半单李代数的前李结构

Xerxes D. Arsiwalla[1,*] Fernando Olivie Méndez Méndez[2,†]

[1]*Wolfram* 计算科学基础研究所，美国[2]利兹大学，英国

arXiv:2603.11218v1 [math.RA] 11 Mar 2026

摘要

我们研究与给定李代数相关联的前李结构的可容许性问题，特别是 $\mathbb{C}$上的半单李代数。此类结构统称为李可容许代数，它们是一类非结合代数，其上的交换子括号满足雅可比恒等式。在五类非结合李可容许代数中，已知有限维 $n \geq 3$的半单李代数不容许左对称代数（LSAs）和右对称代数（RSAs）。在此，我们考察其余各类，首先从对应于由2阶置换生成的子群的那些类开始：(1 3)。它们在文献中称为反柔性代数（AFAs）。我们讨论反柔性代数的性质，并给出有限维表示的例子。从几何上看，反柔性代数对应于比与左对称代数（LSAs）或右对称代数（RSAs）相关联的平坦无挠仿射联络更为丰富的结构。我们计算反柔性代数的李可容性判据，并确定若干简单解类。毫不意外，可解李代数容许反柔性代数。关于半单情形，我们给出一个显式反例，表明 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$容许一个反柔性代数。随后，我们讨论其余两类非结合李可容许代数，即 A_3-结合型与 S_3-结合型。最后，我们证明 S_3-结合代数是 $\mathbb{C}$上任意李代数（包括半单李代数）的普适前李结构。

关键词：非结合代数、李可容许代数、前李结构、半单李代数。

*x.d.arsiwalla@gmail.com
†jxvm0952@leeds.ac.uk

目录

1 引言 2

2 反柔性代数（AFA）4

2.1 性质.5

2.2 几何解释.7 2.3 示例.8

3 李可容　　性与反柔性代数的解类 9

3.1 判定李可容性.10 3.2 计算反柔性代数.14

4　A_3-结合与 S_3-结合代数 16

5 半单李代数与前李结构 17

5.1 半单李代数与反柔性代数的可容性.17 5.2 半单李代数与 A_3 / S_3 结合性.18

6 结论与讨论 19

1 引言

李可容许代数最早的例子源于 Cayley 对根树代数的研究 [14], ，以及后来 Koszul 和 Vinberg 对流形上仿射结构的考察 [21, 30]。近十四年后，Milnor 提出了关于与可解李群相关的流形上仿射结构之可容许性的问题，这重新激发了人们对前李结构及其相关的李可容许代数在各种李群中的研究热情 [22]。

李可容许代数包括五类非结合代数（以及一类结合代数），可视为李代数的先驱 [16,24,29]。域 $\mathbb{F}$ 上的前李结构是一种李可容许代数（$\mathcal{A}$，$\cdot$），带有双线性乘积（x，y）$\to x\cdot y$，使得交换子 $[x,y]=x\cdot y-y\cdot x$定义了一个李代数。前李结构与李群相关的流形上的仿射结构密切相关。最常讨论的李可容许代数实例是左对称代数（LSA）和右对称代数（RSA）。左对称代数常被称为 Vinberg代数。右对称代数有时也称为前李代数（不过，有些作者更广泛地使用“前李代数”一词，同时涵盖这两类代数）。左对称代数定义了平坦无挠左不变仿射结构，因此具有几何解释。右对称代数是左对称代数的“相反代数”。这些代数结构与其底层几何之间的对应关系，可用于从流形上相关前李结构的代数性质中提取几何数据。

李可容许代数（结合类除外）具有有趣的非结合结构。三重乘积又称“结合子”，定义为 $(x,y,z) = (x\cdot y)\cdot z - x\cdot(y\cdot z)$，对于给定的 $x,y,z\in\mathcal{A}$，其值通常不为零。尤其是，左对称代数和右对称代数由其结合子之间的特定关系定义。左对称代数满足 $(x,y,z) = (y,x,z)$；而右对称代数对所有 $x,y,z\in\mathcal{A}$ 均满足 $(x,y,z) = (x,z,y)$。由这些定义可知，左对称代数和右对称代数都是李可容许的。如前所述，左对称代数和右对称代数互为相反代数。这意味着，将乘积 $x\cdot y\to y\cdot x$ 变换后，可将左对称代数映射为右对称代数，反之亦然。文献 [12] 对这些代数作了出色的综述。

除左对称代数和右对称代数外，其他类别的李可容许代数也已得到研究 [16]。它们与对称群的子群一一对应S_3。其中，我们将首先考察对应于由 2-循环 (1 3) 的置换生成的子群的李可容许代数。这类代数也称为反柔性代数（AFAs）；最初，研究它们是将其视为柔性律的推广 [8, 23, 26–28]。在李可容许代数的语境下，它们也被称为中心对称代数 [19]。本文讨论反柔性代数的各种性质，并给出有限维表示的例子。从几何角度看，与左对称代数或右对称代数相关的平坦无挠仿射联络相比，反柔性代数对应着更丰富的结构。这直接源于反柔性代数相关的左插入算子和右插入算子所满足的反柔性／中心对称条件。随后，我们将转向李可容许代数中其余两类，即 A_3-结合代数和 S_3-结合代数，以及它们的有限维表示。

我们的研究主要关注复数域 $\mathbb{C}$ 上可由半单李代数容许的前李结构。已知，对于有限维数为 $n\geq 3$ [9–12, 18] 的这类李代数，不存在可容许的左对称代数或右对称代数。另一方面，可解李代数确实容许左对称代数和右对称代数。那么反柔性代数的情形如何？为了解答这个问题，我们首先计算反柔性代数的李可容性判据，并确定若干简单的解类。对于任意李代数，我们都可以检验某个特定的反柔性代数解类是否可容许。结果表明，可解李代数确实容许反柔性代数。不过，这并不令人意外，因为反柔性代数与左对称代数和右对称代数一样，均由群 S_3 的同一个共轭类标记。因此，人们起初或许会认为半单李代数也不容许反柔性代数。但有趣之处正在于此。我们给出了一个明确的反例，证明存在一种可由 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{C})$ 容许的反柔性代数。我们还展示了一个可由 $\mathfrak{su}(2)$ 容许的 A_3-结合代数的例子。事实上，我们证明，不仅半单李代数，而且每个李代数（在 $\mathbb{C}$ 上）都容许一种前李结构（通常属于多个李可容许类）。

本文的结构安排如下。第2节的大部分内容介绍预备定义和结果：我们定义 AFAs，证明与这些代数相关的若干结果，讨论 AFAs 的几何解释，并给出有限维 AFAs 的例子。第3节讨论 AFAs 的李可容性判据及其若干解类。我们展示如何利用这些条件计算各种李代数的可容许 AFAs。第4节讨论 A_3-结合代数和 S_3-结合代数，并给出它们的有限维实现示例。第5节讨论半单李代数可容许的不同类别的前李结构。最后，在第6节中，我们以总结性评述和开放问题作结。

2 反柔性代数（AFAs）

设 $(A,\ \cdot)$ 是一个代数，它是一个 $\mathbb{F}$-向量空间，并带有一个双线性乘积 $\cdot:\ A\times A\longrightarrow A$。考虑一个置换 $\sigma\in S_3$ 以及关于结合子的以下条件:

$$(x_1,x_2,x_3)\ =\ (x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}) \tag{1}$$

对于任意 $x_1,\ x_2,\ x_3\in A$。注意，当等式（1）中的条件对置换σ = (1 2)（分别为 σ = (2 3)）成立时，相应的代数就是众所周知的左对称代数（分别为右对称代数）。因此，S_3 中非平凡元素对结合子的作用引出了非结合代数的定义。本文讨论中一个特别有趣的情形，是置换 σ = (1 3) 对结合子的作用。 S_3 对结合子的作用所产生的代数的完整分类，最早发表于 [16]。这些作者指出，对称群 S_3 的每个子群都对应着不同类别的（非）结合代数，而这些代数最终都具有李可容许性（即它们的交换子满足雅可比恒等式）。这些类别由以下条件定义 [16]:

$$\sum_{\sigma\ \in\ G}\operatorname{sgn}(\sigma)\,(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)})=0 \tag{2}$$

