反向不等式显然成立，因为投影 $G \to H$ 和 $G \to G_{\mathrm{ab}}$ 是 Lipschitz 的。

最后，对于代数整数 $\lambda \geq 1$ 和某个 $p \in \mathbb{N}$，我们有 $|\chi_{\mathrm{ab}}(g_{\mathrm{ab}})| \sim n^p \lambda^n$，因为 G_{ab} 是自由阿贝尔的，因此可以引用下面的经典引理 3.3。代数整数在取复共轭、乘积、平方根时仍为代数整数，因此取模后也仍为代数整数。□

引理 3.3. 设 $k \geq 1$。对于每个自同构 $\varphi \in$ 自同构群$(\mathbb{Z}^k) = \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ 以及每个元素$a \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$，存在 $p \in \mathbb{N}$ 和 $\mu \in \mathbb{C}$，使得 $|\mu| \geq 1$

$$|\varphi^n(a)| = \|\varphi^n(a)\| \sim n^p |\mu|^n.$$

此外，$\varphi \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}) \leq \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ 有一个$(p+1)$维若尔当块，其特征值为 μ。

对于自由群和曲面群的自同构，在某个自同构作用下所有元素都不会以最高速度增长的极大子群，具有特别良好的性质。具体而言，它们总是有限生成的。下一个例子表明，引入一个阿贝尔直因子后，这一性质便不再成立。

例 3.4. 考虑乘积 $G = F_k \times \mathbb{Z}^k$（其中 $k \geq 3$）。存在一个自同构$\chi \in \mathrm{Aut}(G)$，它恰有三种增长率——即 $[1]$、$[\lambda^n]$ 和 $[n\lambda^n]$（其中某个 $\lambda > 1$）——其中 $[1]$ 在单位元处实现，$[\lambda^n]$ 由子群 $N \times \mathbb{Z}^k \lhd G$ 中的非平凡元素实现，而 $N \lhd F_n$ 是无限生成的；$[n\lambda^n]$ 则由 G的所有其余元素实现。

这类自同构 χ 的构造相当普遍。我们从一个正的、完全不可约自同构[2] $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_k)$开始。令 φ_{ab} 为它在阿贝尔化 $(F_k)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^k$ 上诱导的自同构，并令 $\alpha\colon F_k \to (F_k)_{\mathrm{ab}}$ 为商投影。按上述记号，设 $G := F_k \times (F_k)_{\mathrm{ab}} \cong F_k \times \mathbb{Z}^k$以及 $\chi := \mathcal{M}(\varphi, \varphi_{\mathrm{ab}}, \alpha)$。现在我们证明上述结论。

令 λ 为 φ的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值。由列车轨道映射的存在性，对于所有非平凡元素 $h \in F_k$ [BH92]，我们有$|\varphi^n(h)| \sim \|\varphi^n(h)\| \sim \lambda^n$。此外，按照 F_k 和 $(F_k)_{\mathrm{ab}}$的标准生成集，对于所有 $h \in F_k$，我们有 $|\varphi^n_{\mathrm{ab}}(\alpha(h))| \leq |\varphi^n(h)|$。当 h 是 F_k的正元素时，这个不等式为等式，因为 φ 是一个正自同构。

注意，对每个 $n \geq 1$，都有 $\chi^n = \mathcal{M}(\varphi^n, \varphi^n_{\mathrm{ab}}, \alpha_n)$，其中 $\alpha_n = n \cdot (\alpha \circ \varphi^{n-1}) = n \cdot (\varphi^{n-1}{}_{\mathrm{ab}} \circ \alpha)$。因此，

$$\chi^n(h, a) = \big(\varphi^n(h),\ \varphi^n_{\mathrm{ab}}(a) + n \cdot (\varphi^{n-1}_{\mathrm{ab}} \alpha)(h)\big).$$

由此可知，对于每个非平凡元素 $g \in G$，都有 $\lambda^n \preceq |\chi^n(g)| \preceq n\lambda^n$。此外，若 $g = (h, \alpha(h)) \in F_k \times (F_k)_{\mathrm{ab}}$，且 $h \in F_k$ 是正元素，则有$|\chi^n(g)| \sim n\lambda^n$。共轭长度增长也有相同的结论。

现在，令 $\beta\colon F_k \to \mathbb{R}^k$ 为同态的 $n \to +\infty$ 极限：

$$\frac{1}{n\lambda^n} \alpha_n = \lambda^{-n} (\varphi^n_{\mathrm{ab}} \circ \alpha)\colon F_k \to (F_k)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^k.$$

该极限存在，是因为 $\varphi_{\mathrm{ab}} \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$ 的某个幂可由一个元素全为正的矩阵表示，且 φ_{ab} 的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值为 λ，因此 φ_{ab} 的所有其他特征值的模均为 $< \lambda$。根据上述讨论，同态 β 是非平凡的，因为它在 F_k 的正元素上不为零。

显然，$\ker \beta \times \mathbb{Z}^k$ 中的任意非平凡元素 g 都有 $|\chi^n(g)| \sim \|\chi^n(g)\| \sim \lambda^n$；而按照构造，$\ker \beta \times \mathbb{Z}^k$ 之外的G 中所有元素的增长率均为 $[n\lambda^n]$。这证明了我们所有的命题。

3.2. **一般情形。** 考虑一个有限生成群 $G = G_1 \times \ldots \times G_k \times A$，其中 $k \geq 0$和 A 是自由阿贝尔群。假设每个 G_i 都是直接不可分解的，且具有平凡中心。

引理 3.5。 自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 对任意 $1 \leq i \leq k$置换子群 $\langle G_i, A \rangle$.

