arXiv:2603.11204v1 [math.FA] 11 Mar 2026

构造 k-卡迪森-施瓦茨映射

´ ´Farrukh Mukhamedov 和 Dariusz Chruscinski

Abstract. 我们研究矩阵代数上的 k-卡迪森–施瓦茨（k-KS）映射，并推导出明确条件，以确保由单个 k-正映射 Φ 参数化的两类映射具有 k-KS 性质。我们的构造展示了如何将 *upgrade* k-正性转化为 k-KS 性质。我们还引入 KS-可分解性，并给出正映射可凸分解为 KS 分量和余 KS 分量的条件。

Mathematics Subject Classification: 81P45、46L05、47L07*Key words*: 正映射、Kadison–Schwarz 算子、 k-正映射、退极化信道、KS-可分解性。

1. Introduction

矩阵代数之间的正线性映射在算子代数和量子信息理论中发挥着基础作用[1, 2, 3, 4, 5] 以及量子信息理论 [6]。在量子力学的代数表述中，态由定义在 C^*–代数上的正归一化泛函描述，而物理过程则由这些代数之间的正映射表示。在有限维情形下，我们研究矩阵代数 $B(H_d)$，其作用于一个 d维希尔伯特空间 H_d。正性可通过若干方式加以细化，其中最重要的是 k–正性和完全正性这两个概念。完全正（CP）映射为物理上可实现的量子信道提供了恰当的数学描述，其结构可通过 Choi–Jamiolkowski 同构得到优雅刻画；该同构将 CP 映射与 $H_d \otimes H_d$上的半正定算子对应起来。通过这一对应关系，正但非完全正的映射可导出纠缠见证，因此成为研究量子关联的重要工具。

一个保幺线性 映射 Φ: $B(H_d) \to B(H_d)$ 若满足 Kadison–Schwarz 不等式，则称其满足该不等式

$$\Phi(X^*X) \geq \Phi(X)^*\Phi(X), \qquad X \in B(H_d). \tag{1.1}$$

满足（1.1）的映射称为卡迪森-施瓦茨算子。每个保幺完全正映射都定义一个卡迪森-施瓦茨算子。然而，反过来并不成立，也就是说，卡迪森-施瓦茨性质严格强于正性，且严格弱于完全正性 [7, 8, 9]。卡迪森-施瓦茨映射出现在各种研究背景中，例如动力学映射与可分性的分析，以及与 Jordan 结构和算子不等式的联系；与完全正映射的丰富理论相比，对其在高维情形下的系统研究仍相对有限 [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,20, 21]。

对于 $k \in \{1, \ldots, d\}$，我们称保幺映射 Φ 为 *k–KS 算子*，如果其放大映射 $\Phi_k := \mathrm{id}_k \otimes \Phi$ 满足 $M_k(B(H_d))$ 上的 Kadison–Schwarz 不等式。现在，任意保幺 k-正映射都定义了一个 $(k-1)$-KS 算子 [8, 7]。本文将展示如何将 k-正的保幺保迹映射 Φ 提升为 k-KS 算子。给定映射 Φ，我们分析以下几类映射

$$\Lambda_a^-(X) = \frac{1}{d-a}\big(\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d - a\Phi(X)\big), \tag{1.2}$$

and

$$\Lambda_a^+(X) = \frac{a}{d}\,\mathrm{Tr}(X)\,\mathbb{1}_d + (1-a)\Phi(X), \tag{1.3}$$

并给出参数 $a \in \mathbb{R}$ 的条件，这些条件确实能保证上述映射 $\Lambda_a^{\pm}$ 是k-KS。当 Φ 为恒等映射或转置映射时，Tomiyama 推导出了 k-KS 性质的充要条件 [8]。因此，我们的结果可视为对 [8]的推广。但请注意，与 [8] 不同，我们仅给出k-KS 的充分条件。

类比于可分解正映射，我们引入*KS*–可分解性的概念。若保单位正映射 $\Phi\colon B(H_d) \to B(H_d)$ 可以写成一个凸组合，则称其为 KS–可分解的

$$\Phi = \lambda\Phi_1 + (1-\lambda)\Phi_2, \qquad 0 \le \lambda \le 1,$$

其中 Φ_1 是 KS 映射，Φ_2 是余 KS 映射，这意味着 $\Phi(X^*X) \ge \Phi(X)\Phi(X)^*$。我们证明这一性质严格强于标准可分解性，并为 KS–可分解映射推导出一个精细的算子不等式，该不等式强化了 Stormer 关于满足 $\Phi(\mathbb{1}_d) \le \mathbb{1}_d$ 的正映射的经典结果。作为应用，我们证明，若 Φ 是恒等映射或转置，则 $\Lambda_a^{\pm}$在适当的参数范围内是 KS–可分解的。

本文结构如下。第 2 节汇集关于 $B(H_d)$ 上正映射、完全正映射和 KS 映射的记号与基本事实。第 3 节给出族 $\Lambda_a^{\pm}$ 中 k-KS 的充分条件。第 4 节讨论 KS–可分解性的概念本身。第 5 节汇总最后的评论。

2. Preliminaries

考虑有限维希尔伯特空间 $\mathcal{H}_d$，维数为 $\mathcal{H} = d$，以及作用于 $\mathcal{H}_d$ 上的算子集 $B(\mathcal{H}_d)$。对于半正定算子 R，记作 $R \ge 0$。用 $B(\mathcal{H}_d)_+$ 表示所有半正定算子组成的集合。若 Φ 是正的，则称线性映射 Φ 为正映射，当且仅当 $\Phi(B(\mathcal{H}_d)_+) \subset B(\mathcal{H}_d)_+$。用 $_d\,\mathbb{1}$ 表示 $B(\mathcal{H}_d)$ 上的恒等变换。若映射 $\Phi_k := \mathrm{id}_k \otimes \Phi$ 是正的，则称线性映射 Φ 为 k-正。若线性映射 Φ 对所有 $k \in \mathbb{N}$ 都是 k-*positive*，则称其为完全正映射。若 Φ 可分解，即 $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$，其中 Φ_1 是完全正映射，且 Φ_2 是完全余正映射，也就是说，它是完全正映射与转置映射的复合。