其中 G 是 S_3的一个给定子群，sgn(σ)表示置换 $\sigma\in G$的符号。当 G 仅为单位元时，这对应于结合代数；而 S_3 的另外五个子群各自给出不同类别的非结合代数。如前所述，包含元素 σ = (1 3)的二阶子群对我们尤为相关。

定义 2.1. 我们将一个反柔性代数（***AFA***）定义为代数$(\mathcal{A},\cdot)$，其定义在域$\mathbb{F}$ 上，并配备双线性乘积$(x,y)\ \mapsto x\cdot y$，使得结合子满足

$$(x,y,z)=(z,y,x) \tag{3}$$

对所有 x、 y、 $z\in\mathcal{A}$成立。

利用这一定义，容易看出AFA是李可容许的。这可由如下恒等式得出（在文献中，它也称为阿基维斯恒等式 [1]）：

$$[x_1,[x_2,x_3]]+[x_2,[x_3,x_1]]+[x_3,[x_1,x_2]]\ =\ \sum_{\sigma\ \in\ S_3}\operatorname{sgn}(\sigma)\,(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},x_{\sigma(3)}) \tag{4}$$

其中sgn(σ)表示置换 σ的符号，交换子按通常方式定义，即 $[x,y]:=x\cdot y-y\cdot x$。虽然上述恒等式对由交换子乘积定义的任何代数都成立，但正是右端（RHS）的消失使式(4)化为雅可比恒等式，从而得到一个李代数。容易验证，在AFA的情形下，式(4)右端的结合子之和确实为零。

与左对称结构类似，也可以如下定义反柔性结构:

定义 2.2. 李代数 $\mathfrak{g}$ 中的一个反柔性结构是一个乘积$(x,y)\ \mapsto x\cdot y$，满足以下条件:

1. $(\mathfrak{g},\cdot)$ 是一个反柔性代数（*AFA*）；
2. $[x,y]_{\mathfrak{g}}=x\cdot y-y\cdot x\ for\ all\ x,y\in\mathfrak{g}.$

在这种情况下，我们称 $\mathfrak{g}$ 具有反柔性结构。

2.1 性质

现在，我们来讨论反柔性代数的一些性质。与左对称代数或右对称代数不同，反柔性代数就是其自身的对立代数。也就是说， $x \cdot y \to y \cdot x$ 使反柔性代数的结合子恒等式保持不变。更一般地，以下结论成立：

命题 2.1。 若$(\mathcal{A}, \cdot)$ 是一个关于置换σ满足等式(1) 的代数，并定义乘积

$$\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \quad as \quad (x, y) \mapsto y \cdot x$$

则代数$(\mathcal{A}, \circ)$ 关于置换 $\tau = (1\,3)\,\sigma\,(1\,3)$满足等式$(1)$，也就是说，关于由$(13)$对 σ 进行共轭所得的置换满足该等式。

证明。记 $(\mathcal{A}, \circ)$ 中的结合子为 $[\cdot\,, \cdot\,, \cdot]$。那么，该结论可由下式推出 ：

$$\begin{aligned} [x_1, x_2, x_3] &= -(x_{\sigma'(1)}, x_{\sigma'(2)}, x_{\sigma'(3)}) = -(x_{\sigma\,\sigma'(1)}, x_{\sigma\,\sigma'(2)}, x_{\sigma\,\sigma'(3)}) \\ &= [x_{\sigma'\,\sigma\,\sigma'(1)},\, x_{\sigma'\,\sigma\,\sigma'(2)},\, x_{\sigma'\,\sigma\,\sigma'(3)}] \end{aligned} \tag{5}$$

其中 σ' 表示置换 (1 3)。 □

根据上面的命题 2.1，反柔性代数是自身的相反代数。这与左对称代数和右对称代数不同，后两者互为对立代数。
我们发现，左对称代数、右对称代数和反柔性代数之间存在如下关系：

命题 2.2。 设$(\mathcal{A}, \cdot)$ 是域 $\mathbb{F}$ （或更一般地，环）上的一个代数。若$\mathcal{A}$ 满足以下任意两种代数结构的条件：左对称代数、右对称代数或反柔性代数，则它也满足第三种结构的条件。

证明。 这由等式（4）可得。设 τ_1 和 τ_2 是 S_3中的任意两个不同对换，并令τ_3 为剩下的那个对换。假设等式（1）相对于 τ_1和 τ_2成立。此外，设 σ_1 和 σ_2 是 S_3中任意两个不同的 3-循环。那么，由等式（4）可得：

$$\begin{aligned} 0 = {} & (x_1, x_2, x_3) - (x_{\tau_3(1)}, x_{\tau_3(2)}, x_{\tau_3(3)}) \\ & + (x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_1(2)}, x_{\sigma_1(3)}) - (x_{\tau_1\sigma_1(1)}, x_{\tau_1\sigma_1(2)}, x_{\tau_1\sigma_1(3)}) \\ & + (x_{\sigma_2(1)}, x_{\sigma_2(2)}, x_{\sigma_2(3)}) - (x_{\tau_2\sigma_2(1)}, x_{\tau_2\sigma_2(2)}, x_{\tau_2\sigma_2(3)}) \end{aligned}$$

这里，消失的左端是关于 τ_1 或 τ_2中任意一个的等式（1）的结果。在右端，置换 τ_1 和 τ_2在不失一般性的情况下可分别表示为 $\tau_2\sigma_2$ 和$\tau_1\sigma_1$。因此，上述方程中的第三和第四加项相互抵消（根据关于 τ_1的等式（1）），第五和第六加项亦然（根据关于τ_2的等式（1））。于是我们得到

$$0 = (x_1, x_2, x_3) - (x_{\tau_3(1)}, x_{\tau_3(2)}, x_{\tau_3(3)})$$

由此证明了该结果。 □

请注意，这里与三种交错代数的类比：分别为左交错代数、右交错代数和柔性交错代数。同样，任意两种交错代数的存在蕴含第三种。
此外，正如支配 LSA 和 RSA 的乘积一样，我们发现 AFA 也既不是交换的，也不是反交换的。我们对这三类代数分别证明如下。

命题 2.3。 如果$(\mathcal{A}, \cdot)$ 是交换代数或反交换代数，那么$(\mathcal{A}, \cdot)$不满足 *LSA*、*RSA* 或 *AFA* 的式(1)。

证明。任意交换代数或反交换代数的结合子都满足恒等式

$$(x_1, x_2, x_3) = -(x_{\sigma'(1)}, x_{\sigma'(2)}, x_{\sigma'(3)}) \tag{6}$$

分别通过交换或反交换乘积 $x \cdot y$ 得到；其中 σ' 指置换 (1 3)。现在假设上述恒等式左边对某个 AFA 满足等式（1），即对于 σ =(1 3) 成立。于是，该代数的所有结合子均为零，因此它是一个结合代数。由此，$(\mathcal{A}, \cdot)$ 不是 AFA。

现在假设 $(\mathcal{A}, \cdot)$ 对某个左对称代数满足等式（1）。将等式（6）应用于左对称代数恒等式的两边，得到

$$-(x_{\sigma'(1)}, x_{\sigma'(2)}, x_{\sigma'(3)}) = -(x_{\sigma'(2)}, x_{\sigma'(1)}, x_{\sigma'(3)})$$

事实上，这会得到一个右对称代数（按照 σ' 的作用）。但我们先前已从命题 2.2 得知，如果 $(\mathcal{A}, \cdot)$ 同时满足左对称代数条件和右对称代数条件，那么它也定义了一个 AFA。我们知道，根据等式（6）之后的论证，$(\mathcal{A}, \cdot)$ 不是 AFA，因此这就导致矛盾。这意味着上述关于 $(\mathcal{A}, \cdot)$ 满足左对称代数条件的假设不成立。类似的推理表明，$(\mathcal{A}, \cdot)$ 不是右对称代数。 □

众所周知，对于左对称代数结构，乘积 $x \cdot y$ 定义左对称代数结构，当且仅当左插入算子 $L\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$（由 $L_x(y) := x \cdot y$ 定义）是一个表示，且 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ 是 L 的一个 1- 余循环。对于 AFA 结构，我们有如下刻画结果（另见 [19]）。