证明。考虑某个 $\varphi \in$ 自同构群(G)。由于 A 是 G的中心，因此 $\varphi(A) = A$。于是，G 由子群 $\varphi(G_1) \ldots, \varphi(G_k)$ A生成。记 $\pi_1\colon G \to G_1$ 为因子投影，可知 G_1 由两两交换的子群 $\pi_1\varphi(G_1) \ldots, \pi_1\varphi(G_k)$生成。由于

[2]在 $F_3 = \langle a, b, c \rangle$ 中的一个简单例子是将 $a \mapsto ab$, $b \mapsto bc$, $c \mapsto cab$映射的自同构 φ。

G_1 具有平凡中心，每个子群 $\pi_1\varphi(G_i)$与由其他 $k-1$ 个子群 $\pi_1\varphi(G_j)$生成的子群的交集都是平凡的。因此

$$G_1 = \pi_1\varphi(G_1) \times \ldots \times \pi_1\varphi(G_k).$$

由于 G_1 是直接不可分解的，对某个指标 i 必有 $G_1 = \pi_1\varphi(G_i)$，且对所有 $j \neq i$有 $\pi_1\varphi(G_j) =\{1\}$。对 G的所有因子重复该论证，我们得到一个置换 $\sigma \in \mathrm{Sym}(k)$，使得对所有 $1 \leq i \leq k$ 有 $G_i = \pi_i\varphi(G_{\sigma(i)})$，且对所有 $j \neq \sigma(i)$有 $\pi_i\varphi(G_j) = \{1\}$。这表明对所有 $1 \leq j \leq k$有$\langle\varphi(G_j)^A\rangle = \langle G_{\sigma^{-1}(j)}\ A\rangle$，从而完成证明。□

设自同构群$^0(G) \leq$ 自同构群(G)为保持每个子群 $\langle G_i,\ A\rangle$的有限指标子群。当$A = \{1\}$时，自同构群$^0(G)$的元素只是形如 $\varphi_1 \times \ldots \times \varphi_k$的乘积，其中 $\varphi_i \in$自同构群(G_i)。现在我们可以应用引理 3.2，立即推出如下结论。

推论 3.6. 设 $G = G_1 \times \ldots \times G_k \times A$ 如上。对每个 $\varphi \in$自同构群$^0(G)$，存在自同构 $\varphi_i \in$自同构群(G_i)，使得对每个元素 $g = (g_1, \ldots, g_k, a) \in G$，我们有：

$$|\varphi^n(g)| \sim \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i^n(g_i)| + |\varphi_{\mathrm{ab}}^n(g_{\mathrm{ab}})|, \qquad \|\varphi^n(g)\| \sim \sum_{i=1}^{k} \|\varphi_i^n(g_i)\| + |\varphi_{\mathrm{ab}}^n(g_{\mathrm{ab}})|.$$

此外，对每个 φ 和 g，存在代数整数 $\lambda \geq 1$ 和 $p \in \mathbb{N}$，满足 $|\varphi_{\mathrm{ab}}^n(g_{\mathrm{ab}})| \sim n^p\lambda^n$。

4. Invariant graphs of groups

考虑一个有限生成群 G 以及一个外自同构 $\phi \in$Out(G)，它保持 G 作为群图的一个分裂。下一个引理是 Bass–Serre 理论中的一道经典习题。

引理 4.1. 考虑一个群 G，其单边分裂为

$$G = A *_C B \qquad or \qquad G = A*_{C,\gamma} = \langle A, t \mid t^{-1}ct = \gamma(c),\ \forall c \in C\rangle.$$

如果对某个 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$，*Bass–Serre* 树 $G \curvearrowright T$ 可延拓为一个无逆元的作用 $G \rtimes_\phi \mathbb{Z} \curvearrowright T$，则 ϕ 由如下形式的自同构 $\varphi \in$自同构群(G) 表示：

(1) 在合并积的情形下，我们有 $\varphi(A) = A$ 和 $\varphi(B) = B$。*(2)* 在 *HNN* 情形下，对于某个 $a \in A$，我们有 $\varphi(A) = A$、$\varphi(C) = C$ 和 $\varphi(t) = ta$。

下一个命题是本节的主要结果。核心结论是，对于一个 ϕ–不变的群图，只要顶点群上的增长行为足够良好且至少为指数型，整个群上的增长就不可能严格快于顶点群上的增长。这通常可用于描述 ϕ 在整个群上的最高增长率。与此同时，理解 ϕ 的所有增长率则是一个复杂得多的问题，本文篇幅有限，不予讨论。

群 G 的一个分裂是其在单纯树 $G \curvearrowright T$ 上的极小作用，该树至少有一条边，且不存在边反转。若某个 $\phi \in$Out(G)使得 G在T 上的作用可扩展为 T上的 $G \rtimes_\phi \mathbb{Z}$作用，则该分裂称为 ϕ–不变的。回顾一下，增长率 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\cdot)$和 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\cdot)$是在第 2.1 节中定义的，温顺自同构则在定义 2.10 中引入。给定 $\phi \in$Out(G)和一个子群 $H \leq G$，若其具有 ϕ–不变的 G–共轭类，则相关限制 $\phi|_H \in$ Out(H)已在备注 2.5 中讨论。

命题 4.2. 考虑一个有限生成群 G，它具有某个 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$下的 ϕ–不变分裂 $G \curvearrowright T$。假设 ϕ 在有限图 T/G上诱导的映射是恒等映射。此外，假设存在整数 p、$q \in \mathbb{N}$ 和一个有限子集 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_{>1}$，使得对每个顶点$v \in T$，$v$ 的 G–稳定子（记作 V）满足以下条件中的**至少一个**：

(a) 对于 ϕ 的每个代表元 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$，若满足 $\varphi(V) = V$，且对于每个 $g \in V$，都有$|\varphi^n(g)| \preceq n^q$（相对于 G 的一个有限生成集计算字长）；

(b) V 是有限生成的，在 G 中共轭非扭曲；并且对于 ϕ 的每个代表元 $\varphi \in$自同构群(G)，若满足 $\varphi(V) = V$，则限制 $\varphi|_V \in$ 自同构群(V) 对某个 $\lambda \in \Lambda$ 是 (λ, p)–温顺的。

那么，以下性质成立。

(1) 如果不存在 *(b)* 型顶点群，那么对 ϕ 的所有代表元$\overline{\varphi} \in \mathrm{Aut}(G)$，都有 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(G, \varphi) \preceq n^{q+2}$。

