arXiv:2603.11217v1 [math.MG] 11 Mar 2026

拟共形与索伯列夫维数扭曲

JEREMY T. TYSON

摘要。我们回顾了关于拟共形映射、拟对称映射和索伯列夫映射对度量维数概念的畸变的部分文献。我们的论述始于 Gehring 于1973年提出的拟共形映射高阶可积性里程碑式定理，以及该定理对豪斯多夫维数畸变的影响。Astala 于1994年解决了平面高阶可积性猜想，使人们重新关注二维情形下的这一主题。接着，我们介绍21世纪00年代和21世纪10年代关于 Sobolev 映射造成的维数畸变的研究成果，其中包括对参数化子集族的一般元素所导致的维数增量的估计。在抽象度量情形下，Pansu 提出的共形维数概念是一种重要的拟对称不变量，已广泛应用于各种领域。我们简要回顾共形维数的相关事实，并重点介绍欧几里得情形下值得关注的结果。最后，我们介绍作者近期与 Chrontsios Garitsis 及 Fraser 合作开展的研究，将以往理论推广至插值维数，并为拟共形分类和共形维数带来新的认识。

1. 引言

在这篇综述文章中，我们讨论拟共形映射和索伯列夫映射对欧几里得域中度量维数概念的扭曲。

这一研究方向源于拟共形映射的基础解析性质，尤其是由 Bojarski（在平面情形下）和 Gehring（在所有维数下）确立的雅可比行列式的高阶可积性。20世纪90年代中期，Astala 取得了一项广受赞誉的突破，确定了平面拟共形映射的精确高阶可积性指数，进而重新引发了人们对其维数扭曲和测度论畸变行为的兴趣。随后，研究重点转向一般的索伯列夫映射，并由此引出一系列新问题，包括集合参数化族中典型成员所表现出的普遍维数扭曲，以及非欧几里得和度量情形下的类似理论。

自 20 世纪 90 年代末创立以来，度量空间上的分析领域发展迅速。在这一框架下，拟对称映射的度量概念如今已被公认为经典欧几里得拟共形映射概念的自然对应，而抽象的一阶索伯列夫映射空间则在这类映射的度量、几何和解析定义等价性中发挥着根本作用。许多经典的维数扭曲结果都有相应的度量空间版本。伴随度量空间上的分析不断发展，人们对拟对称维数畸变的无膨胀率（下）界产生了浓厚兴趣；Pansu 将其形式化为共形维数这一概念。

日期：2025年7月30日。

人们引入了多种度量维数概念，以揭示分形集和空间的不同特征。豪斯多夫维数和盒维数是最经典的概念，本综述便从这两者谈起。随着度量空间上的分析兴起，Assouad 维数也成为备受关注的概念。我们将简要说明其中缘由，并着重介绍 Assouad 维数的扭曲结果与豪斯多夫维数和盒维数的扭曲结果有何不同。在最后一节，我们将考察 Falconer、Fraser 及其合作者提出的各种维数插值量。这类概念是一参数维数函数族，可在两个给定的度量维数概念之间连续插值。最后一节将聚焦于索伯列夫映射和拟共形映射对这两种维数插值量的扭曲。

我们尽量让这篇综述通俗易懂，避免给出详细证明。不过，对于一项标志性结果，我们放宽了这一限制：Gehring 和 Väisälä 关于拟共形映射对豪斯多夫维数的畸变的基础性定理。本文将更详细地介绍他们的证明，并概述或评述几种采用不同工具的其他证明。借此，我们展示相关理论的广度与力量，并为读者揭示值得进一步探索的新联系。

本文面向分形几何和几何测度论领域的研究者，他们对拟共形映射的了解有限。为使内容更易于广泛理解，我们将讨论范围限于欧几里得空间。我们介绍的一些结果更适合归入度量空间上的分析这一抽象理论，但即便限于经典的欧几里得情形，仍然具有新意和研究价值。例如，我们在讨论共形维数时，特别强调丰富的度量理论在欧几里得空间中的推论，而对该理论本身则基本不作介绍。我们提供了大量文献参考，帮助读者进一步探索这些思想。特别是，第 2、5 和 6 节为读者指引了其他综述、书籍和文章，涵盖拟共形映射、度量空间上的分析与共形维数以及维数插值的基础知识。

由于篇幅所限，我们略去对当代研究中众多其他有趣方向的讨论，包括

- 次黎曼情形所特有的维数扭曲结果；
- 维数扭曲在动力系统（尤其是全纯动力系统）、克莱因群、几何群论以及分形分析中的应用；
- 自仿射欧几里得分形的共形维数与拟共形分类；
- 度量测度空间中拟对称映射与索伯列夫映射的理论。

1.1. 基本定义与记号。 对于实数 a 与 b，我们记 $a \wedge b := \min\{a, b\}$ 以及 $a \vee b := \max\{a, b\}$。

复平面 f 上的 $\mathbb{R}^n$ 可逆线性映射与矩阵 $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 一一对应。我们将矩阵 $\mathbf{A} \in M(n, \mathbb{R})$ 的算子范数记为 $||\mathbf{A}|| := \max\{|\mathbf{A}x| : |x| = 1\}$。这是映射 $f(x) = \mathbf{A}x$ 的最大伸缩因子。当 $\mathbf{A} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ 时，我们也会用到最小伸缩因子 $\ell(\mathbf{A}) = \min\{|\mathbf{A}x| : |x| = 1\} > 0$。$\mathbf{A}$ 的行列式记作 $\det\mathbf{A}$。

对于度量空间 (X,d) 中的集合 E,F，我们将直径记作 $\operatorname{diam} E=\sup_{x,y\in E} d(x,y)$，将距离记作 $\operatorname{dist}(E,F)=\inf_{x\in E,y\in F} d(x,y)$。用 $\operatorname{side}(Q)$ 表示方体 $Q\subset\mathbb{R}^n$的边长。集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的勒贝格测度记作 $|A|$。

豪斯多夫维数 $\dim_H E$（$E\subset\mathbb{R}^n$ 的）是 $s>0$ 的下确界，使得对每个 $\epsilon>0$ 都存在 E 的覆盖 $\{A_i\}$，且满足 $\sum_i(\operatorname{diam} A_i)^s<\epsilon$。或者，$\dim_H E$ 是唯一的 s_0，使得对所有 $s\in(s_0,n]$ 有 $\mathcal{H}^s(E)=0$，并且对所有 $s\in[0,s_0)$有 $\mathcal{H}^s(E)=+\infty$，其中 $\mathcal{H}^s$ 表示 s维豪斯多夫测度。

对于有界的 E，（上）盒维数 $\dim_B E$ 是$s>0$的下确界，对此存在 $C>0$，使得对所有 $r<\operatorname{diam} E$都有 $N(E,r)\leqslant Cr^{-s}$。这里 $N(E,r)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 中覆盖 E所需的、直径为 r的集合的最小个数。

我们用 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$中拉东测度的集合。$\nu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 的 s-能量 为 $I_s(\nu):=\iint|x-y|^{-s}\,d\nu(x)\,d\nu(y)$。Frostman 引理的传统（体积增长）版本指出，博雷尔集[1]$E\subset\mathbb{R}^n$ 的豪斯多夫维数等于 $\sup\{s:\ \exists\,\nu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\text{ s.t. }\nu(B(x,r))\leqslant r^s\,\forall\,x\in E,\ r>0\}$。弗罗斯特曼引理的能量版本断言，$\dim_H E=\sup\{t:\ \exists\,\nu\in\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\text{ s.t. }I_t(\nu)<\infty\}$。关于这些结论的证明，参见 [53, 第 8] 章。

一个自相似迭代函数系（*IFS*）是一组压缩相似变换$\mathcal{F}=\{\varphi_1,\ .....,\ \varphi_M\}$。$\mathcal{F}$ 的不变集 是满足$K=\bigcup_{j=1}^M\varphi_j(K)$的唯一非空紧集 K。将 Banach 压缩映射原理应用于作用在紧集超空间 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$上的映射$F\mapsto\bigcup_{j=1}^M\varphi_j(F)$，即可推出 K 的存在性与唯一性。Hutchinson 定理指出，若 $\mathcal{F}$ 满足开集条件，[2] 则 $s=$ 的维数 $\dim_H K$ 是方程$\sum_{j=1}^M r_j^s=1$的唯一非负解。这里

r_j 表示 φ_j的压缩比。此外，$\mathcal{H}^s\quad K$ 是 Ahlfors s-正则测度：存在 $c_1>0$ 和 $c_2<\infty$，使得对于所有 $x\in K$ 和 $0<r<\operatorname{diam} K$，都有 $c_1r^s\leqslant\mathcal{H}^s(B(x,r)\cap K)\leqslant c_2r^s$。例如，参见 [53, 定理 4.14]。

1.2. 致谢。本综述中所述作者先前的工作是在美国国家科学基金会（NSF）和西蒙斯基金会的支持下完成的。此外，关于拟共形畸变对 Assouad 谱影响的结果，是作者担任美国国家科学基金会项目主任期间并在美国国家科学基金会独立研究与开发计划的支持下取得的。本文所表达的任何观点、研究结果、结论或建议均属于作者本人，并不一定反映美国国家科学基金会的观点。

图 2(b)经许可转载自文章 [63],，其中该图以图 5(a)的形式出现。未发表的定理 6.11 依据一项由 Dimitrios Ntalampekos 告知作者和 Chrontsios Garitsis 的观察结果。感谢他允许我在此处引用这条评论。

动画 https://publish.illinois.edu/jeremy-tyson/animations 由伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校的学生 Dan Schultz 和 Nishant Nangia 制作，并得到伊利诺伊几何实验室（伊利诺伊几何实验室）[3] 数学系的支持。

---

[1]该结果对解析子集也成立。[2]$\mathcal{F}$满足开集条件（开集条件），如果存在 O $\varphi_j(O)\subset$开且 $O\,\forall\,j\quad\varphi_j(O)\cap\varphi_k(O)=\varnothing\,\forall\,j\neq k$ 有界，使得 和 。[3]现称为伊利诺伊数学实验室（伊利诺伊数学实验室）

多年来，我有幸与许多同事就本文主题进行了有益的交流，其中包括 Kari Astala、Zoltán Balogh、Mario Bonk、Efstathios Chrontsios Garitsis、Jonathan Fraser、Hrant Hakobyan、Leonid Kovalev、Alex Rutar、Kevin Wildrick 和 Jang-Mei Wu。特别感谢 Efstathios Chrontsios Garitsis、Estibalitz Durand Cartagena 和 Dmitrios Ntalampekos，他们都为本文的早期草稿提供了有益的反馈。不过，文中的任何错误均由作者负责。

2. 拟共形映射：历史与背景

保向微分同胚 $f:\Omega\to\Omega'$ 在平面区域之间的非共形性，可通过 贝尔特拉米系数 $\mu=\mu_f:\Omega\to\mathbb{C}$ 来量化，其定义为

$$f_{\overline{z}}=\mu\, f_z. \tag{2.1}$$

复值量 $\mu_f(z)$ 刻画了 f 在 $z\in\Omega$ 处的无穷小伸缩与旋转。特别地， $|\mu_f(z)|$ 决定了无穷小相对伸缩因子；若 f 满足 k-拟共形， $k<1$，则称该微分同胚为拟共形映射；若 $k_f:=||\mu_f||_\infty\leqslant k$。从几何上看，若映射 f 将每个无穷小圆盘映为无穷小椭圆，且所有此类椭圆的离心率都一致地远离零，则该映射是拟共形的。当 $\mu=0$时，(2.1) 化为经典的柯西–黎曼方程，其微分同胚解是共形的。

最大和最小无穷小伸缩因子 $L_f(z)=\lim_{r\to 0} r^{-1}L_f(z,r)$和 $\ell_f(z)=\lim_{r\to 0} r^{-1}\ell_f(z,r)$通过 $L_f(z,r)=\max_{|z-w|=r}|f(z)-f(w)|$和 $\ell_f(z,r)=\min_{|z-w|=r}|f(z)-f(w)|$定义。这些值满足恒等式 $L_f(z)=\max_\theta|\partial_\theta f(z)|=|f_z(z)|+|f_z(z)|$和 $\ell_f(z)=\min_\theta|\partial_\theta f(z)|=|f_z(z)|-|f_z(z)|$。$f$在 z处的（度量）膨胀率 $H_f(z):=L_f(z)/\ell_f(z)$与贝尔特拉米系数之间的关系为 $H_f(z)=\frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}$。也可以说，如果$H_f:=\max_z H_f(z)\leqslant K$，则 f是 K-拟共形的。注意，$H_f=\frac{1+k_f}{1-k_f}$，或者等价地，$k_f=\frac{H_f-1}{H_f+1}$。术语上稍作宽泛使用：若相应条件成立，我们称平面映射 f 在$K\geqslant 1$ 时为 K-拟共形，或在 $0\leqslant k<1$ 时为 k-拟共形。

尽管早期工作假定了 C^1 正则性，Morrey [55] 证明：对于任意可测数据 $\mu:\Omega\to\mathbb{C}$ 且满足 $||\mu||_\infty<1$，方程 (2.1) 存在同胚解 $f:\Omega\to\Omega'$。这一结果现在称为可测黎曼映射定理。继 Ahlfors [1],Mori [54] 及其他学者在20世纪50年代的重要工作之后，这些映射的基本解析特征得以确立。这些特征包括局部赫尔德连续性、L^2 偏导数的可积性、卢津条件 (N)（保持勒贝格面积测度的消失）、雅可比行列式几乎处处为正，以及适当的紧性理论。对我们尤为相关的是，这类映射保持完整的豪斯多夫维数；若 $\dim_H E=2$，则亦有 $\dim_H f(E)=2$。在 [17], 中，Bojarski 运用卡尔德龙–齐格蒙德奇异积分工具求解 (2.1)，并由此得到一个基本的正则性结论：任意 k-拟共形映射 f 的偏导数 f_z 与f_z 属于 $W^{1,p}_{loc}$，对某个 $p>2$成立。[4]