定义 itio2.1. 设 $\Phi\colon B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 是一个保单位线性映射。那么它满足

1. *Kadison-Schwarz*（卡迪森-施瓦茨）条件 如果

$$\Phi(X^*X) \ge \Phi(X)^*\Phi(X), \quad \forall X \in B(\mathcal{H}_d). \tag{2.1}$$

2. 余*Kadison-Schwarz*（余 *KS*）条件 如果

$$\Phi(X^*X) \ge \Phi(X)\Phi(X)^*, \quad \forall X \in B(\mathcal{H}_d). \tag{2.2}$$

下文中，满足 KS 条件的映射将称为 KS 算子。注意，每个保幺2-正映射都是 KS 映射，并且 Kadison 的一个开创性结果表明，任何正的保幺映射都满足不等式（2.1），对所有自伴元 X。用 $\mathcal{KS}$ 表示从 B（$\mathcal{H}_d$）到 B（$\mathcal{H}_d$）的所有 KS 算子的集合。

注 2.2。 Woronowicz 证明了 [22] 任何保单位可分解正映射都满足所谓的强Kadison不等式，即对每一个 Y，只要 $Y \ge X^*X$ 与 $Y \ge XX^*$ 两者都成立，便有

$$\Phi(Y) \ge \Phi(X)^*\Phi(X)\ , \quad \text{and} \quad \Phi(Y) \ge \Phi(X)\Phi(X)^*.$$

Woronowicz猜想 [22] 每个保单位正映射都满足强Kadison不等式。Kirchberg证明了 Woronowicz猜想并不成立 [23], 另见 [24]，其中给出了一个明确的反例。

定理 2.3. [25] 以下断言成立：

(i) 集合 $\mathcal{KS}$ 是凸集；(ii)设 U、V 是 $B(\mathcal{H}_d)$ 中的酉算子，则对于任意 $\Phi \in \mathcal{KS}$，映射 $\Psi_{U,V}(X) = U\Phi(VXV^*)U^*$ 属于 $\mathcal{KS}$。

定义 2.4。 若存在保幺的 KS 算子和 co-KS 算子 Φ_1 与 Φ_2，使得.....则称保单位正映射 $\Phi: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 为*KS*可分解的。

$$\Phi = \lambda\Phi_1 + (1-\lambda)\Phi_2$$

对于某个 $\lambda \in [0,1]$。

定义 2.5。 设 $\Phi: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 是保单位线性映射，且设 $k \in \{1,\dots,d\}$。若放大映射满足以下条件，则称 Φ 为 *k–Kadison–Schwarz* 算子 （或简称为 *k–KS* 算子）：

$$\Phi_k := \mathrm{id}_k \otimes \Phi : M_k(B(\mathcal{H}_d)) \longrightarrow M_k(B(\mathcal{H}_d))$$

满足 Kadison–Schwarz 不等式，即

$$\Phi_k(X^*X) \geq \Phi_k(X)^*\Phi_k(X), \qquad \forall\, X \in M_k(B(\mathcal{H}_d)).$$

等价地，保幺映射 Φ 是 k-卡迪森-施瓦茨的，当且仅当对任意一组算子 $\{X_1,\dots,X_k\} \in B(\mathcal{H}_d)$，有

$$\sum_{i,j=1}^{k} E_{ij} \otimes \Big[\Phi(X_i^*X_j) - \Phi(X_i)^*\Phi(X_j)\Big] \geq 0 \tag{2.3}$$

where E_{ij} 是 M_k中的矩阵单位。特别地，保幺映射 Φ是2-卡迪森-施瓦茨且仅当 if

$$\begin{pmatrix} \Phi(A^*A) & \Phi(A^*B) \\ \Phi(B^*A) & \Phi(B^*B) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \Phi(A)^*\Phi(A) & \Phi(A)^*\Phi(B) \\ \Phi(B)^*\Phi(A) & \Phi(B)^*\Phi(B) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

对任意 $A, B \in B(\mathcal{H}_d)$。有趣的是，可以证明

定理 2.6。 [7] 设 $\Phi: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 为保幺$(k+1)$-正映射。则 Φ 是 k-卡迪森-施瓦茨算子 r.

赋予希尔伯特–施密特内积$(X,Y)_{HS} := \mathrm{Tr}(X^*Y)$的向量空间 $B(\mathcal{H}_d)$成为一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{HS}$。相应的希尔伯特–施密特范数为 $\|X\|_{HS} := \sqrt{\mathrm{Tr}\ X^*X}$。对任意线性映射 $\Phi: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$，其对偶映射 $\Phi^*: \overline{B(\mathcal{H}_d)} \to B(\mathcal{H}_d)$由下式定义

$$(\Phi^*(A), B)_{HS} = (A, \Phi(B))_{HS}, \tag{2.5}$$

对任意 $A, B \in B(\mathcal{H}_d)$。注意，当且仅当 Φ^* 是保幺映射时， Φ 才是保迹的。线性映射$\Phi: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$。线性映射 $\Phi: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 称为 希尔伯特–施密特压缩，如果

$$\|\Phi(X)\|_{HS} \leq \|X\|_{HS}, \tag{2.6}$$

对所有 $X \in B(\mathcal{H}_d)$。引入以下完全正、保迹且保幺的映射 $\Delta: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$

$$\Delta(X) = \frac{1}{d}\mathbb{1}_d \mathrm{Tr}\, X.$$

在量子信息中，它表示完全退极化量子信道。注意， Φ 是希尔伯特–施密特压缩算子，当且仅当

$$\Delta(\Phi(X)^*\Phi(X)) \leq \Delta(X^*X). \tag{2.7}$$

现在考虑放大

$$\Delta_k := \mathrm{id}_k \otimes \Delta : M_k(B(\mathcal{H}_d)) \to M_k(B(\mathcal{H}_d)),$$

