arXiv:2603.11183v1 [math.SP] 11 Mar 2026

二维离散周期¨薛定谔算子费米等谱刚性的一个反例

TAYLOR BRYSIEWICZ、MATTHEW FAUST 和 WENCAI LIU

ABSTRACT. 通过数值认证，我们证明存在一个非平凡的实值二维周期势，其对应的离散薛¨定谔算子与零势费米等谱。这对第三位作者提出的关于二维中费米等谱性刚性的问题给出了否定答案。这个例子也推翻了 Gieseker、Kn¨orrer 和 Trubowitz 在 20 世纪 90 年代提出的猜想：对于任意非平凡的实值二维周期势，其费米簇在所有能级上都是不可约的。

1. INTRODUCTION AND MAIN RESULTS

令 $q=(q_1,\dots,q_d)\in\mathbb{Z}_+^d$ 两两互素，并定义格

$$\Gamma = q_1\mathbb{Z}\oplus q_2\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus q_d\mathbb{Z}.$$

函数 $V\colon \mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$ 若满足以下条件，则称为 Γ-周期函数（或简称周期函数）：

$$V(n+\gamma)=V(n),\qquad \text{for all } \gamma\in\Gamma,\ n\in\mathbb{Z}^d.$$

全文中，我们假设势 V 是 Γ-周期的。对于 $n\in\mathbb{Z}^d$，记

$$\|n\|_1=\sum_{j=1}^{d}|n_j| \quad \text{where} \quad n=(n_1,n_2,\cdots,n_d)$$

并令 Δ 为格 $\mathbb{Z}^d$上的离散拉普拉斯算子，定义为

$$(\Delta u)(n)=\sum_{n'\in\mathbb{Z}^d,\ \|n'-n\|_1=1} u(n').$$

本文研究离散周期薛定谔算子的等谱问题，以及费米簇的不可约性¨，算子形式为 $\Delta+V$。有关这些主题的背景知识和最新进展，请参阅综述文章 [23, 29] 。

2020 数学学科分类。 39A12（主要）； 14P05、65G20、65H14（次要）。关键词与短语。 刚性定理、费米等谱性、费米簇、不可约性、离散周期薛定谔算子、Krawczyk方法、数值认证。

定义 1。布洛赫簇 $B(V)$ 由 $\Delta+V$中所有满足以下条件的点对 $(k,\lambda) \in \mathbb{C}^{d+1}$构成：存在一个非零解

$$(\Delta u)(n) + V(n)u(n) = \lambda u(n), \qquad n \in \mathbb{Z}^d, \tag{1}$$

满足弗洛凯–布洛赫边界条件

$$u(n + q_j \mathbf{e}_j) = e^{2\pi i k_j} u(n), \qquad j = 1, 2, \ldots, d,\ n \in \mathbb{Z}^d, \tag{2}$$

其中 $k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{C}^d$和 $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^d$是 $\mathbb{Z}^d$ 的标准基。对于固定的 $\lambda \in \mathbb{C}$, 费米面 （或费米簇）定义为

$$F_\lambda(V) = \{k : (k, \lambda) \in B(V)\}.$$

本文主要关注周期薛定谔算子的等谱性。关于等谱性的各种概念，文献中已有研究；例如，¨可参阅相关讨论。在这些概念中，费米等谱性似乎是最困难、也最鲜为人知的一种。这一概念由 [9, 32]引入，是本文研究的重点。 [32],

定义 2。 [1] [32] 设 X 和 Y 是两个 Γ-周期函数。若 X和 Y 在能级 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 处费米等谱，则称

$$F_{\lambda_0}(X) = F_{\lambda_0}(Y).$$

如果它们在某个 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$上费米等谱，则称它们为费米等谱。

在 [32], ，已有若干关于离散周期薛定谔算子的刚性结果。其中之一如下。

定理 1.1。 *[32]* 设 $d \geq 3$。唯一一个与零势0费米等谱的实势 V 就是它本身0 。

这是 很自然会问，在维数 $d = 2$的情形下，是否也有同样的刚性结果。

问题 1。[29]。设 $d = 2$ ，并假设 V 是一个与$\mathbf{0}$费米等谱的实周期势。是否必然有 $V = \mathbf{0}$?