(2) 如果至少存在一个 *(b)* 型顶点群，那么 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$ 对 $\mu = \max \Lambda$ 是 (μ, p)– 温顺的。此外，我们可以选取有限多个 *(b)* 型顶点群 $V_1, \dots, V_k \leq G$，以及外自同构 ϕ 的限制 $\phi_i \in \mathrm{Out}(V_i)$，使得 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \sim \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi_i)$。

证明。首先，当 T 是 G 的单边分裂时，我们证明该命题；也就是说，它是一个 amalgamated product 或 HNN 扩张。在这两种情况下，我们都用引理 4.1 中所述形式的自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ 来表示 ϕ。在证明的最后，我们将简要说明如何以此为基础处理一般的群图。

首先，假设 $G = A *_C B$ 具有 $\varphi(A) = A$ 和 $\varphi(B) = B$。G 的一个一般元素可写为 $g = a_1 b_1 \dots a_k b_k$，其中 $a_i \in A$ 且 $b_i \in B$，并且我们有

$$\varphi^n(g) = \varphi^n(a_1)\varphi^n(b_1) \dots \varphi^n(a_k)\varphi^n(b_k), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由此得到简单的界 $|\varphi^n(g)| \preceq \sum_{i=1}^{k} |\varphi^n(a_i)| + \sum_{i=1}^{k} |\varphi^n(b_i)|$。在第（1）部分中，我们立即得到对所有 $g \in G$，$|\varphi^n(g)| \preceq n^q$，因此 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq n^q$。关于第（2）部分，为简单起见，假设 A 属于类型（a），而 B 属于类型（b）（A 和 B 均属于类型（b）的情形类似）。由于 $\varphi|_B$ 是温顺的，每个元素 $g \in G$ 都满足

$$|\varphi^n(g)| \preceq n^q + \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi|_B) \preceq \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi|_B) \sim \overline{\mathfrak{o}}_{\mathrm{top}}([\varphi|_B]).$$

因此，$\overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}([\varphi|_B])$。同时，$B$ 是共轭非扭曲的这一事实意味着 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \succeq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}([\varphi|_B])$。于是，我们得到 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \sim \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \sim \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}([\varphi|_B])$，这表明 ϕ 是温顺的，符合要求。最后，如果顶点群 A 和 B 均属于类型（b），同样的论证表明 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \sim \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \sim \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}([\varphi|_A]) + \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}([\varphi|_B])$。

现在设 $G = A*_C$ 满足 $\varphi(A) = A$、$\varphi(C) = C$ 以及 $\varphi(t) = ta$，其中 t 是 HNN 扩张的稳定字母，而 $a \in A$ 是某个元素。G 的一个一般元素可写为$g = x_0 t^{\epsilon_1} x_1 \dots t^{\epsilon_k} x_k$，其中 $x_i \in A$ 且 $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$。于是有

$$\varphi^n(g) = x_0' t^{\epsilon_1} x_1' \dots t^{\epsilon_k} x_k',$$

其中，令 $a_n := a\varphi(a)\varphi^2(a) \dots \varphi^{n-1}(a)$，每个 x_i' 均为以下四种情形之一（取决于 ϵ_i 和 ϵ_{i+1}的值）：或者为 $\varphi^n(x_i)$，或者为 $a_n\varphi^n(x_i)$，或者为 $\varphi^n(x_i)a_n^{-1}$，或者为 $a_n\varphi^n(x_i)a_n^{-1}$。由此得到不等式

$$\overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi|_A) + |a_n|.$$

在第（1）部分中，我们有 $|a_n| \preceq n^{q+1}$，并得到 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\overline{\varphi}) \preceq n^{q+1}$。在第（2）部分中，$\varphi|_A$ 是温顺的这一事实给出 $|a_n| \preceq \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi|_A)$（注 2.11），因此 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi|_A)$。同时，由于 A 是共轭非扭曲的，我们有 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \succeq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}([\varphi|_A])$，并且如上所述 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \asymp \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \sim \overline{\mathfrak{o}}_{\mathrm{top}}([\varphi|_A])$，这表明 ϕ 是温顺的。

到目前为止，我们只考虑了外类 ϕ 的一个特定代表元 φ。这在第（2）部分中无关紧要，而在第（1）部分中，它会使界 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq n^{q+1}$ 对一般代表元 φ' 转化为较弱的界 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi') \preceq n^{q+2}$（注 2.13）。

这就证明了当 $G \curvearrowright T$ 为单边分裂时的命题。一般地，我们可以把 ϕ–不变分裂 $G \curvearrowright T$ 分解为有限个 ϕ–不变单边分裂的序列（先坍缩 T 的除一条边以外的所有 G–边轨道，然后再逐一加回）。对单边情形的迭代应用随即证明第（2）部分。第（1）部分需要稍多注意，因为我们希望多项式指数 q 至多增加2。为此，只需注意到 T 可以分解为有限个融合积的序列，随后是单个

多重 HNN 扩张（其商图为圆周的楔和、且仅有单个顶点的分裂）。融合完全不增加 q （对某个特定代表元 φ而言），而最后的多重 HNN 分裂至多使其增加1（此处论证与单个 HNN 情形相同，只是我们将有有限多个稳定字母 t_i ，并且一般地， φ 只能写成形式 $\varphi(t_i) = a_i t a_i'$ ，其中 a_i, $a_i' \in A$）。最后，为利用注 2.13 处理任意代表元 φ' ，还会再增加1。至此完成该命题的证明。□

注 4.3。 如果命题 4.2 的第（2）部分中的增长率 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi_i)$ 都是纯的（定义 2.9），那么 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi) \sim \sum_i \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi_i)$ 就简单地等于 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi_i)$中最快的一个。

5. 自由积

一个**自由分裂** 是单纯树上的极小作用 $G \curvearrowright T$，其边稳定子平凡、至少有一条边，且不存在边反转。如果子群族 $\mathcal{H}$ 中的每个子群都固定 T的某个顶点，我们就称该分裂**相对于** 子群族 $\mathcal{H}$ 。自由分裂通常不在我们希望研究的自同构下保持不变（因此第 4 节不适用），不过我们通常可以置身于这样的情形：分裂的椭圆子群的集合至少在该自同构下保持不变。