也就是说，

$$\Delta_k(X) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}_2 X \otimes \mathbb{1}_d$$

其中，偏迹定义如下：对于任意 $X = M \otimes Y \in M_k(B(\mathcal{H}_d))$

$$\mathrm{Tr}_2 X = M \,\mathrm{Tr}\, Y \in M_k.$$

引理 2.7。对于任意 $k = 1,2,\ldots$ 映射 Δ_k 具有以下性质 *:*

(i) $\Delta_k \Delta_k = \Delta_k$，即 Δ_k 是一个投影算子，

(ii) $\Delta_k(\Delta_k(X)^*\Delta_k(X)) = \Delta_k(X)^*\Delta_k(X)$ *for all* $X \in M_k(B(\mathcal{H}_d))$*;*

(iii) 如果 $\Delta_k(Y) = 0$，则对于所有 $X \in M_k(B(\mathcal{H}_d))$，有 $\Delta_k(Y\Delta_k(X)) = 0$。

下文将推广（2.7），并考虑满足以下性质的线性映射 Φ： $B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$

$$\Delta_k(\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)) \le \Delta_k(X^*X), \tag{2.8}$$

其中 $\Phi_k := \mathrm{id}_k \otimes \Phi$。

命题 2.8. 设 $\Phi : B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 是一个保幺且保迹的线性映射。若 Φ 是一个k-*KS* 算子，则 Φ满足（*2.8*）。

证明。由于 Φ 是 k-KS，故有

$$\Phi_k(X^*X) \ge \Phi_k(X)^*\Phi_k(X),$$

对所有 $X \in M_k(B(\mathcal{H}_d))$ 均成立，因此

$$\Delta_k(\Phi_k(X^*X)) \ge \Delta_k(\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)).$$

注意，由于 Φ 是保迹的

$$\Delta_k(\Phi_k(X^*X)) = (\mathrm{id}_k \otimes \mathrm{Tr})(\mathrm{id}_k \otimes \Phi)(X^*X) \otimes \mathbb{1}_d = (\mathrm{id}_k \otimes \mathrm{Tr})(X^*X) \otimes \mathbb{1}_d = \Delta_k(X^*X),$$

由此完成证明。 □

注记 2.9. 若 Φ =为恒等映射，那么显然， Φ 是 k-卡迪森-施瓦茨算子，因此满足（2.8）。有趣的是，转置映射 $\Phi = T$ 甚至不是 2-正的，但也满足（2.8）。

定理 2.10. 设 Φ 是希尔伯特–施密特压缩算子。那么对任意 $k \in \mathbb{N}$，映射 Φ_k 满足（*2.8*）。

证明见附录。上述定理表明，构造满足（2.8）的映射并不困难。

3. Class of k-Kadison-Schwarz operators

本节中，我们分析两类 k-Kadison-Schwarz 算子。

3.1. 广义约化映射。 考虑以下所谓的约化映射

$$R_a(X) = \frac{1}{d-a}(\mathbb{1}_d \mathrm{Tr} X - a\, X), \quad X \in B(\mathcal{H}_d). \tag{3.1}$$

在下文中，我们经常使用以下事实。

命题 3.1。 [8] 映射 R_a 是 k-正的，当且仅当 $a \le 1/k$ $(k \le d)$。

现在，令 $\Phi\colon B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 为满足 (2.8) 的正的、保单位且保迹映射。定义如下映射

$$\Lambda_a^- = \frac{1}{d-a}(d\Delta - a\Phi) \tag{3.2}$$

显然，Λ_a^- 是保单位迹保持映射。现在考虑相应的放大

$$\Lambda_{a;k}^- := \mathrm{id}_k \otimes \Lambda_a^- = \frac{1}{d-a}\big(d\,\Delta_k - a\,\Phi_k\big).$$

定理 3.2。 假设 Φ 是 k-正的、保幺且满足 (2.8)。那么映射 Λ_a^- 定义了一个k-KS 算子，当且仅当

$$0 \le a \le \frac{d}{kd+1}. \tag{3.3}$$

证明。有

$$\Lambda_{a;k}^-(X)^*\Lambda_{a;k}^-(X) = \frac{1}{(d-a)^2}\Big(d^2\Delta_k(X)^*\Delta_k(X) - ad\big(\Delta_k(X^*)\Phi_k(X) + \Phi_k(X)^*\Delta_k(X)\big) + a^2\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)\Big)$$

$$\Lambda_{a;k}^-(X)(X^*X) = \frac{1}{d-a}(d\Delta_k(X^*X) - a\Phi_k(X^*X))$$

因此，$\Lambda_{a;k}^-$ 的 KS 条件如下

$$\begin{aligned}(d-a)(d\Delta_k(X^*X) - a\Phi_k(X^*X)) \;&\ge\; d^2\Delta_k(X)^*\Delta_k(X) - ad\big(\Delta_k(X^*)\Phi_k(X) + \Phi_k(X)^*\Delta_k(X)\big)\\ &+\; a^2\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)\end{aligned} \tag{3.4}$$