命题 2.4. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个配备双线性乘积 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ 的李代数。令 $L, R\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 分别表示由 $L_x(y) = x \cdot y$ 和 $R_x(y) = y \cdot x$ 定义的左乘算子和右乘算子，并令 $S_x = L_x + R_x$ 为对称乘法算子。以下条件等价：

1. 乘积 $x \cdot y$ 在 $\mathfrak{g}$ 上定义一个 *AFA* 结构。
2. 左乘算子和右乘算子满足交换关系

$$[L_x, R_y] = [L_y, R_x] \qquad \textit{for all } x, y \in \mathfrak{g}. \tag{7}$$

3. 对称乘法算子满足以下条件

$$[S_x, S_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]} \qquad \textit{for all } x, y \in \mathfrak{g}, \tag{8}$$

其中 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示。

证明。

1) $\Rightarrow$ 2)：设 $x, y \in \mathfrak{g}$ 为固定元素。给定任意 $z \in \mathfrak{g}$，我们有 $[L_x, R_y](z) = (L_x \circ R_y - R_y \circ L_x)(z) = x \cdot (z \cdot y) - (x \cdot z) \cdot y = -(x, z, y)$。类似地，$[L_y, R_x](z) = -(y, z, x)$。AFA 条件蕴含 $(x, z, y) = (y, z, x)$，从而得到 $[L_x, R_y] = [L_y, R_x]$。

2) $\Rightarrow$ 3)：括号的双线性蕴含 $[S_x, S_y] = [L_x + R_x, L_y + R_y] = [L_x, L_y] + [L_x, R_y] + [R_x, L_y] + [R_x, R_y]$。现在，假设 $[L_x, R_y] = [L_y, R_x]$ 结合括号的反对称性，得到等式 $[L_x, R_y] + [R_x, L_y] = 0$，因此$[S_x, S_y] = [L_x, L_y] + [R_x, R_y]$。类似的论证表明 $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = [L_x, L_y] + [R_x, R_y]$，并且由于 ad 是一个表示，这意味着 $[S_x, S_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$。

3) $\Rightarrow$ 1)：等式 $[S_x, S_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$ 结合 ad 是一个表示这一事实，推出 $[L_x, R_y] + [R_x, L_y] = 0$。在任意点对这个线性映射求值，便恰好得到结合子满足的 AFA 条件。

□

作为一个简单的推论，我们有：

推论 2.1。若双线性乘积 $\cdot : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ 是一个左对称代数结构，且右插入算子 $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$的一个反表示，则 $\cdot$ 是一个 *AFA* 结构。

不过请注意，在本文接下来的大部分内容中，我们不太关注 $\mathcal{A}$ 同时是左对称代数、右对称代数和 AFA 的情形。相反，我们讨论的是 $\mathcal{A}$ 仅属于这些代数中的一种的情况。

2.2 几何解释

为了理解反柔性代数在几何上所指的对象，考察分别满足式（7）的左插入算子 L_x 和 R_x 是很有启发性的。不同于左对称代数或右对称代数，对于反柔性代数（其同时不是左对称代数或右对称代数）， L 或 R 本身并不是相应李代数的表示。然而， $L - R$给出了一个线性表示。事实上，这就是李代数的伴随表示：

$$ad_x = L_x - R_x \tag{9}$$

根据定义，元素 ad_x 满足

$$[ad_x, ad_y] = ad_{[x,y]}$$

将式（9）代入上述恒等式，并利用式（7），得到

$$[L_x, L_y] - L_{[x,y]} = -[R_x, R_y] - R_{[x,y]} \tag{10}$$

对于左对称代数，我们有式（10）的左端恒等于零（ R_x 算子之间不存在任何关系）；而对于右对称代数，式（10）的右端恒等于零（算子 L_x之间不存在任何关系）。然而，对于反柔性代数（其同时不是左对称代数和右对称代数），式（10）给出了一个非平凡的“匹配条件”。为了确切了解这里匹配的是什么，回顾一下，在左对称代数的情形中，算子 L_x 被认定为流形 M上的仿射联络 ∇_x，其向量场为 x。于是， $[L_x, L_y] - L_{[x,y]} = 0$ 表明曲率张量为零。同样地，对于右对称代数，可以将 $-R_x$ 与一个仿射$\widetilde{\ }$联络 ∇_x对应起来，此时 $[R_x, R_y] + R_{[x,y]} = 0$ 表明相对于$\widetilde{\ }$联络 ∇_x的曲率为零。

注 2.1. 因此，对于反柔性代数，等式 *(10)* 在几何上可解释为$\widetilde{\ }$两个联络 ∇_x 和 ∇_x的可容许性，且二者的曲率均非零；该等式表明这两个联络对应的曲率张量相匹配。

2.3 例子

现在我们来看一些反柔性代数的例子。请注意，除非另有说明，本文的大部分讨论仅涉及有限维前李代数。

例2.1. 考虑一个以 e_1、 e_2、 e_3 为生成元的三维代数，定义如下乘积：

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 \qquad e_2 \cdot e_2 = \lambda_2\, e_2 \qquad e_3 \cdot e_3 = \lambda_3\, e_3$$
$$e_1 \cdot e_2 = e_2 \qquad e_1 \cdot e_3 = e_3$$

且所有其他生成元乘法均为零。标量为 λ_2、 $\lambda_3 \in \mathbb{C}$。 λ_2或 λ_3 中至少有一个必须非零。通过计算结合子，可以确认该代数是 $\mathbb{C}$上的*AFA*。同样不难验证，该代数既不是左对称代数，也不是右对称代数。

与上述*AFA*对应的李代数为：

$$[e_1, e_2] = e_2 \qquad [e_1, e_3] = e_3$$

且所有其他对易子为零。此外，可以验证该李代数是可解的。

除上述*AFA*外，已知该李代数还容许一个三维左对称代数（见 *[12]* 中命题*3.51*关于 $\lambda = 1$的情形）。

请注意，给定的李代数可能容许不止一种前李结构。因此，可以认为前李结构是探究几何的更精细工具，而非相应的李代数（不过，并非所有李代数都容许前李结构）。未来一项重要的研究课题，是完整分类给定李代数所容许的所有可能前李结构。

例2.2. 考虑另一个李代数，它是可解的：

$$[e_1, e_2] = e_2 \qquad [e_3, e_1] = e_3$$

它容许如下 *AFA*：

$$e_1 \cdot e_2 = \delta\, e_2 \qquad e_2 \cdot e_1 = -i\delta\, e_2$$
$$e_3 \cdot e_1 = \delta\, e_3 \qquad e_1 \cdot e_3 = -i\delta\, e_3$$

其中 $\delta \in \mathbb{R}$。将生成元按 $1/(\delta(1+i))$缩放后，此 *AFA* 得到所述李代数。

另一方面，在上述李代数中添加一个额外的关系，可得

$$[e_1, e_2] = e_2 \qquad [e_3, e_1] = e_3 \qquad [e_2, e_3] = \frac{1}{2} e_1$$

将三个生成元分别缩放 $e_i \to 2\, e_i$ 后，得到 $\mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{C})$。像这样的单李代数和半单李代数是否存在反柔性代数或其他前李结构？我们将在第5节回答这个问题。

3 AFA 的李可容性与解类 s

现在，我们来探讨相对于给定李代数的反柔性代数的李可容许性判据。这项分析将有助于确定几类简单的反柔性代数解。此外，对于给定李代数的结构常数，它也将提供一种计算方法，用以判定反柔性代数的可容许性。借助这些方法，我们将能够为许多可解李代数找到可容许的反柔性代数。这里，我们只关注投影阶 $p = 1$ 解。关于所有反柔性代数的完整分类将在未来的研究中讨论。

为设定记号，我们考虑任意一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的有限维代数，其带有双线性反对称括号 $[\,,\,]$,和生成元 e_1, $\cdots$， e_n。在此基下，对易关系可写为： $[e_i\,,\,e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\, e_k$ 其中结构常数为 $c_{ijk} \in \mathbb{C}$。

以下定义将会用到:

定义 3.1。 考虑一个 n维代数 $\mathcal{A}$ ，定义在域 $\mathbb{F}$上，并配备反对称括号 $[\,,\,]$ （但不一定是李代数）。$(\mathcal{A}, [\,,\,])$ 具有生成元 $\{e_i\}(1 \le i \le n)$、结构常数 c_{ijk}和定义关系 $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\ e_k$。我们将 $\mathcal{A}$ 上的一种预代数结构 定义为由以下关系规定的代数$(\mathcal{A}, \cdot)$:

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} d_{ijk}\ e_k \tag{11}$$

使得

$$[e_i\,,\,e_j] \;=\; e_i \cdot e_j \;-\; e_j \cdot e_i \tag{12}$$

成立。

根据 上述定义可知，$(\mathcal{A},\,\cdot)$ 的结构常数 d_{ijk} 满足 :

$$d_{ijk} - d_{jik} = c_{ijk} \tag{13}$$

需要注意的是，对于给定的代数，预代数结构并非唯一。此外，前李结构（若存在）只是预代数结构的一个特殊子集。因此，预代数结构构成了一个结构性领域，可在其中通过算法寻找与给定李代数相关的可能前李结构（若预期存在）。

接下来，我们引入代数的“投影阶”概念:

定义 3.2。 给定一个 n 维代数 $(\mathcal{A},\,\cdot)$，其乘积为 $e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^{n} d_{ijk}\ e_k$，基为 $\{e_i\}$，结构常数为 d_{ijk}，则投影阶 p定义为对所有数对 i、 j，各乘积 $e_i \cdot e_j$ 的 ℓ_0-范数的最大值

$$p = Max_{(i,\,j)}\,\{\ |e_i \cdot e_j|_0\ \mid 1 \le i, j \le n\} \tag{14}$$

其中，对于任意向量 $v \in \mathbb{C}^n$， $|v|_0$ 定义为 v的非零分量个数。 $\mathcal{A}$ 与 $\mathbb{C}^n$之间的自然同构将每个 e_i 映射为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个向量，该向量除 i位为1 外，其余各位均为零。此同构赋予 $\mathcal{A}$ 一个 ℓ_0 范数。

例如，若 $e_i \cdot e_j = d_{ijk}\, e_k$ （不对 k 求和），则 $p = 1$；另一方面，对于同一例子，若存在一对 i, j 使得 $e_i \cdot e_j = d_{ijk_1} e_{k_1} + d_{ijk_2} e_{k_2}$，则 $p = 2$。
请注意，上文定义的投影阶依赖于基。另一种做法是定义规范投影阶，使其在所有可能的基选择中取最小值 p。不过，就本文的目的而言，定义 3.2 已经足够。

下文将要考虑一类比李代数更一般的代数，即阿基维斯代数 [1]。其定义如下：

定义 3.3。域 $\mathbb{F}$ 上的阿基维斯代数 $\mathcal{A}$ 由一个反对称双线性乘积 $[x, y]$ 和一个多线性三元运算 $\langle x, y, x\rangle$ 定义，并满足条件

$$\sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)} \rangle = J(x_1, x_2, x_3)$$

成立。这里，雅可比子定义为

$$J(x_1, x_2, x_3) := \sum_{\sigma \in A_3} [[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}], x_{\sigma(3)}]$$

而 A_3 表示 S_3 的子群，对应于集合$\{1, 2, 3\}$的三个循环置换。

请注意，给定任意非结合代数 $(\mathcal{A}, \cdot)$，由$[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$定义的斜对称乘积，以及三元运算 $\langle x, y, z\rangle := (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$，在 $\mathcal{A}$上定义了一个阿基维斯代数 $(\mathcal{A}, [\,,\,])$。我们将要研究的预代数结构 $(\mathcal{A}, \cdot)$通常定义一个阿基维斯代数。当满足 AFA 可容许条件时，后者便给出一个李代数。

3.1 确定李可容性

为实现一个 AFA，$(\mathcal{A}, [\,,\,])$ 上的预代数结构（式 (13)）应当满足以下条件：

$$(e_i, e_j, e_j) = (e_j, e_j, e_i) \tag{15}$$
$$(e_i, e_j, e_m) = (e_m, e_j, e_i) \tag{16}$$

对于从 1 到 n 且互不相同的 i, j, m，并给出 d_{ijk} 的非平凡解。
对于投影阶为 p 的代数，我们至多有 ${}^{n}{}_{(n-1)_2}{}^{p}$ 个结构常数 c_{ijk}；并且在其预代数结构中有与 $c'_{ijk}s$ 数量相等的独立参数 d_{ijk}。其余参数 d_{jik} 均受式 (13) 约束。

对于任意给定的投影阶 p，方程（15）和（16）由此得到：

$$\sum_{a=1}^{p}\sum_{r=1}^{p} \left(d_{ijk_r}\, d_{k_r j l_a^r}\, e_{l_a^r} - d_{i\overline{k}_r\overline{l^r}_a}\, d_{jj\overline{k}_r}\, e_{\overline{l^r}_a}\right) = \sum_{a=1}^{p}\sum_{r=1}^{p} \left(-d_{jk_r l_a^r}\, d_{jik_r}\, e_{l_a^r} + d_{jj\overline{k}_r}\, d_{\overline{k}_r i\overline{l^r}_a}\, e_{\overline{l^r}_a}\right) \tag{17}$$

and

$$\sum_{a=1}^{p}\sum_{r=1}^{p} \left(d_{ijk_r}\, d_{k_r m l_a^r}\, e_{l_a^r} - d_{i\overline{k}_r\overline{l^r}_a}\, d_{jm\overline{k}_r}\, e_{\overline{l^r}_a}\right) = \sum_{a=1}^{p}\sum_{r=1}^{p} \left(-d_{mk_r l_a^r}\, d_{jik_r}\, e_{l_a^r} + d_{mj\overline{k}_r}\, d_{\overline{k}_r i\overline{l^r}_a}\, e_{\overline{l^r}_a}\right) \tag{18}$$

分别地。上面已包含生成元e_{l_r}, $e_{l_{r_a}}$，以区分线性无关的项。通过统计方程（17）和（18）所施加的条件数量，可以明确判断该方程组是否存在非平凡解，或者是否为超定的。

$p = 1$ 情形

我们将详细讨论投影阶为 $p = 1$ 的情形。此时，方程（17）和（18）中对 r 和 a 的求和消失；对于 d_{ijk}中的给定 i 和 j，指标 k 取从 1 到 n的固定值。
现在，我们将根据参数 d_{ijk}的指标结构，推导上述方程的四类可能解。这将得到四种反柔性代数。为研究每一类，我们将考虑彼此不同的代表性指标 i、 j、 m。于是有以下几种可能：

（I）当 k 在 d_{ijk}中不同于 i 和 j 时；（II）当 $k = i$时；（III）仅当类型为（e_i、 e_j、 e_i）和/或（e_i、 e_i、 e_i）的结合子非零时；（IV）当 $k = j$时。

解的第一类：
我们先从第一类开始。这一类涉及方程（17）中依赖生成元 e_l的项。将方程（13）代入这些项可得

$$d_{ijk}\,(d_{jkl} - c_{jkl}) \;=\; -\,d_{jkl}\,(d_{ijk} - c_{ijk}) \tag{19}$$

考虑每一对 i、 j，通常会得到 $n(n-1)$ 个关于 $^{n}{}_{(n-1)\,2}$ 个变量的方程。当独立方程的数量大于非零独立变量的数量时，这样的方程组就是超定的。因此，满足上述方程的唯一解是：

$$d_{ijk} \;=\; c_{ijk}$$

这意味着

$$d_{jik} = 0$$

对应于每个 d_{ijk}。这意味着 $(\mathcal{A}、\ \cdot)$ 中的每个结合子都为零。也就是说，$(\mathcal{A}、\ \cdot)$ 不是一个非平凡的 AFA。这一类由方程（18）给出的附加条件只会进一步印证这一点。