设 G 是一个有限生成群。 G 的一个（**自由**）**因子系** 是分解中出现的子群 G_1的所有G–共轭的集合 $\mathcal{F}$

$$G = G_1 * \cdots * G_k * F_m$$

其中有 k, $m \geq 0$ 以及 $k + m \geq 2$。我们要求 G_i 是非平凡的，但不要求它们自由不可分解；如果 $G \cong F_m$ 对于 $m \geq 2$成立，则允许 $\mathcal{F}$ 为空。只要群 G 既不是自由不可分解的，也不同构于 $\mathbb{Z}$，它就具有因子系。

沿用 [GH22], 的说法，如果 $(G, \mathcal{F})$ 满足 $(k, m) \in \{(2, 0)、(1, 1)\}$，则称该对为零星的。$(G, \mathcal{F})$–自由因子是 G 的一个子群，它作为 G 相对于 $\mathcal{F}$ 的自由分裂中的顶点群出现。若一个 $(G, \mathcal{F})$–自由因子既不是平凡群，也不是 $\mathcal{F}$ 中的元素，则称其为真自由因子。令 $\mathrm{Out}(G, \mathcal{F}) \leq \mathrm{Out}(G)$ 表示这样一个外自同构子群：其中的外自同构保持 $\mathcal{F}$ 中每个子群的 G–共轭类不变。若元素 $\phi \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F})$ 的任意（非平凡）幂都不保持某个真 $(G, \mathcal{F})$–自由因子的 G–共轭类，则称其为**完全不可约**。

以下是完全不可约元素的一种等价刻画。这表明，通过取幂并改变因子系，我们总能将问题归约为研究完全不可约元素。若 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$是 G的因子系，我们记 $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ ，如果 $\mathcal{F}_1$ 中的每个子群都包含在 $\mathcal{F}_2$中的某个子群内。

引理 5.1. 若 $\phi \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F})$ 不是完全不可约的，则存在一个因子系 $\mathcal{F}' > \mathcal{F}$和一个整数 $p \geq 1$ ，使得 $\phi^p \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F}')$。

证明。 记 $G = G_1 * \cdots * G_k * F_m$，其中 $\mathcal{F}$的元素恰好是G_i的共轭。若 $\phi \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F})$ 不是完全不可约的，设 H是一个真 $(G, \mathcal{F})$–自由因子，它在某个幂 ϕ^p （其中 $p \geq 1$）的作用下保持不变。定义

$$\mathcal{F}' := \{gHg^{-1} \mid g \in G\} \cup \mathcal{F}_0,$$

其中 $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ 是不包含于任何 G–共轭的 H中的子群集合 .

根据定义， G 具有一个相对于 $\mathcal{F}$的自由分裂，其中 H是一个顶点群；设 V_1，……， V_s是该分裂中其他（非平凡）顶点群的 G–共轭类的代表元。因此，对于某个 $m' \geq 0$，我们有 $G = H * V_1 * \ldots V_s * F_{m'}$。每个 V_i都是一个自由群与某些 G_j 的 G–共轭的自由积（这些 G_j 恰好属于 V_i）。因此，我们还可以写成$G = H * G_1' * \cdots * G_{k'}' * F_{m''}$，其中每个 G_i'都是某个 G_j的 G–共轭，而 G_i' 的 G–共轭恰好是 $\mathcal{F}_0$中的元素。这表明 $\mathcal{F}'$ 确实是 G的因子系。

显然， $\phi^p \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F}')$，且 $\mathcal{F}' > \mathcal{F}$，因此证明完成。 □

首先，我们可以根据完全不可约自同构在因子系各元素上的增长来刻画其增长。这是列车轨道映射在自由积中的一个相对直接（但也相当繁琐）的应用 [CT94, FM15, Lym22b]。

回忆一下，$\mathcal{G}(\varphi) \subseteq \mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{g}(\phi) \subseteq \mathfrak{G}$ 分别表示自同构 φ 和外自同构 ϕ 的增长率集合。速率 $\mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$ 总是为 $\mathfrak{g}(\phi)$ 中的所有元素提供上界，但事先未必属于 $\mathfrak{g}(\phi)$；$\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$ 和 $\mathcal{G}(\varphi)$ 也同样如此。另请回忆，我们将多项式乘指数增长率称为纯（定义 2.9）。

命题 5.2。设 $G = G_1 * \cdots * G_k * F_m$ 是一个有限生成群，令 $\mathcal{F}$ 为由 G_i 给出的因子系，并令 $\phi \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F})$。假设 ϕ 完全不可约，且 $\mathcal{F}$ 不是零星的。此外，假设每个限制 $\phi_i := \phi|_{G_i} \in \mathrm{Out}(G_i)$ 都由某个 $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(G_i)$ 表示，使得 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi_i)$ 是次多项式，或者 φ_i 是某些 $\lambda_i > 1$ 和 $p_i \in \mathbb{N}$ 对应的 (λ_i, p_i)–温顺的。那么存在一个佩龙数 $\lambda > 1$，使得以下结论均成立。

(1) 对于 $\mu = \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda\}$ 和某个 $q \in \mathbb{N}$，自同构 ϕ 是 (μ, q)–温顺的。对于满足 $\lambda_j = \mu$ 的最大整数 p_j，我们有 $q \leq p_j + 1$；如果不存在这样的指标 j，则 $q = 0$。*(2)* 如果对于所有满足 $\lambda_i = \mu$ 的指标 i，我们都有 $[\lambda_i^n] \in \mathfrak{g}(\phi_i)$，那么 $[\mu^n] \in \mathfrak{g}(\phi)$。*(3)* 假设存在一个有限集 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_{>1}$ 和 $P \in \mathbb{N}$，使得对于所有指标 i 以及 $\mathit{Aut}(G_i)$ 中代表 $\phi_i \in \mathit{Out}(G_i)$ 的所有代表元 $\varphi_i' \in$，并集 $\mathcal{G}(\varphi_i') \cup \mathfrak{g}(\phi_i)$ 中的每个增长率要么是次多项式，要么等于 $[n^a \nu^n]$，其中 $\nu \in \Lambda$ 为某个元素且 $0 \leq a \leq P$ 为某个整数。于是，集合 $\mathfrak{g}(\phi)$ 中的每个增长率要么是次多项式，要么等于 $[\lambda^n]$，要么对于某个 $\nu \in \Lambda$ 和某个整数 $0 \leq a \leq P + 1$ 等于 $[n^a \nu^n]$。