[4]事实上，对于任意满足 $k_fC_p<1$的 p，结论都成立；其中 C_p 表示博伊林变换 $Tf(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dA(w)$ 作用于 L^p 时的算子范数。这样的 p 存在，是因为 $p\mapsto C_p$ 连续，且 T 是一个 L^2 等距映射。

在更高维的欧几里得空间中，与复分析的密切联系消失了，因而需要新的方法来建立适当且类似的理论。这一研究计划主要经由 Gehring 与 Väisälä 自20世纪60年代起的努力而推进。在 Ahlfors 于二维情形中开创的思想基础上，Gehring [35] 与 Väisälä [64] 从拟共形性的几何定义 出发发展了该理论，该定义基于对曲线族的共形模 的拟保持。尽管如此，这一定义被证明等价于度量定义，后者用同胚$f:\Omega \to \Omega'$（在 $\mathbb{R}^n$中， $n \geqslant 2$）于点 $x \in \Omega$ 处的度量膨胀 $H_f(x) = \limsup_{r\to 0} L_f(x,r)/\ell_f(x,r)$的一致上界来表述。已知这类映射具有适当的解析正则性；它们属于 $W^1_{,loc}{}^n(\Omega:\mathbb{R}^n)$，并满足畸变不等式

$$||Df(x)||^n \leqslant K \det Df(x) \qquad \text{a.e. } x \in \Omega. \tag{2.2}$$

我们称同胚 $f \in W^1_{,loc}{}^n(\Omega:\mathbb{R}^n)$（解析地） K-拟共形，若其满足 (2.2)；为简便起见，我们将拟共形简称为 QC。与平面情形类似，已证明这类映射是赫尔德连续的，几乎处处可微，雅可比行列式几乎处处为正，并且保持豪斯多夫维数不变。然而，雅可比行列式的高阶可积性问题（即 L^p 对某个 $p > n$的 Df 可积性）曾一度悬而未决。Gehring 在 1973 [36] 对这一问题的解决，开启了我们关于拟共形映射和索博列夫维数扭曲的讨论，具体内容将在下一节展开。

拟共形映射的限制与延拓定理在该理论中占有重要地位。Beurling 和 Ahlfors [13] 证明，每个定义在上半平面 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 上的 k-拟共形映射 $f:\Omega \to \Omega$ 都有一个延拓到 Ω 闭包上的同胚，其在边界上的限制记作 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，并满足

$$\frac{1}{M} \leqslant \frac{|g(x+t)-g(x)|}{|g(x)-g(x-t)|} \leqslant M \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, t > 0, \tag{2.3}$$

满足 $M = M(k)$。(2.3) 中的双重不等式称为 M条件。Beurling 和 Ahlfors 还证明，对于某个 $M < \infty$，每个满足 M条件的同胚 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 都可以延拓为一个 k 拟共形映射 $f:\Omega \to \Omega$，且满足$k = k(M)$。

任意将 $\Omega = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0\}$ 映至 $\Omega \to \Omega$ 的拟共形映射 f，都可以延拓为 Ω 闭包上的同胚，其在 $\mathbb{R}^n = \partial\Omega$ 上的限制是 $\mathbb{R}^n$ 的拟共形自映射；Tukia 和 Väisälä [61] 则通过证明每个拟共形映射$g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 都是某个拟共形映射 $f:\Omega \to \Omega$ 的边界值，给出了 Beurling–Ahlfors 延拓定理的高维版本。

每个将 $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ 中的域相互映射的拟共形映射 f，相对于勒贝格测度绝对连续，并且保持豪斯多夫维数（$\dim_H E = n$ 意味着 $\dim_H f(E) = n$）。然而，Tukia [60] ——回答 Hayman 和 Hinkkanen 提出的问题时——证明，满足 M条件的$\mathbb{R}$ 映射未必具有这些性质。事实上，它们在豪斯多夫维数方面的表现可能极其糟糕；存在这样的映射 $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和集合 $E \subset \mathbb{R}$，使得 $\dim_H(\mathbb{R}\backslash E)$ 和 $\dim_H E$ 都可以任意小。另见定理 3.8。

度量空间之间的同胚 $f:(X,d) \to (Y,d')$ 称为 η- 拟对称 （η-QS），若存在某个递增同胚 $\eta:[0,\infty) \to [0,\infty)$，使得$d'(f(x),f(y)) \leqslant \eta(t)\, d'(f(x),f(z))$只要 $x,y,z \in X$和 $t > 0$满足 $d(x,y) \leqslant t\, d(x,z)$，上述条件便成立。若映射满足 $d'(f(x),f(y)) \leqslant$，则称其为弱 H拟对称 （H-WQS），$H > 0$。

$H\, d'(f(x), f(z))$只要 $d(x,y) \leqslant d(x,z)$，上述条件便成立。每个 η-QS 映射都是满足 $H = \eta(1)$的 H-WQS 映射；而连通倍增空间之间的每个 H-WQS 映射都是某个 η -QS 映射，其中 η 仅依赖于 H [41, 定理 10.19]。定义域 Ω 与 Ω′在 $\mathbb{R}^n$中的域之间的同胚 $f : \Omega \to \Omega'$ 是拟共形映射，当且仅当存在 H ，使得 f在每个球 $B(x, \frac{1}{2}\delta(x))$中都是 H-WQS，其中 $\delta(x) := \mathsf{dist}(x, \partial\Omega)$。特别地，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是拟共形映射，当且仅当它是拟对称映射。此外，同胚 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是拟对称映射（按本段定义），当且仅当 f 满足 M-条件。

2.1. **参考文献**。 Lehto 和 Virtanen [50] 以及 Ahlfors [2]的经典著作，详细描绘了截至 20 世纪 70 年代初的平面拟共形映射理论。高维理论的权威参考书是 Väisälä 的专著 [65]，几代研究者都曾受益于此书。若想了解较新的观点，强烈推荐 Gehring、Martin 和 Palka [38] 的著作。然而，后两部参考书都没有讨论 Gehring 高阶可积性定理及其对维数扭曲的影响。Iwaniec 和 Martin [43] 着重从解析角度探讨与非线性分析和弹性理论相关的有界扭曲映射；书中还在（更一般的）拟正则映射背景下论述了高阶可积性。关于拟共形映射和拟正则映射平面理论的全面解析论述，参见 Astala、Iwaniec 和 Martin [6]。

3. 拟共形维数畸变：故事的开端

对拟共形映射和索伯列夫映射的维数扭曲进行系统研究，始于1973年的两篇论文。第一篇 [36], 由 Fred Gehring 撰写，其中包含了人们期待已久的高维扩展，即 Bojarski 的高阶可积性定理从 [17]的推广。

定理 3.1 (Bojarski, $n = 2$; Gehring, $n \geqslant 3$)。对于每个 $K \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 2$，都存在 $p = p(n, K) > n$ ，使得若 $f : \Omega \to \Omega'$ 是复平面中域之间的 K-拟共形映射，则 $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^n)$。

作为 Bojarski 高阶可积性定理的推论，Gehring 和 Väisälä[39] 得到了拟共形畸变对平面集合豪斯多夫维数的估计。高维情形的推广见于 [36]，它是 Gehring 相应的、适用于所有维数的高阶可积性定理的一个推论。

定理 3.2 (Gehring–Väisälä, $n = 2$; Gehring, $n \geqslant 3$)。设 $f : \Omega \to \Omega'$ 是 K-拟共形映射，在 $\mathbb{R}^n$中的两个域之间取值，$n \geqslant 2$，且 $E \subset \Omega$ 是一个满足$s =$ 维数$_H E \in (0$的集合，$n)$。那么存在 c_1 和 c_2，它们依赖于 K、 n和 s ，使得

$$0 < c_1 \leqslant \dim_H f(E) \leqslant c_2 < n. \tag{3.1}$$

Gehring 和 Väisälä 还证明了 (3.1) 在以下意义下是尖锐的：对每个 $0 < s, \ s' < n$ 都存在紧集 E 和 E' 位于 $\mathbb{R}^n$ 中，满足维数$_H E = s$ 且维数$_H E' = s'$ ，并存在一个拟共形映射 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得 $f(E) = E'$。值得回顾一下这一构造，因为它展示了之后还会用到的技术。

例 3.3。 固定 $0 < s, s' < n$。设 $Q = [0,1]^n$ 和 $Q_1, \dots, Q_M \subset Q$ 是互不相交且满足 $\sum_{i=1}^M \mathsf{side}(Q_i)^s = 1$ 的闭立方体。类似地，设 $Q'_1, \dots, Q'_M \subset Q$ 是互不相交且满足 $\sum_{i=1}^M \mathsf{side}(Q'_i)^{s'} = 1$ 的闭立方体。考虑由相似变换 φ_i, φ'_i 构成的迭代函数系统 $\mathcal{F} := \{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ 和 $\mathcal{F}' := \{\varphi'_1, \dots, \varphi'_M\}$，使得 $\varphi_i(Q) = Q_i$ 且对所有 i 都有 $\varphi'_i(Q) = Q'_i$ 。分别用 E 和 E' 表示相应的不变集。根据 Hutchinson 公式，$\dim_H E = s$ 且 $\dim_H E' = s'$。

现在构造一个拟共形映射 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，使得 $f(E) = E'$。首先，定义$f_1:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 如下：当 $x \notin Q$ 时，$f_1(x) = x$；对每个 $x \in Q_i$，$f_1(x) = \varphi_i' \circ \varphi_i^{-1}(x)$；并且 $i = 1, \ldots, M$，而 f_1 则以光滑或分段线性的方式延拓到 $Q \backslash \bigcup_{i=1}^{M} Q_i$ 的内部 U。容易看出，对于某个固定的 $K \geqslant 1$，f_1 是 K-拟共形的。[5] 此外，只要 $x \notin Q$ 或者对某个 i 有 $x \in Q_i$，就有 $H_f(x) = 1$。接下来，通过与定义相似变换共轭来定义$f_2: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$：在 $\mathbb{R}^n \backslash \bigcup_{i=1}^{M} Q_i$ 上取 $f_2(x) = f_1(x)$，而当 $x \in Q_i$ 时取 $f_2(x) = \varphi_i' \circ f_1 \circ \varphi_i{}^{-1}(x)$。于是，对于相同的 K，f_2 仍是 K-拟共形的；若对某个 i 有 $x \in f_j(Q_i)$，则 $H_f(x) = 1$。如此继续下去，构造出 K-拟共形映射 f_m，使得对所有词 $(i_1 \cdots i_m) \in \{1, \ldots, M\}^m$，都有 $f_m(\varphi_{i_1} \circ \cdots \circ \varphi_{i_m}(Q)) = \varphi_{i_1}' \circ \cdots \circ \varphi_{i_m}'(Q)$。根据标准收敛定理，存在极限映射 $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，它仍是 K-拟共形映射，并将 E 映到 E'。

例3.4。例 3.3 中拟共形映射的构造之所以较为容易，是因为集合 E 满足全不连通性的一个强版本：任意两个部分 $E \cap Q_i$ 和 $E \cap Q_j$、$i \neq j$之间的距离，都有一个固定倍数的 diam E作为下界。对于连通不变集，实现类似的构造则更具挑战性。下面通过描述$[0、\ 1] \subset \mathbb{R}^2$ 与冯·科赫雪花之间的拟对称等价来说明这一点。回顾一下，冯·科赫曲线 $K \subset \mathbb{R}^2$（图1）可以实现为一个满足开集条件的自相似迭代函数系 $\mathcal{F}'$ 的不变集，该系统由四个缩放因子均为$1\,3$的压缩映射组成。因此，dim $K = \log 4 \log 3$。

为了构造从 $[0、\ 1]$到 K的拟对称映射，将 $[0、\ 1]$表示为一个迭代函数系统 $\mathcal{F}$ 的不变集，该系统由四个缩放因子均为 1 4 的压缩映射组成。在 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$的元素之间存在一个自然的保序对应。该对应关系可下降到迭代函数系构造的所有层级，并诱导出一个同胚映射 $f:\ [0、\ 1] \to K$。注意，对于任意 $m \in \mathbb{N}$、f，映射会将 [0的一个直径为 4^{-m} 的 m 阶自相似部分映射到 K 中一个直径为 3^{-m}的 m阶部分。事实上，令 $\epsilon := \log 3 \log 4$，可以验证 $f:\ ([0、\ 1]、\ d_E^{\epsilon}) \to (K、\ d_E)$ 是双利普希茨的。由于从 $[0、\ 1]$ 到 $([0、\ 1]、\ d_E^{\epsilon})$ 的恒等映射是拟对称的，因此可推出 $f:\ [0、\ 1] \to K$是拟对称的。

我们还要指出，Beurling–Ahlfors 延拓定理的一个推广版本保证映射 $f:\ [0, 1] \to K$ 可以延拓为 $\mathbb{R}^2$上的拟共形自映射。因此K 是一条拟直线段，也就是说，它是 $[0,\ 1]$的拟共形像。强烈推荐阅读 Gehring 和 Hag[37] 所著的书，以详细了解拟圆盘（$\mathbb{C}$中单位圆盘的拟共形像），书中还介绍了这类对象的诸多刻画。