假设 (3.3) 成立。要证明 Λ_a^- 是一个 k-KS 算子，只需证明 (3.4)。现在分两种情况讨论。

情形 1。 假设 $\Delta_k(X) = 0$。那么由 (3.4) 可得

$$(d-a)d\Delta_k(X^*X) - a(d-a)\Phi_k(X^*X) - a^2\Phi_k(X)^*\Phi_k(X) \ge 0. \tag{3.5}$$

我们将最后一个式子改写如下

$$\frac{(d-a)}{da}\Delta_k(a(d-a)X^*X + a^2X^*X) - \big(a(d-a)\Phi_k(X^*X) + a^2\Phi_k(X^*)\Phi_k(X)\big) \ge 0.$$

Φ 的保迹条件给出 $\Delta_k(\Phi_k(X)) = \Delta_k(X)$，因此，

$$\frac{(d-a)}{da}\Big(\Delta_k(a(d-a)\Phi_k(X^*X)) + a^2\Delta_k(X^*X)\Big) - \big(a(d-a)\Phi_k(X^*X) + a^2\Phi_k(X^*)\Phi_k(X)\big) \ge 0.$$

现在，利用 Δ_k-卡迪森-施瓦茨 条件，可得

$$\Delta_k(a(d-a)\Phi_k(X^*X)) + a^2\Delta_k(X^*X) \ge \Delta_k(a(d-a)\Phi_k(X^*X)) + a^2\Delta_k(\Phi_k(X^*)\Phi_k(X))$$

因此，只需证明

$$\begin{aligned}&\frac{(d-a)}{da}\Big(\Delta_k(a(d-a)\Phi_k(X^*X)) + a^2\Delta_k(\Phi_k(X^*)\Phi_k(X))\Big)\\ &-\big(a(d-a)\Phi_k(X^*X) + a^2\Phi_k(X^*)\Phi_k(X)\big) \ge 0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由于 Φ的 k-正性，显然

$$Z = a(d-a)\Phi_k(X^*X)) + a^2\Phi_k(X^*)\Phi_k(X) \geq 0$$

因此，（3.6）意味着 $\frac{(d-a)}{da}\ \Delta_k(Z) - Z \geq 0$ 根据引理 3.1，当且仅当 $\frac{da}{d-a} \leq \frac{1}{k}$ 从而 –

$$a \leq \frac{d}{kd+1}.$$

情形 2。现假设 $\Delta_k(X) \neq 0$，并记

$$Y = \Delta_k(X) - X.$$

显然 $\Delta_k(Y) = 0$ 且 $X = \Delta_k(X) - Y$。于是

$$X^*X = \Delta_k(X)^*\Delta_k(X) - (\Delta_k(X^*)Y + \Delta_k(X)Y^*) + Y^*Y \tag{3.7}$$

因此，由引理2.7可得

$$\Delta_k(X^*X) = \Delta_k(X)^*\Delta_k(X) + \Delta_k(Y^*Y). \tag{3.8}$$

现在， Φ 的幺元性蕴含 $\Phi_k(\Delta_k(X)) = \Delta_k(X)$。因此，

$$\begin{aligned}\Delta_k(X^*)\Phi_k(X) + \Phi_k(X^*)\Delta_k(X) &= 2\Delta_k(X)^*\Delta_k(X) - (\Delta_k(X^*)\Phi_k(Y) + \Phi_k(Y)^*\Delta_k(X))\\ \Phi_k(X^*)\Phi_k(X) &= \Delta_k(X^*)\Delta_k(X) - (\Delta_k(X^*)\Phi_k(Y) + \Delta_k(X)\Phi_k(Y^*)) + \Phi_k(Y^*)\Phi_k(Y)\end{aligned}$$

因此，将以上所有内容代入（3.4）并经过简单计算后，我们得到

$$(d-a)d\Delta_k(Y^*Y) - a(d-a)\Phi_k(Y^*Y) - a^2\Phi_k(Y)^*\Phi_k(Y) \geq 0.$$

由于情形 1，这一结论成立，只要满足（3.3）。证明至此完成 f. □

注 3.3。 若 Φ是恒等映射，则 Tomiyama 已证明 [8] 满足 Λ_a^- 是 k-KS 当且仅当

$$0 \leq a \leq \frac{d}{kd+1},$$

也就是说，在这种情况下，上述条件既是必要条件，也是充分条件。

3.2. **广义去极化映射**。 设 $\Phi: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 是一个正 UTP Δ_k-KS 算子。我们定义一个新的映射 $\Lambda_a^+: B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 如下：

$$\Lambda_a^+ = a\Delta + (1-a)\Phi. \tag{3.9}$$

显然， Λ_a^+ 是一个保单位迹保持映射。相应的放大为

$$\Lambda_{a;k}^+ = a\Delta_k + (1-a)\Phi_k.$$

定理 3.4。 假设 Φ 是 k-正的、保幺且满足（2.8）。则映射 Λ_a^+ 是一个 k-KS 算子，如果

$$1 + \frac{\sqrt{4kd+1}+1}{2kd} \geq a \geq 1 - \frac{\sqrt{4kd+1}-1}{2kd}. \tag{3.10}$$

证明。 假设（3.10）成立。要证明 Λ_a^+ 是一个 k-KS 算子，只需证明Λ_a^+ ；k 是 KS 算子。只需考虑情形 $\Delta_k(X) = 0$。可得

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{a;k}^+(X^*X) - \Lambda_{a;k}^+(X)^*\Lambda_{a;k}^+(X) = \frac{a}{d}\Delta_k(X^*X) + (1-a)\Phi_k(X^*X) - (1-a)^2\Phi_k(X)^*\Phi_k(X) \\
&= a\left(\Delta_k(X^*X) - \frac{1}{dk}\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)\right) + (1-a)\Phi_k(X^*X) + \left(\frac{a}{kd} - (1-a)^2\right)\Phi_k(X)^*\Phi_k(X) \\
&\geq a\left(\Delta_k(\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)) - \frac{1}{dk}\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)\right) + (1-a)\Phi_k(X^*X) + \left(\frac{a}{kd} - (1-a)^2\right)\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)
\end{aligned}$$

