arXiv:2603.11221v1 [quant-ph] 11 Mar 2026

# Higher 阶 Quantum 对象是强预函子

Matt Wilson

巴黎萨克雷大学，法国国家科学研究中心，巴黎萨克雷高等师范学院，法国国家信息与自动化研究所，形式方法实验室，91190 吉夫叙尔伊维特，法国
matthew.wilson@centralesupelec.fr

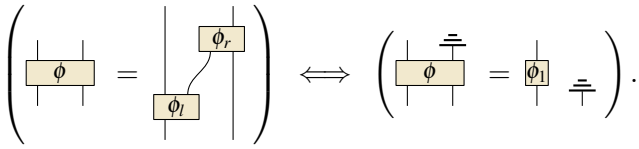
James Hefford

巴黎萨克雷大学、法国国家科学研究中心、巴黎萨克雷高等师范学院、法国国家信息与自动化研究所、形式方法实验室，91190 吉夫叙尔伊维特，法国 james.hefford@inria.fr

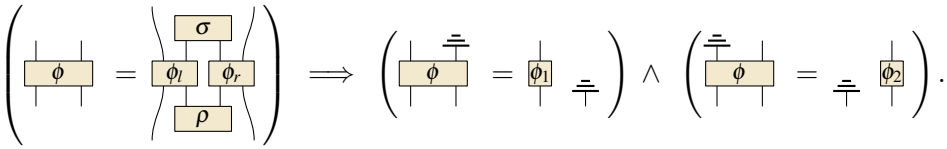
我们探讨基于因果性约束和组合性约束、分别用于构造量子理论中高阶映射的现有方法在何种意义上彼此一致。更确切地说，我们构造一个函子 $\mathscr{F}\colon \mathbf{Caus(C)} \to \mathbf{StProf(C}_!\mathbf{)}$，它从高阶因果范畴映射到一阶因果过程上的强预函子范畴；当 **C** 可加时，该函子是松-松双幺半的、满的、忠实的且强闭的。当 $\mathbf{C} = \mathbf{CP}$ 时，对于双幺半范畴，这一嵌入在序列器上还具有强结构，表明可以用预函子的余端演算来诠释单向信号传递约束（但不能诠释一般的无信号传递约束）。我们最后指出，只要组合约束可用于表达因果性约束，预函子方法便可将高阶量子理论推广为在一般对称幺半范畴上的一种构造。

## 1 引言

物理学基础中的一项基本原则，是尝试运用组合性 来研究因果性。首先，在研究因果分解时，量子信息论中的一项核心定理指出，半因果性 意味着半可局域性，这一结论适用于因子系统 [18, 6] 和非因子系统 [32],，并可通过以下图示形式化表示，图中展示了因果约束与组合性约束之间的等价关系：



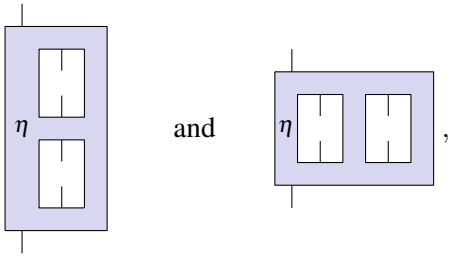

然而，这种对应关系在多变量层面会失效。例如，以下蕴含关系只在一个方向上成立；反向关系则需要更复杂的电路理论技术，才能给出忠实的组合表示 [30, 45, 44]:




提交至：
QPL 2026

© M. Wilson &J. Hefford 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

其次，在量子理论中研究高阶过程时 [43], ，通常会提到如下图表：




分别表示确定因果结构 [10, 35] 和不确定因果结构 [13, 35] ；同时，量子梳和量子开关等此类高阶映射的典型示例，可以被视为确定的和不确定的组合结构。对因果分解和高阶过程的研究密切相关：单输入高阶过程等价于带有单向信号传递约束的低阶过程 [11, 28]；高阶过程的组合规则可以用低阶信号传递约束来刻画 [3, 41]；满足单变量和多变量因果性约束的低阶过程，通常分别被视为表现出确定因果结构和不确定因果结构的高阶过程的定义域 [28, 40, 41, 7, 13, 48, 50, 27, 25]；而且，要以纯粹的组合方式忠实地表示已知的幺正不确定因果结构，同样需要更复杂的电路理论技术 [46, 21,31]。

纯粹的范畴超映射方法 [22, 51, 49, 23, 24] 借助强预函子理论[42, 36] ，通过顺序复合与并行组合来定义超映射，因此无需直接援引因果性概念，也不必利用有限维量子系统的范畴特性（例如紧闭性） [37]。这与高阶因果范畴的构造[28, 41, 40] 形成对比：后者直接运用量子理论中的因果特性和有限维特性，建立高阶量子对象及其组合规则的理论。

以往的研究已证明，预层方法能够在广泛的理论范围内，恢复广泛一类对象 [22, 51, 49, 23, 24]之间高阶操作的定义 [52]。然而，尚未确定的是：预层方法所给出的类型论（即高阶类型的逻辑组合子），在多大程度上能够恢复已确立的、用于一般高阶量子对象 [28, 41, 40, 7, 27, 25, 33]之间高阶量子操作的类型论。