例 3.3 表明，(3.1) 中的常数 $c_1(K, n, s)$ 与 $c_2(K, n, s)$ 必须满足 $c_1(K, n, s) \to 0$ 与 $c_2(K, n, s) \to n$（当 $K \to \infty$ 时）。利用定理 3.1 的结论，可以给出这些常数的半显式表达式。

[5] K 的值取决于 f_1 如何延拓到 U。

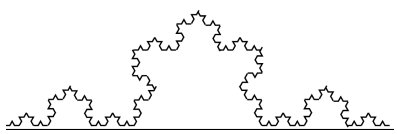

图1. 冯·科赫曲线

定义 3.5. 对于 $K \geqslant 1$ 与 $n \geqslant 2$，*Sobolev* 高阶可积性指数$p^{Sob}(n,K)$ 是那些值 $p > n$ 的上确界，使得定理 3.1 的结论对 $\mathbb{R}^n$ 中域之间的每个 K-拟共形映射都成立。

采用上述记号，(3.1) 中的估计可表述如下：对于满足 $\dim_H E = s$ 和 $\dim_H f(E) = s'$ 的 $E \subset \Omega$,

$$\alpha_n(p^{Sob}(n,K))\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{s'}-\frac{1}{n} \leqslant \alpha_n(p^{Sob}(n,K^{n-1}))^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right). \tag{3.2}$$

这里，对于 $p>n$，我们设 $\alpha_n(p) = 1 - \frac{n}{p}$。

接下来，我们简述 Gehring–Väisälä 证明 (3.2) 的论证。这里给出的 n-维版本源自 Gehring [36]。本文后文将介绍这一结果的其他证明。

证明 (3.2)。设 f 和 E 如上所述。不妨设 $E \subset V := B(x_0, \frac{1}{2}\delta(x_0))$，其中某个 $x_0 \in \Omega$。回忆一下，$f|_V$ 对某个依赖于 n 和 K 的 $H > 0$ 是弱 H-拟对称的。固定一个定义域 $U \subset V$，使得 $E \subset U$。

设 $p \in (n, p^{Sob}(n,K))$ 使得 $f \in W^{1,p}(U;\ \mathbb{R}^n)$。固定 $t \in (\dim_H E, n)$ 使得$\mathcal{H}^t(E) = 0$。由公式 $(1-\frac{n}{p})(\frac{1}{t}-\frac{1}{n}) = \frac{1}{t'}-\frac{1}{n}$ 定义 $t' \in (0,n)$。我们将证明 $\dim_H f(E) \leqslant t'$；令 $t \searrow \dim_H E$ 且 $p \nearrow p^{Sob}(n,K)$ 即完成证明。

对于 $\epsilon > 0$，用二进立方体 (Q_i) 覆盖 E，使得 $\sum_i$边长$(Q_i)^t < \epsilon$。用 x_i 表示 Q_i 的中心，并令 $r_i =$ 边长(Q_i)。由于 $f|_U$ 是一致连续的，我们有 $\operatorname{diam} f(Q_i) < \epsilon'$，对某个 $\epsilon'(\epsilon) \to 0$。令 $L_i = L_f(x_i, r_i)$ 与 $\ell_i = \ell_f(x_i, r_i)$。$f|_U$ 的弱 H-拟对称性蕴含对所有 i 有 $L_i \leqslant H\ell_i$。我们估计

$$\operatorname{diam} f(Q_i) \leqslant 2L_i \leqslant 2H\ell_i \leqslant C(n,H)|f(Q_i)|^{1/n} \tag{3.3}$$

and

$$|f(Q_i)| = \int_{Q_i} Jf \leqslant \int_{Q_i} ||Df||^n \leqslant \left(\int_{Q_i} ||Df||^p\right)^{n/p} |Q_i|^{1-n/p}. \tag{3.4}$$

利用 (3.3)、(3.4) 和霍尔德不等式，我们从上方估计 $\sum_i \operatorname{diam} f(Q_i)^{t'}$，得到

$$C(n,p,H,t')\left(\sum_i |Q_i|^{t'(\frac{1}{n}-\frac{1}{p})(\frac{p}{p-t'})}\right)^{1-t'/p}\left(\int_{\cup_i Q_i} ||Df||^p\right)^{t'/p}. \tag{3.5}$$

根据 t' 的选取，我们有 $t'(\frac{1}{n}-\frac{1}{p})(\frac{p}{p-t'}) = \frac{t}{n}$，因此 (3.5) 中的和等于 $\sum_i |Q_i|^{t/n} = \sum_i r_i^t$。于是 $\mathcal{H}^{t'}_{\epsilon'}(f(E)) \leqslant \sum_i (\operatorname{diam} f(Q_i))^{t'} \leqslant C\epsilon^{1-t'/p}||Df||^{t'}_{L^p(U)}$，其中 $C = C(n,\ p,\ H,\ t')$；又因为 $f \in W^{1,\ p}(U)$ 和 $\epsilon'(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0$，我们得出 $\dim_H f(E) \leqslant t'$，如所需。这就证明了 (3.2) 中的不等式左向；右向不等式则由以下事实得出：$\mathbb{R}^n$ 中 K-拟共形映射的逆映射是 K^{n-1}-拟共形的。□

当 $n \geqslant 3$ 时，$p^{Sob}(n,\ K)$ 的精确值仍是一个颇具挑战的开放问题；但 $p^{Sob}(2,\ K)$ 已由 Astala 在 1994 年的一项开创性成果中求得。

定理 3.6 (Astala)。对每个 $K \geqslant 1$，都有 $p^{Sob}(2,K) = \frac{2K}{K-1}$。因此，若 $E \subset \Omega$ 且 $f: \Omega \to \Omega'$ 是平面区域之间的 K- 拟共形映射，并且 $E \subset \Omega$ 满足 维数 $_H E = s$ 和 维数 $_H f(E) = s'$，则

$$\frac{1}{K}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{s'}-\frac{1}{2} \leqslant K\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\right). \tag{3.6}$$

Astala 的证明利用了拟共形性与平面情形特有的全纯运动之间的联系，以及用于研究保角动力系统不变集维数的热力学形式。受例 3.3 中构造的启发，通过仔细分析全纯变化的自相似康托集，Astala 还证明了 (3.6) 中的估计是尖锐的。要看出 $p^{Sob}(2,K)$ 的取值是尖锐的，只需注意， K-拟共形径向伸缩映射 $f(z)=|z|^{1/K-1}z$ 属于局部索伯列夫空间 $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{C}:\ \mathbb{C})$ 对所有$p<\frac{2K}{K-1}$均成立。

——

Astala 的论文 [4] 对平面拟共形映射理论的进一步发展产生了深远影响。截至本综述完成时，MathSciNet 列出了 200 多篇引用 [4] 的论文。我们重点介绍若干与（3.6）中的估计直接相关的后续研究方向。在 Astala–Clop–Mateu–Orobitg–Uriarte-Tuero [5], 的早期工作基础上，Lacey、Sawyer 和 Uriarte-Tuero [49] 建立了与（3.6）相关的临界绝对连续性估计。具体而言，若 $E\subset\Omega\subset\mathbb{C}$ 满足 $\mathcal{H}^s(E)=0$ ，其中某个 $0<s<2$ ，且 f 是 K- 拟共形映射，则 $\mathcal{H}^{s'}(f(E))=0$ 对满足 $\frac{1}{K}(\frac{1}{s}-\frac{1}{2})=\frac{1}{s'}-\frac{1}{2}$ 的 s'。

— – – — –

虽然 Astala 最初的工作证明了 (3.6) 中的估计对所有$s\in(0,\ 2)$都是尖锐的，但相关例子涉及自相似康托集。对于一维集合 $E\subset\mathbb{C}$，(3.6) 中 $\dim_H f(E)$ 的上界形式如下

$$\dim_H f(E)\leqslant\frac{2K}{K+1};\tag{3.7}$$

用复伸张参数 $k=\frac{K-1}{K+1}$ 表示的 (3.7) 为 ——

$$\dim_H f(E)\leqslant 1+k.\tag{3.8}$$

然而，早已知道，对于拟直线，也就是 $E=\mathbb{R}$ 的情形，(3.8) 中的估计并非最佳。Becker 和 Pommerenke [12] 证明了以下估计

$$\dim_H f(\mathbb{R})\leqslant 1+Ck^2\tag{3.9}$$

其中 $C=37$；Smirnov [59] 通过证明 (3.9) 中的 $C=1$，回答了一个长期悬而未决的问题。

定理3.7 (Smirnov)。 设 $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是某个 $k<1$ 的 k-拟共形映射。那么 维数 $_H f(\mathbb{R})\leqslant 1+k^2$。

Prause 与 Smirnov 的下述结果 [58] 在定理3.7的背景下建立在 Tukia 的例子之上。

定理 3.8 （Prause–Smirnov）。 设 $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为拟对称映射，并具有到$\mathbb{C}$的 k-拟共形扩张。设 $E\subset\mathbb{R}$ 满足$\dim_H E=s\in[0,\ 1]$。则令 $l=(1-s)^{1/2},$ ，我们有

$$\frac{(1-k^2)(1-l^2)}{(1+kl)^2}\leqslant s'=\dim_H f(E)\leqslant\frac{(1-(k\wedge l)^2)(1-l^2)}{(1-(k\wedge l)\,l)^2}.\tag{3.10}$$

我们还要指出，Fuhrer、Ransford 和 Younsi [34] 借助平面无穷调和函数理论，给出了 Astala 界（3.6）的一个新证明。他们的证明同样适用于盒维数与填充维数。我们将在下一节中，在 Sobolev 映射的背景下讨论盒维数的偏差。

最后，我们简要回顾另一种证明估计式 (3.2) 的方法。在 [42], Iwaniec 和 Martin 通过研究 Sobolev 容量的拟共形畸变，证明了 (3.2)。根据 [42], ，我们回顾一下：对于 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 中的紧集 E ，变分s-*Sobolev* 容量 $s-\mathrm{Cap}(E,\ \Omega)$ 是以下各量的下确界：$\int_\Omega|\nabla u|^s$ ，其中取遍所有

$u \in C_0^\infty(\Omega)$，使得 u 在 E 的一个邻域内恒等于一。容易看出，若将下确界改为对 $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 取值（其在 Ω 中具有紧支集），则 $\mathrm{Cap}(E, \Omega)$ 的值不变。若一个闭集 $E \subset \Omega$ 满足以下条件，则称其具有零s-容量：对每个紧集 $E' \subset E$ 以及每个满足$E' \subset U'$的 $U' \subset \Omega$，均有 $s - \mathrm{Cap}(E', U') = 0$。我们不加证明地引用以下 Hausdorff 维数与 Sobolev 容量之间的关系；度量测度空间情形的证明见 [23] 。

命题 3.9. 如果 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是闭集，那么$\sup\{s : E \text{ 具有消失的 } s\text{容量}\} = n - \text{维数}_H E$。

结合命题 3.9 与下一个命题（Iwaniec 和 Martin 的结果 [42,引理 1.1]），即可得到式 (3.2) 的一个基于容量理论的证明。

命题 3.10. 设 $f : \Omega \to \Omega'$ 是 $\mathbb{R}^n$中的两个域之间的一个拟共形映射，并假设 f 属于 $W^{1,p}_{loc}$ 其中某个 $p > n$。设 $E \subset \Omega$ 是一个具有消失的 s容量的闭集，其中某个 $0 < s < n$。那么，对所有 $r \leqslant \frac{s(p-n)}{p-s}$，$f(E)$ 都具有消失的 r容量。

命题 3.10 的证明涉及变量代换论证，并结合霍尔德不等式和 Gehring 高阶可积性定理，与此前 Gehring 和 Väisälä 的论证类似。不失一般性地假设 E 是紧集，并为 E的 s容量选取一个测试函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$，可以验证 $\psi = \varphi \circ f^{-1}$适用于 $f(E)$ 的 r容量。此外，

$$\begin{aligned} r - \mathrm{Cap}(f(E), \Omega') &\leqslant \int_{\Omega'} |\nabla \psi|^r = \int_\Omega |\nabla \psi \circ f|^r \det Df \leqslant \int_\Omega ||Df||^n |\nabla \psi \circ f|^r \\ &= \int_\Omega ||Df||^{n-r} \big(||Df|| \cdot |\nabla \psi \circ f|\big)^r \leqslant K^r \int_{\mathrm{spt}\,\varphi} ||Df||^{n-r} |\nabla \varphi|^r \end{aligned}$$

利用以下事实：对于 K-拟共形映射 f，$||Df||\,|h| \leqslant K|(Df)^T h|$，再结合恒等式 $(Df)^T(\nabla \psi \circ f) = \nabla \varphi$,

$$\leqslant K^r \left(\int_{\mathrm{spt}\,\varphi} |\nabla \varphi|^s \right)^{r/s} \left(\int_{\mathrm{spt}\,\varphi} ||Df||^{s(n-r)/(s-r)} \right)^{1-r/s}.$$

由于 $\frac{s(n-r)}{s-r} \leqslant p$，spt φ是紧的，且 $f \in W^{1,p}_{loc}$，第二个积分有限。对 φ 取下确界可知，$f(E)$ 的 r-容量为零。