解的第二类：
现在来看 II 类。将方程（13）代入方程（17）（针对涉及生成元 e_l 的项），并取 $k = i$ 和 $p = 1$，可得

$$d_{iji}\,d_{iji} \;=\; -\,(d_{iji} - c_{iji})\,(d_{iji} - c_{iji}) \tag{20}$$

解出 d_{iji}，得到

$$d_{iji} = \frac{1 \pm i}{2}\,c_{iji} \tag{21}$$

将方程（13）代入方程（21），得到

$$d_{jii} \;=\; \pm i\,\delta\,c_{iji} \;=\; \pm i\,d_{iji} \tag{22}$$

其中，δ 表示（$1 \pm i$）$/2$。只要方程组不是超定的，这类解就能构成有效的反柔性代数。上述共有 $^{n}{}_{(n-1)}{}_{2}$ 个方程和 $^{n}{}_{(n-1)}{}_{2}$ 个变量。当交换指标 $i \leftrightarrow j$ 而保持 $k = i$ 不变时，方程（17）还会给出另一组 $^{n}{}_{(n-1)}{}_{2}$ 个方程。为确保这些额外约束不会导致方程组超定，形如 d_{iil} 的参数必须为零。于是，方程（17）中的 $n(n-1)$个方程化简为 $^{n}{}_{(n-1)}{}_{2}$ 个方程，变量数量也相同，从而得到上文提到的解。

不过，我们还没有完成。注意，方程 (18) 对上述参数施加了额外约束。除非这些额外方程恒等于零，否则该系统将变成超定系统。快速检查方程和变量即可看出这一点：方程 (18) 包含 $2n(n-1)(n-2)$ 个条件，因为每个 i、j、m 都是独立指标；系数 2 则源于这样的事实：对于 $p = 1$，方程 (18) 左端（分别是右端）的两项分别乘以不同的生成元。将 $k = i$（固定 i、j、m）代入方程 (18)，得到以下条件：

$$d_{iji}\, d_{iml} \;=\; -\, d_{mil}\, d_{jii} \tag{23}$$
$$-\, d_{ipq}\, d_{jmp} \;=\; d_{mjp}\, d_{piq} \tag{24}$$

然后，将方程 (18) 中的指标 $i \leftrightarrow j$ 互换并固定 $k = i$，可得

$$d_{jii}\, d_{iml} \;=\; -\, d_{mil}\, d_{iji} \tag{25}$$
$$-\, d_{jlr}\, d_{iml} \;=\; d_{mil}\, d_{ljr} \tag{26}$$

注意，当 $d_{mil} = d_{jii}$ 时，方程 (23) 成立；而方程 (25) 要求 $d_{mil} = d_{iji}$，这导致矛盾，因为 $d_{iji} \neq d_{jii}$。因此，这表明除非方程 (18) 中有足够多的条件恒等于零，否则该系统就是超定的。参数不属于 d_{iji} 或 d_{jii} 形式的其余方程，仍可由对应于第一类的解涵盖。

解的第三类:

接下来讨论 III 类。此类解指的是这样的情况：代数中除形如 (e_i，e_j，e_i) 或/和 (e_i，e_i，e_i) 的结合子外，其余结合子均为零。我们先考虑前一种情况。此时，我们有：

$$(e_i, e_j, e_i) \;=\; d_{iil}\, c_{iji}\; e_l \tag{27}$$

这个结合子涉及形如 d_{iji} 的参数（对于具有其他指标结构的参数，这个结合子恒为零）。因此，相应的 AFA 只要求 d_{iil} 和 d_{iji} 非零。前者的存在由式 (18) 中来自生成元 e_l 的项保证（当 $k = i$ 时）。而 $d_{iji} = c_{iji}$ 来自式 (18) 中来自生成元 e_l 的项（当 $k = i$ 时）。

类似地，当

$$(e_i, e_i, e_i) \;=\; d_{iik}\, c_{kil}\; e_l \tag{28}$$

非零时，我们有来自式 (18) 中各项的非平凡 d_{iik} 和 d_{kil}。在接下来的例子中，我们将展示一个源自此类反柔性代数的李代数。

解类 IV:

最后，让我们考察 IV类，其中取 $k = j$。方程（17）中涉及生成元e_l 的项现在变为

$$d_{ijj}\, d_{jjl} \;=\; -\, d_{jij}\, d_{jjl} \tag{29}$$

当 $d_{jjl} \neq 0$ 成立时，我们有

$$d_{ijj} \;=\; \frac{c_{ijj}}{2} \;=\; -\, d_{jij} \tag{30}$$

此外，方程（17）中涉及生成元 e_l 的项也属于这一类（不过这些项的指标 $i,\ j$ 的排列方式有所不同）。考虑

$$-\, d_{i\bar{k}\bar{l}}\, d_{jj\bar{k}} \;=\; d_{jj\bar{k}}\, d_{\bar{k}i\bar{l}} \tag{31}$$

当 $d_{jjk} \neq 0$ 成立时，我们有

$$d_{i\bar{k}\bar{l}} \;=\; \frac{c_{i\bar{k}\bar{l}}}{2} \;=\; -\, d_{\bar{k}i\bar{l}} \tag{32}$$

同样，上述形式的解（方程（30）和方程（32））也会出现在方程（18）所施加的条件中。不过请注意，只有当上述解的具体实例与方程（17）和（18）所施加的所有其他条件相一致时，它们才构成有效的 AFA。正如我们将在例子中看到的，这类解与第三类中的条件密切相关（结合第三类的条件也可以得到第四类解）。

$p > 1$ 情形

我们也简要考察一下 $p > 1$时会出现什么情况。这里我们不会逐一讨论每个解类，而主要关注参数计数，以确定方程组是否超定。

首先，让我们考察方程（17）和（18）的 $p = 2$ 约化。方程（17）中与生成元$e_{l_a^r}$ 相关的项给出：

$$\sum_{a=1}^{2} d_{ijk_1}\, d_{k_1 j l_a^1}\, e_{l_a^1} \;+\; \sum_{b=1}^{2} d_{ijk_2}\, d_{k_2 j l_b^2}\, e_{l_b^2} \;=\; -\sum_{a=1}^{2} d_{jk_1 l_a^1}\, d_{jik_1}\, e_{l_a^1} \;-\sum_{b=1}^{2} d_{jk_2 l_b^2}\, d_{jik_2}\, e_{l_b^2} \tag{33}$$

该方程对对应于生成元 $e_{l_a^1}$和 $e_{l_b^2}$的参数，最多给出 $4n(n-1)$ 个条件；当 $e_{l_a^1} = e_{l_b^2}$时，则给出 $2n(n-1)$ 个条件。参数d_{ijk_1} 和 d_{ijk_2} 分别对应于结构常数 c_{ijk_1} 和 c_{ijk_2}。因此， d_{ijk}类型的 $2n(n-1)/2$ 独立参数至多有这些。

方程（17）中与生成元 $e_{l^r{}_a}$ 相关的其余项给出：

$$-\sum_{a=1}^{2} d_{i\bar{k}_1\bar{l^1}_a}\, d_{jj\bar{k}_1}\, e_{\bar{l^1}_a} \;-\sum_{b=1}^{2} d_{i\bar{k}_2\bar{l^2}_b}\, d_{jj\bar{k}_2}\, e_{\bar{l^2}_b} = \sum_{a=1}^{2} d_{jj\bar{k}_1}\, d_{\bar{k}_1 i\bar{l^1}_a}\, e_{\bar{l^1}_a} \;+\; \sum_{b=1}^{2} d_{jj\bar{k}_2}\, d_{\bar{k}_2 i\bar{l^2}_b}\, e_{\bar{l^2}_b} \tag{34}$$

计数方式与上文方程（33）中的类似，条件最多为 $4n(n-1)$。d_{ikl} 类型的独立参数最多有 $2n(n-1)/2$ 个，且独立

d_{jjk} 类型的参数最多有- d_{jjk} 个。当然，方程（33）和（34）中的条件并非彼此独立，因为它们涉及相互重叠的参数。
考察方程（18），我们得到：

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{2} d_{ijk_1}\, d_{k_1ml_a^1}\, e_{l_a^1} \;+\; \sum_{b=1}^{2} d_{ijk_2}\, d_{k_2ml_b^2}\, e_{l_b^2} \;-\; \sum_{c=1}^{2} d_{ik_3l_c^3}\, d_{jmk_3}\, e_{l_c^3} \;-\; \sum_{d=1}^{2} d_{ik_4l_d^4}\, d_{jmk_4}\, e_{l_d^4}\\ =\;& -\sum_{a=1}^{2} d_{mk_1l_a^1}\, d_{jik_1}\, e_{l_a^1} \;-\; \sum_{b=1}^{2} d_{mk_2l_b^2}\, d_{jik_2}\, e_{l_b^2} \;+\; \sum_{c=1}^{2} d_{mjk_3}\, d_{k_3il_c^3}\, e_{l_c^3} \;+\; \sum_{d=1}^{2} d_{mjk_4}\, d_{k_4il_d^4}\, e_{l_d^4} \quad (35)\end{aligned}$$