根据命题3.1 可得

$$\Delta_k(\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)) - \frac{1}{dk}\Phi_k(X)^*\Phi_k(X) \geq 0.$$

因此,

$$\Lambda_{a;k}^+(X^*X) - \Lambda_{a;k}^+(X)^*\Lambda_{a;k}^+(X) \geq 0$$

if

$$\frac{a}{kd} - (1-a)^2 \geq 0.$$

求解最后一个方程，得到（3.10）。证明完毕。 □

注 3.5。 若 Φ是转置映射，Tomiyama 已证明 [8]当且仅当 Λ_a^+ 是卡迪森-施瓦茨映射

$$1 + \frac{1}{d-1} \geq a \geq 1 - \frac{\sqrt{4d+1}-1}{2d},$$

且它是 2-KS 映射当且仅当它是 2-正映射。

4. KS-decomposability

本节我们研究约化映射与去极化映射的KS-可分解性。回顾：保单位正映射 $\Phi : B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 称为*KS*可分解，如果分别存在保幺的KS 算子与co-KS 算子 Φ_1 和 Φ_2，使得

$$\Phi = \lambda\Phi_1 + (1-\lambda)\Phi_2$$

对某个 $\lambda \in [0,1]$成立。

定理 4.1. 设 Φ： $B(\mathcal{H}_d) \to B(\mathcal{H}_d)$ 为*KS*可分解映射，即分别存在保幺的*KS* 算子与*co-KS* 算子 Φ_1 和 Φ_2，使得

$$\Phi = \lambda\Phi_1 + (1-\lambda)\Phi_2 \tag{4.1}$$

对某个 $\lambda \in [0,1]$成立。则

$$\Phi(x^* \circ x) - \Phi(x)^* \circ \Phi(x) \geq \lambda(1-\lambda)(\Phi_1(x) - \Phi_2(x))^* \circ (\Phi_1(x) - \Phi_2(x)), \tag{4.2}$$

其中我们引入了*Jordan*乘积 $A \circ B := AB + BA$。

证明。 由于 Φ_1 是 KS 算子，且 Φ_2 是余 KS，由（4.1）可得

$$\Phi(x^*x) = \lambda\Phi_1(x^*x) + (1-\lambda)\Phi_2(x^*x) \geq \lambda\Phi_1(x)^*\Phi_1(x) + (1-\lambda)\Phi_2(x)\Phi_2(x)^*. \tag{4.3}$$

类似地,

$$\Phi(xx^*) \geq \lambda\Phi_1(x)\Phi_1(x)^* + (1-\lambda)\Phi_2(x)^*\Phi_2(x). \tag{4.4}$$

可以看出

$$\begin{aligned}\Phi(x)^*\Phi(x) &= \lambda^2\Phi_1(x)^*\Phi_1(x)+\lambda(1-\lambda)\Phi_1(x)^*\Phi_2(x)\\ &\quad +\lambda(1-\lambda)\Phi_2(x)^*\Phi_1(x)+(1-\lambda)^2\Phi_2(x)^*\Phi_2(x),\end{aligned}\tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\Phi(x)\Phi(x)^* &= \lambda^2\Phi_1(x)\Phi_1(x)^*+\lambda(1-\lambda)\Phi_1(x)\Phi_2(x)^*\\ &\quad +\lambda(1-\lambda)\Phi_2(x)\Phi_1(x)^*+(1-\lambda)^2\Phi_2(x)\Phi_2(x)^*.\end{aligned}\tag{4.6}$$

因此，结合式（4.3）-（4.6），可得

$$\begin{aligned}&\Phi(x^*x)+\Phi(xx^*)-\Phi(x)^*\Phi(x)-\Phi(x)\Phi(x)^*\\ \geq\ &\lambda(1-\lambda)\Big(\Phi_1(x)^*\Phi_1(x)+\Phi_2(x)^*\Phi_1(x)-\Phi_2(x)^*\Phi_1(x)-\Phi_1(x)^*\Phi_2(x)\Big)\\ &+\lambda(1-\lambda)\Big(\Phi_1(x)^*\Phi_1(x)+\Phi_2(x)^*\Phi_1(x)-\Phi_2(x)^*\Phi_1(x)-\Phi_1(x)^*\Phi_2(x)\Big)\\ =\ &\lambda(1-\lambda)\Big((\Phi_1(x)-\Phi_2(x))^*(\Phi_1(x)-\Phi_2(x))+(\Phi_1(x)-\Phi_2(x))(\Phi_1(x)-\Phi_2(x))^*\Big),\end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

注 4.2。 我们指出，在 [26], 对于任意正映射 $\Phi:\ B(\mathcal{H}_d)\to B(\mathcal{H}_d)$ 且满足 $\Phi(\mathbf{1}\mathrm{I})\leq\mathbf{1}\mathrm{I}$ 的情况下，已证明了类似的不等式，即

$$\Phi(X^*\circ X)\geq\Phi(X)^*\circ\Phi(X).$$

然而，如果要求 Φ 具有卡迪森-施瓦茨可分解性，那么我们就能得到一个更强的不等式，即对上述表达式可以给出更精确的下界。

定理 4.3. 若 $\Phi=T$ 映射 $\Psi_a:=\Lambda_a^+$ 对 $a\in[0,1]$是*KS*可分解的。

证明。 若 $a\geq\frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2d}$，则根据定理 3.4，映射 Ψ_a 是 KS 算子，因此它是KS可分解的（因为 $\lambda=1$ 且 $\Phi_1=\Psi_a$）。因此，我们假设

$$a<\frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2d}.\tag{4.7}$$

现在，我们假设 Ψ_a 具有如下分解:

$$\Psi_a=\lambda\Psi_\beta+(1-\lambda)T_d,\tag{4.8}$$

其中 T_d 表示 M_d中的转置，且

$$\Psi_\beta(X)=\frac{\beta}{d}\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d+(1-\beta)X^T.$$