证明。我们先进行一般性讨论，只假设 G 有限生成，而不对限制 $\phi|_{G_i}$ 作任何额外假设；下文的公式 5.1 和 5.3 将分别给出既不同共轭于 $\mathcal{F}$ 中元素的元素的词长增长估计，以及 ϕ 的最高增长率。之后，我们将加入驯顺性假设，并得出必要结论。为使整体表述清晰，全文省略部分技术细节。

我们首先将 G 表示为一个群图 $\mathcal{G}$ 的基本群，其中边群平凡，并且恰好 $\mathcal{F}$ 中的元素是非平凡顶点群的 G–共轭。我们可以找到 $\mathcal{G}$，使得此外，ϕ 由相对列车轨道映射 $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ 实现；例如参见 [Lym22a，第 1] 节。令 $\mathcal{G}$ 为群图 $\mathcal{G}$ 的底层有限图，并令 $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ 为 f 底层的图映射。选取基顶点 p 和 $\mathcal{G}$ 的生成树后，我们将 $\mathcal{G}$ 的顶点群与 G_i 对应起来，并固定外类 ϕ 的一个代表元 $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$。为方便记号，选取自同构 $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(G_i)$ 来代表限制 $\phi_i \in \mathrm{Out}(G_i)$，并将不交并 $\bigsqcup_i G_i$ 上的自双射 ψ 记为在每个 G_i 上都等于 φ_i 的映射（注意，一般而言，ψ 并非 $\mathrm{Aut}(G)$ 中某个单一元素的限制）。

广义路径是一个字符串 $\pi = g_0 e_1 g_1 \ldots e_s g_s$，满足 $e_1 \ldots e_s$ 是 $\mathcal{G}$ 中的一条（定向）边路径，且每个 g_j 都属于与 e_j 的终端顶点（也是 e_{j+1} 的初始顶点）相关联的顶点群 G_i。π 的边长为 $\ell(\pi) := s$，总长度为 $|\pi| := s + \sum_j |g_j|$，其中字长 $|g_j|$ 是相对于为 G_i 选定的某个有限生成集计算的。若对任意指标 j，都不存在 $g_j = 1$ 和 $e_{j+1} = e_j^{-1}$，则广义路径 π 是浸入的。G 的元素与以 $p \in \mathcal{G}$ 为基点的闭合浸入广义路径一一对应。元素 $g \in G$ 的字长与表示 g 的广义路径 π 的总长度大致相同，二者相差一个与 g 无关的乘法常数。

由于 ϕ 是完全不可约的，f 的任何幂都不会使 $\mathcal{G}$ 的某个至少含一条边的真子图保持不变（至多在不改变顶点群的前提下收缩 $\mathcal{G}$ 的某些边）。特别地，列车轨道映射 f 只有一个含边的层；设 $\lambda \geq 1$ 为其转移矩阵的佩龙–弗罗贝尼乌斯特征值。至多将 ϕ 和 f 提升到某个幂后，我们可以进一步假设：

(i) f 固定 $\mathcal{G}$ 的每个顶点；

(ii) 对每条边 $e \subseteq \mathcal{G}$，路径 $f(e)$包含 $\mathcal{G}$的所有边；(iii) 对每条（定向）边 $e \subseteq \mathcal{G}$，边路径 $f^n(e) \subseteq \mathcal{G}$ 均以同一条边 e_1开始，并以同一条边 e_2结束，对于 $n \geq 1$。

由于 $\mathcal{F}$是非孤立型，对任意边 e，我们都没有 $f(e) = e$。因此，边长 $\ell(f^n(e))$ 随着 n 呈指数型增长，因而 $\lambda \neq 1$也如此。

如果 $\pi = g_0 e_1 g_1 \dots e_s g_s$是一条广义路径，其像 $f(\pi)$ 是 $\psi(g_0)f(e_1)\psi(g_1)\dots f(e_s)\psi(g_s)$，回想一下，我们已在每条 G_i上定义了 $\psi = \varphi_i$。这里，每个 $f(e_i)$ 都是一条广义路径，其底层边路径为 $f(e_i)$。

为了便于估算路径 $f^n(e)$ 的总长度，我们再定义最后一个辅助概念。如果 $\pi = g_0 e_1 g_1 \dots e_s g_s$，我们将连续边之间的空位称为 π的节点；因此，π 有 $s+1$ 个节点，它们分别由元素 g_0、.....、g_s 占据。我们归纳地为 $f^n(\pi)$ 的每个节点赋予一个阶，该阶是介于 0 和 n之间的整数。π 的所有节点的阶均为 0。如果 e 是 $f^{n-1}(\pi)$ 的一条边，那么 $f(e)$ 是 $f^n(\pi)$ 的一条子路径；对于某条边 $e \subseteq f^{n-1}(\pi)$，$f^n(\pi)$ 中所有作为 $f(e)$ 内部节点的节点，其阶也都规定为 0。$f^n(\pi)$ 的其他每个节点都是 f 下 $f^{n-1}(\pi)$ 中某个节点的像；若 $f^{n-1}(\pi)$ 中该节点的阶为 m（其中 $m \geq 0$），则规定 $f^n(\pi)$ 中对应节点的阶为 $m+1$。因此，$f^n(\pi)$ 的初始节点和终端节点的阶均为 n。