这会对参数 d_{ijk} 额外施加至多 $8n(n-1)(n-2)$ 个条件；当生成元 $e_{l_a} = e_{l_b} = e_{l_c} = e_{l_d}$ 时，则会施加 $2n(n-1)(n-2)$ 个条件。与 $p=1$ 的设定类似，$p=2$ 也会出现类似的解类，但现在各类之间可能相互混合，也可能出现超出 $p=1$ 情形下已有解类的全新解类。参数 d_{ijk} 的最大可能数量为 $n(n-1)$。对于给定的代数，当这些参数全部非零时，方程（33）对 $n(n-1)$ d_{ijk} 施加的条件数量为 $2n(n-1)$，方程（34）则额外施加 $2n(n-1)$ 个条件，而方程（35）还会带来额外的 $2n(n-1)(n-2)$ 个条件。这里同样适用 $p=1$ 中的计数方法，即使考虑四种解类的混合情形也是如此。

一般而言，对于任意 p，我们至多有 $pn(n-1)/2$ 个独立参数 d_{ijk} 需要求解。方程（17）对 d_{ijk}s 施加至多 $p^2n(n-1)$ 个条件。此外，方程（18）至多还会施加另一组 $2p^2n(n-1)(n-2)$ 个条件。需要求解的参数和方程的实际数量取决于具体的代数。当系统超定时，不存在可容许的 AFA。否则，可以找到一个非平凡的 AFA。在接下来的例子中，我们将展示其中一些计算。

3.2 计算反柔性代数

这里，我们考虑一些可解李代数的例子；对于这些例子，上述可容许性判据能够得到反柔性代数的实现（仅限于 $p=1$ 的例子）。

例3.1. 让我们从之前在例*2.2*中遇到的同一个可解李代数开始：

$$[e_1, e_2] = e_2 \qquad [e_3, e_1] = e_3$$

为此，方程(17)与(18) 给出

$$\begin{aligned} d(2,1,2)\, d(2,1,2) &= -\, d(1,2,2)\, d(1,2,2)\\ d(3,1,3)\, d(3,1,3) &= -\, d(1,3,3)\, d(1,3,3)\end{aligned}$$

我们得到两个解耦的方程，每个方程只涉及一个独立变量。这些方程对应于*II*类（其中 $p=1$）。因此，其解为：

$$\begin{aligned} d(2,1,2) &= \delta & d(1,2,2) &= \pm\, i\,\delta\\ d(3,1,3) &= \delta & d(1,3,3) &= \pm\, i\,\delta\end{aligned}$$

其中 $\delta = (1 \pm i)/2$。因此，这个可解李代数具有一个非平凡的 *II*类 *AFA*。

Exa例 3.2. 另一方面，具有生成元 e_1、 e_2、 e 的可解李代数

$$[e_1, e_2] = e_1$$

存在一个*III*类 *AFA*。对称非零结合子可由李代数直接读出:

$$(e_1, e_2, e_1) \;=\; d(1,1,1)\, c_{121}\, e_1$$

分别匹配式 (18) 中与 e_l 和 e_l 生成元对应的项，可得:

$$\begin{aligned} d(1,2,1)\; d(1,m,l) &= -\,d(m,1,l)\; d(2,1,1) \\ -d(1,1,1)\; d(2,m,1) &= \;\; d(m,2,1)\; d(1,1,1) \end{aligned}$$

由于此处 $m \neq 1,2$ ，我们得到以下解

$$d(1,1,1) = 1 \qquad d(2,2,2) = 1 \qquad d(1,2,1) = 1$$

其余所有参数均为零。注意，还有一个额外的非零参数$d(2,2,2) = 1$。这是为了要求结合子 (e_1, e_2, e_2) 为零而得到的。

例3.3。 最后，让我们重新考察前一个例子中的同一个李代数，但为其求一个*IV*类解。

$$[e_1, e_2] = e_1$$

和之前一样

$$(e_1, e_2, e_1) \;=\; d(1,1,1)\, c_{121}\, e_1$$

但现在，要成为一个 *IV*类解， $d(2,1,1)$ 必须非零。这意味着至少还存在一个非平凡的结合子，即

$$(e_2, e_2, e_2) \;=\; d(2,2,1)\, c_{121}\, e_1$$

这意味着 $d(2,2,1)$非零。再次分别比较与生成元 e_l 和 e_l 对应的式 (18) 中的各项，可得:

$$\begin{aligned} d(1,2,1)\; d(1,m,l) &= -\,d(m,1,l)\; d(2,1,1) \\ -d(1,1,1)\; d(2,m,1) &= \;\; d(m,2,1)\; d(1,1,1) \end{aligned}$$

交换式 (18) 中的指标 $i \leftrightarrow j$ ，可得:

$$\begin{aligned} d(2,1,1)\; d(1,m,l) &= -\,d(m,1,l)\; d(1,2,1) \\ -d(2,2,1)\; d(1,m,2) &= \;\; d(m,1,2)\; d(2,2,1) \end{aligned}$$

由此得到以下解

$$d(1,1,1) = 1 \qquad d(2,2,1) = 1 \qquad d(1,2,1) = \frac{1}{2} \qquad d(1,2,1) = -\frac{1}{2}$$

4 A_3-结合代数与 S_3-结合代数

除了左对称代数、右对称代数和反柔性代数外，还存在另外两类非结合李可容许代数 [16, 24]。下面我们给出这些定义并提供示例。

定义 4.1. 将**A_3-结合代数**定义为域 $\mathbb{F}$上的代数$(\mathcal{A}, \cdot)$，并配备双线性乘积$(x, y) \mapsto x \cdot y$，使得结合子满足

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0 \tag{36}$$

对所有 x、y、$z \in \mathcal{A}$成立。

将式 (36) 代入式 (4)，容易验证基于（$\mathcal{A}, \cdot$）的交换子代数满足雅可比恒等式。如 [16], 中所指出的，式 (36) 不过是 S_3 中包含偶置换的子群（即交错群 A_3）内结合子的带符号求和。因此得名： A_3-结合代数。

例 4.1. 以下是一个 A_3-结合代数的例子：

$$\begin{aligned} &e_1 \cdot e_1 = e_1 \qquad e_2 \cdot e_2 = e_2 \qquad e_3 \cdot e_3 = e_3 \\ &e_1 \cdot e_2 = e_3 \qquad e_2 \cdot e_3 = e_1 \qquad e_3 \cdot e_1 = e_2 \\ &e_2 \cdot e_1 = e_3 \qquad e_3 \cdot e_2 = e_1 \qquad e_1 \cdot e_3 = e_2 \end{aligned}$$

这恰好是一个满足 *3* 阶二面体 *quandles* 公理的三维交换非结合代数。*quandle* 是纽结理论中研究的代数结构，用以概括 *Reidemeister* 变换 *[13]*。或许纽结理论文献中尚未指出的是，这一特定的对合 *quandle* 同时也是一个李可容许代数。

然而，请注意，基于上述例子的交换子代数会导出一个阿贝尔李代数。在下一节中，我们将给出另一个 A_3-结合代数的例子，它作为一个有趣的非阿贝尔李代数的前李结构。

此外， A_3-结合代数还有一种有趣的几何解释。将流形 M 上的联络 ∇_x L_x与左插入算子等同，曲率张量可表示为

$$\mathcal{R}_L(x, y)\ z := \big([L_x, L_y] - L_{[x,y]}\big)\ z$$

于是， A_3-结合条件给出

$$\mathcal{R}_L(x, y)\ z + \mathcal{R}_L(y, z)\ x + \mathcal{R}_L(z, x)\ y = 0$$

这正是第一 Bianchi 恒等式。利用右插入算子 R_x可以得到类似的恒等式，其相应的曲率张量为 $\mathcal{R}_R(x,\ y)\ z$。

接下来，我们给出如下定义：

定义 4.2。 一个**S_3-结合代数** 是域 $\mathbb{F}$ 上的代数$(\mathcal{A}, \cdot) \mapsto x \cdot y$，配备了双线性乘积$(x, y)$，使得结合子满足

$$(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = (y, x, z) + (x, z, y) + (z, y, x) \tag{37}$$