本文对这个问题给出了否定的回答。

定理 1.2. 设 $d = 2$。存在一个非平凡的 $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$-周期实势 V，它在 $\lambda = 0$ 处与零势费米等谱，即

$$F_0(V) = F_0(\mathbf{0}).$$

本文的第二个目标是研究费米簇的不可约性。近三十年来，费米簇（以及布洛赫簇）的不可约性及其相关应用，例如嵌入特征值和谱带边缘，已

[1]在下一节引入 Floquet 矩阵后，可以通过恒等式 $\det(\mathcal{D}_X(z) - \lambda_0 I) = \det(\mathcal{D}_Y(z) - \lambda_0 I)$ 等价地定义费米等谱性。

得到广泛研究；例如参见 [1–4，10–15，20，21，24，25，27，31，33–36]。

下述不可约性结果表明费米簇的不可约性与费米等谱性之间存在联系。用 $[V]$ 表示 V在一个周期胞上的平均值。

定理 1.3. *[28]* 对任意 $d \geq 3$，费米簇 $F_\lambda(V)/\mathbb{Z}^d$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}$都是不可约的。对 $d = 2$，费米簇 $F_\lambda(V)/\mathbb{Z}^2$ 对所有$\lambda \in \mathbb{C}$ 都是不可约的，可能除 $\lambda = [V]$外，并且 $F_{[V]}(V)/\mathbb{Z}^2$ 至多有两个不可约分支。此外，若费米簇 $F_{[V]}(V)/\mathbb{Z}^2$ 有两个不可约分支，则

$$F_{[V]}(V) = F_0(\mathbf{0}). \tag{3}$$

特别地，V 与常势费米等谱（等价地，在平移后与零势费米等谱）。

备注 1. 当 $d = 2$ 且 $V = \mathbf{0}$时，直接计算（例如参见 *[29]*）表明 $F_0(\mathbf{0})/\mathbb{Z}^2$ 恰好有两个不可约分支。

我们注意到，定理 1.3 适用于复值势 V。不难看出，存在定义在 $\mathbb{Z}^2$上的非恒定复值势，使得（3）成立。根据注 1，这类势意味着 $F_{[V]}(V)$ 有两个不可约分支。历史上，人们普遍认为，对于实值势，只有常值势会使费米簇$F_\lambda(V)/\mathbb{Z}^2$ 在某个能级上可约。20 世纪 90 年代初，Gieseker、Kn¨orrer 和 Trubowitz 将这一看法表述为一个猜想 [17]。

猜想 1. [17, p. 43]. 设 q_1 和 q_2 为两个不同的奇素数。假设 V是一个非常值的实值 $q_1\mathbb{Z}\oplus q_2\mathbb{Z}$-周期势。那么，对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}$，费米簇 $F_\lambda(V)/\mathbb{Z}^2$ 都是不可约的。

事实上，猜想 1 对于“可分”势成立；参见 [30]。然而，定理 1.2 的一个推论是，猜想 1 一般而言是错误的。

定理 1.4。 存在一个非常数实值周期势 V，定义在$\mathbb{Z}^2$ 上，使得费米簇 $F_\lambda(V)/\mathbb{Z}^2$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是可约的。

我们使用标准的认证技术证明定理1.2，这些技术在 `Macaulay2` [18] 和 `julia` [5]中实现。我们的代码见附录。首先，我们将与势 $3\mathbb{Z}\times 5\mathbb{Z}$费米等谱的 $\mathbf{0}$ -周期势空间，在能级0处表述为一组多项式方程的解集。随后，我们使用 Krawczyk方法的实现 [22]在 `Macaulay2` [18]软件包 `NumericalCertification` [26]中认证该多项式系统存在一个光滑孤立实解。根据隐函数定理，这保证了存在一条与$\mathbf{0}$ 在

能级0处费米等谱的势的实曲线。我们使用 `julia` [5] 中给出的Krawczyk方法实 `HomotopyContinuation.jl` [7, 8]现，独立地验证了这一认证结果。

我们的 `Macaulay2` 代码证明了存在这样一条实曲线，但并未说明认证过程中使用的候选解是如何得到的。我们简要介绍如何借助`homotopy iterators` [6]找到这一近似解，该方法在`HomotopyContinuation.jl`中实现，可绕过完全数值求解该系统所需的计算成本。

2. Floquet matrices and polynomial formulation

2.1. Floquet矩阵。本节回顾Floquet问题的多项式表述。我们的目标是明确写出对应于 $3\mathbb{Z}\times 5\mathbb{Z}$-周期势的Floquet矩阵。

令 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 并记 $z = (z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots,\ z_d)$。对于任意 $z\in(\mathbb{C}^*)^d$，考虑方程

$$(\Delta + V)u = \lambda u \tag{4}$$

带有边界条件

$$u(n + q_j\mathbf{e}_j) = z_j\, u(n), \qquad j = 1, 2, \ldots, d, \quad n\in\mathbb{Z}^d. \tag{5}$$