本文确立了传统定义的高阶量子理论与通过将预函子方法应用于一阶量子理论而产生的高阶量子理论之间的精确关系。为了进行比较，我们使用具有多个张量积的范畴语言来描述系统在时空中的排列方式。更确切地说，我们将高阶过程的双幺半结构称为使用张量 $\otimes$和序列器 $\Subset$ 的结构，分别表示类空分离和类时分离的系统。对于任意前因果范畴 $\mathbf{C}$ ，我们构造一个函子 $\mathscr{F}$ : $\mathbf{Caus(C)} \to \mathbf{StProf(C_1)}$，其中$\mathbf{C}_1$ 是$\mathbf{C}$ 中的一阶因果过程范畴，并且 $\mathscr{F}$ 满足：

- 在对象上单射，
- 忠实，
- 在张量 $\mathscr{F}a \otimes \mathscr{F}b \to \mathscr{F}(a \otimes b)$ 上的松弛，表示从多元组合性约束到多元因果性约束的粗粒化，

• 在序列器 $\mathscr{F}a \oslash \mathscr{F}b \to \mathscr{F}(a \oslash b)$ 上的松弛。

Whe在 [41, 40], 中定义的前因果范畴是可加的，函子 $\mathscr{F}$ 此外还 e:

• 满的,

• 强闭 $\mathscr{F}[a,\ b] \cong [\mathscr{F}a\ \mathscr{F}b]$, 这表明，高阶量子过程的全部高阶结构都存在于 **StProf(C1)** 之中。

最后，当 $\mathbf{C} =$ **完全正** 时，我们进一步发现 $\mathscr{F}$ 在序列器 $\mathscr{F}a \oslash \mathscr{F}b \cong \mathscr{F}(a \oslash b)$ 上具有强度，这代表了单方差定理的一般化；该定理将半局部可实现性与半因果性对应起来。张量的松弛性和序列器上的强度具有自然的解释：它编码了这样一个事实，即单向信号过程存在因果分解，但无信号过程不存在因果分解。因此，只要组合约束能够用来编码因果性约束，强预函子的类型结构就恢复了高阶量子对象的类型结构。

# 2 高阶量子操作与范畴论

## 2.1 Duoidal 与 BV 范畴

**定义 1.** 若一个范畴 **C** 配备两个张量（$\otimes, I_\otimes$）和（$\oslash, I_\oslash$）以及自然变换，则称其为 *duoidal* 范畴：

$$(A \oslash B) \otimes (C \oslash D) \xrightarrow{\delta_{ABCD}} (A \otimes C) \oslash (B \otimes D), \qquad I_\otimes \xrightarrow{\gamma} I_\otimes \oslash I_\otimes, \qquad I_\oslash \otimes I_\oslash \xrightarrow{\mu} I_\oslash, \qquad I_\otimes \xrightarrow{\nu} I_\oslash, \quad (1)$$

满足一系列相干条件，详见例如 [1]。当正规时，双幺半范畴为正规 $I_\otimes \cong I_\oslash$。

**定义 2**。设 **C** 和 **D** 为双幺半范畴。若函子 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ 关于两个张量积都是松幺半的，则称其为松-松双幺半，

$$FA \otimes FB \to F(A \otimes B), \qquad I_\otimes \to FI_\otimes, \qquad FA \oslash FB \to F(A \oslash B), \qquad I_\oslash \to FI_\oslash, \qquad (2)$$

满足通常的相干条件，并且还要与结构胞腔 (1) 兼容，见[1]。我们将使用松-强和强-强等术语，表示 $F$ 在一个或多个张量积上是强的，因此 (2) 中相应的分配子都是同构。

**定义 3**。若一个正规双幺半范畴 **C** 配备了一个忠实且满函子 $(-)^*\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}$，并诱导出自然同构 $\mathbf{C}(A \otimes B, C^*) \cong \mathbf{C}(A, (B \otimes C)^*)$，且存在自然同构 $(A \oslash B)^* \cong A^* \oslash B^*$ 和 $I_\oslash^* \cong I_\oslash$，则称其为 $BV$ 范畴。这些数据必须满足若干相干条件，见 [8, 24]。

根据上述定义，BV 范畴也是 $*$-自对偶的，这意味着它们可以配备第三种幺半积，称为 par $\parr$；它与已有的张量 $\otimes$ 互为对偶，满足 $A \parr B = (A^* \otimes B^*)^*$。

## 2.2 高阶因果范畴

高阶因果范畴 [28, 41, 40] 将高阶量子理论（**高阶量子理论**） [7, 3] 的构造推广为一种适用于前因果范畴的构造，也就是说，适用于同时具有

因果性解释和紧闭性的范畴——这是有限维性的标志。对于任意前因果范畴 **C** 以及任意子集 $c \subseteq \mathbf{C}(I, A)$，我们定义对偶集合

$$c^* = \left\{ \rho \in A^* \; s.t \; \forall \sigma \in c : \; \boxed{\sigma} \; \boxed{\rho} \; = 1 \right\}.$$

我们称集合$c$为一阶，如果$c^*$ 是单元素集合。随后便可在双重胶合的一种变体中使用对偶这一概念来定义高阶量子操作，并且更一般地，从任意前因果范畴构建高阶因果过程理论。

**定义 4.** 前因果范畴是一个配备了环境结构的紧闭范畴**C** ；也就是说，对每个对象$A$ ，都有一个与之关联的首选丢弃效应$_A$ ，使得$_{A\otimes B} = _A \otimes _B$ 且$_I = 1$。前因果范畴还满足其他一些性质;由于本文不会用到这些性质，我们在此不作明确陈述。完整定义请参阅 [28, 41, 40]:

- 充足的因果态（良基点性的一种改编），
- 2n 阶因果过程可分解（单输入超信道分解定理的一种改编 [11]）。

**定义 5.** *Caus* 构造 **Caus(•)** 将任意前因果范畴 **C** 映射为一个 BV 范畴 **Caus(C)**，其组成如下:

- 对象由二元组 $(c, A)$ 给出，其中 $A$ 是 **C** 中的一个对象，且 $c \subseteq \mathbf{C}(I, A)$。其中，$c$ 是一个平坦且闭合的集合，意即：– 存在一个可逆标量 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $(\lambda \quad \in c)$，– $c^{**} = c$。

- 态射 $(c, A) \to (c', A')$ 由态射 $f: A \to A'$ 给出，并满足 $\forall \rho \in c : f \circ \rho \in c'$。
- 对偶 $(c, A)^* = (c^*, A^*)$。
- 张量积 $(c1, A1) \otimes (c2, A2) := ((c_1 \times c2)^{**}, A_1 \otimes A2)$。
- Par 积（$c1$，$A1$）⅋（$c2$，$A2$）：=（$c_1 ⅋ c2$，$A_1 \otimes A2$），其中 $c_1 ⅋ c_2 =$（$c_1^* \times c_2^*$）$^*$。
- 序列积（$c1$，$A1$）⊛（$c2$，$A2$）：=（$c_1 ⊛ c2$，$A_1 \otimes A2$），其中

$$c_1 ⊛ c_2 := \left\{ \; \boxed{\rho} \; \overset{Z}{\frown} \; \boxed{\sigma} \in (c_1 ⅋ c_2) \; : \; (c_Z \text{ is first-order}) \wedge (\rho \in c_1 ⅋ c_Z) \wedge (\sigma \in c_Z^* ⅋ c_2) \right\}.$$

- 内 Hom［（$c1$，$A1$），（$c2$，$A2$）］=（$c_1^* ⅋ c2$，$A_1^* \otimes A2$）。

请注意， [7, 3], 所提出的确定性高阶量子理论，源于仅保留由一阶对象和内 Hom 生成的那些对象。

注 2.1。 从现在起，我们将范畴 **Caus(C)** 的对象简称为大写符号$A$，$B$ 等等 。我们将对象 $A$ 关联的集合称为 $c_A$。

一阶对象对我们的构造尤其重要。

**定义 6.** 一阶对象是指在**Caus(C)**中的对象$X$，使得$c_X^*$ 是单元素集。我们将由一阶对象张成的**Caus(C)**的全子范畴记作$\mathbf{C}_1$ 。当**C** =**完全正**时，我们有$\mathbf{C}_1$ =**CPTP**。

注记 2.2。 一阶对象具有若干重要性质：若$X$ 是一阶对象，则对任意对象$A$，都有$A \oslash X = A \parr X$。此外，若$X$和$Y$都是一阶对象，则$X \otimes Y = X \oslash Y = X \parr Y$。

内 Hom [A, A′] 表示从 A 到 A′的所有合法变换所构成的空间。如果 A, A′是一阶对象，那么 [A,A′] 表示输入为 A、输出为 A′的信道集合。如果 B, B′也都是一阶对象，那么类型为 [[A, A′], [B, B′]] 的对象表示所有超信道构成的空间，这些超信道接收类型为 [A, A′] 的信道，并返回类型为 [B, B′]的信道。

张量积表示无信号约束。例如，给定一阶对象$A, A', B, B'$，空间 $[A, A'] \otimes [B, B']$ 表示类型为 $[A \otimes B, A' \otimes B']$的无信号传递信道所构成的空间：

$$\phi \in [A, A'] \otimes [B, B'] \iff \left( \phi = \phi_1 \right) \wedge \left( \phi = \phi_2 \right)$$

另一方面，序列器表示单向信号约束。给定一阶对象$A, A', B, B'$，空间 $[A, A'] \oslash [B, B']$ 表示类型为 $[A \otimes B, A' \otimes B']$ 的单向信号信道所构成的空间：

$$\phi \in [A, A'] \oslash [B, B'] \iff \left( \phi = \phi_1 \right) \iff \left( \phi = \phi_r \; \phi_l \right)$$

最后，par 允许所有可能的信号传递。更准确地说，给定一阶对象 $A$、$A'$、$B$、$B'$空间 $[A$、$A']$ $\parr$ $[B$、$B']$ 表示所有类型为 $[A \otimes B$、$A' \otimes B']$的信道所构成的空间。

## 2.3 强预函子

我们的另一种高阶量子理论模型源自一系列使用预函子理论的研究 [51, 49, 23, 24] 。现在让我们介绍理解这一方法所需的基本概念。

**定义 7**。一个 预函子 $P : \mathbf{C} \nrightarrow \mathbf{C}$ 是一个函子 $P : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$。

我们将预函子视为 C 上过程的广义空间。这些过程空间随 C 协变和逆变地变化，**C** 刻画了其输入和输出可由 **C** 探测这一思想。例如，$P(A,\ B)$ 是从 $A \rightsquigarrow B$ 的过程构成的广义空间；我们可以用 **C** 中的态射 $B \to C$ 作用于这样的过程，从而得到另一个广义过程 $A \xrightarrow{p} B \xrightarrow{f} C = P(\mathbf{1},\ f)(p) \in P(A,\ C)$。