4. Sobolev维数扭曲：一种新视角

在上一节中，我们考察了拟共形同胚对豪斯多夫维数的扭曲。这类映射属于具有更高正则性的 Sobolev 空间，这一点发挥了关键作用。本节将转换视角，考察超临界 Sobole夫类中的映射（不一定是单射）。我们注意到，关于豪斯多夫维数的单侧畸变估计依然成立；并不需要拟共形性。本节回顾的研究方向深受 Kaufman 于 2000 年发表的一篇论文启发 [45]。Kaufman 在论文开篇给出一个初等证明，证明超临界索伯列夫映射会使豪斯多夫维数增加，并对此给出单侧畸变界。

定义 4.1. 映射 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^N)$ 是超临界的，如果 $p > n$。

命题 4.2 (Kaufman)。 设 $f \in W^{1,p}(\Omega:\ \mathbb{R}^N)$ 是定义在定义域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$上的连续超临界映射。设 $E \subset \Omega$ 是某个 $s \in (0, n)$ 的 σ-有限 $\mathcal{H}^s$测度集。则 $\mathcal{H}^{s'}(f(E)) = 0$，其中 $s' = \frac{ps}{p-n+s}$。特别地，

$$\text{维数}_H f(E) \leqslant \frac{p \text{ 维数}_H E}{p - n + \text{维数}_H E}. \tag{4.1}$$

定理 3.2 可由命题 4.2 立即推出：如前所述，先固定 $p \in (n, p^{Sob}(n, K))$，再令 $p \nearrow p^{Sob}(n, K)$，最后利用以下事实：a K-拟共形映射的逆映射是 K^{n-1}-拟共形映射。

证明。 我们利用这样一个事实：豪斯多夫维数可以通过用二进立方体进行覆盖来计算。不妨设 $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ 且 $E \subset U \Subset \Omega$。固定 $t > s = \text{维数}_H E$，并令 $\{Q_i\}$ 为 E 的一个本质不交覆盖，其中的二进立方体取自 U，且满足 $\sum_i (\text{直径 } Q_i)^t < \mathcal{H}^s(E)+1$。不同于之前使用相对度量偏差的论证，这里我们改用莫雷–索伯列夫不等式：存在 $C(n,\ p) > 0$使得 $|f(x) - f(y)| \leqslant C(n,\ p)|x - y|^{1-n/p}(\int_{Q_i} ||Df||^p)^{1/p}$对所有$x,\ y \in Q_i$。[6] 特别地，对所有 i，有直径 $f(Q_i) \leqslant C(n,\ p)(\text{直径 } Q_i)^{1-n/p}(\int_{Q_i} ||Df||^p)^{1/p}$。从这里开始，证明与之前的论证基本相同。由$t' = \frac{pt}{p-n+t}$，利用霍尔德不等式从上方估计 $\sum_i($直径 $f(Q_i))^{t'}$可得

$$\sum_i (\operatorname{diam} f(Q_i))^{t'} \leqslant C \left(\sum_i (\operatorname{diam} Q_i)^t \right)^{1-t'/p} \left(\int_{\cup_i Q_i} ||Df||^p \right)^{t'/p}.$$

由于这些方体 $\{Q_i\}$ 的选取使它们本质上互不相交，我们可以推出

$$\mathcal{H}^{t'}_{\epsilon'}(f(E)) \leqslant C(\mathcal{H}^s(E) + 1)^{1-t'/p} ||Df||^{t'}_{L^p(U)}.$$

由于 $s < n$, E 是勒贝格零测集，并且我们可以将开集 $U \supset E$ 选取得使其勒贝格测度任意小。根据积分的连续性，并且由于 f 位于 $W^{1,\ p}$ 中，定义域 U 可以选取得使 $||Df||_{L^p(U)}$ 尽可能小。由此可得 $\mathcal{H}^{t'}(f(E)) = 0$，因此 $\dim_H f(E) \leqslant t'$。现在令 $t \searrow s$ (因此$t' \searrow s'$)。□

如上所述，该论证仅适用于 $\dim_H E < n$。不过，稍作调整即可证明 $f \in W^{1,\ p}$ 保持 Hausdorff n-测度为零这一性质：如果$E \subset \Omega$ 具有 $\mathcal{H}^n(E) = 0$，那么 $\mathcal{H}^n(f(E)) = 0$。此外，对于任意$E \subset\Omega$，都有 $\dim_H f(E) \leqslant n$。

Kaufman 还证明了命题 4.2 是尖锐的。

定理 4.3（Kaufman）。 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为任意满足 $\dim_H E \geqslant s$ 的闭集，并设 $p > n$。则存在 $f \in W^{1,\ p}(\mathbb{R}^n:\ \mathbb{R}^n)$ 连续，使得 $\dim_H f(E) \geqslant \frac{ps}{p-n+s}$。

定理 4.3 的证明是非构造性的；构造了连续$W^{1,\ p}$ 映射 $f_\omega:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的一个随机族，并借助弗罗斯特曼引理的能量版本证明，以正概率，其中一个映射 f_ω 满足所述下界。在本节稍后，我们讨论定理 4.3 的构造性证明以及更一般的结论，针对源集 E 的特定选取。

Kaufman 还证明了关于盒计数维数和 packing 维数的类似结论。我们讨论盒计数版本。对于一个上界，类似于

[6]这里我们依据如下事实：我们考虑的是给定映射的连续 代表元。

命题 4.2，需要采用一种新方法，因为我们现在希望估计适当尺度下的覆盖数 $N(f(E),\ r)\ r>0$，而不是形如 $\sum_i(\text{diam}\ f(A_i))^t$ 的直径和。我们再次预期 Morrey–索伯列夫不等式会发挥作用；然而，该不等式只能给出像直径的一个上界，而这个上界可能（而且很多情况下确实）不是最优的。

为处理这些复杂情况，Kaufman 采用了一种基于二进立方体的 f-像大小的停时论证。固定一个尺度 $\delta=2^{-m}$，并设定 $r:=2^{-ms/s'}$，其中 $s\in(0,\ n)$ 固定，且 $s'=\frac{ps}{p-n+s}$。我们称二进立方体 $Q\subset\Omega$ 为 r-大，如果 $\text{diam}\ f(Q)\geqslant r$；若 $\text{diam}\ f(Q)<r$，则称其为 r- 小。若一个 r- 小立方体 Q 的父立方体是 r- 大，则称其为 r- 临界。利用莫雷 – 索伯列夫不等式以及 r 与 δ 之间的关系，通过一个简单的计数论证可知，Ω 中 r-大立方体的数量为 $\lesssim 2^{ms}$。[7] 因此，r-临界立方体的数量也满足相同的上界。

我们从一个满足 $s=\dim_B E$ 的闭集 $E\subset\Omega$ 开始，并选取 $t>s$。那么，E 可以被 $\lesssim 2^{mt}$ 个边长为 $\leqslant 2^{-m}$ 的二进立方体 $\{Q_i\}$ 覆盖。此外，$f(E)$ 可以由 $\{Q_i\}$ 中所有 r-小立方体的像 $f(Q_i)$，以及 Ω 中所有 r-临界立方体 Q 的像 $f(Q)$ 覆盖。由此得到的基数上界为 $\lesssim 2^{ms}+2^{mt}\lesssim 2^{mt}=r^{-t'}$。这给出估计 $N(f(E),\ r)\lesssim Cr^{t'}$，当 $r>0$ 足够小时成立，从而得到所需的估计 $\dim_B f(E)\leqslant t'\searrow s'=\frac{ps}{p-n+s}$。

从拟共形同胚转向一般索伯列夫映射，开启了众多推广与扩展的可能性。

- 目标空间可以推广；无需考虑等维映射 $f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$。事实上，在许多后续结果中，目标空间的几何不起作用；这些结果自然地以度量空间值索伯列夫空间 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n$ 表述，且适用于任意情形$(Y,\ d_Y)$为简化本综述的表述，我们将只讨论欧几里得目标空间。
- 前述结果涉及普适估计，即针对给定映射 f下任意集合 E 的维数畸变所作的估计。我们也可以考虑由某个测度空间 W 中的元素参数化的子集族 $E_{\mathbf{a}}$，并寻求对几乎所有$\mathbf{a}$ 都成立的典型估计 。这类结论在拟共形情形下也能提供新的信息。
- 源空间的推广也值得关注。例如，我们可以用赋有次黎曼度量的非阿贝尔卡诺群，或具有海诺宁–科斯凯拉意义下有界几何的度量测度空间，来取代欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 。

接下来，我们讨论集合参数化族中索伯列夫维数增加的典型估计。固定一个连续且超临界的索伯列夫映射 $f\in W^{1,p}(\Omega:\mathbb{R}^N),\Omega\ \subset\ \mathbb{R}^n,\ p>n$。令 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 m 维线性子空间，其正交补为 $V^\perp$，并考虑 Ω 中由平行于 V 的仿射空间构成的叶状分解，这些仿射空间以 $V^\perp$中的元素为指标。具体而言，对于 $\mathbf{a}\in V^\perp$，令 $V_{\mathbf{a}}:=V+\mathbf{a}$。我们只考虑满足 $V_{\mathbf{a}}\cap\Omega\neq\varnothing$的点 $\mathbf{a}\in V^\perp$。对于每个这样的 $\mathbf{a}$，集合 $V_{\mathbf{a}}\cap\Omega$ 的豪斯多夫维数为 m，因此由命题 4.2 可得 $\dim_H f(V_{\mathbf{a}}\cap\Omega)\leqslant\frac{pm}{p-n+m}$。另一方面，对于几乎所有这样的点 $\mathbf{a}$ （关于

[7]为得到这一结论，先只考虑边长为 $2^{-m'}$、$m'\geqslant m$ 取某个值的 r-主导二进立方体 $Q\subset\Omega$，然后对所有 $m'\geqslant m$ 将所得不等式求和。

$\mathcal{H}^{n-m}$ $V^{\perp})$， f 在 $V_{\mathbf{a}} \cap \Omega$ 上的限制仍是一个连续的超临界索伯列夫映射。根据前面的评注，对于 $\mathcal{H}^{n-m}$-几乎处处的 $\mathbf{a}$，有 $\dim_H f(V_{\mathbf{a}} \cap \Omega) \leqslant m$。

在 Balogh、Monti 与作者的合作中，他们对这两种结论进行了插值，得到了参数例外集大小的尖锐估计$\mathbf{a}$；对于这些参数， $f(V_{\mathbf{a}} \cap \Omega)$的维数超过某个指定值 $m < \alpha < \frac{pm}{p-n+m}$。我们用 $G(n,m)$ 表示所有 m维线性子空间 $\mathbb{R}^n$构成的格拉斯曼流形。

定理 4.4 (Balogh–Monti–Tyson)。 设给定 $m \in \{1,\dots,n-1\}$, 以及 $V \in G(n,m)$, 并设 $f \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ 为一个连续的超临界映射。对于每个$m < \alpha < \frac{pm}{p-n+m}$, 使得 $\mathcal{H}^{\alpha}(\overline{f(V_{\mathbf{a}} \cap \Omega)}) > 0$ 为零测集的$\mathbf{a} \in V^{\perp}$，其豪斯多夫测度为 $\mathcal{H}^{\beta}$ $V^{\perp}$。这里 $\beta = \beta(\alpha) = (n-m) - p(1 - \frac{m}{\alpha})$。

当然， $\beta(m) = n-m$。我们还注意到，$\beta(\frac{pm}{p-n+m}) = 0$。在 [7] 中，作者还证明了该结果在以下意义下是尖锐的。

定理 4.5 (Balogh–Monti–Tyson)。 给定 $p > n$, $m \in \{1,\dots,n-1\}$, $V \in G(n,m)$, 以及一个集合 $A \subset V^{\perp}$，使得 维数$_H A \geqslant \beta(\alpha)$, 则存在一个连续映射 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, 使得对每个 $\mathbf{a} \in A$, 都有 维数$_H f(V_{\mathbf{a}} \cap \Omega) \geqslant \alpha$。

定理 4.4 在 [7] 中的证明将 Kaufman 的论证与 Frostman 引理的体积增长版本结合起来，从而得到几乎必然的结论。通过观察到通常的 $\mathbb{R}^n$ 二进分解与 $\mathbb{R}^n = V \oplus V^{\perp}$的正交分解相适配，可以简化证明。用反证法，令 Exc$(\alpha) := \{\mathbf{a} \in V^{\perp}: \mathcal{H}^{\alpha}(f(V_{\mathbf{a}} \cap \Omega)) > 0\}$，假设 $\mathcal{H}^{\beta}(\text{Exc}(\alpha)) > 0$，并设$\nu$是一个支撑在 Exc (α) 上的拉东测度，使得对于任意$\mathbf{a} \in V^{\perp}$ 和 $r > 0$，都有 $\nu(B_{V^{\perp}}(\mathbf{a}\ r)) \leqslant r^{\beta}$。沿着正交投影 $\pi: \mathbb{R}^n \to V^{\perp}$ 的平行纤维，运用 Kaufman 先前的论证，可推出

$$\int_{V^{\perp}} \mathcal{H}^{\alpha}_{\epsilon}(f(V_{\mathbf{a}} \cap \Omega))\, d\nu(\mathbf{a}) \to 0 \qquad \text{as } \epsilon \to 0.$$

由此可知，对于 ν-几乎处处的 $\mathbf{a}$， $\mathcal{H}^{\alpha}(f(V_{\mathbf{a}} \cap \Omega)) = 0$，但这与例外集 Exc$(\alpha)$ 的选取以及 ν 是定义在 Exc(α)上的正博雷尔测度这一事实相矛盾。

定理 4.4 尤其适用于 $\mathbb{R}^n$ 中定义域之间的拟共形同胚，并由此给出了一般平行子空间维数扭曲的新信息。为简便起见，并且由于在这种情形下，借助阿斯塔拉定理所得的结果表述最为简洁，我们只陈述平面上的相关定理。

推论 4.6。 设 $f: \Omega \to \Omega'$ 是平面区域之间的 k-拟共形同胚，设 $L \in G(2,\ 1)$，并设 $1 < \alpha < 1+k$。那么，对于 $\mathcal{H}^{\beta}$- 几乎处处的 $\mathbf{a} \in L^{\perp}$ 以及 $\beta = 1 - (1+\frac{1}{k})(1-\frac{1}{\alpha})$, 有 维数$_H f(L_{\mathbf{a}} \cap \Omega) \leqslant \alpha$。

由于 $k < 1$，我们有 $\beta < \frac{2}{\alpha} - 1 < 1 =$ 维数 $L^{\perp}$。在 [7], 中，给出了拟共形映射的例子，证明了推论 4.6 这一较弱且与膨胀率无关的推论是锐利的，但考察的是$f(L_{\mathbf{a}} \cap \Omega)$ 的盒维数，而非豪斯多夫维数。对于推论 4.6 中依赖膨胀率的结论，这些例子并非锐利。事实上，相较于 (3.8) 中的界，Smirnov 定理 3.7 给出的平面拟直线豪斯多夫维数的更强界表明，推论 4.6 实际上有望得到改进。

问题 4.7。 对于平面拟共形映射，参数化族平行直线的豪斯多夫维数的一般偏差，关于 k依赖的最优估计是什么?