我们固定 W Γ的一个基本域:

$$W = \{n = (n_1, n_2, \ldots, n_d)\in\mathbb{Z}^d : 0\le n_j\le q_j - 1,\ j = 1, 2, \ldots, d\},$$

并将算子 $\Delta + V$限制在 $Q = q_1q_2\cdots q_d$维空间

$$\{u(n) : n\in W\}.$$

方程 (4) 连同边界条件 (5)（等价地，(1) 和 (2)），便成为一个关于 $Q\times Q$ 某个矩阵 $\mathcal{D}_V(z)$（或 $D_V(k)$，以k为变量）的特征值问题。我们将 $\mathcal{D}_V(z)$（分别将 $D_V(k)$）称为*Floquet*矩阵。

我们定义

$$\mathcal{P}_V(z,\lambda) = \det(\mathcal{D}_V(z) - \lambda I), \qquad P_V(k,\lambda) = \det(D_V(k) - \lambda I). \tag{6}$$

因此，费米簇可以写成

$$F_\lambda(V) = \{k\in\mathbb{C}^d : P_V(k,\lambda) = 0\}. \tag{7}$$

以下引理刻画了费米等谱性。

引理 2.1。 *[32, 引理 2.3 和定理 4。1]* 两个 Γ-周期函数 X和 Y 在能级 $\lambda_0\in\mathbb{C}$ 当且仅当

$$\det(\mathcal{D}_X(z) - \lambda_0 I) = \det(\mathcal{D}_Y(z) - \lambda_0 I).$$

特别地，周期势 V 与$\lambda_0 = 0$ 处的零势费米等谱，当且仅当

$$\det\mathcal{D}_V(z) = \det\mathcal{D}_{\mathbf{0}}(z). \tag{8}$$

如果两个 Γ-周期函数 X 和 Y 费米等谱，那么

$$[X] = [Y]. \tag{9}$$

将维数特化为 $d = 2$，Floquet矩阵 $\mathcal{D}_V(z)$ 在 $q_1 \geq 3$ 且 $q_2 \geq 3$ (见 [17, 28]) 时具有如下表达式:

$$(\mathcal{D}_V(z_1, z_2))_{(m,n),(m',n')} = \begin{cases} V(m,n) & m = m',\ n = n', \\ 1 & (m-m')^2 + (n-n')^2 = 1, \\ z_1 & m' = 1,\ m = q_1,\ n = n', \\ z_1^{-1} & m' = q_1,\ m = 1,\ n = n', \\ z_2 & m = m',\ n' = 1,\ n = q_2, \\ z_2^{-1} & m = m',\ n' = q_2,\ n = 1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $(q_1, q_2) = (3, 5)$，以及如下排序

$$(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2), \ldots, (1,5), (2,5), (3,5).$$

Floquet矩阵 $\mathcal{D}_V(z)$ 可显式写为：记 $v_{i,j}$ 为 $V(i, j)$ 的取值，则有

$$\mathcal{D}_V(z) = \begin{pmatrix}
v_{1,1} & 1 & z_1^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 & 0 \\
1 & v_{2,1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2^{-1} & 0 \\
z_1 & 1 & v_{3,1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_2^{-1} \\
1 & 0 & 0 & v_{1,2} & 1 & z_1^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & v_{2,2} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & z_1 & 1 & v_{3,2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_{1,3} & 1 & z_1^{-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & v_{2,3} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 & 1 & v_{3,3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_{1,4} & 1 & z_1^{-1} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & v_{2,4} & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 & 1 & v_{3,4} & 0 & 0 & 1 \\
z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_{1,5} & 1 & z_1^{-1} \\
0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & v_{2,5} & 1 \\
0 & 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 & 1 & v_{3,5}
\end{pmatrix}.$$

2.2. 化归为代数系统。 将势的取值 $V(m, n)$ 视为变量 $\mathbf{v} = (v_{m,n})^{(3,5)}_{(m,n)=(1,1)}$，我们构造多项式方程

$$F : f_1(\mathbf{v}) = \ldots = f_{14}(\mathbf{v}) = 0 \qquad \text{where} \quad \mathbf{v} = (v_{1,1}, \ldots, v_{3,5})$$