预函子通过一种称为余端 [29],的运算进行复合

$$(P \oslash Q)(A, B) = \int^{X} P(A, X) \times Q(X, B),$$

可以将其视为类似于矩阵乘法 $(\mathrm{PQ})^{B}_{A} = \sum_{X} \mathrm{P}^{X}_{A} \mathrm{Q}^{B}_{X}$。集合 (P ⊘Q)(A, B) 的元素由二元组 (p, q) ∈ P(A, X ) × Q(X , B) 给出，并关于由 (A p ⇝X f →X ′, X ′q⇝B) ∼(A p ⇝X, X f →X ′q⇝B)（称为滑动关系）生成的等价关系取商。在此意义上，余端的作用类似于双模的张量积。

**定义 8**。 设**C** 是一个幺半范畴。预函子$P : \mathbf{C} \nrightarrow \mathbf{C}$ 若配备自然变换 $\zeta$: $P(A, B) \times \mathbf{C}(C, D) \to P(A \otimes C, B \otimes D)$，并满足使 $\zeta$ 具有结合性和单位性的相干条件 [42, 36]，则称其为强的 。强预函子之间的自然变换 $\eta : P \to Q$ 若与强度相容，则称为强的 。

强预函子及强自然变换构成一个范畴**StProf(C)**。赋予两个张量后，该范畴是 $\otimes$-对称正规双幺半的 [19, 17]；这两个张量的行为类似于双模的张量积，分别沿复合方向和**C**的张量积方向。其中前者由余端$P \otimes Q$给出，并配备典范强度 [36]。后者由 Day 卷积 [15, 16], $\int_{ABCD} \mathbf{C}(-, A \otimes B) \times P(A,C) \times Q(B,D) \times \mathbf{C}(C \otimes D =)$ 在范畴$\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C}$上的一个商给出。这个商的作用类似于双模的张量积，使$P$和$Q$的强度相等，并且可以简洁地写成某个余端光学范畴上的 Day 卷积，

$$(P \otimes Q)(-,=) = \int^{(A,A'),(B,B')} P(A,A') \times Q(B,B') \times \mathbf{Optic}(\mathbf{C})((A,A') \otimes (B,B'),(-,=)).$$

这两个张量都以恒等预函子 $1 = \mathbf{C}(-,=)$ 作为其单位对象，并且二者都关于 $\otimes$ 给出的内 Hom 是闭的：

$$[P,Q]_{\otimes}(-,=) = \int_{(A,A') \in \mathbf{Optic}(\mathbf{C})} \mathbf{Set}\left(P(A,A'), Q(A \otimes -, A' \otimes =)\right).$$

## 3 松弛双幺半嵌入

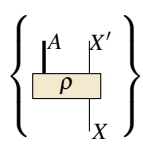
本节将证明，对于任意前因果范畴，都存在一个忠实双幺半嵌入，将**Caus(C)**嵌入到$\mathbf{C}_1$上强预函子范畴**StProf**($\mathbf{C}_1$)中；这里的$\mathbf{C}_1$是指一阶因果系统的范畴。

**命题 3.1**。 以下赋值：

- $\mathscr{F}(A)(X,X') = \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(X, A \parr X')$,
- $\mathscr{F}(f: A \to B)(X,X') = \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(X, f \parr X')$,

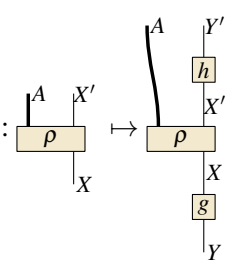
定义了一个 $\otimes$-松幺半函子 $\mathscr{F}: \mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)$。注意，$X$与$X'$ 仅在一阶对象上取值，即$\mathbf{C}_1$中的那些对象。

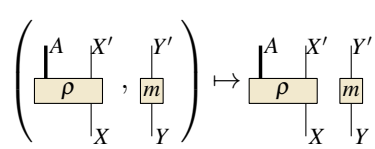
为便于阅读，我们将尽可能以图形方式表达代数／范畴论定义。我们可以将强预函子 $\mathscr{F}(A)$画为

$\mathscr{F}(A)(X,X') :=$ 

,

其中对态射的作用以及强度由下式给出

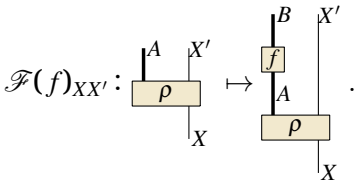
$\mathscr{F}(A)(g,h):$ 

, $\zeta_{XX'YY'}:$ 

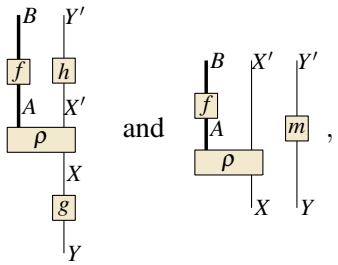
.