若我们能够找到 λ和 β，使得 Ψ_β 是 KS 算子，则所需断言即得证，因为 T_d 是余完全正的。

From（4.8），我们求得 $\lambda\beta=a$，由此得到 $\beta=\frac{a}{\lambda}$。然后，我们选取 $\lambda\in[0,1]$ 使得

$$a\geq\lambda\,\frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2d}\ .$$

这意味着

$$\beta\geq\frac{2d+1-\sqrt{4d+1}}{2d},$$

根据定理3.4，再次得到 Ψ_β 是一个 KS 算子。证明完成。 □

现在，我们将注意力转向由 R_a （3.1）定义的映射。即，

$$R_a(X) = \frac{1}{d-a}(\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d - aX), \quad a \in [0,1] \tag{4.9}$$

是 KS 算子（见推论 3.3）当且仅当 $a \leq \frac{d}{d+1}$。 ——

定理4.4。 映射 R_a 是*KS*可分解的。

证明见附录。

Conclusions

我们分析了 k-Kadison–Schwarz 映射以及矩阵代数上的KS可分解正映射。利用投影 Δ_k 的构造，我们推导出了保证 k-KS 性质的显式判据，并阐明了 k-正性与 k-KS 条件之间的关系。在这一框架下，我们研究了两类映射 $\Lambda_a^{\pm}$，它们取决于某个特定的 k-正映射 Φ。我们推导出了保证 $\Lambda_a^{\pm}$ 是 k-KS 的条件，其中 Φ任意。在 Φ 为恒等映射或转置映射的特殊情形下，我们的结果与 Tomiyama 的结果完全一致 [8]。

我们还引入了KS-可分解性，证明某些映射可以凸分解为KS分量和co-KS分量。所得不等式强化了Stormer不等式等经典结果，并为与纠缠检测和量子信道相关的正映射结构提供了新的认识。

我们的结果为进一步研究提出了若干方向。一个自然的问题是，如何将 KS–可分解性的刻画推广到本文研究的特定映射族之外，例如推广到极端正映射，或由更一般的量子信道导出的映射。另一个有趣的方向是系统地探究 k–KS 映射和 KS–可分解映射的纠缠检测能力，尤其是与任意正映射所对应的纠缠见证族相比，它们所对应的纠缠见证族有多强。更一般地， k-正性、 k–KS 性质与 KS–可分解性之间的相互作用，可能有助于进一步理解矩阵代数中正锥的精细结构及其在量子信息理论 [16]中的应用。

另一个有趣的问题是，分析当映射 Φ 具有额外对称性时，我们的构造会如何变化。若映射 Φ 满足：对希尔伯特空间$\mathcal{H}_d$上的群 G 的酉表示中所有元素 X，均有 $U_g\Phi(X)U_g^* = \Phi(U_gXU_g^*)$，则称其为协变映射。类似地，若 Φ满足 $U_g\Phi(X)U_g^* = \Phi(U_gXU_g^T)$，则称其为共轭协变映射。请注意，Tomiyama [8]所研究的映射具有协变性质：恒等映射相对于整个酉群 $U(d)$是协变的，类似地，转置映射是共轭协变的。近期已有关于协变Kadison–Schwarz映射的研究 [19, 27]。若假设映射 Φ相对于对角酉矩阵组成的子群是协变的，进一步详细分析本文提出的构造将会很有意思。近期已有针对完全正映射的此类分析 [28, 29]。

Appendix A. Proof of Theorem 2.10

设 ℓ_k^2 be k 维希尔伯特空间，其标准正交基为 $\{e_1, \ldots, e_k\}$，并设

$$\mathcal{L} := \ell_k^2 \otimes \mathcal{H}_{HS}.$$

固定 $X = (x_{ij})_{i,\ j=1}^k \in M_k(B(\mathcal{H}_d))$。对于每个 $j = 1,$ ....., k，定义向量 $\xi_j \in \mathcal{L}$ 为

$$\xi_j := \sum_{m=1}^{k} e_m \otimes x_{mj}.$$

直接计算可得

$$\langle \xi_i, \xi_j \rangle_{\mathcal{L}} = \sum_{m=1}^{k} \mathrm{Tr}(x_{mi}^* x_{mj}) = \left(\mathrm{Tr}_2\, X^*X\right)_{ij}.$$

因此，矩阵 $\mathbf{Tr}_2\, X^*X \in M_k$ 是族 $\{\xi_j\}_{j=1}^k$ 的格拉姆矩阵。根据假设， Φ 是希尔伯特–施密特压缩：

$$\|\Phi(Z)\|_{HS} \leq \|Z\|_{HS} \quad \forall Z \in \mathcal{H}_{HS}.$$

定义

$$S := I_{\ell_k^2} \otimes \Phi$$

在 $\mathcal{L}$上。则 S 也是压缩算子：

$$\|S\eta\|_{\mathcal{L}} \leq \|\eta\|_{\mathcal{L}} \quad \forall \eta \in \mathcal{L}.$$