直接计算可知，对于所有 $0 \leq i < n$，路径 $f^n(\pi)$ 恰有$\ell(f^{n-i}(\pi))$ 个 $-\ell(f^{n-i-1}(\pi))$ 阶节点，并且有 $\ell(\pi)$ 个 $+1$阶节点。选取一个常数$C \geq 1$，使得每条边 $e \subseteq \mathcal{G}$ 都满足

$$\tfrac{1}{C}\lambda^n \leq \ell(f^n(e)) \leq C\lambda^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

由于 $\ell(f(e)) \geq$ 对所有边 $e \subseteq \mathcal{G}$，我们也有 $\ell(f^n(e)) - \ell(f^{n-1}(e)) \geq \ell(f^{n-1}(e)) \geq \frac{1}{\lambda C}\lambda^n$。—

令 Ω 为有限集，其中包含路径 $f(e)$ 的节点上出现的群元素，e 遍历 $\mathcal{G}$ 的边；为简化接下来的讨论，我们将单位元 $1 \in G$ 加入 Ω。对于任意 $n \geq 0$，$f^n(e)$ 的每个 0 阶节点都被 Ω 中的元素占据。性质 (iii) 表明，对于 $1 \leq i \leq n$，$f^n(e)$ 的每个 i 阶节点都被形如以下形式的元素占据

$$\big(a\psi(a)\psi^2(a)\dots\psi^{i-2}(a)\big)\cdot\psi^{i-1}(b)\psi^i(c)\psi^{i-1}(d)\cdot\big(\psi^{i-2}(e)\dots\psi^2(e)\psi(e)e\big), \quad \text{where } a,b,c,d,e \in \Omega.$$

特别地，固定 i后，当允许 n 和 e 变化时，在路径 $f^n(e)$ 中占据阶为 i 的节点的元素只能取自一个固定的有限集。此外，这个有限集至多包含 $|\Omega|^5$ 个元素，且与 i 无关。将这些有限多个元素的平均词长记为 N_i。

对于任意一条边 $e \subseteq \mathcal{G}$，我们可以写成

$$|f^n(e)| = \ell(f^n(e)) + \sum_{i=0}^{n-1} N_i^{e,n}\cdot\big(\ell(f^{n-i}(e)) - \ell(f^{n-i-1}(e))\big) + N_n^{e,n}(\ell(e)+1),$$

其中 $N^{e}{}_{,i}{}^{n}$ 是占据 $f^n(e)$ 中阶为 i 的节点的元素的（加权）平均词长。回想性质（ii），$N^{e}{}_{,i}{}^{n}$ 大致等于 N_i，相差一个与 e, i, n 无关的乘法常数。因此，只需稍微增大上文选取的常数 C，便有

$$\frac{1}{C}\cdot\sum_{i=0}^{n} N_i\lambda^{n-i} \leq |f^n(e)| \leq C\sum_{i=0}^{n} N_i\lambda^{n-i}, \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N} \text{ and } e \subseteq \mathcal{G}.$$

对于任意浸入路径 $\pi = g_0 e_1 g_1 \dots e_s g_s$，记 $|f^n(\pi)|_{\mathrm{pt}}$为将路径 $f^n(\pi)$ 拉紧后的长度，即与 $f^n(\pi)$ 同伦的浸入路径的长度。如果长度 $|f^n(\pi)|_{\mathrm{pt}}$不随 n 的增加而保持有界，则上述不等式允许我们估计

$$|f^n(\pi)|_{\mathrm{pt}} \sim \sum_{j=0}^{s} |\psi^n(g_j)| + \ell(\pi)\cdot\sum_{j=0}^{n} N_j\lambda^{n-j}, \tag{5.1}$$

其中，符号 $\sim$ 中隐含的乘法常数不依赖于 π 或整数 n。这里，不等式 $\gtrsim$ 利用了有界回溯 [Coo87]，正如 [BH92], 在图 $\mathcal{G}$中所做的那样。

方程（5.1）表明，对于任意元素 $g \in G$，若不共轭到子群G_1，……，G_k之一中，则要么增长率 $\big[\|\phi^n(g)\|\big]$ 有界，要么我们有：

$$\big[\|\phi^n(g)\|\big] \sim \big[|\varphi^n(g)|\big] \preceq \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi_i) + \big[\sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{n-j}\big]. \tag{5.2}$$

特别地，我们断言这蕴含 $\mathfrak{G}$中的如下等式：

$$\overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi) \sim \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi_i) + \big[\sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{n-j}\big]. \tag{5.3}$$

不等式 $\preceq$ 由 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$的定义以及方程（5.2）直接得出。反之，显然对所有 i都有 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \succeq \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi_i)$，而由方程（5.1）还可推得$\overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi) \succeq \sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{n-j}$。因此，$\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$（粗略地）以这些增长率之和为下界。

到目前为止的整个讨论完全是一般性的：除有限生成外，我们并未对 G_i 使用任何假设。

从现在起，假设对每个 i，要么 $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(G_i)$ 对某些 $\lambda_i > 1$ and$p_i \in \mathbb{N}$ 是 $(\lambda_i,\ p_i)$–温顺的，要么增长率 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi_i)$ 是次多项式的（此时，为方便起见，我们令 $\lambda_i := 1$）。接下来，我们讨论命题各部分中的断言。

第 (1) 部分。回顾注 2.11 和 N_n 的定义，我们有

$$[N_n] \preceq \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi_i) \preceq [n^p \lambda_*^n], \tag{5.4}$$

其中 $\lambda_* := \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$，而 p 定义为满足 $\lambda_j = \lambda_*$ 的 p_j 的最大值。因此，等式 (5.3) 给出：

- 若 $\lambda_* > \lambda$，则 $\overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi) \sim \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi_i)$，且后者是 $(\lambda_*,\ p)$–温和的；
- 若 $\lambda_* \le \lambda$，则 $\overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi) \sim \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathcal{O}}_{\mathrm{top}}(\varphi_i) + \big[\sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{n-j}\big]$，其中后者的增长率满足 $[\lambda^n] \preceq \big[\sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{n-j}\big] \preceq [n^{p+1}\lambda^n]$。特别地，将此增长率改写为$\big[\lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{-j}\big]$，可见它是 $(\lambda,\ p+1)$–温和的。