与其关注膨胀率，不如从索伯列夫隶属的角度出发，寻找满足锐界的拟共形映射，使其符合命题 4.2 中的界。（请注意，这个问题与高维中拟共形映射的锐索伯列夫高阶可积性指数的确定无关。）在 [8], Balogh、Wildrick 与作者构造了任意维数下的拟共形映射，展示了这样的锐性。

定理4.8 (Balogh–Tyson–Wildrick)。 固定 $p > n \geqslant 2$、 $1 < \alpha < \frac{p}{p-n+1}$和 $L \in G(n,\ 1)$。那么，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $A \subset L^{\perp}$，使得 维数$_H A > (n-1) - p(1-\frac{1}{\alpha}) - \epsilon$，且存在拟共形映射 f，属于 $W^{1,\ p}(\mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$，满足 维数$_H f(L_{\mathbf{a}}) \geqslant \alpha$，对每个 $\mathbf{a} \in A$ 均成立。

该构造受到例 3.3的启发，但为了达到尖锐性，还需要稍作调整。为简化表述，我们令 $n = 2$。我们再次沿着 $P_{L^{\perp}}$的纤维布置一族互不相交的闭正方形，但为了使目标中的维数尽可能接近最优值，必须尽可能紧密地排列像正方形。出于简单的数论考量，这种排列并非总能用正方形实现。不过，我们可以将目标中的立方体替换为沿 x轴取向的矩形，并在迭代的第二阶段改用沿 y轴取向的矩形。经过两个阶段后，目标中又会得到一个正方形，随后便可像之前一样进行自相似迭代。基于这一简单思路，剩下的就是完成技术性估计，以证明 $\dim_H A$ 相对于 $\dim_H f(L_{\mathbf{a}})$、$\mathbf{a} \in A$ 以及索伯列夫指数 p 的最优取值均可达到。

Bishop、Hakobyan 和 Williams [15]在 n =2 的情形下给出了一个更早的例子。 [15]中的例子沿平行直线$L_{\mathbf{a}}$展现出更显著的畸变，即对于任意$\mathbf{a} \in A$以及任意博雷尔 $F \subset L_{\mathbf{a}}$，都有 $\dim_H f(F) = \alpha \dim_H F$。因此，对于任意选择的$\mathbf{a} \in A$，$f|_{L_{\mathbf{a}}}$ 的表现都类似于雪花映射。构造这样的映射大量运用了平面情形的特点，并依赖共形映射工具。 [15]的作者还证明了许多关于拟共形维数畸变的其他有趣结果。例如，下面是[15,定理 1.1]的一个特例。

定理 4.9 (Bishop–Hakobyan–Williams)**.** 设 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为拟共形映射，$n \geqslant 2$，且 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是满足开集条件的自相似迭代函数系统的不变集。那么，对 $\mathcal{L}^n$-几乎处处的 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$，有 维数$_H f(E + \mathbf{y}) =$ 维数$_H E$。

5. 共形维数

本节简要介绍共形维数理论，并着重说明其与欧几里得拟共形维数畸变的关系。以下定义由 Pansu 在 1989 [57] 中提出。首先注意，度量空间 (X, d) 的豪斯多夫维数 $\dim_H X$，其定义与第 1.1 节完全相同，即使用由子集 A_i 覆盖 X 。类似地，对于全有界度量空间 (X, d)，盒维数 $\dim_B X$ 可通过覆盖数 $N(X, r)$，$r > 0$良好定义。

定义5.1（Pansu）。(X,d), C的共形（豪斯多夫）维数 $\dim_H X$，是所有与 (X,d)准对称等价的空间 (Y,d') 的维数 $\dim_H Y$的下确界。

鉴于拟对称映射在度量空间上的分析应用中发挥着重要作用（例如几何群论、非光滑空间上的动力系统或分形上的分析），拟对称不变量 备受关注。共形维数是研究最广泛的此类不变量之一。在许多应用中，一种变体概念受到更多关注。我们先给出定义。

定义 5.2。(X,d) 的*Assouad* 维数 $\dim_A X$，是满足以下条件的 $s>0$ 的下确界：存在 $C>0$，使得对所有 $x\in X, 0<r<R$，均有 $N(B(x,R),r)\leqslant C(R/r)^s$。

若存在 $C>0$ 使得对所有 $x\in X$ 和 $r>0$，均有 $N(B(x,2r),r)\leqslant C$，则度量空间 (X,d) 称为倍增空间。容易看出，X 是倍增空间当且仅当 $\dim_A X<\infty$。Assouad 在 [3] 研究了这一维数概念（但使用了不同的名称），并将其与度量嵌入问题联系起来。[3]中的一项关键结果是：(X,d) 能拟对称嵌入[8] 到某个有限维欧几里得空间，当且仅当 $\dim_A X<\infty$。

将 Assouad 维数与盒维数进行比较颇有启发；这两个概念都要求对覆盖数进行一致控制 $N(E,\ r)$，不过，盒维数只要求在全局尺度（$E=X$）上进行控制，而 Assouad 维数则要求在所有位置和尺度上进行一致控制。对于有界空间，不等式 $\dim_H X\leqslant\dim_B X\leqslant\dim_A X$ 显然成立；此外，对于所有 X，$\dim_H X\leqslant\dim_A X$。对于 $\mathbb{R}^n$ 的任意非空开子集，所有维数都相等，且等于 n。

例 5.3。对于 $p>0$，令 $F_p=\{m^{-p}:\ m\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$。则 $\dim_H F_p=0$。比较间隙大小 $\frac{1}{m^p}-\frac{1}{(m+1)^p}\approx\frac{1}{m^{p+1}}$ 与该数列尾部的直径 $\operatorname{diam}\{j^{-p}:\ j\geqslant m\}\cup\{0\}=m^{-p}$，可得 $\dim_B F_p=\frac{1}{1+p}$。为计算 Assouad 维数，我们研究弱切空间。利用下文的命题 5.4，以及区间 $[0,\ \infty)$ 是 F_p 的一个弱切空间这一事实，可得 $1=\dim_A[0,\ \infty)\leqslant\dim_A F_p\leqslant 1$。因此 $\dim_A F_p=1$。

在例 5.3 中，我们使用了关于 Assouad 维数的一个基本事实：它在戈罗莫夫–豪斯多夫收敛下会收缩。对于本综述中讨论的其他维数概念，类似的结论并不成立。如果存在尺度 $r_m\to 0$ 和点 $x_m\in X$，使得 $(X,r_m^{-1}d_X,x_m)$（在带基点的戈罗莫夫–豪斯多夫意义下）收敛到 (Z,d_Z,z_0)，则称带基点度量空间 (Z,d_Z,z_0)是 (X,d_X) 的一个弱切空间 。关于戈罗莫夫–豪斯多夫收敛及其带基点版本的定义，请参见第 [52, 章 6] 。下面的结果是 [52, 命题 6.1.5]。

命题 5.4。设 (Z,d_Z) 是 (X,d_X)的一个弱切空间。那么 维数$_A Z$ ⩽维数$_A X$。

类比定义5.1，(X,d),C $\dim_A X$的共形*Assouad*维数 是所有与 (X,d)准对称等价的度量空间 (Y,d') 的维数$\dim_A Y$的下确界。根据Heinonen的一个观察 [41, 定理14.16], ，对于同时满足倍增和一致完美的度量空间(X,d)，[9] C $\dim_A X$ 与

[8]事实上，Assouad 证明，对于任意 $0<\epsilon<1$，雪花化度量空间 (X,d^ϵ) 都能双利普希茨嵌入到某个有限维欧几里得空间中。参见例3.4中的讨论。[9](X,d) 若存在 $c>0$，使得对所有 $x\in X$ 和所有 $0<r<\operatorname{diam}X$, $B(x\ r)\backslash B(x\ cr)\neq\varnothing$,,, 则称其为一致完美的。

与 $ARC\dim X$ 相等的***Ahlfors*正则共形维数** 是所有满足以下条件的 Q的下确界：存在一个 Ahlfors Q-正则空间 (Y,d')，它与 (X,d)准对称等价。回顾一下，如果存在 $C_1>0$ 和$C_2<\infty$，使得对于所有 $x\in X$和 $0<r<\operatorname{diam}X$，都有 $C_1r^Q\leqslant\nu(B(x,r))\leqslant C_2r^Q$，那么度量空间 (X,d) 上的测度 ν 就是$Ahlfors\ \ Q$-正则 的。度量空间 (X,d) 是Ahlfors Q-正则的，当且仅当它支持一个Ahlfors Q-正则测度；并且每个Ahlfors正则空间都同时是倍增且一致完美的。

对于集合 $E\subset\mathbb{R}^n$，我们可以转而考虑全局拟共形维数$\mathrm{GQC}_{\mathbb{R}^n}\dim\ E:=\inf\{\dim\ f(E):\ f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\mathrm{QC}\}$。此处 $\dim\ \in\{\dim_H,\dim_B,\dim_A\}$。

注 5.5. 对任意 (X,d)，雪花映射 $(X,d)\to(X,d^\alpha),0<\alpha<1$ 是拟对称的，且 $\dim(X,d^\alpha)=\alpha^{-1}\dim(X,d)$。（此处 dim 可指上述任一概念。）因此，若 dim(X,d) 为正，则该维数可通过拟对称映射任意增大。关于全局拟共形映射，Bishop [14]证明：若 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为闭集且 $\dim_H E>0$，则 $\sup\{\dim_H f(E):\ f\ \mathbb{R}^n\}=n$ 的拟对称映射。据我们所知，下列问题仍未解决。

问题 5.6。 设 $\dim\ \in\{\dim_B,\ \dim_A\}$，且 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为一个满足 $\dim\ E>0$的闭集。是否有 $\sup\{\dim\ f(E):\ f$的 $\mathbb{R}^n\}=n$拟对称映射?

如果集合 E 满足 $C\dim E=\dim E$，则称其为共形维数的极小集。以下例子来自 Bishop–Tyson [16, 备注 1]。

例 5.7。 对于任意博雷尔集 $Z\subset\mathbb{R}^{n-1}$，集合 $E=Z\times[0,\ 1]$ 是共形豪斯多夫维数的极小集。

作为对比，请注意，对于任意 $p>0$ 以及任意 Ahlfors 正则 $Z\subset\mathbb{R}^{n-1}$，$E=Z\times F_p$ 都是共形Assouad维数的极小集。事实上，倍增度量空间之间的每个拟对称映射都会下降为弱切空间之间的拟对称映射。由于 E具有形如 $Z_\infty\times[0,\ 1]$的弱切锥，且 Z_∞仍然是 Ahlfors 正则的，并且 $\dim\ Z_\infty=\dim\ Z$，因此我们得到 $C\dim_A E\geqslant C\dim_A(Z_\infty\times[0,\ 1])\geqslant C\dim_H(Z_\infty\times[0,\ 1])=\dim\ Z_\infty+1=\dim\ Z+1=\dim_A E$。

在 [62] 中，作者证明了不存在 Assouad 维数属于 $(0,1)$ 的空间，其共形Assouad维数是极小的。更准确地说，如果 (X,d) 的维数为$_A\ X<$1，那么 C 维数 $_A\ X=0$。Kovalev [47]解决了关于 Hausdorff 维数或盒维数的相应问题。

定理5.8 (Kovalev)。 设维数 $\in\{$维数$_H$，维数$_B\}$，且令 (X,d) 为满足维数 $X<1$的度量空间。那么 C维数 $X=0$。

事实上，Kovalev证明了一个更强的结论：每当 X 等距嵌入某个 Banach空间 V时，就可以选取 V 的拟对称自映射，使 X 的维数任意降低。特别地，如果 $E\subset\mathbb{R}^n$ 的维数为 $E<1$，那么 GQC 维数$_{\mathbb{R}^n}E=0$。