通过展开恒等式（8）并比较系数得到。在变量 z_1 和 z_2 中共有 29 个单项式，不过有几个系数相同，因此只剩下 14 个不同的系数。这 14 个多项式

f_1、……、 $f_{14} \in \mathbb{Q}[v_{1,1}, \ldots, v_{3,5}]$ 构成多项式系统 F。附录中给出了构造该系统的代码。根据引理 2.1，费米等谱性问题归结为寻找 $F = \mathbf{0}$ 的非零实解。

定理 2.2. 存在一个非平凡的 $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$-周期实势 V，它在能量 $\lambda = 0$ 处与零势费米等谱，当且仅当系统 $F = \boldsymbol{0}$ 存在一个不为$\boldsymbol{0}$的实解。

3. Computational proof of Theorem 1.2

由矩阵确定的 $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$-周期势

$$V^* = \begin{pmatrix} 3.587996 & -0.130207 & -1.455985 & -4.537496 & -0.224238 \\ 0.688112 & -0.678205 & -0.377625 & 4.597172 & 1.810359 \\ 1.870801 & 0.006187 & -4.264991 & -0.362522 & -0.529361 \end{pmatrix}$$

~可证明地接近一个光滑实解 V，该解属于系统 $F = (f_1, \ldots, f_{14}) = \mathbf{0}$定理2.2。首先，可以计算

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{D}_{V^*}(z)) &= z_1^5 + z_1^{-5} + z_2^3 + z_2^{-3} + 2.3 \times 10^{-8}\left(-z_1^2 + \cdots + 5.8 \times 10^{-7} z_1^{-3} z_2^{-1}\right) \\ &\approx z_1^5 + z_1^{-5} + z_2^3 + z_2^{-3} = \det(\mathcal{D}_{\mathbf{0}}(z)). \end{aligned}$$

然而，由于上述计算具有数值性质，显然并非证明。相反，为了证明我们的结论，我们采用一种称为 Krawczyk方法的数值认证程序 [22]。

我们首先说明如何计算多项式 $F = (f_1, \ldots, f_{14})$，并找到 $F = \mathbf{0}$ 的候选近似实解，例如上文的 V^* 。接下来，我们概述 Krawczyk方法，并解释其成功如何证明存在一个真正的光滑实解 V，该解属于 $F = \mathbf{0}$ 且接近 V^*。最后，我们使用两个独立的实现将 Krawczyk方法应用于 V^* 和 F，一个在 `Macaulay2`[18, 26] 中，另一个在 `julia` [5, 7, 8] 中。

3.1. 生成系统。虽然过程相当直接，但构造定理 2.2 的系统 $F = \mathbf{0}$时仍须谨慎。直接计算 `Macaulay2` 中 $\mathcal{D}_V(z)$ 的行列式并不足够，而且无法在合理时间内完成。为了使计算可行，首先，我们将 `Bareiss` 的默认行列式计算策略改为 `Cofactor`，以利用 $\mathcal{D}_V(z)$ 的稀疏性。其次，在通过模理想 $\langle z_1 z_1^{-1} - 1, z_2 z_2^{-1} - 1 \rangle$ 运算来合并 $\mathcal{D}_V(z) - \mathcal{D}_{\mathbf{0}}(z)$ 中单项式的系数之前，我们将 z_1^{-1} 和 z_2^{-1} 视为独立的形式变量。经过这些调整， `Macaulay2` 能在不到五秒的时间内计算出多项式 $f_1, \ldots, f_{14}$。用于计算这些多项式并将其打印到文件中的 `Macaulay2` 代码（采用 `Macaulay2` 和 `julia` 语法）可在附录中找到。

寻找候选解。在本小节中，我们讨论一种生成 $F = \mathbf{0}$ 的候选解的方法。多项式 $f_1, \ldots, f_{14}$ 的次数为

$$3, 1, 6, 4, 2, 9, 7, 5, 4, 12, 10, 2, 7, 15$$

分别。B´ezout定理 [16, 节 5] 进而指出 $X_{\mathbb{C}}$ 的次数不大于乘积 $\prod_{i=1}^{14} \deg(f_i)$ $= 4,\ 572,\ 288,\ 000$。事实上，这正是求解 $X_{\mathbb{C}}$ 的超平面截面时所需跟踪的路径数，所借助的标准数值代数几何技术是全次数同伦 [19]。以大约 ≈ 350 条路径每分钟的速率，求解全部解大约需要 ≈ 25 年。相反，我们采用[6] 的惰性求值方法，并构造同伦迭代器，用于 $F = \mathbf{0}$ 的解集（与一个随机超平面相交）。该数据结构使我们能够一次跟踪一条路径，直到找到一个实解。该过程在大约400分钟后终止，并在第 142295th 条路径上找到了一个实解。