我们只需证明 φ 是健全的，也就是说，我们有$\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$。如果 $g \in G$不共轭到任何一个 G_i中，且其共轭类没有有限的 ϕ–轨道，那么方程（5.2）表明 $|\varphi^n(g)| \sim \|\phi^n(g)\| \preceq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$。反之，如果$g$ 共轭到某个 G_i中，那么$|\varphi^n(g)| \preceq \mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi_i) \sim \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi_i) \preceq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$。总之，对所有 $g \in G$，我们都有 $|\varphi^n(g)| \preceq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$，由此可得所需的 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi) \preceq \mathfrak{o}_{\mathrm{top}}(\phi)$。

第（2）部分。如果 $\lambda_* < \lambda$，那么方程（5.4）表明$\sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{n-j} \sim \lambda^n$。因此，方程（5.2）意味着，对于所有不共轭到任何 G_i中且其共轭类不被 ϕ的某个幂保持的元素 $g \in G$，都有 $\|\phi^n(g)\| \sim \lambda^n$。因此，在这种情况下，我们有 $[\lambda^n] \in \mathfrak{gl}(\phi)$。反之，如果 $\lambda_* \ge \lambda$，那么第（2）部分的假设意味着，对于某个指标 i，有 $[\lambda_*^n] \in \mathfrak{gl}(\phi_i) \subseteq \mathfrak{gl}(\phi)$。无论哪种情况，回想起 $\mu = \max\{\lambda_*, \lambda\}$，我们都有 $[\mu^n] \in \mathfrak{gl}(\phi)$。

第（3）部分。假设存在有限集 $\Lambda \subseteq \mathbb{R}_{>1}$ 和 $P \in \mathbb{N}$，使得对于所有指标 i以及 $\phi_i \in \mathrm{Out}(G_i)$ 的所有自同构群 $\mathrm{Aut}(G_i)$ 代表元 $\varphi_i' \in$，并集 $\mathcal{G}(\varphi_i') \cup \mathfrak{gl}(\phi_i)$ 中的每个增长率要么是次多项式，要么等于 $[n^a \nu^n]$，其中 $\nu \in \Lambda$ 为某个数，$0 \le a \le P$ 为某个整数。

我们的目标是精确估计所有不共轭于任何 G_i 且满足 $\|\phi^n(g)\| \not\sim 1$的元素 $g \in G$ 的增长率 $\big[\|\phi^n(g)\|\big]$。方程（5.1）表明，$\big[\|\phi^n(g)\|\big]$ 是 $\bigcup_i \mathcal{G}(\varphi_i)$中的有限个增长率之和，其中增长率为 $\big[\sum_{j=0}^{n} N_j \lambda^{n-j}\big]$。由于纯

增长率的有限和等于其中最快的增长率，因此只需证明，要么 $\sum_{j=0}^{n} N_j\lambda^{n-j} \sim \lambda^n$，要么对于某个 $\nu \in \Lambda$ 和整数 $0 \le a \le P+1$，$\sum_{j=0}^{n} N_j\lambda^{n-j} \sim n^a\nu^n$。

回顾一下，整数 N_{j+1} 定义为以下形式元素的平均字长，其中元素个数一致有界：

$$a\psi(a)\dots\psi^{j-1}(a)\cdot\psi^{j}(c)\cdot\psi^{j-1}(e)\dots\psi(e)e,$$

其中 a，c，$e \in G_i$，对于某个指标 i。因此，我们需要以下观察 n.

命题。取某个 $a, c, e \in G_i$，并令 $u_n := a\psi(a)\dots\psi^{n-1}(a)\cdot\psi^{n}(c)\cdot\psi^{n-1}(e)\dots\psi(e)e$。那么，增长率 $\big[|u_n|+|u_{n+1}|\big]$ 要么是次多项式，要么等于某个 $\nu \in \Lambda$ 与整数 $0 \le a \le P$ 所对应的 $[n^a\nu^n]$。

命题证明。为简化记号，设 $e_n := \psi^{n-1}(e)\dots\psi(e)e$，注意到我们有

$$u_n^{-1}u_{n+1} = e_n^{-1}\psi^n\big(c^{-1}a\psi(c)e\big)e_n.$$

回顾一下，$\psi|_{G_i}$ 与自同构 $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(G_i)$ 一致，并令 $\eta \in \mathrm{Aut}(G_i)$ 为由 $\eta(x) = e^{-1}\varphi_i(x)e$ 定义的自同构。对于每个 $n \ge 1$，我们有 $\eta^n(x) = e_n^{-1}\varphi_i^n(x)e_n$。因此，设 $w := c^{-1}a\psi(c)e$，即可将上面的等式简单地改写为

$$u_n^{-1}u_{n+1} = \eta^n(w).$$

由于 η 与 φ_i 属于同一个外类，第（3）部分的假设保证，$\mathcal{G}(\eta)$ 中的每个增长率对于 $\nu \in \Lambda$ 和 $0 \le a \le P$ 都是次多项式或等于 $[n^a\nu^n]$。因此，增长率 $\big[|u_n^{-1}u_{n+1}|\big]$ 也具有同样的性质。

如果 $\big[|u_n^{-1}u_{n+1}|\big]$ 是次多项式，那么通过望远镜论证可知 $\big[|u_n|\big]$ 是次多项式。反之，假设 $|u_n^{-1}u_{n+1}| \sim n^a\nu^n$。那么，同样可得 $|u_n| \preceq \sum_{j=1}^{n} j^a\nu^j \preceq n^a\nu^n$，而三角不等式给出 $|u_n| + |u_{n+1}| \succeq |u_n^{-1}u_{n+1}| \sim n^a\nu^n$。总之，我们得到等式 $|u_n| + |u_{n+1}| \sim n^a\nu^n$，如所需。■