我们重点介绍自相似欧氏集合的共形维数方面的一些已知结果和未解问题。*Sierpiński* 垫 SG（图 2(a)）是一个平面迭代函数系的不变集，该系统由三个缩放因子均为$1\,2$的压缩映射组成。SG 的维数为$\log 3\log 2$。在 [63],中，作者与 J.-M. Wu 证明了 GQC $\dim_{\mathbb{R}^2}$ SG $=1$。此外，该下确界无法达到[10]，但可通过自相似迭代函数系的不变集逼近。图 2(b) 展示了一个这样的

[10]任何从 $\mathbb{R}^2$出发的拟共形映射，或者更一般地，任何从 SG 到其他度量空间的拟对称映射，其像集的维数都严格大于一。

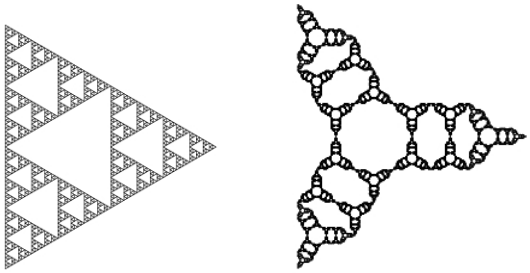

图2. (a) Sierpiński 垫 SG；(b) SG 的拟对称变形，作为新的自相似迭代函数系的不变集给出。

变形迭代函数系。[11] 这一构造可推广到范围更广的一类后临界有限迭代函数系，只要它们满足关于自相似部分的位置及其相互关系的适当几何约束。更多详情请参阅[63] 。

相比之下，确定*Sierpiński* 地毯SC 的共形维数是一个长期未决的问题。地毯 SC 是一个平面迭代函数系的不变集，该系统由八个压缩映射组成，每个压缩映射的缩放因子为$1\,3$，因此 dim SC $=\log 8\,\log 3\approx 1.89279\ldots$。与 SG 不同，其定义迭代函数系统不是后临界有限的。关于 C dim SC 的已知事实包括:

- $C\dim_A \mathrm{SC} < \dim \mathrm{SC}$。这一事实源于 Keith 与 Laakso 的一个一般结果 [46] ，该结果刻画哪些 Ahlfors 正则空间对于共形Assouad维数是极小的。
- $C\dim_H \mathrm{SC} = C\dim_A$SC。这是下文定理 5.10 的推论。我们将此值记为 C dim SC。• Cdim SC $\geqslant 1+\log 2\,\log 3\approx 1.63093\ldots > 1$。这由包含关系 SC $\supset C\times[0,1]$ 得出，其中 C 表示标准 Cantor 集，并结合例 5.7。
- $1.7652\ldots \leqslant C\dim \mathrm{SC} \leqslant 1.8067\ldots$。这些数值界由 Kwapisz 通过计算机辅助计算得到 [48], ，其中使用了对逼近网络的 p-电阻的估计。Kwapisz 的上界改进了 Kigami 早先的上估计。论文 [48] 还提出了 SC 上最优（一致化）度量的一种猜想构造。

据作者所知，尚不清楚 GQC $\dim_{\mathbb{R}^2}$ SC 是否等于 dim SC。换言之，是否存在某个拟共形映射 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ，使得 dim $f(\mathrm{SC}) <$ dim SC?

例 5.9. Bedford–McMullen 地毯是一类典型的自仿但非自相似分形集，可作为一般自仿几何的模型。这类地毯的豪斯多夫维数和盒维数由 Bedford 和 McMullen 在 20 世纪 80 年代分别计算得出。这里我们只想提及 Mackay [51]证明的一个有趣的二分结论：每个这样的地毯 $E\subset\mathbb{R}^2$ 都

[11]有关 SG 在自相似迭代函数系的不变集模空间中的单参数形变动画，请参见 https://publish.illinois.edu/jeremy-tyson/animations。

要么具有最小的共形Assouad维数，要么其共形Assouad维数为零。Mackay 还给出了这些地毯的 $\dim_A E$ 的显式公式。Bedford–McMullen 地毯的共形豪斯多夫维数目前仍然未知。

感兴趣的读者可参阅 Fraser 的综述文章 [29]，了解 Bedford-McMullen地毯以及用于计算或估计维数的工具的概况。

我们以 Eriksson-Bique [24] 的一项近期结果结束本节。关于准自相似度量空间的定义，请参阅 [24]；但请注意，该概念涵盖所有满足开集条件的自相似迭代函数系的不变集。

定理 5.10（Eriksson-Bique）。 C维数$_A\, X = C$维数$_H\, X$ 对于准自相似(X, d)。

定理 5.10 表明，关于共形维数其他变体的结果（例如共形盒计数维数，或下一节将要研究的维数插值量的共形版本）只有在底层空间不是自相似时，才能提供非平凡的信息。

5.1. 参考文献。 关于共形维数的文献浩如烟海，为求简洁，我们省略了对许多其他有趣主题和应用的讨论。专著 [52] 对度量空间中的共形维数进行了广泛探讨，并介绍了其在几何群论中的应用。若要进一步了解共形维数与 Cannon 猜想以及分形球面上的动力系统之间的联系，我们推荐阅读 Bonk 在 [18] 的国际数学家大会演讲。Kwapisz 在 [48] 中对 SC 的共形维数所作的估计，依赖于将共形维数刻画为图逼近上某些离散模数的临界指数。近年来，许多作者都探讨了这一思路；以下列出部分参考文献：[19], [40], [20], 和 [56]。

6. 索伯列夫与拟共形对维数插值量的畸变

在最后这一节中，我们介绍作者近期的研究成果：一项是与 Chrontsios Garitsis 合作完成的 [22]，另一项是与 Fraser 单独合作完成的 [31],，研究维数插值量的拟共形和索博列夫畸变性质。

维数插值是一个研究方向，旨在找出几何上自然的一参数维数族，使其在已有的度量维数概念之间进行插值。本节主要介绍两种维数插值量。Fraser 和 Yu 在 [33], 中提出的*Assouad* 谱在盒维数与 Assouad 维数之间进行插值；而 Falconer、Fraser 和 Kempton 在 [26], 中提出的中间维数则在豪斯多夫维数与盒维数之间进行插值。在定义 6.1 和 6.2 中，我们假设$E \subset \mathbb{R}^n$是一个有界集，并固定 $0 < \theta < 1$。回忆一下，对于有界集 F， $N(F, r)$表示覆盖F所需的直径不超过 r 的集合的最小数量。

定义 6.1（Assouad 谱）。 *θ-Assouad* 谱 维数$^{\theta}_{A}\, E$ 是满足以下条件的所有值 $s > 0$ 的下确界：存在常数 $C > 0$ 使得$N(B(x, R) \cap E, r) \leqslant C(R/r)^s$对于 $B(x, R)$中的球 $\mathbb{R}^n$，满足 $x \in E$和 $0 < r \leqslant R^{1/\theta} < R < 1$。

定义 6.2（中间维数）。上（上） θ-中间维数$\dim_\theta E$是满足以下条件的 $s > 0$ 的下确界：存在某个 $C > 0$，使得对所有 $\delta \in (0, \delta_0(\epsilon))$、 E都可以用集合 $\{A_i\}$ 覆盖，其中对于所有 i均有 $\delta^{1/\theta} \leqslant \operatorname{diam} A_i \leqslant \delta$，且 $\sum_i (\operatorname{diam} A_i)^s \leqslant C$。

定义 6.1 与 [33]，中定义的概念不同，后者考察覆盖数 $N(B(x,\ R)\cap E,\ r)$，针对满足 $r = R^{1/\theta}$ 而非 $r \leqslant R^{1/\theta}$ 的点对 $r < R$。这两个概念通常并不相同，但彼此相关：参见 [27, 定理 3.3。6] 其中给出了将所得两个版本的 Assouad 谱联系起来的公式。定义 6.1 中的量在 [27, 第 3.3 节2] 中被称为上 *θ-Assouad 谱*，并在 [22] 中被称为正则化 *θ-Assouad 谱* 。定义 6.1 更适合研究映射性质，因为通常对于给定映射下一个集合的像的直径，我们只能得到一个估计，而无法得到精确公式。

例 6.3. 对于例 5.3 中的集合 F_p，公式 $\dim_A^\theta F_p = \frac{1}{(1+p)(1-\theta)} \wedge 1$ 和 $\dim_\theta F_p = \frac{\theta}{\theta+p}$ 分别在推论 6.4] 和 §3.1]，中得到。

例 6.4. 文献 [9] 和 [31] 讨论了集合 F_p 的高维类似物。给定 $p > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令 $(\mathbb{N}^p)^n := \{(m_1^p, \dots, m_n^p)\colon\ m_j \in \mathbb{N}\}$。对于 $\alpha \neq 0$，记 f_α：$\mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 为径向伸缩映射 $f_\alpha(x) = |x|^{\alpha-1}x$。映射 $f_{-1}(x) = \frac{x}{|x|^2}$ 是 $\mathbb{S}^{n-1} = \{x\colon\ |x| = 1\}$ 中的保角反演，而一般而言，f_α 是 K-拟共形的，~~且 $K = \max\{|\alpha|, |\alpha|^{-1}\}$~~。令 $E_{p,n}^\alpha := f_\alpha((\mathbb{N}^p)^n)$，其中 $-1 \leqslant \alpha < 0$；示意图见图 3。

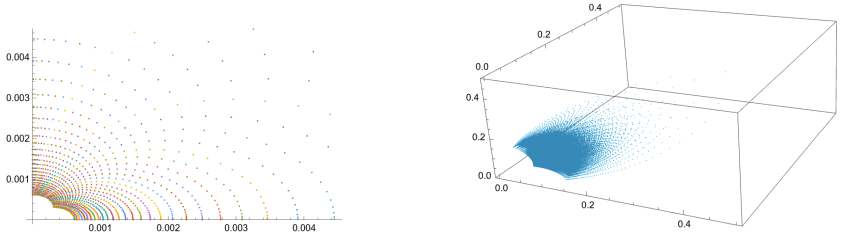

图 3. 多维多项式序列集的示例$E_{p,\ 2}^\alpha$（左）和 $E_{p,\ 3}^\alpha$（右）

中间维数的以下表达式由 [9]（$\alpha = -1$）以及 [31]（一般的 α）得到：

$$\dim_\theta E_{p,n}^\alpha = \frac{n\theta}{\theta + p|\alpha|}, \qquad 0 < \theta < 1, -1 \leqslant \alpha < 0. \tag{6.1}$$

因此 $\dim_B E_{p,\ n}^\alpha = \frac{n}{1+p|\alpha|}$ 此外，对于所有 p 和 α，$\dim_A E_{p,\ n}^\alpha = n$。

例 6.5。 Fraser [28] 研究了多项式螺线，并将其与双 Hölder 绕绕问题联系起来。给定 $p > 0$，令 $S_p := \{x^{-p}e^{\mathbf{i}x}\colon\ 1 < x < \infty\} \cup \{0\} \subset \mathbb{C}$。[28] 的定理 4.4 给出了 S_p 的 Assouad 谱的以下公式：若 $0 < p < 1$，则 $\dim_A^\theta S_p = \frac{2}{(1+p)(1-\theta)} \wedge 2$；若$p \geqslant 1$，则 $\dim_A^\theta S_p = \left(1 + \frac{\theta}{p(1-\theta)}\right) \wedge 2$。~~特别地，若 $0 < p < 1$，则 $\dim_B S_p = \frac{2}{1+p}$；若 $p \geqslant 1$，则 $\dim_B S_p = 1$。~~显然 $\dim_H S_p = 1$，~~而~~利用弱切锥进行的另一项分析表明 $\dim_A S_p = 2$。

例 6.6。 Fraser 和 Yu [32, 定理 3.3]（Assouad 谱）以及 Banaji 和 Kolossváry [10]（中间维数）已计算出 Bedford–McMullen 地毯的维数插值量的精确值。

命题 6.7 和 6.8 汇集了关于这些维数插值函数的已知事实。尤其重要的是不等式 (6.2) 和 (6.3)，它们联系了

不同的维数概念。证明见 [33], [26], 和 [11], 另见[27, 第 3 节。3] 其中介绍了这些内容以及关于 Assouad 谱的其他事实。

命题 6.7. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集。则

(1) 函数 $\theta \mapsto \dim_A^\theta E$ 关于 θ 是非递减且连续的，对 $0 < \theta < 1$, (2) $\dim_A^\theta E \searrow \dim_B E$ 当 $\theta \searrow 0$时，(3)若 $f: E \to \mathbb{R}^N$ 是单射且为 α-*Hölder*，并具有 β^{-1}-*Hölder* 逆映射，对某个 $0 < \alpha \leqslant 1 \leqslant \beta < \infty$，则[12] $\dim_A^{\frac{\beta\theta}{\alpha}} E \leqslant \dim_A^\theta f(E) \leqslant^{\frac{1-\alpha\theta/\beta}{\alpha(1-\theta)}} \dim_A^{\frac{\alpha\theta}{\beta}} E$, (4) 对每个 $0 < \theta < 1$,

$$\dim_A^\theta E \leqslant \frac{\dim_B X}{1-\theta} \wedge \dim_A E. \tag{6.2}$$