3.2. **Krawczyk方法**。我们用来证明 F 具有一个非平凡实根的关键算法是 *Krawczyk*方法 [22]。固定一个方形多项式系统

$$F\colon f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$$

以及一个候选浮点近似解 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{C}^n$，Krawczyk 方法构造并试图证明某个包围盒

$$B = [a_1, a_1'] \times [b_1, b_1'] \times \cdots \times [a_n, a_n'] \times [b_n, b_n'] \subseteq \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$$

包含 $\mathbf{x}^*$，在与 $F = (f_1, \ldots, f_n)$ 相关联的牛顿算子 $N_F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 下会收缩，即 $N_F(B) \subseteq$ 内点 (B)。根据巴拿赫不动点定理，这证明必然存在一个唯一的不动点 $\tilde{\mathbf{x}}$，其位于 N_F 的 B 中。此类不动点恰好是 F 的根，因此找到一个会收缩的区间盒即可证明存在唯一的孤立根 $\tilde{\mathbf{x}}$，其属于 F。此外，这样的解 $\tilde{\mathbf{x}}$ 必定是非奇异的，即 $\mathrm{Jac}(F)|_{\tilde{\mathbf{x}}}$ 的秩 $= n$。如果使用共轭对称盒成功应用此方法，即 $B = B$，则唯一的根 $\tilde{\mathbf{x}}$ 必定是实解，因为非实解总是成共轭对出现。

区间算术 的技术会保守地界定 B 在 N_F 下的像，并将其包含在另一个区间盒 B' 中；由此可以证明 $B' \subset \mathrm{interior}(B)$。这可以通过浮点算术以经过认证的方式完成。有关这一如今已成为标准的认证方法的实现细节，请参阅 [7]。

3.3. **应用 Krawczyk方法**。 我们注意到，多项式系统$F = (f_1, \ldots, f_{14}) = \mathbf{0}$ 不是方阵系统：它包含 14 个方程和 15 个变量。我们将其在 $\mathbb{C}$ 上的解集记为 $X_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{15}$。我们在系统中引入一个额外的线性方程 $f_{15} = v_{1,1} - \frac{61}{17} = \underline{0}$。注意，常数 $\frac{61}{17}$ 是 $(V^*)_{1,1} = 3.587996$ 的有理近似。

由于 $F = (f_1, \ldots\ldots, f_{15}) \in \mathbb{Q}[v_{1,1}, \ldots, v_{3,5}]$ 是一个方阵系统，可以通过寻找一个包含 V^* 的区间盒并使用区间算术来应用 Krawczyk方法

以证明它在 N_F下是压缩映射。我们首先使用 V^*，借助 Macaulay2软件包 NumericalCertification [26] 通过 Krawczyk方法认证了该结果，随后又在 julia中进行了认证。定义 F 和我们的候选解 VR后，附录中给出的 Macaulay2代码的以下部分约需五分钟执行完毕。

```
i31 : 耗时 认证 = 实解认证(F, VR)-- 使用了 307.116 秒
（CPU）；65.7524 秒（线程）；0 秒（GC）o31 = 真
```

在 julia实现中，会明确返回包围盒：

```
julia> @耗时 C = 认证(F,[VR]) 72.813907 秒（7.26 M 次分配：1.559
GiB，0.50% GC 时间）认证结果

==================
- 给出了 1 个解候选 - 1 个已认证解区间（1 个实数，0 个复数） - 1 个不
同的已认证解区间（1 个实数，0 个复数） julia> C.certificates[1].I
15x1 Arblib.AcbMatrix:[3.58823529411765 +/- 4.15e-15] + [+/-
9.22e-24]im[0.006182356890 +/-3.66e-13] + [+/- 8.32e-15]im[4.
5975381751 +/- 1.98e-11] + [+/- 3.11e-13]im[0.6880871518 +/- 4.12e-
11] + [+/- 2.20e-13]im[-1.45618086541 +/-5.87e-12] + [+/- 1.34e-13]
im[-0.3624667542 +/- 5.06e-11] + [+/- 1.42e-13]im[1.87083079377 +/-
6.49e-12] + [+/- 1.42e-13]im[-0.37760827121 +/-2.18e-12] + [+/-
4.88e-14]im[-0.22423435991 +/-4.72e-12] + [+/- 6.62e-14]im[-0.
130229923447 +/- 9.59e-13] + [+/- 1.93e-14]im[-4.26517137975 +/-
2.68e-12] + [+/- 6.36e-14]im[1.8104349519 +/- 5.58e-11] + [+/-
3.06e-13]im[-0.6782689763 +/- 1.49e-11] + [+/- 1.99e-13]im[-4.
5378217507 +/- 3.48e-11] + [+/- 2.46e-13]im[-0.52932644272 +/-
5.79e-12] + [+/- 1.28e-13]im
```