由于函子 $\mathscr{F}$将每个对象 $A$ 送到预函子 $\mathscr{F}(A)(-,=)$，每个态射 $f$：$A \to B$ 必须被送到一个强自然变换 $\mathscr{F}(f)_{X,X'}$：$\mathscr{F}(A)(X,X') \to \mathscr{F}(B)(X,X')$。在这种情况下，我们定义

该强自然变换如下：




函数族 $\mathscr{F}(f)_{XX'}$ 的自然性和强度随后由对以下内容的明确解释得出




分别。注意，$\mathscr{F}(A)(X,\ X') = \mathbf{Caus(C)}(X,\ A \parr X') \cong \mathbf{Caus(C)}(I^{\mathbf{Caus(C)}},\ A \parr [X,\ X'])$，其中，这个函子作为多函子的存在性可以理解为源于以下事实：**Caus(C)** 是一种高阶电路理论 [47]。

证明。注意，只要 $X$ 是一个一阶对象，$A \otimes X = A \parr X$ 对任意 $A$ 都成立，因此该函子的像同样可以写成 $\mathbf{Caus(C)}(X,\ A \parr X') = \mathbf{Caus(C)}(X,\ A \otimes X')$。该赋值显然具有函子性，因此我们只需处理松弛器，它们由下式给出：

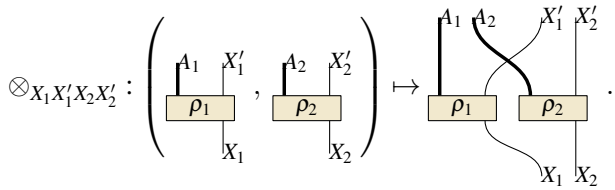
$$\begin{aligned}\mathbf{Caus}(\mathbf{C})(X, A \otimes X') \times \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(Y, B \otimes Y') &\xrightarrow{\otimes} \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(X \otimes Y, (A \otimes X') \otimes (B \otimes Y')) \\ &\xrightarrow{\mathbf{Caus}(\mathbf{C})(1,\delta)} \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(X \otimes Y, (A \otimes B) \otimes (X' \otimes Y'))\end{aligned}$$

而单位分配器由下式给出，

$$\mathbf{C}_1(-,=) \cong \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-,=) \cong \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, I \parr =)$$

因为 **Caus(C)** 中一阶对象之间的态射恰好就是 $\mathbf{C}_1$ 的态射。 □

前面的证明直接利用了这样一个事实：给出一个从张量$\eta_{XX'}$: $(\mathrm{P} \otimes \mathrm{Q})(\mathrm{X}, \mathrm{X}') \to \mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ 出发的强自然变换，等价于给出一个从乘积$\eta$: $\mathrm{P}(\mathrm{X}_p, \mathrm{X}'_\mathrm{p}) \times \mathrm{Q}(\mathrm{X}_q, \mathrm{X}'_\mathrm{q}) \to \mathrm{R}(\mathrm{X}_p \otimes \mathrm{X}_q, \mathrm{X}'_\mathrm{p} \otimes \mathrm{X}'_q)$ 出发的多重强自然变换。在乘积这一层，松弛器的作用仅仅是



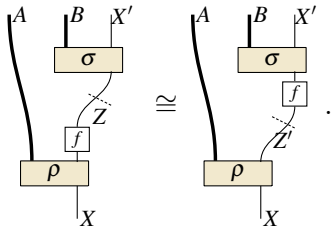

在证明该函子在序列器上是（松弛）幺半群函子之前，我们先明确描述强预函子的序列器对函子 $\mathscr{F}$ 的像的作用。对于 $A$，$B$ 这两个 **Caus(C)** 中的对象，序列张量积的元素

$$\int^Z \mathscr{F}(A)(-,Z) \times \mathscr{F}(B)(Z,=)$$

就是笛卡尔积的元素

$$\mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, A \parr Z) \times \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(Z, B \parr =),$$

在关系的传递闭包意义下等价




使用这种看似精巧的图形记法时，我们必须格外谨慎，才能确定哪些内容可以沿着这些线滑动。任何一阶因果态射，也就是说，任何从$\mathbf{C}_1$,出发的态射，都可以滑动。

**定理 3.2.** 函子 $\mathscr{F}\colon \mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)$ 关于序列张量 $\otimes$ 是松弛的，也就是说，存在分配子，

$$\mathscr{F}(A) \otimes \mathscr{F}(B) \to \mathscr{F}(A \otimes B), \qquad I \to \mathscr{F} I,$$

它们关于 $A$ 和 $B$ 是自然的，并满足所需的相干条件。

证明。 注意，每当$X$是一阶对象$A \otimes X = A \parr X$时，对任意$A$，函子 $\mathscr{F}$的像也可以写成 $\mathbf{Caus(C)}(X, A \parr X') = \mathbf{Caus(C)}(X, A \otimes X')$。该分配子由沿$X$复合给出，

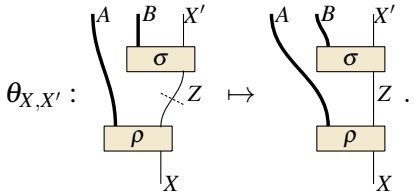
$$FA \otimes FB = \int^{X \in \mathbf{C}_1} \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, A \otimes X) \times \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(X, B \otimes =) \to \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, A \otimes (B \otimes =)) \cong F(A \otimes B),$$

而单位分配器由下式给出，

$$\mathbf{C}_1(-,=) \cong \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-,=) \cong \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, I \parr =)$$

因为 **Caus(C)** 中一阶对象之间的态射恰好就是 **C** 中的态射 $_{1}$. □

从图示上看，序列器的这个松弛器（我们将其记为 $\theta$）只是将余端复合收缩为图示的直接复合




**命题 3.3.** 函子 $\mathscr{F}\colon \mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)$ 在对象上是单射。

证明。 设 $\mathscr{F}(A)(-,=) = \mathscr{F}(B)(-,=)$。在平凡系统上取值后，我们得到

$$\mathscr{F}(A)(I,I) = \mathscr{F}(B)(I,I) \implies \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(I,A) = \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(I,B),$$