命题 6.8. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界集。则

(1) 函数 $\theta \mapsto$ 维数$_\theta E$ 在 θ 上是非递减且连续的，其中 $0 < \theta < 1$; (2) 维数$_\theta^A E \nearrow$ 维数$_B E$ 当 $\theta \nearrow 1$时; (3) 维数$_\theta f(E) \leqslant$ 维数$_\theta E$ 当 $f: E \to \mathbb{R}^N$ 是 *Lipschitz* 且 $0 < \theta < 1$, ; (4) 维数$_\theta f(E) \leqslant \frac{1}{\alpha}$ 维数$_\theta E$ 当 $f: E \to \mathbb{R}^N$ α-*Hölder*, $0 < \alpha \leq 1$, 且 $0 < \theta < 1$; (5) 对于每个 $0 < \theta < 1$,

$$\dim_\theta E \geqslant \frac{\theta(\dim_A E)(\dim_B E)}{\dim_A E - (1-\theta)\dim_B E}. \tag{6.3}$$

特别地，由命题 6.8(5)可知，若 $\dim_B E = \dim_A E$，则对所有 $\theta > 0$，$\dim_\theta E = \dim_B E$。

我们列出以下对任意有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$都成立的不等式链:

$$\dim_H E \leqslant \dim_{\theta'} E \leqslant \dim_B E \leqslant \dim_A^\theta E \leqslant \dim_A E, \qquad \forall\, 0 < \theta, \theta' < 1.$$

当 $\theta \nearrow 1$ 时，$\dim_A^\theta E$的极限存在，但不一定等于 $\dim_A E$。事实上，$\dim_{qA} E = \lim_{\theta \nearrow 1} \dim_A^\theta E$ 是 E [27,（第 3 节）2]的所谓准 Assouad 维数。同样，$\dim_{qH} E = \lim_{\theta \searrow 0} \dim_\theta E$ 是 E的拟 Hausdorff维数。

命题 6.8 的第 (3) 和 (4) 部分断言，中间维数对于 Lipschitz 映射和 Hölder 映射都具有良好的性质。然而，Assouad 谱未必满足此类估计，参见 [27, 定理 3.4.12]。此外，目前尚无关于 Assouad 谱索博列夫畸变的一般界；注意，若 $\dim_A^\theta$ 满足类似于 (4.1) 的估计，那么令 $p \to \infty$ 趋于极限即可得到 $\dim_A^\theta$ 的 Lipschitz 收缩性。不过，拟共形畸变估计 (3.2) 的类似结果确实成立。下面的定理出自 [22]; 关于 $p^{RH}(n$ 的定义，请参见定义 6.10 $K)$。

定理 6.9 (Chrontsios Garitsis–Tyson)。 对于 $p > n \geqslant 2$ 和 $t > 0$，令 $\alpha_n(p) = 1 - \frac{n}{p}$, $\Phi_n(s) = s^{-1} - n^{-1}$ 和 $\theta(t) = \frac{1}{1+t}$。若 $f: \Omega \to \Omega'$ 在 $\mathbb{R}^n$中是 K-拟共形的，则

$$\begin{aligned} \alpha_n(p^{RH}(n,K))\Phi_n(\dim_A^{\theta(t/K)}(E)) &\leqslant \Phi_n(\dim_A^{\theta(t)} f(E)) \\ &\leqslant \alpha_n(p^{RH}(n,K^{n-1}))^{-1}\Phi_n(\dim_A^{\theta(Kt)}(E)). \end{aligned} \tag{6.4}$$

[12]只要所有相关的 Assouad 谱参数都属于 $(0, 1)$

对于任意紧致的 $E \subset \Omega$。特别地，若 $n = 2$，则

$$K^{-1}\Phi_2(\dim_A^{\theta(t/K)}(E)) \leqslant \Phi_2(\dim_A^{\theta(t)} f(E)) \leqslant K\Phi_2(\dim_A^{\theta(Kt)}(E)). \tag{6.5}$$

定理 6.9 的若干特点需要进一步讨论。首先，畸变估计的质量由一个新的高阶可积性指数决定。Gehring 在 [36]证明其高阶可积性定理时，关键步骤之一是证明，$\mathbb{R}^n$ 中的 K-拟共形映射的雅可比行列式满足如下类型的反向 ***Hölder*** 不等式：存在 $C > 0$，使得对于每个满足 $2B \Subset \Omega$ 的球 B，

$$\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|Df|^p\right)^{1/p} \leqslant C\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Df|^n\right)^{1/p}. \tag{6.6}$$

由于每个拟共形映射本来就属于 $W^{1,\,n}_{loc}$，因此立即可得，实际上 $f \in W^{1,\,p}_{loc}$。

定义 6.10. 对于 $K \geqslant 1$ 和 $n \geqslant 2$，反向 ***Hölder*** 不等式高阶可积性指数 $p^{RH}(n, K)$ 是使得式 (6.6) 对 $\mathbb{R}^n$中定义域之间的每个 K-拟共形映射都成立的 $p > n$ 的上确界。

显然，$p^{RH}(n,\ K) \leqslant p^{Sob}(n,\ K)$，并且可以猜想在整个过程中等号都成立。当 $n = 2$ Astala 的证明表明 $p^{RH}(2,\ K) = p^{Sob}(2,\ K) = \frac{2K}{K-1}$ 由此推出 (6.5) 中的估计。

拟共形映射是双赫尔德连续的。(6.5) 中的界比利用命题 6.7(4) 以及拟共形映射已知的 Hölder 正则性性质所得到的界更强。

在 (6.4) 中令 $t \to 0$ 趋于极限，可得到关于准 Assouad 维数的类似结论；稍作变动即可得到关于 Assouad 维数的类似结论。事实上，[13] 利用以下事实：对于某个弱切锥 Z，有 $\dim_A E = \dim_H Z$，其中该弱切锥来自 E [44,命题 5.8] 和定理 3.2；再结合拟共形映射取弱切锥时膨胀率 K 不会增加这一观察，可以推出以下结论：

定理 6.11. 若 $f : \Omega \to \Omega'$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 K-拟共形映射，且 $E \subset \Omega$，则$\alpha_n(p^{Sob}(n, K))(\frac{1}{\dim_A E} - \frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{\dim_A f(E)} - \frac{1}{n} \leqslant \alpha_n(p^{Sob}(n,\ K^{n-1}))^{-1}(\frac{1}{\dim_A E} - \frac{1}{n})$。

我们不知道这种改进对 Assouad 谱是否成立，因为尚无已知的、经由弱切锥的豪斯多夫维数表示的类似结果。

作为 (6.5) 与例 6.5 的应用，我们得到多项式螺线在膨胀率层面上的一个精确拟共形分类定理。注意到径向伸缩映射 $f(z) = |z|^{1/K-1}z$是 K-拟共形的，并且满足 $f(S_p) = S_q$，其中 $q = \frac{p}{K}$。

定理 6.12 (Chrontsios Garitsis–Tyson)**.** 固定 $p > q > 0$。存在拟共形映射 f: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足 $f(S_p) = S_q$，当且仅当 $H_f \geqslant \frac{p}{q}$。

为证明这一点，我们注意到，如果 $H_f < \frac{p}{q}$ 那么，通过对$t > 0$ 作适当选择并利用例 6.5，可得 f^{-1} 将一个 $\theta(t)$-Assouad 谱等于 2 的螺旋映射到一个 $\theta(t/K)$ 谱严格小于 2 的螺旋上。这与 (6.5) 矛盾。关于定理 6.12 的高维类比，即通过定理 6.9 中 n维断言，对按多项式递减的螺旋壳层进行拟共形分类，见 [21]。

[13]这一观察归功于 Ntalampekos。

由于 Hausdorff 维数和盒维数在连续的超临界索伯列夫映射下的增长都满足标准上界，因此 [31]中的以下结果并不令人意外。

定理 6.13 (Fraser–Tyson)。 若 $E \Subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$、 $n \geqslant 2$ 和 $f \in W^{1,p}_{\theta}(\Omega; \mathbb{R}^N)$连续且超临界，则对所有 $0 < \theta < 1$，有 维数$_\theta f(E) \leqslant$ 维数$_{p-n+\theta} E$。

特别是，对于拟共形映射，通常类型的双侧界成立，且在平面情形下常数 $1/K$ 和 K 是尖锐的。

定理 6.13 的证明综合了豪斯多夫维数证明和盒维数证明中的要素。通过考察像满足或不满足所需直径下界的立方体（该下界用于确保目标集合对θ中间维数是可容许的），进一步细化了二进立方体的主次分解。对于像的直径过小的立方体，将像替换为直径适当的较大集合。通过对像是 θ可容许的次要立方体进行豪斯多夫维数型证明，并对其余集合采用类似盒计数证明的基数估计，得到所需估计。详情见 [31, 第 4]节。

下面陈述 Hölder 偏差估计和索伯列夫偏差估计在中间维数拟共形分类中的一些应用。

- 如果 E 和 F 是满足 $\dim_H E = \dim_{qH} E = 0$ 且 $0 < \dim_B F = \dim_A F$ 的紧集，那么不存在将 E 映到 F的 $\mathbb{R}^n$ 拟共形映射。为此，注意到命题 6.8(5)意味着 $\dim_{qH} F > 0 = \dim_{qH} E$，但在命题 6.8(5)中令 $\theta \searrow 0$后，这一结论会产生矛盾。例如， F_p、 $p > 0$ （视为 $\mathbb{R}^n$的子集）与任何满足 $0 < \dim_B F = \dim_A F$的 F都不拟共形等价。
- 设 E 和 F为满足 $\dim_{qH} E = \dim_{qH} F = 0$ 的紧集，使得 $\theta \mapsto \dim_\theta E$ 和 $\theta \mapsto \dim_\theta F$ 在 $\theta = 0$ 处右可微，且
$$0 < (d/d\theta) \dim_\theta E|_{\theta=0} < (d/d\theta) \dim_\theta F|_{\theta=0} = +\infty.$$
那么不存在将 E 映到 F的拟共形映射 $\mathbb{R}^n$。
- Banaji–Kolossváry [10] 展示了全不连通的 Bedford–McMullen 地毯 E 和 F，满足 $\dim E = \dim F$，且对 $\dim \in \{\dim_H, \dim_B, \dim_A\}$，但它们的中间维数剖面不同。利用后者，他们得出结论： E 和 F 不能通过 Hölder 指数足够接近 1 的双 Hölder 同胚等价。利用定理 6.13，我们改进了他们的结论： E 和 F 不能通过任何 K-拟共形映射等价，其中 K足够接近 1；此外，得到的 K 界严格优于利用 Banaji–Kolossváry 的结果及拟共形映射已知 Hölder 正则性性质所得到的界。

注 6.14。对于复平面 $\mathbb{C}$ 中的紧集 $E \subset \mathbb{C}$ 和 K-拟共形映射 f，估计 $K^{-1}((\dim_\theta E)^{-1} - \frac{1}{2}) \leqslant (\dim_\theta f(E))^{-1} - \frac{1}{2}$是尖锐的。令人惊讶的是，这一事实的证明比 Astala 对相应豪斯多夫维数界尖锐性的证明简单得多。事实上，下述事实成立，凸显了维数插值理论与拟共形映射之间一种引人入胜的联系。

命题 6.15。 设 $E \subset \mathbb{C}$ 是非一致完美的，且 维数$_A E = 2$，并设f： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$是 K-拟共形映射，使得 (维数$_B f(E))^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{K}$((维数$_B E)^{-1} - \frac{1}{2}$)（数对 (E, f) 是平面拟共形映射盒维数估计中的锐界），并且

维数$_\theta E = \frac{2\theta}{\text{维数}2+(1-\theta)}$ $^{B\,E}$维数$_B E$，其中某个 $0<\theta<1$ 满足（E是 ***Banaji–Rutar***下界 (6.3)中的锐界）。那么 (维数$_\theta f(E))^{-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{K}((\text{维数}_\theta E)^{-1} - \frac{1}{2})$。

前一命题所适用的集合的一个例子是平面多项式序列集$E = E^{\alpha}_{s,2}$，对 $-1<\alpha<0$。注意，若 $-1<\alpha<\beta<0$，则集合$E^{\alpha}_{s,2}$与$E^{\beta}_{s,2}$通过满足 $\gamma = |\beta|/|\alpha|$的径向伸缩映射 f_γ 相关联。

最后，我们回到共形维数。

定理6.16 (Fraser–Tyson)**.** 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 有界，且$\dim_{qH} E<1$。则对每个 $\theta<1$，有 $\inf\{\dim^{\theta}_{A} f(E)\colon\ f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 拟共形$\} = 0$。特别地，$C\dim_B E = 0$。

这些结论所适用的集合例子包括以下各项:

- $E = Z\times F_p$ 对任意 $p>0$ 与 $Z\subset\mathbb{R}^{n-1}$，使得$\dim_{qH} Z<1$ 且$\dim_B Z \geqslant \frac{p}{p+1}$，• $E = F_p\times F_p\subset\mathbb{C}$ 满足 $0<p\leqslant 1$，• $E = F_p\times F_{1/p}\subset\mathbb{C}$ 对任意 $p>0$，• $E = E^{-1}_{s,\,2}\times F_p\subset\mathbb{R}^3$ 对任意 s 与 p，使得$s\leqslant 1+\frac{2}{p}$。

此外，上述所有集合 E 均有$\dim_B E\geqslant 1$，因此关于 $C\dim_B E$ 的所述结论并不能由定理5.8推出。

我们评述定理6.16的证明。首先，我们证明中间维数的每一个实例$\dim_\theta$ 都满足Kovalev定理中的蕴含关系：若$\dim_\theta E<1$，则$\inf\{\dim_\theta f(E)\colon\ f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 拟共形$\} = 0$。这是通过改写定理5.8的证明完成的。接下来，我们使用(6.2)与(6.3)中所述的维数之间的关系。假设 E 对某个 $\theta'>0$ 满足$\dim_{\theta'} E<1$，并固定 $\theta<1$与 $\epsilon>0$。选取一个拟共形映射 $f\colon\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，使得$\dim_{\theta'} f(E) < \frac{\epsilon(1-\theta)\theta'}{1-(1-\theta')\epsilon/n}$。