这是以下定理的计算证明。

定理 3.1。存在一个实非奇异点 V，它位于解集 $X_{\mathbb{C}}$ 的一维实分支上，属于 $F = 0$。

定理 3.1 表明，存在一个非零的 $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$-周期势，其在能量 $\lambda = 0$ 处与零势费米等谱，这由定理 2.2得出，

从而证明定理 1.2。由于存在一个非平凡的 $3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$-周期实势 $\widetilde{}$势 V 使得

$$F_0(\widetilde{V}) = F_0(\mathbf{0}). \tag{10}$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$方程（9）表明 $[V] = 0$。因此， V 不可能是常函数，由此结合注释 1.4 和方程（1和方程（10），即可推出定理1 。因此，我们对问题1给出了否定答案，并推翻了猜想。

Acknowledgments

T. Brysiewicz 获得了 NSERC 探索基金 RGPIN-2023-03551 的资助。M. Faust 获得了 NSF DMS-2052519 的部分资助。W. Liu 获得了 NSF 项目 DMS-2246031 和 DMS-2052572、西蒙斯数学研究员奖，以及由加利福尼亚大学伯克利分校米勒基础科学研究所提供的米勒访问教授职位的部分资助。本研究所用的一些计算是在得克萨斯农工大学数学系 Whistler 集群上完成的，该集群的使用权限由 NSF DMS-2201005 资助。

References

[1] K. Ando、H. Isozaki 和 H. Morioka。关于周期晶格上离散薛定谔算子连续谱中不存在特征值的注记。*arXiv* 预印本 *arXiv:2411.03577*，2024。[2] D. B¨attig。复费米面的方向紧化与等谱性。载于 *S´eminaire sur les Equations aux D´eriv´ees Partielles, ´1989–1990*，第 IV 号报告，11 页。Ecole Polytech.，帕莱索，1990。[3] D. B¨attig。离散薛定谔算子费米面的环面紧化。*Comment. Math. Helv.*，67(1)：1–16，1992。[4] D. B¨attig、H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。复费米面的方向紧化。*Compositio Math.*，79(2)：205–229，1991。[5]J. Bezanson、A. Edelman、S. Karpinski 和 V. B. Shah。Julia：数值计算的新方法。《*SIAM* 评论》，59(1)：65–98，2017。[6]P. Breiding、T. Brysiewicz 和 H. Friedman。同伦迭代器。*arXiv:2509.08084*，2025。[7] P. Breiding、K. Rose 和 S. Timme。使用区间算术认证多项式系统的零点。《*ACM* 数学软件汇刊》，49(1)：1–14，2022。[8] P. Breiding 和 S. Timme。Homotopycontinuation.jl：Julia 中用于同伦延拓的软件包。载于国际数学软件大会（*ICMS*）论文集，第 10931 卷，《计算机科学讲义》，第 458–465 页。施普林格，2018。

[9]J. Chu、K. Lyu 和 C.-F. Yang。离散周期薛定谔算子的弱可分性与部分费米等谱性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2511.03940*，2025。[10] N. Do、P. Kuchment 和 F. Sottile。离散周期算子色散关系的典型性质。*J. Math. Phys.*，61(10)：103502，19 页，2020。[11] M. Faust 和 J. L. Garcia。周期图色散多项式的不可约性。*SIAM* 应用代数与几何杂志，9(1)：83–107，2025。[12] M. Faust 和 F. Sottile。离散周期算子的临界点。*J.Spectr. Theory*，14(1)：1–35，2024。[13]J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。有限范围薛定谔算子的布洛赫簇不可约性。*J. Funct. Anal.*，283(10)：论文编号 109670，22 页，2022。[14] J. Fillman、W. Liu 和 R. Matos。周期图算子费米簇的代数性质。*J. Funct. Anal.*，286(4)：论文编号 110286，24 页，2024。[15] L. Fisher、W. Li 和 S. P. Shipman。包括堆叠石墨烯在内的多层量子图的可约费米面。*Comm. Math. Phys.*，385(3)：1499–1534，2021。[16] W. Fulton。《代数曲线：代数几何导论》。在 Richard Weiss 协作下撰写的笔记。Addison-Wesley，1969。[17]D. Gieseker、H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。代数费米曲线的几何，《数学视野丛书》第 14 卷。Academic Press, Inc.，波士顿，MA，1993。[18]D. R. Grayson 和 M. E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。可访问 *https://math.uiuc.edu/Macaulay2/*，2002。[19] J. D. Hauenstein 和 A. J. Sommese。什么是数值代数几何？符号计算杂志，79：499–507，2017。专刊：数值代数几何。[20] H. Isozaki 和 H. Morioka。离散薛定谔算子的 Rellich 型定理。*Inverse Probl. Imaging*，8(2)：475–489，2014。[21] H. Kn¨orrer 和 E. Trubowitz。复布洛赫簇的方向紧化。*Comment. Math. Helv.*，65(1)：114–149，1990。[22]R. Krawczyk。使用误差界确定零点的牛顿法。*Computing*，4(3)：187–201，1969。[23] P. Kuchment。周期椭圆算子综述。*Bull. Amer. Math.Soc. (N.S.)*，53(3)：343–414，2016。[24]P. Kuchment 和 B. Vainberg。关于具有受扰周期势的薛定谔算子不存在嵌入特征值。*Comm. PartialDifferential Equations*，25(9-10)：1809–1826，2000。