但 **Caus(C)** 的一个对象完全由其状态集确定，因此 $A = B$。 □

**命题 3.4**。函子 $\mathscr{F}$： $\mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)$ 是忠实的。

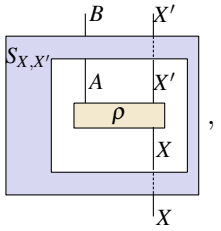
证明。 见附录。 □

# 4 嵌入是满的且强闭

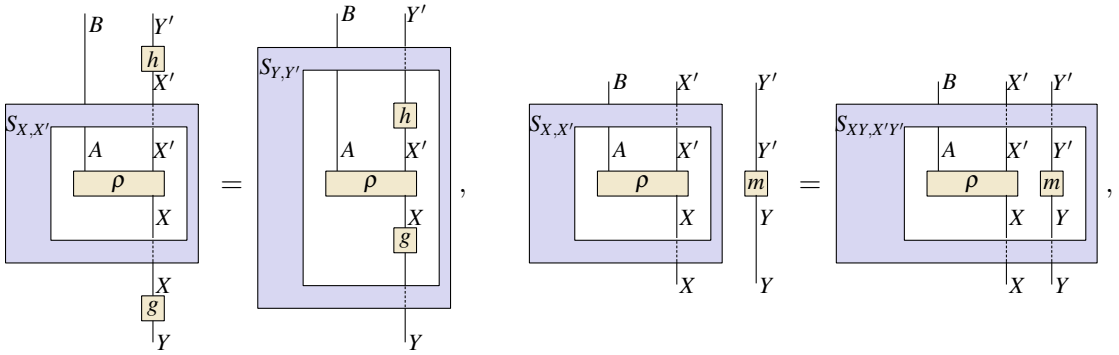
在本节中，我们将证明，只要前因果范畴是可加的，Caus构造到强预函子范畴中的嵌入就是满的且强闭。关于可加前因果范畴的完整定义，请参阅[41, 40] 。这里我们指出，这类范畴除了满足其他条件外，还包括存在所有积（因此在此情况下具有加性充实），并且可以将任意效应补全为丢弃态射，至多相差一个标量。这些条件使我们能够证明（证明见附录），闭平坦集在凸组合下封闭，并且对于任意一族过程 $\{\rho_i\}$，都支持受控过程这一概念。

**命题 4.1.** 设 $\mathbf{C}$ 是一个加性前因果范畴，则函子 $\mathscr{F}\colon \mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)$是满的。

证明。 证明 $\mathscr{F}$ 是满的，实质上是将 [51]针对过程的凸正规集所适用的刻画定理推广到加性高阶因果范畴中的一般类型。证明采用图形记法，其中自然变换 $S_{XX'}\colon \mathscr{F}(A)(X,X') \to \mathscr{F}(B)(X,X')$ 表示为：

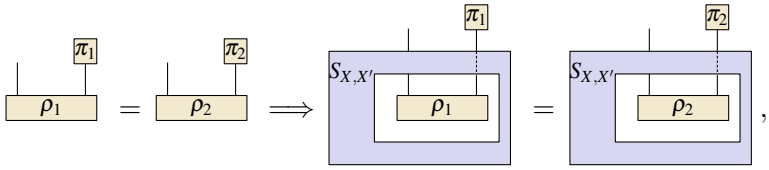



强自然性以图形方式表示为

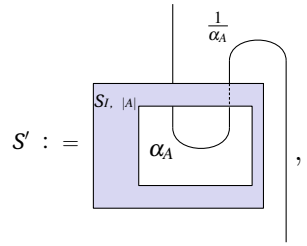



然后沿用 [52, 51]的方法，采取三个关键步骤：

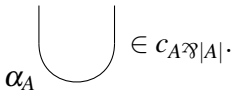
- 证明每个函数$S_{XX'}$的凸线性，
- 证明所谓的 [52] 非语境赋值，即对于偶数个非因果$\pi_i \leq_i$：



• 一个类似米田的步骤，通过在杯 $\cup$ 上对其求值来构造$S_{XX'}$ 的候选内在表示（从结构上看，这与 [51] 中使用的试探形式最为相似），直到差一个标量$\alpha_A$：




其中 $\alpha_A$ 满足




完整性证明见附录。 □

**命题 4.2.** 设 **C** 是一个加性前因果范畴，则函子 $\mathscr{F}$： $\mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)$是强闭的。

证明。 对于任意一对强预函子，

$$[P,Q](X,X') = \int_{(A,A')} \mathbf{Set}\left(P(A,A'), Q(A\otimes X, A'\otimes X')\right) \cong \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)\left(P(-,=), Q(-\otimes X, =\otimes X')\right)$$

因此我们有

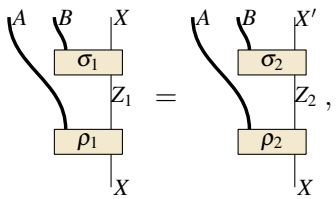
$$\begin{aligned}
[\mathscr{F}A, \mathscr{F}B](X,X') &\cong \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)\left(\mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, A ⅋ =), \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-\otimes X, B ⅋ (=\otimes X'))\right) \\
&\cong \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)\left(\mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, A ⅋ =), \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(-, ([X, B ⅋ X']) ⅋ (=))\right) \\
&\cong \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(A, [X, B ⅋ X']) \\
&\cong \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(X, [A,B] ⅋ X') \\
&\cong \mathscr{F}[A,B](X,X').
\end{aligned}$$