现在，命题表明，增长率 $\big[N_n+N_{n+1}\big]$ 是次多项式，或等于 $[n^a\nu^n]$，其中有 $\nu \in \Lambda$ 和 $0 \le a \le P$。每次将两项相加，由此可知，如果 $\nu < \lambda$，那么 $\lambda^n \cdot \sum_{j=0}^{n} N_j\lambda^{-j}$ 是 $\sim \lambda^n$；如果 $\nu > \lambda$，则是 $\sim n^a\nu^n$；最后，如果 $\nu = \lambda$，则是 $\sim n^{a+1}\nu^n$。

至此，第（3）部分以及整个命题的证明都完成了。 □

命题 5.2 限定讨论完全不可约自同构，旨在简化原本就颇具技术性的证明。不过，这一限制很容易去掉，我们将在下一个推论中这样做。

推论 5.3. 设 G 有限生成且有无限端，其自由不可分解自由因子为 H_i。考虑 $\phi \in \mathrm{Out}(G)$，令 $\phi_i \in \mathrm{Out}(H_i)$ 为 ϕ 的限制，并令 $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(H_i)$ 为 ϕ_i 的代表元。对每个 i，假设 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi_i)$ 是次多项式，或者存在某个 $\lambda_i > 1$ 和 $p_i \in \mathbb{N}$，使得 φ_i 是 (λ_i, p_i)–温顺的。那么以下结论均成立。

(1) 要么 ϕ 由某个具有次多项式增长率 $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}(\varphi)$ 的 $\varphi \in$ 自同构群(G) 表示，要么对于某些 $\mu > 1$ 和 $q \in \mathbb{N}$，ϕ 是 (μ, q)–温顺的，其中 μ 是 $\max_i \lambda_i$ 或更大的佩龙数。*(2)* 如果对于所有满足 $\lambda_i = \mu$ 的指标 i，都有 $[\lambda_i^n] \in \mathfrak{g}(\phi_i)$，那么 $\mathfrak{g}(\phi)$。

证明。写作 $G = H_1 * \cdots * H_{k'} * F_{m'}$，其中各个 H_i 都是自由不可分解的。我们可以假设 $k' \ge 1$，因为自由群的所有自同构都满足该结论（例如参见 [Lev09]）。将 $\mathcal{F}'$ 定义为 H_i 的 G–共轭元所成的集合，显然 $\mathcal{F}'$ 是一个 ϕ–不变因子系。将 ϕ 提升至某个幂次后，我们有 $\phi \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F}')$。再将 ϕ 提升至某个幂次后，反复应用引理 5.1，可得到因子系 $\mathcal{F} > \mathcal{F}'$，使得 $\phi \in \mathrm{Out}(G, \mathcal{F})$，且 ϕ 对于 $(G, \mathcal{F})$ 是完全不可约的。

对 G 的格鲁什科秩进行归纳，我们可以假设推论对 ϕ 在 $\mathcal{F}$ 的每个元素上的限制均成立。若 $\mathcal{F}$ 是非孤立型，则推论的内容正是命题 5.2。若 $\mathcal{F}$ 是零星的，则 G 存在一个由 ϕ 保持不变的自由分裂，其顶点群为 $\mathcal{F}$ 的元素；此时推论由命题 4.2 得出。□

参考文献

[BFH00] Mladen Bestvina、Mark Feighn 和 Michael Handel。Out(F_n) 的 Tits 替代定理。I. 指数增长自同构的动力学。《数学年刊》（第 2 辑），151(2):517–623，2000。[BFH05] Mladen Bestvina、Mark Feighn 和 Michael Handel。Out(F_n) 的 Tits 替代定理。II. Kolchin 型定理。《数学年刊》（第 2 辑），161(1):1–59，2005。[BG10] Martin R. Bridson 和 Daniel Groves。自由群自同构的映射环面的二次等周不等式。《美国数学会回忆录》，203(955):xii+152，2010。[BH92] Mladen Bestvina 和 Michael Handel。自由群的列车轨道与自同构。《数学年刊》（第 2 辑），135(1):1–51，1992。[CHHL] Rémi Coulon、Arnaud Hilion、Camille Horbez 和 Gilbert Levitt。准备中。[Coo87] Daryl Cooper。自由群的自同构具有有限生成的不动点集。《代数杂志》，111(2):453–456，1987。[Cou22] Rémi Coulon。自同构具有奇异增长的群之例。《代数与几何拓扑》，22(4):1497–1510，2022。[CT94] Donald J. Collins 和 Edward C. Turner。自由积自同构的高效代表元。《密歇根数学杂志》，41(3):443–464，1994。[Fio25] Elia Fioravanti。几乎特殊群的自同构增长。arXiv:2501.12321，2025。[FM15] Stefano Francaviglia 和 Armando Martino。自由积的拉伸因子、度量与列车轨道。《伊利诺伊数学杂志》，59(4):859–899，2015。[GH22] Vincent Guirardel 和 Camille Horbez。相对因子图的边界及自由积自同构的子群分类。《几何与拓扑》，26(1):71–126，2022。[GL17] Vincent Guirardel 和 Gilbert Levitt。群的 JSJ 分解。《Astérisque》，(395):vii+165，2017。[Lev09] Gilbert Levitt。自由群自同构增长类型的计数。《泛函分析与应用》，19(4):1119–1146，2009。[Lym22a] Rylee A. Lyman。自由积的 CT。arXiv:2203.08868，2022。[Lym22b] Rylee A. Lyman。群图上的列车轨道映射。《群、几何与动力学》，16(4):1389–1422，2022。[Ols97] A. Yu. Olshanski

˘ 188 11 51 98, ı。有限呈示群子群的扭曲。《数学文集》，( ): – 。[Ols99] A. Yu. Olshanskiˇı。子群的扭曲函数。载于《几何群论：南半球篇》（堪培拉，1996），第 281–291 页。德格鲁伊特出版社，柏林，1999。[RS97] Eliyahu Rips 和 Zlil Sela。有限呈示群的循环分裂与典范 JSJ 分解。《数学年刊》（第 2 辑），146(1):53–109，1997。[Thu88] William P. Thurston。曲面微分同胚的几何与动力学。《美国数学会通报》（新辑），19(2):417–431，1988。

卡尔斯鲁厄理工学院代数与几何研究所电子邮箱地址： elia.fioravanti@kit.edu