[25]P. Kuchment 和 B. Vainberg. 关于局部扰动周期图算子中对应于嵌入特征值的特征函数结构. Comm. Math. Phys., 268(3):673–686, 2006.[26]K. Lee. NumericalCertification：一个 Macaulay2 软件包. 版本 1.6. 可在此处获取的 Macaulay2 软件包： https://github.com/Macaulay2/M2/tree/stable/M2/Macaulay2/packages.[27]W. Li 和 S. P. Shipman. 平面周期图算子的费米面的不可约性. Lett. Math. Phys., 110(9):2543–2572, 2020.[28] W. Liu. 离散周期薛定谔算子的费米簇不可约性与嵌入特征值. Geom. Funct. Anal., 32(1):1–30, 2022.[29] W. Liu. 离散周期薛定谔算子费米簇的若干主题. J. Math. Phys., 63(2):Paper No. 023503, 13, 2022.[30] W. Liu. $\mathbb{Z}^2$上具有可分离势的离散周期薛定谔算子的费米等谱性. Comm. Math. Phys., 399(2):1139–1149, 2023.[31] W. Liu. 周期图算子的布洛赫簇与量子遍历性. J. Anal. Math., 153(2), 2024.[32]W. Liu. 离散周期薛定谔算子的费米等谱性. Comm. Pure Appl. Math., 77(2):1126–1146, 2024.[33] W. Liu、R. Matos 和 J. N. Treuer. 受扰动周期薛定谔算子的特征函数的精确衰减率. Nonlinearity, 38(4):Paper No. 045028, 25, 2025.[34] T. Mckenzie 和 M. Sabri. 周期图的量子遍历性. Comm. Math. Phys., 403(3):1477–1509, 2023年11月.[35] S. P. Shipman. 局部扰动周期图算子中嵌入特征值对应的无界支撑特征函数. Comm. Math. Phys., 332(2):605–626, 2014.[36]S. P. Shipman. 非对称双层量子图算子的可约费米面. J. Spectr. Theory, 10(1):33–72, 2020. (T. Brysiewicz)

Department of Mathematics, Western University, London, ON,CA电子邮箱：tbrysiew@uwo.ca (M. Faust) Department of Mathematics, Michigan State University, East Lans-ing, MI, 48840, USA电子邮箱：mfaust@msu.edu (W. Liu) Department of Mathematics, Texas A&M University, College Sta-tion, TX 77843-3368, USA电子邮箱：wencail@tamu.edu

APPENDIX

本文中提出的所有计算性论断均由以下代码予以证明。**Macaulay2——生成多项式并进行认证**

```
--------------------------
------生成方程--------

--------------------------
R  = QQ[x,y,xi,yi,v_(1,1)..v_(3,5)]-(x,y,xi,yi) 分别扮演 (z_1,z_2,z_1^
(-1),z_2^(-1)) 的角色

DV = matrix {{v_(1,1), 1, xi, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0, 0},
             {1, v_(2,1), 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, y, 0},
             {x, 1, v_(3,1), 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, y},
             {1, 0, 0, v_(1,2), 1, xi, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
             {0, 1, 0, 1, v_(2,2), 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
             {0, 0, 1, x, 1, v_(3,2), 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0},
             {0, 0, 0, 1, 0, 0, v_(1,3), 1, xi, 1, 0, 0, 0, 0},
             {0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, v_(2,3), 1, 0, 1, 0, 0, 0},
             {0, 0, 0, 0, 0, 1, x, 1, v_(3,3), 0, 0, 1, 0, 0},
             {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, v_(1,4), 1, xi, 1, 0},
             {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, v_(2,4), 1, 0, 1},
             {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, x, 1, v_(3,4), 0, 0},
             {yi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, v_(1,5), 1, xi},
             {0, yi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, v_(2,5), 1},
             {0, 0, yi, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, x, 1, v_(3,5)}};
```