□

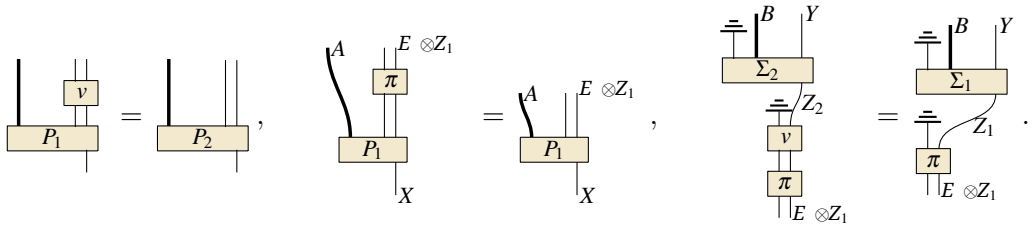
## 5 嵌入在序列器上是强的

现在我们确立嵌入的一个更强性质。我们仅针对特定的高阶量子理论证明这一性质，其依据是：在混合量子理论中，梳等同于光学[23]。首先，我们需要一个预备引理。

**命题 5.1**。 设 $\rho_1, \sigma_1, \rho_2', \sigma_2'$ 是 $\mathbf{Caus}(\text{完全正})$ 中的态射，使得



其中 $X$、$X'$、$Z_1, Z_2$ 是一阶对象。则存在相应的纯化 $P_1, \Sigma_1$、$P_2, \Sigma_2$，以及一阶因果过程 $\pi$ 和 $\nu$，使得：




证明。 见附录。 □

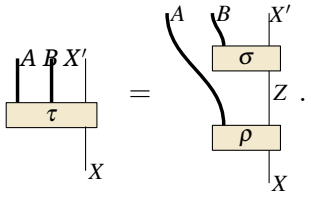
**定理 5.2.** 函子 $\mathscr{F}$： **Caus**(**完全正**) $\to$ **StProf**(**CPTP**) 在序列张量 $\circledcirc$ 上是强的，因此对每一对对象 $A$、$B$，

$$\mathscr{F}A \circledcirc \mathscr{F}B \cong \mathscr{F}(A \circledcirc B).$$

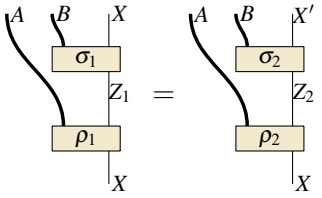
证明。 我们必须构造一个逆强自然变换 $\theta^{-1}$: $\mathscr{F}(A \circledcirc B) \to \mathscr{F}A \circledcirc \mathscr{F}B$。为构造这个逆箭头，注意我们可以构造嵌入

$$\begin{aligned}
&[X, (A \circledcirc B) \parr X'] \\
\cong &(A \circledcirc B) \parr [X, X'] \\
\cong &(A \circledcirc B) \parr ([X, I] \circledcirc [I, X']) \\
\to &(A \parr [X, I]) \circledcirc (B \parr [I, X']), \\
\cong &[X, A] \circledcirc (B \parr X'),
\end{aligned}$$

因此，对于每个 $X$， $X'$属于 **CPTP**，若 $\tau \in$ **Caus(完全正)**$(X, (A \circledcirc B) \parr X')$，则存在一个一阶对象 $Z$ 使得



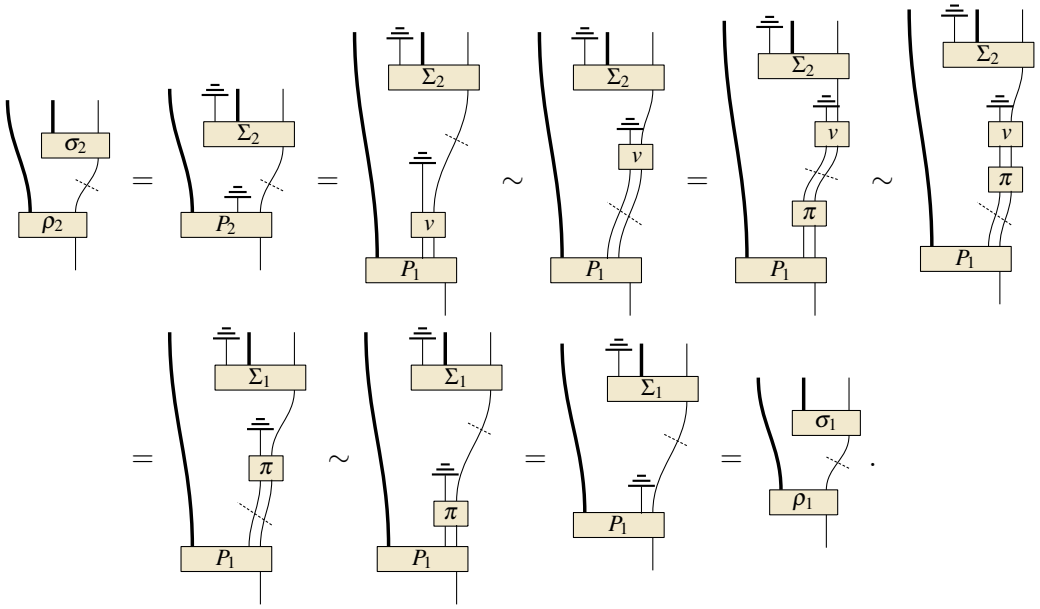

因此，我们只需选取逆映射 $\theta^{-1}{}_{X,X'}(\tau) := (\rho, \sigma)$。然而，要使这一选取定义良好（并且回想一下，所作用的集合是状态的商集），我们需要验证对所有 $\rho, \sigma \in c^{[X, A \parr Z]} \times c^{[Z, B \parr X']}$，都有：