那么，根据 (6.3) 得到 $\dim_B f(E)<(1-\theta)\epsilon$，根据 (6.2) 得到 $\dim^{\theta}_{A} f(E)<\epsilon$。

最后，我们在表 1 中总结本综述介绍的各种度量维数概念的以下映射性质:

- ***Lipschitz*** 收缩性：$\dim f(X)\leqslant\dim X$对任意 Lipschitz 映射 $f{:}X\to Y$?
- ***Hölder*** 准收缩性：$\dim f(X)\leqslant\alpha^{-1}\dim X$对任意 α-Hölder 映射 $f\colon X\to Y$?• 双 ***Lipschitz*** 不变性：若 X 与 Y双 Lipschitz 等价，是否必有 $\dim X = \dim Y$?• ***Sobolev*** 畸变界：对于 $f\in W^{1,p}(\Omega\subset\mathbb{R}^n\colon\ \mathbb{R}^N)$连续且超临界时，对于集合 $E\subset\Omega$，我们是否必有 $\dim f(E)\leqslant \frac{p\dim p-n+}{\dim E}$?• 拟共形畸变界：对于 $f:\Omega\to\Omega'$ K在 $\mathbb{R}^n$中是拟共形的，是否存在如下形式的双边界 国产成人

$$\alpha_n(p_1)\Phi_n(\text{维 } E)\leqslant\Phi_n(\text{维 } f(E))\leqslant\alpha_n(p_2)^{-1}\Phi_n(\text{维 } E),\qquad \Phi_n(s) = s^{-1}-n^{-1},$$

对于适当的 p_1，p_2，在 $E\subset\Omega$ 上成立，具体取决于 K 和 n吗?

6.1. **参考文献**。 本节所讨论的两类维数插值量分别在 [33] 与 [26]中引入。若干优秀的综述文章亦已刊行。我们特别推荐Fraser [30] 以及Falconer [25]的综述。希望进一步了解Assouad 维数的读者，建议参阅Fraser的著作 [27]，该书从分形几何的视角对该主题作了很好的介绍。

表 1. 度量维数的映射性质

维数	$\dim_H$	$\dim_\theta$	$\dim_B$	$\dim_A^\theta$	$\dim_A$
Lipschitz 收缩性	✓	✓	✓	$\mathcal{X}$	$\mathcal{X}$
霍尔德准压缩性	✓	✓	✓	$\mathcal{X}$	$\mathcal{X}$
双 Lipschitz 不变性	✓	✓	✓	✓	✓
Sobolev 畸变界	✓	✓	✓	$\mathcal{X}$	$\mathcal{X}$
拟共形畸变界	✓	✓	✓	✓	✓
高阶可积性指数	p^{Sob}	p^{Sob}	p^{Sob}	p^{RH}	p^{Sob}

参考文献

[1] Ahlfors, L. V. 论拟共形映射。《数学分析杂志》3 (1954), 1–58；更正，207–208。[2] Ahlfors, L. V. 《拟共形映射讲义》，第2版，大学讲义丛书第38卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006。[3] Assouad, P. $\mathbb{R}^n$中的Lipschitz嵌入。《法国数学会公报》111 (1983), 429–448。[4] Astala, K. 拟共形映射的面积畸变。《数学学报》173, 1 (1994), 37–60。[5] Astala, K., Clop, A., Mateu, J., Orobitg, J., 与 Uriarte-Tuero, I. 拟正则映射的豪斯多夫测度畸变及改进的Painlevé可去性。《杜克数学杂志》141 (2008), 539–571。[6] Astala, K., Iwaniec, T., 与 Martin, G. 平面上的椭圆型偏微分方程与拟共形映射，普林斯顿数学丛书第48卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009。[7] Balogh, Z. M., Monti, R., 与 Tyson, J. T. 索伯列夫与拟共形维数畸变的频率。《纯粹与应用数学杂志》(9) 99, 2 (2013), 125–149。[8] Balogh, Z. M., Tyson, J. T., 与 Wildrick, K. 使许多平行直线的维数高度畸变的拟共形映射。《芬兰科学院数学辑刊》42, 1 (2017), 61–72。[9] Banaji, A., 与 Fraser, J. M. 无穷生成自共形集的Assouad型维数。《非线性》37, 4 (2024), 论文号045004, 32。[10] Banaji, A., 与 Kolossváry, I. Bedford-McMullen地毯的中间维数及其在Lipschitz等价中的应用。《数学进展》449 (2024), 论文号109735, 69。[11] Banaji, A., 与 Rutar, A. 中间维数的可达形式。《芬兰数学年刊》47, 2 (2022), 939–960。[12] Becker, J., 与 Pommerenke, C. 论拟圆的豪斯多夫维数。《芬兰科学院年刊》A辑I数学 12, 2 (1987), 329–333。[13] Beurling, A., 与 Ahlfors, L. 拟共形映射下的边界对应。《数学学报》96 (1956), 125–142。[14] Bishop, C. J. 使维数增大的拟共形映射。《芬兰科学院数学辑刊》24, 2 (1999), 397–407。[15] Bishop, C. J., Hakobyan, H., 与 Williams, M. 度量空间中Ahlfors正则子集的拟对称维数畸变。《几何与泛函分析》26, 2 (2016), 379–421。[16] Bishop, C. J., 与 Tyson, J. T. 共形维数的局部极小集。《芬兰科学院数学辑刊》 26, 2 (2001), 361–373。[17] Bojarski, B. V. Beltrami系统的同胚解。《苏联科学院院刊》（新辑）102 (1955), 661–664。[18] Bonk, M. 分形的拟共形几何。载于《国际数学家大会》第II卷。欧洲数学会，苏黎世，2006，第1349–1373页。[19] Bourdon, M., 与 Kleiner, B. 组合模、组合Loewner性质与Coxeter群。《群、几何与动力系统》7, 1 (2013), 39–107。[20] Carrasco Piaggio, M. 论紧度量空间的共形规范。《高等师范学校科学年刊》(4) 46, 3 (2013), 495–548 (2013)。[21] Chrontsios-Garitsis, E.-K. 论同心分形球面与螺旋壳层。《非线性》38, 3 (2025), 论文号035019, 21。

[22] Chrontsios Garitsis, E. K. 和 Tyson, J. T. Assouad 谱的拟共形畸变与多项式螺线的分类。《伦敦数学学会会刊》55 (2023), 282–307. [23] Costea, S. 度量测度空间中的 Sobolev 容量与豪斯多夫测度。《芬兰科学院数学辑刊》34, 1 (2009), 179–194. [24] Eriksson-Bique, S. 拟自相似空间和 CLP空间中共形维数不同定义的等价性。《芬兰数学年刊》49, 2 (2024), 405–436. [25] Falconer, K. J. 中间维数：综述。载于《热力学形式主义》，《数学讲义》2290卷。施普林格出版社，Cham， [2021] ©2021，第469–493页。[26] Falconer, K. J.、Fraser, J. M. 和 Kempton, T. 中间维数。《数学杂志》296, 1-2 (2020), 813–830. [27] Fraser, J. M. Assouad 维数与分形几何，《剑桥数学论丛》222卷。剑桥大学出版社，剑桥，2021年。[28] Fraser, J. M. 关于螺线缠绕问题的 Hölder解。《非线性》34, 5 (2021), 3251–3270。[29] Fraser, J. M. Bedford-McMullen地毯的分形几何。载于《热力学形式主义》，《数学讲义》2290卷。施普林格出版社，Cham， [2021] ©2021，第495–516页。[30] Fraser, J. M. 维数之间的插值。载于《分形几何与随机性 VI》，《概率进展》76卷。Birkhäuser/施普林格出版社，Cham， [2021] ©2021，第3–24页。[31] Fraser, J. M. 和 Tyson, J. T. 中间维数的 Sobolev 与拟共形畸变及其在共形维数中的应用。《伦敦数学学会杂志》113, 2 (2026). e70445, 58页。[32] Fraser, J. M. 和 Yu, H. 若干分形族的 Assouad 型谱。《印第安纳大学数学杂志》 67, 5 (2018), 2005–2043. [33] Fraser, J. M. 和 Yu, H. 新的维数谱：关于标度与齐性的更精细信息。《数学进展》329 (2018), 273–328. [34] Fuhrer, A.、Ransford, T. 和 Younsi, M. 全纯运动、维数、面积与拟共形映射。《纯粹与应用数学杂志》177 (2023), 455–483. [35] Gehring, F. W. 空间中的环与拟共形映射。《美国数学会汇刊》103 (1962), 353–393。[36] Gehring, F. W. 拟共形映射偏导数的 L^p 可积性。《数学学报》130 (1973), 265–277. [37] Gehring, F. W. 和 Hag, K. 无处不在的拟圆盘，《数学调查与专著》184卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012年。[38] Gehring, F. W.、Martin, G. J. 和 Palka, B. P. 高维拟共形映射理论导论，《数学调查与专著》216卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017年。[39] Gehring, F. W. 和 Väisälä, J. 豪斯多夫维数与拟共形映射。《伦敦数学学会杂志》(2) 6 (1973), 504–512. [40] Haïssinsky, P. 和 Pilgrim, K. M. 球面上粗扩张共形动力系统的最小 Ahlfors正则共形维数。《杜克数学杂志》163, 13 (2014), 2517–2559. [41] Heinonen, J. 度量空间上的分析讲义。Universitext。施普林格出版社，纽约，2001年。[42] Iwaniec, T. 和 Martin, G. 拟共形映射与容量。《印第安纳大学数学杂志》40, 1 (1991), 101–122. [43] Iwaniec, T. 和 Martin, G. 几何函数论与非线性分析。《牛津数学专著》。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，2001年。[44] Käenmäki, A.、Ojala, T. 和 Rossi, E. 自仿射地毯上拟对称映射的刚性。《国际数学研究通知》IMRN, 12 (2018), 3769–3799. [45] Kaufman, R. Sobolev 空间、维数与随机级数。《美国数学会会刊》128, 2 2000 427 431 ( ), – . [46] Keith, S. 和 Laakso, T. 共形Assouad维数与模。《几何与泛函分析》14, 6 (2004), 1278–1321. [47] Kovalev, L. V. 共形维数不会取介于零与一之间的值。《杜克数学杂志》134, 1 (2006), 1–13. [48] Kwapisz, J. 通过 p-电阻刻画共形维数：Sierpiński 地毯。《芬兰科学院数学辑刊》45, 1 (2020), 3–51. [49] Lacey, M. T.、Sawyer, E. T. 和 Uriarte-Tuero, I. Astala关于拟共形映射下平面豪斯多夫测度畸变的猜想。《数学学报》204, 2 (2010), 273–292.

[50] Lehto, O. 和 Virtanen, K. I. 平面中的拟共形映射，第2版。《数学科学基础丛书》，第126卷。施普林格出版社，纽约–海德堡，1973年。[51] Mackay, J. M. 自仿射地毯的 Assouad 维数。《共形几何与动力系统》*15* (2011), 177–187.[52] Mackay, J. M. 和 Tyson, J. T. 共形维数：理论与应用，《大学讲义丛书》第54卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010年。[53] Mattila, P. 欧几里得空间中的集合与测度几何，《剑桥高等数学研究丛书》第44卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[54] Mori, A. 关于拟共形性与伪解析性。《美国数学会汇刊》*84* (1957), 56–77.[55] Morrey, Jr., C. B. 关于拟线性椭圆偏微分方程的解。《美国数学会汇刊》*43*, 1 (1938), 126–166. [56] Murugan, M. 作为组合模临界指数的共形Assouad维数。《芬兰数学年刊》*48*, 2 (2023), 453–491. [57] Pansu, P. 负曲率流形的共形维数与无穷远球面。《芬兰科学院数学辑刊 *A*辑 *I* 数学》*14*, 2 (1989), 177–212. [58] Prause, I. 和 Smirnov, S. 拟对称畸变谱。《伦敦数学学会会刊》*43*, 2 (2011), 267–277. [59] Smirnov, S. 拟圆的维数。《数学学报》*205*, 1 (2010), 189–197. [60] Tukia, P. 豪斯多夫维数与拟对称映射。《斯堪的纳维亚数学杂志》*65*, 1 (1989), 152–160。[61] Tukia, P. 和 Väisälä, J. 从 n 维到 $n+1$ 维的拟共形延拓。《数学年刊》*(2) 115*, 2 (1982), 331–348. [62] Tyson, J. T. 通过拟对称映射降低 Assouad 维数。《伊利诺伊数学杂志》*45*, 2 (2001), 641–656. [63] Tyson, J. T. 和 Wu, J.-M. 自相似分形的拟共形维数。《伊比利亚美洲数学杂志》*22*, 1 (2006), 205–258. [64] Väisälä, J. 关于空间中的拟共形映射。《芬兰科学院数学辑刊 *A*辑 *I 298* (1961), 36. [65] Väisälä, J. 关于 n维拟共形映射的讲义。《数学讲义》第229卷。施普林格出版社，柏林–纽约，1971年。

伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校数学系，1409 West Green St., 厄巴纳，IL 61801，美国电子邮件地址：tyson@illinois.edu