ZERO = join({x,y,xi,yi},new List from 15:0); --对 x,y,xi,yi,v_(1,1)..v_(3,5) 进行替换以得到 D_0(x,y) D0 = sub(DV,for ifrom 0 to numgens(R)-1 list R_i=>ZERO#i) --应用替换 F0 = det(D0) --取行列式 FV = det(DV, Strategy =>Cofactor); --在不进行替换的情况下使用余因子展开取行列式 FDifferenceModInverses = (F0-FV) % ideal(x*xi-1, y*yi-1); --计算该差模逆关系 Eqs = unique(entries((coefficients(FDifferenceModInverses, Variables=>{x,xi,y,yi}))_1_0)); --提取该差的系数

```
------------------------------------ ----认证候选实解---- ------------------------------------
needsPackage "NumericalCertification";precBits  = 200;
RRring  = RR_precBits;T  = RRring[for i from 4 to
numgens(R)-1 listR_i]F  = foreinEqslist sub(e,T)--将方程代入
正确的环（不含 x,xi,y,yi）



VR ={3.58799648386156,  0.688112385771553,
1.87080104041807,-0.130206885382426,-0.678204748466961,
0.00618746135457902,-1.45598519094981,-0.377624670108577, -
4.26499086966595,-4.53749591961956,
4.59717237464526,-0.36252210536849,-0.224238038666354,
1.81035923653508,-0.529360554357988};F  = 多项式系统(F  |{v_
(1,1)-61/17});

CCo =coefficientRing ring F; VRCC  = apply(VR, t -> t_
CCo);M  = matrix{VRCC}; P0 =point M;--对牛顿法进行若干次迭代
P1 = newton(F, P0);P2 = newton(F, P1); P3 =newton(F,
P2);VR  = matrixP3;

time cer  =实解认证(F, VR) ------------------------------ ----将结果写入文件----- ------------------------------
--Macaulay2 格式 f  = openOut "35M2Polys.txt"; for eq in Eqs do (f  <<
toString eq  <<  endl;); close f; --julia 格式 f  = openOut "35JuliaPolys.txt";
scan(Eqs, eq ->( s :=toString eq; for i from 1 to 3 do for j from 1 to 5 do s  =
replace("v_\\("  |  toString i  |  ","  |  toString j  |  "\\)"
                                                                                ,
                    "v[" | toString i | "," | toString j | "]", s);
    f << s << endl;));
close f;
```

Julia - 读取多项式、认证并求解

```
# 在与 35JuliaPolys.txt 相同的目录中于 Julia 会话里运行using
HomotopyContinuation@var v[1:3,1:5]; @vara[1:15]; @var c; V  =
vcat(v...);

########################################## ##########
# 读取并认证 ############## ############################
################
S = [评估(Meta.解析(r)) 对于r 在读取行("35JuliaPolys.txt")];VR = [3.
58799648386156, 0.00618746135457902,
4.59717237464526,0.688112385771553,-1.45598519094981,  -
0.362522105368490,1.87080104041807,  -0.377624670108577,  -
0.224238038666354,-0.130206885382426,-4.26499086966595,
1.81035923653508,-0.678204748466961,-4.53749591961956,  -0.529360554357988];

F  = 系统(vcat(S,[v[1,1]-61//17]));
@time C =认证(F,[VR])

########################################### ######## 求解实解
######### ##############################################I  = 求
解(F;start_system  = :total_degree, iterator_only=true)
```

global i=0; global total_成功次数 = 0; function is_实_success(s) global i; i+=1; global total_成功次数; r=is_实(s); t=is_success(s); println(i," ",r,",",t) if t total_成功次数+=1; 比例 = total_成功次数/i; println("总成功比例:", proportion) println("预期解的数量:",4572288000*proportion) end return(r && t)

```
end
#上述函数将针对每条跟踪的路径打印其是否 (a) 成功以及 (b) 为实数。它将根
据这些数据估算起始路径成功的预期比例

J =迭代器。filter(s->is_实_success(s),
I);@time first(J)
```