对所有的 x、y、$z \in \mathcal{A}$。

按照 [16], 的术语，这个李可容许代数是结合子的带符号和，其中 S_3作为其自身的子群。因此得名： S_3-结合代数。

例 4.2. 下面是一个 S_3-结合代数的例子：

$$e_1 \cdot e_1 = e_1 \qquad e_2 \cdot e_2 = e_2 \qquad e_3 \cdot e_3 = e_3$$

$$e_1 \cdot e_2 = \alpha\, e_3 \qquad e_2 \cdot e_3 = \alpha\, e_1 \qquad e_3 \cdot e_1 = \alpha\, e_2$$
$$e_2 \cdot e_1 = \beta\, e_3 \qquad e_3 \cdot e_2 = \beta\, e_1 \qquad e_1 \cdot e_3 = \beta\, e_2$$

其中 $\alpha \neq \beta$ 是实常数（ $\alpha = \beta$ 的情形简单地给出一个 A_3-结合代数）。

请注意， S_3-结合代数涵盖了其他所有类别的李可容许代数、左对称代数、右对称代数、反柔性代数、 A_3-结合代数以及通常的结合代数。这是因为这一类代数允许完整的 S_3 群作用于结合子的集合。当然，也存在仅为 S_3-结合的 S_3-结合代数，例如上面的例子。

5 半单李代数与前李结构

5.1 半单李代数与反柔性代数的可容性

众所周知，半单李代数不允许左对称代数结构（相应地，也不允许右对称代数结构）。因此，一个自然的问题是：反柔性代数是否也如此？换言之，如果 $\mathfrak{g}$ 是一个半单李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 是否不可能赋予 AFA 结构？一般而言，事实并非如此。

我们构造如下反例：

例 5。 **1.** 考虑单李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$，其李括号定义为 *：*

$$[H, E] = 2\, E \qquad [H, F] = -2\, F \qquad [E, F] = H$$

众所周知， $\mathfrak{g}$ 具有如下分次

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

其中 $\mathfrak{g}_{-1} = \langle F \rangle$、 $\mathfrak{g}_0 = \langle H \rangle$ 和 $\mathfrak{g}_1 = \langle E \rangle$。由于上述分解给出了一个分次，因此对所有 i、 j，都有 $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$，其中 $\mathfrak{g}_i := 0$， $|i| \geq 2$。因此，为了构造一个与该分次相容的 *AFA* 乘积，我们可以施加条件 $\mathfrak{g}_i \mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{g}_{i+j}$。最后这个条件导出以下关系：

$$F \cdot F = 0, \quad E \cdot E = 0.$$

接下来，由命题 *2.3* 可知，*AFA* 乘积不可能是交换的或斜对称的。因此，为了得到尽可能不对称且满足 *AFA* 条件的乘积，我们还施加以下条件：

$$\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_0 = 0, \quad \mathfrak{g}_{-1}\, \mathfrak{g}_1 = 0 \;\; and \;\; \mathfrak{g}_0\, \mathfrak{g}_{-1} = 0.$$

这为我们带来了额外的关系：

$$E \cdot H := 0, \quad F \cdot E := 0, \quad H \cdot F := 0.$$

结合方程 $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ 和 *AFA* 方程，我们可以推导出其他关系。首先，前一个方程意味着：

$$\begin{aligned} H = [E, F] = E \cdot F - F \cdot E = E \cdot F \Rightarrow E \cdot F = H \\ -2F = [H, F] = H \cdot F - F \cdot H = -F \cdot H \Rightarrow F \cdot H = 2F \\ 2E = [H, E] = H \cdot E - E \cdot H = H \cdot E \Rightarrow H \cdot E = 2E \end{aligned}$$

最后，由于 $\mathfrak{g}_0\,\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_0$，必定存在 $\lambda \in \mathbb{C}$，使得 $H \cdot H = \lambda H$。为了确定 λ，我们现在使用 *AFA* 条件 $(x, y, z) = (z, y, x)$。一方面，我们应有：

$$(F, E, H) = (F \cdot E) \cdot H - F \cdot (E \cdot H) = 0 - 0 = 0.$$

另一方面，

$$(H, E, F) = (H \cdot E) \cdot F - H \cdot (E \cdot F) = 2E \cdot F - H \cdot H = 2H - \lambda H = (2 - \lambda)H.$$

AFA 条件意味着 $\lambda = 2$。直接验证可知，这个乘积在 $\mathfrak{g}$ 上定义了一个 *AFA* 结构。

例 5.2. 与上述例子相关，从 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 到 $\mathfrak{su}(2)$的标准基变换给出如下李代数关系：

$$[\, X_i \,,\, X_j \,] \;=\; 2\, \epsilon_{ijk}\, X_k$$

因此， $\mathfrak{su}(2)$ 也具有一个 *AFA*，它是通过对例 *5.1* 中的 *AFA* 进行基变换得到的：

$$\begin{aligned} X_1 \cdot X_1 = i\, X_3 \qquad X_2 \cdot X_2 = i\, X_3 \qquad X_3 \cdot X_3 = 2\, i\, X_3 \\ X_1 \cdot X_2 = X_3 \qquad X_2 \cdot X_3 = X_1 + i\, X_2 \qquad X_3 \cdot X_1 = i\, X_1 + X_2 \\ X_2 \cdot X_1 = -X_3 \qquad X_3 \cdot X_2 = -X_1 + i\, X_2 \qquad X_1 \cdot X_3 = i\, X_1 - X_2 \end{aligned}$$

请注意，尽管这个 *AFA* 与上文提到的 *AFA* 同构，但它并非由李代数分次导出（而李代数分次在那个例子中至关重要），并且属于不同的投影阶（$p = 2$）。

5.2 半单李代数与 A_3 / S_3 结合律

除了反柔性代数之外，半单李代数是否还具有其他前李结构？下面我们将对此给出肯定的回答。

首先，让我们来看以下例子：

例 5.3。 三维标准叉积代数为：

$$\begin{aligned} X_1 \cdot X_1 = 0 \qquad X_2 \cdot X_2 = 0 \qquad X_3 \cdot X_3 = 0 \\ X_1 \cdot X_2 = X_3 \qquad X_2 \cdot X_3 = X_1 \qquad X_3 \cdot X_1 = X_2 \end{aligned}$$

$$X_2 \cdot X_1 = -X_3 \qquad X_3 \cdot X_2 = -X_1 \qquad X_1 \cdot X_3 = -X_2$$

利用叉积代数的雅可比恒等式，可得

$$\sum_{\sigma \in A_3} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, X_{\sigma(3)}) = 0$$

从而得到一个 A_3结合代数。

众所周知，三维叉积的交换子代数是 $\mathfrak{su}(2)$。

例 5.4。另一个例子是我们在上面的例 *4.2* 中得到的 S_3结合代数。当 $\alpha \neq \beta$ 时，它完全是 S_3 结合的。其交换子代数给出 $[\, e_i \,,\, e_j \,] = (\alpha - \beta)\, \epsilon_{ijk}\, e_k$；对生成元进行重新缩放后，它就简化为 $\mathfrak{su}(2)$。因此， $\mathfrak{su}(2)$ 同时具有 A_3结合和 S_3结合的前李结构（此外还具有前面所见的 *AFA*）。

事实上，直接证明以下结论并不困难：

定理 5.1。 S_3结合代数为 $\mathbb{C}$上的所有李代数实现普适前李结构。

证明。给定一个 $n-$ 维李代数 $(\mathcal{A}, [\,,\,])$，在 $\mathcal{A}$ 上由 $(\mathcal{A}, \cdot)$ 给出的任意预代数结构（假设其存在），若满足定义 3.1，则也满足式（4）（亦称阿基维斯恒等式），其中结合子定义为 $(x, y, z) := (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$。因此，我们有 $\sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = J(x_1, x_2, x_3)$。但对于李代数，雅可比子$J(x_1, x_2, x_3) = 0$，这意味着 $\sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}) = 0$，而这又满足 $\mathcal{A}$ 上 S_3-结合代数的定义。 □