Now

$$S\xi_j = \sum_{m=1}^{k} e_m \otimes \Phi(x_{mj}),$$

因此

$$\langle S\xi_i, S\xi_j\rangle_{\mathcal{L}} = \sum_{m=1}^{k} \mathrm{Tr}\left(\Phi(x_{mi})^*\Phi(x_{mj})\right) = \mathrm{Tr}\left((\Phi_k(X)^*\Phi_k(X))_{ij}\right).$$

故标量矩阵

$$\Big(\mathrm{Tr}((X^*X)_{ij}) - \mathrm{Tr}((\Phi_k(X)^*\Phi_k(X))_{ij})\Big)_{i,j}$$

是 $\{\xi_j\}$ 与 $\{S\xi_j\}$的格拉姆矩阵之差。设 $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{C}^k$ 并令

$$\eta := \sum_{j=1}^{k} c_j\xi_j.$$

Then

$$\sum_{i,j=1}^{k} \overline{c_i}c_j\Big(\mathrm{Tr}((X^*X)_{ij}) - \mathrm{Tr}((\Phi_k(X)^*\Phi_k(X))_{ij})\Big) = \|\eta\|_{\mathcal{L}}^2 - \|S\eta\|_{\mathcal{L}}^2. \tag{A.1}$$

由于 S 是压缩算子，

$$\|\eta\|_{\mathcal{L}}^2 - \|S\eta\|_{\mathcal{L}}^2 \geq 0.$$

因此，上述标量矩阵是半正定的。由（A.1）及 Δ_k 的定义，最后一个条件等价于

$$\Delta_k(X^*X) - \Delta_k(\Phi_k(X)^*\Phi_k(X)) \geq 0$$

在 M_k中（B（$\mathcal{H}_d$））。证明完毕。

Appendix B. Proof of Theorem 4.3

若 $a \leq \frac{d}{d+1}$，则 R_a 是 KS可分解的。因此，我们假设

$$a > \frac{d}{d+1}. \tag{B.1}$$

假设

$$R_a(X) = \alpha\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d - \beta X + \gamma\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d + \delta X \tag{B.2}$$

这是因为（4.9）意味着

$$\alpha + \gamma = \frac{1}{d-a}, \quad \beta - \delta = \frac{a}{d-a}. \tag{B.3}$$

由于 R_a 的幺元性，我们需要施加如下条件：

$$\alpha d - \beta = \lambda, \quad \gamma d + \delta = 1 - \lambda, \tag{B.4}$$

对于某个 $\lambda \in [0, 1]$。

由（B.2），我们得到分解

$$R_a = \lambda\Phi_1 + (1-\lambda)\Phi_2,$$

其中

$$\Phi_1(X) = \frac{1}{\lambda}(\alpha\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d - \beta X), \quad \Phi_2(X) = \frac{1}{1-\lambda}(\gamma\,\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d + \delta X). \tag{B.5}$$

根据（B.4），映射 Φ_1、Φ_2 是保幺的。现在我们的目标是选择参数，使得 Φ_1是 KS 算子，而 Φ_2 是余 KS。

我们首先注意到，（B.3）、（B.4）中的方程只有三个线性无关。因此，我们假设参数 A 是自由变量。于是可得

$$\beta = \alpha d - \lambda, \quad \gamma = \frac{1}{d-a} - \alpha, \quad \delta = \alpha d - \lambda - \frac{a}{d-a}. \tag{B.6}$$

由（B.5）可得

$$\Phi_1(X) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d - \frac{\beta}{\alpha}X\right), \quad \Phi_2(X) = \frac{\gamma}{1-\lambda}\left(\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d + \frac{\delta}{\gamma}X\right). \tag{B.7}$$

假设 $\alpha > 0$、$\beta > 0$ 和

$$\frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{d}{d+1}$$

根据推论 3.3 可知 Φ_1 是卡迪森-施瓦茨的。由（B.6）可知，最后一个条件等价于

$$\frac{\alpha d^2}{d+1} \leq \lambda.$$

由于 $\beta > 0$，我们有 $\lambda \leq \alpha d$。因此，

$$\frac{\alpha d^2}{d+1} \leq \lambda \leq \alpha d. \tag{B.8}$$

现在我们假设 $\gamma > 0$，它等价于

$$\alpha < \frac{1}{d-a} \tag{B.9}$$

条件（B.1）意味着

$$\frac{a(d+1)}{d(d-a)} \geq \frac{1}{d-a} > \alpha$$

由此得到

$$\alpha d - \frac{a(d+1)}{d-a} < 0.$$

这意味着

$$\alpha d^2 + \alpha d - \frac{a(d+1)}{d-a} < \alpha d^2 \quad \Leftrightarrow \alpha d - \frac{a}{d-a} < \frac{\alpha d^2}{d+1}$$

由（B.8）中的最后一个不等式可得

$$\lambda > \alpha d - \frac{a}{d-a}$$

这等价于 $\delta < 0$。因此，

$$\Phi_2(X) = \frac{\gamma}{1-\lambda}\left(\mathrm{Tr}(X)\mathbb{1}_d - \frac{\tilde{\delta}}{\gamma}X\right).$$

其中 $\tilde{\delta} = -\delta$。我们知道，映射 Φ_2 是共完全正的，当且仅当 $\frac{\delta}{\gamma} \leq 1$。该条件等价于

$$\lambda \leq (d-1)\alpha + \frac{1-a}{d-a}.$$

容易验证，(B.9) 蕴含

$$(d-1)\alpha+\frac{1-a}{d-a}\leq 1.$$

因此，

$$\frac{\alpha d^2}{d+1}\leq\lambda\leq\min\left\{\alpha d,(d-1)\alpha+\frac{1-a}{d-a}\right\}. \tag{B.10}$$