因此， $\mathbb{C}$ 上的半单李代数具有多种前李结构：从结合代数、反柔性代数，到 A_3-结合代数，再到 S_3-结合代数。它们唯一排除的是左对称代数和右对称代数。

6 结论与讨论

在本文中，我们探讨了 $\mathbb{C}$上的半单李代数对前李结构的可容许性问题。在五类非结合李可容许代数中，已知有限维$n \geq 3$ [9,10,12,18]半单李代数不容许左对称代数和右对称代数。第三类反柔性代数在此前的相关讨论中并未得到充分探究。与人们可能预期的相反，我们在此给出一个例子，证明半单李代数并不排斥将反柔性代数作为前李结构。随后，我们讨论其余两类非结合李可容许代数，即 A_3-结合型和 S_3-结合型，并证明 S_3-结合代数是$\mathbb{C}$上任意李代数的普适前李结构，包括半单李代数。若半单李代数所排斥的前李结构确实只有与左对称代数和右对称代数相关的结构（维数为 $n \geq 3$），那么这意味着与半单李群相关的流形只容许非平坦的无挠联络。

我们的研究结果还启示了一种耐人寻味的几何解释：回顾一下，六种李可容代数由置换群 S_3 的元素唯一标记。左对称代数，

右对称代数和反柔性代数对应于 S_3 的同一个共轭类，即阶为 2 的元素。 A_3-结合代数和 S_3-结合代数对应于阶为 3 的元素。这表明可能存在一个群 G，其在这些代数之间的作用可以将一类前李结构变换为另一类，而属于 S_3 同一共轭类的代数则彼此变换。由于前李结构在几何上实现了李群流形上的联络，所提出的群作用实现了联络之间的几何变换。在数学物理中，人们会将其视为李群流形上的主 G-丛上的规范变换；在本例中，该流形恰好是一个非交换基空间。这启发了非交换群流形几何中一些有趣的规范理论类别。关于从纯代数构造中提取几何数据和前几何数据的其他方法，可参见 [3–5, 15, 20, 25]。

未来工作的另一个方向是将研究扩展到定义在 $\mathbb{C}$ 上的李代数之外。我们可以探讨：定义在非交换环上的李代数能够具有哪些前李结构？事实上，定义在非交换环上的李代数最初由 Berenstein 和 Retakh [6, 7] 引入。然而，这一领域仍鲜有人涉足，而研究此类李代数所容许的前李结构，或可为相关的定义在非交换环上的李群带来重要的几何学见解。近期已有文献 [2, 17] 讨论了后者。我们将在即将发表的论文中探讨这一问题。

致谢

感谢 Wolfram Summer School 2024 的组织者举办了这场精彩的活动，本项目正是在此期间启动的。作者还感谢 Gil Salgado 教授，就论文初稿进行了许多有益的讨论并提出了中肯的意见。

参考文献

[1] Maks Aizikovich Akivis（1976年）：多维三网的局部代数。《西伯利亚数学杂志》17(1)，第3–8页。[2] Daniele Alessandrini、Arkady Berenstein、Vladimir Retakh、Eugen Rogozinnikov与Anna Wienhard（2022年）：非交换代数上的辛群。《数学精选》28(4)，第82页。[3] Xerxes D. Arsiwalla、David Chester与Louis H. Kauffman（2024年）：论经典与量子波函数的算子起源。《量子研究：数学与基础》11，第193–215页。[4] Xerxes D Arsiwalla、Hatem Elshatlawy与Dean Rickles（2025年）：前几何、形式语言与物理学的建构主义基础。载于：量子引力与计算，Routledge，第137–159页。[5] Xerxes D. Arsiwalla与Jonathan Gorard（2024年）：由*Wolfram*模型重写系统得到的作为同伦类型的前几何空间。《国际理论物理学杂志》63(4)，第83页。

[6] *Arkady Berenstein*与*Vladimir Retakh*（*2005*年）：非交换双 *Bruhat* 胞腔及其分解。《国际数学研究通知》*2005(8)*，第*477–516*页。[7] *Arkady Berenstein*与*Vladimir Retakh*（*2008*年）：非交换环上的李代数与李群。《数学进展》*218(6)*，第*1723–1758*页。[8] *Mahesh Chandra Bhandari*（*1972*年）：论简单反柔性代数的分类。《美国数学会会刊》*173*，第*159–181*页。[9] *Dietrich Burde*（*1994*年）：简单模李代数上的左对称结构。《代数杂志》*169(1)*，第*112–138*页。[10]*Dietrich Burde*（*1998*年）：具有可解李代数的简单左对称代数。《数学手稿》*95(3)*，第*397–411*页。[11] *Dietrich Burde*（*1999*年）：幂零李群上的左不变仿射结构。教授资格论文，杜塞尔多夫。[12]*Dietrich Burde*（*2006*年）：左对称代数，或几何与物理学中的前李代数。《中欧数学杂志》*4*，第*323–357*页。[13] *J Scott Carter*（*2012*年）：拟群思想综述。载于：《纽结理论导论讲座》：在纽结理论及其在物理学和生物学中的应用高级学校与会议上发表的精选讲座，世界科学出版社，第*22–53*页。[14] *Arthur Cayley*（*1857*年）：论称为树的解析形式理论。《伦敦、爱丁堡和都柏林哲学杂志与科学期刊》*13(85)*，第*172–176*页。[15] *David Chester*、*Xerxes D. Arsiwalla*、*Louis H. Kauffman*、*Michel Planat*与*Klee Irwin*（*2024*年）：一种新的正则、协变且辛哈密顿密度的量子化。《*Symmetry*》*16(3)*，第*316*页。[16] *Michel Goze*与*Elisabeth Remm*（*2004*年）：李可容许代数与运算子。《代数杂志》*273(1)*，第*129–152*页。[17] *Zachary Greenberg*、*Dani Kaufman*与*Anna Wienhard*（*2024*年）：非交换环上的矩阵的 SL_2型性质及马尔可夫数的推广。*arXiv*预印本 *arXiv:2402.19300*。[18]*Jacques Helmstetter*（*1979*年）：左对称代数的根。《傅里叶研究所年刊》*29(4)*，第*17–35*页。[19] *Mahouton Norbert Hounkonnou*与*Mafoya Landry Dassoundo*（*2016*年）：中心对称代数与双代数：相关性质及其推论。载于：《物理学中的几何方法》：第*34*届研讨会，比亚沃维耶扎，波兰，*2015*年*6*月*28*日至*7*月*4*日，施普林格，第*281–293*页。[20] *Louis H Kauffman*（*2022*年）：微积分、规范理论与非交换世界。《*Symmetry*》*14(3)*，第*430*页。

[21] Jean-Louis Koszul（1961年）：有界齐性域与仿射变换群的轨道。法国数学会通报89，页码 515–533。[22] John Milnor（1977年）：关于完备仿射平坦流形的基本群。《数学进展》25(2)，页码 178–187。[23] Hyo Chul Myung（1978年）：非柔性李可容许代数。强子学杂志；（美国）1(3)。[24]Elisabeth Remm（2002年）：李容许拟群。数学报告334(12)，页码 1047–1050。[25] Dean Rickles、Xerxes D Arsiwalla 和 Hatem Elshatlawy（2025年）：量子引力与计算：信息、前几何与数字物理学。泰勒与弗朗西斯出版集团。[26] D Rodabaugh（1965年）：柔性律的一种推广。《美国数学会会刊》114(2)，页码 468–487。[27] David J Rodabaugh（1972年）：关于反柔性代数。《美国数学会会刊》169，页码 219–235。[28] DJ Rodabaugh（1967年）：关于半单反柔性代数。葡萄牙数学26，页码 261–271。[29] RM Santilli（1968年）：李可容许代数导论。新物理学杂志增刊6，页码 1225–1249。[30] EB Vinberg（1963年）：凸齐性锥。载于：莫斯科数学会译丛，12，页码 340–403。