若 $a<1$ 且 $\alpha\leq\frac{1-a}{d-a}$，则

$$\alpha d\leq(d-1)\alpha+\frac{1-a}{d-a}$$

因此可得

$$\frac{\alpha d^2}{d+1}\leq\lambda\leq\alpha d. \tag{B.11}$$

由于 $\alpha d\neq\frac{\alpha d^2}{d+1}$，我们总能找到所需的 λ 属于 $(0,1]$。因此，可以（利用 (B.6）找到使映射 Φ_1 为卡迪森-施瓦茨且 Φ_2 为余 KS 的参数。

现在，若 $a=1$，则由 (B) 再次得到 (B.11)，从而得证。证明完毕。

Acknowledgments

F.M. 感谢编号为 G00004962 的阿联酋大学UPAR资助。D.C. 获得了波兰国家科学中心项目（编号：2024/55/B/ST2/01781）的资助。

Conflicts of Interest

作者声明不存在利益冲突。

Author's contribution

所有作者对本文的贡献均等。

References

[1] V. Paulsen，《完全有界映射与算子代数》，剑桥大学出版社，2003年。[2] E. Stormer，《算子代数的正线性映射》，施普林格数学专著，施普林格出版社，2013年。[3] R. V. Kadison 与 J. R. Ringrose，《算子代数理论基础》，数学研究生教材第15卷，学术出版社，1986年。[4] R. Bhatia，《正定矩阵》，普林斯顿应用数学丛书，普林斯顿大学出版社，2015年。[5] I. Bengtsson 与 K. ˙Zyczkowski，*Geometry of Quantum States. An Introduction to Quantum Entanglement*，剑桥大学出版社，纽约（2006年）。[6] M. A. Nielsen 与 I. L. Chuang，《量子计算与量子信息》，剑桥大学出版社，2000年。[7] D. E. Evans，算子代数上的正线性映射，*Comm. Math. Phys.* **48**，15-22（1976年）。[8] J. Tomiyama，论矩阵代数中正映射的几何 II，*Lin. Alg. Appl.* **69**（1985年），169-177。[9] M. D. Choi，C^*-代数上正线性映射的若干不等式，《算子理论杂志》，**4**，271（1980年）[10] A. G. Robertson，施瓦茨不等式与 C^*-代数上正映射的分解，《剑桥哲学会数学汇刊》**94**，291（1983年）。[11] W. A. Majewski 与 M. Marciniak，论正映射的一个刻画，《物理学杂志 A：数学与综合》**34**，5863（2001年）。[12] D. Chru´sci´nski 与 F. Mukhamedov，耗散生成元、可分动力映射与卡迪森-施瓦茨不等式，《物理评论 A》（2019年）[13] W.A. Majewski，论正映射集合的结构，《正性》**24**，799（2019年）。[14] D. Chru´sci´nski、F. Mukhamedov、M.A.、Hajji，论正映射的卡迪森-施瓦茨逼近，《开放系统与信息动力学》**27**，2050016，（2020年）。[15] X. H. Sun 与 Y. Li，两个线性映射的 k-正性与施瓦茨不等式，《正性》**26**，16（2022年）。[16] E. Carlen 与 A. M¨uller-Hermes，用迹不等式刻画施瓦茨映射，《数学物理快报》**113**，17（2023年）。

[17] D. Amato、P. Facchi 与 A. Konderak，量子信道的渐近性，《物理学杂志 A：数学与理论》**56**，265304（2023年）。[18] D. Chru´sci´nski、G. Kimura 与 F. Mukhamedov，量子比特施瓦茨映射半群弛豫率的普适约束，《物理学杂志 A：数学与理论》**57**，185302（2024年）。[19] D. Chru´sci´nski 与 B. Bhattacharya，一类具有对角酉对称性与正交对称性的施瓦茨量子比特映射，《物理学杂志 A：数学与理论》**57**，395202（2024年）。[20] H. Al Zadjali、F. Mukhamedov，保幺卡迪森-施瓦茨映射，《开放系统与信息动力学》**32**，2550007（2025年）。[21] F vom Ende、D Chru´sci´nski、G Kimura、P Muratore-Ginanneschi，2-正迹保持映射特征值的普适界，《线性代数及其应用》**730**，262（2026年）。[22] S. L. Woronowicz，低维矩阵代数的正映射，《数学物理报告》**10**，165（1976年）。[23] E. Kirchberg，Woronowicz的强Kadison不等式，《数学物理报告》**18**，113（1980年）。[24] W.-S. Tang，论矩阵代数之间的正线性映射，《线性代数及其应用》**79**，33（1986年）。[25] F. Mukhamedov、A. Abduganiev，论 $M_2(C)$上双随机卡迪森–施瓦茨算子的描述，《开放系统与信息动力学》**17**，245–253（2010年）。[26] E. Stormer，算子代数的正线性映射，《数学学报》**110**，233（1963年）。

[27] 2601 02282 A. Garcia-Velo 与 A. Ibort，具有对

[28] 称性的施瓦茨映射，arXiv: 。S. Singh 与 I. Nechita，量子理论中的对角酉对称性与正交对称性，《量子》**5**，519（2021年）[29] S. Singh 与 I. Nechita，量子理论中的对角酉对称性与正交对称性 II：演化算子，《物理学杂志 A：数学与理论》**55**，255302（2022年）。

Farrukh Mukhamedov Department of Mathematical Sciences College of Science The United Arab , , Emirates University P.O. Box 15551 Al Ain Abu Dhabi UAE
, , „ , ,*Email address*: far75m@gmail.com farrukh.m@uaeu.ac.ae

Dariusz Chruściński Institute of Physics Faculty of Physics Astronomy and Informatics Nicolaus , , Copernicus University 87–100 Toruń Poland
, , , Grudziądzka 5/7,„*Email address*: darch@fizyka.umk.pl