$$\implies (\rho_1, \sigma_1) \cong_{\text{co-end}} (\rho_2, \sigma_2)。$$

回顾一下，余端中的两个元素等价，当且仅当它们可以通过滑动 **CPTP** 的态射（而非更大的范畴 **完全正**）彼此到达。根据命题 5.1，以下所有滑动

都是一阶态射，最终的证明如下。




□

## 6 结论

本文结果有几个自然的后续研究方向。根据范畴超映射的米田引理， [52], 完全正保迹映射上的强预函子之间的自然变换 [20] ，对于某些类型，在存在 Choi-Jamiołkowski同构时，可以完全用该同构来刻画，这自然引出了一个问题：本文结果能否推广到完全正保迹映射？这将为多种理论中的一般高阶对象提供更具体的方案。在这些理论中，已有一些高阶过程类被引入，例如 Boxworld [5], 、Hex-square理论 [38], 和时间对称量子理论[34], ， 同时也有可能与双向过程的高阶理论进行比较 [2]。

尽管$\mathbf{StProf}(\mathbf{C}_\mathrm{I})$通常不是 BV 范畴，但可以通过 Chu构造 [14]将其提升为 BV 范畴。这种源自线性逻辑的标准构造，能够从闭幺半范畴得到 $*$-自对偶范畴；应用于 $\otimes$-闭正规双幺半范畴时，则会得到 BV 范畴 [24]。将其应用于强预函子，可得到一个 BV 范畴$\mathbf{StEnv}(\mathbf{C}_\mathrm{I}) = \mathbf{Chu}(\mathbf{StProf}(\mathbf{C}_\mathrm{I}))$, 鉴于它与 [26, 39]的 Hyland包络之间的联系，我们称之为强*Hyland*包络。于是自然会想知道，对于任意加性前因果范畴$\mathbf{C}$，本文的全忠实松-松双幺半嵌入是否能够提升，从而给出强Hyland包络的一个全子范畴，并使其与 Caus 构造松-松 BV 等价。

最后，在此基础上， [41, 3]研究了高阶量子对象所能采用的范围最广的组合规则。这促使我们探究：哪些（如果有的话）组合规则是高阶量子操作所独有的，哪些实际上是任何合理的高阶过程理论都具备的特征？研究一般幺半范畴上的强Hyland包络以及其在作用于完全正保迹映射 [20] 和操作概率理论 [12], 时的特化形式中可用的组合规则，似乎能为回答高阶过程组合性的这一基础性问题提供一条具体途径。

**致谢**

James Hefford 获法国国家研究署（ANR）资助，该资助属于“法国2030计划”框架下的研究项目 EPIQ ANR-22-PETQ-0007 和 HQI-R&D ANR-22-PNCQ-0002。MW 获工程与物理科学研究理事会 [资助，资助编号为 EP/W524335/1]。

## 参考文献

[1] Marcelo Aguiar 和 Swapneel Mahajan。《幺半函子、物种与霍普夫代数》。CRM 专著丛书，第29卷。美国数学会，美国罗得岛州普罗维登斯，2010年。[2] Luca Apadula、Alessandro Bisio、Giulio Chiribella、Paolo Perinotti 和 Kyrylo Simonov。双向量子过程的高阶变换，2026年。网址：https://arxiv.org/abs/2602.00856，arXiv:2602.00856。[3] Luca Apadula、Alessandro Bisio 和 Paolo Perinotti。无信号性限制了不定因果结构下的量子计算，2022年。arXiv:2202.10214，doi:10.48550/arXiv.2202.10214。[4] Michael Barr。 $*$-自伴范畴。《数学讲义》，752，1979年。[5] Jessica Bavaresco、Ämin Baumeler、Yelena Guryanova 和 Costantino Budroni。盒世界理论中的不定因果顺序，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2411.00951，arXiv:2411.00951。[6] David Beckman、Daniel Gottesman、M. A. Nielsen 和 John Preskill。因果且可局域化的量子操作。《物理评论A》，64:052309，2001年。doi:10.1103/PhysRevA.64.052309。[7] Alessandro Bisio 和 Paolo Perinotti。高阶量子理论的理论框架。《皇家学会会刊A辑：数学、物理与工程科学》，475(2225):20180706，2019年。网址：http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2018.0706，doi:10.1098/rspa.2018.0706。[8] Richard Blute 和 Marc Comeau。冯·诺依曼范畴。《应用范畴结构》，23:725–740，2015年。doi: 10.1007/s10485-014-9375-6。[9] Titouan Carette、Marc de Visme 和 Simon Perdrix。带延迟迹的图形语言：用图示描绘具有有限记忆的量子计算。载于第*36*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年会论文集，LICS ’21，美国纽约州纽约市，2021年。计算机协会。doi:10.1109/LICS52264.2021.9470553。[10] Giulio Chiribella、Giacomo Mauro D’Ariano 和 Paolo Perinotti。量子电路架构。《物理评论快报》，101(6):060401，2008年。doi:10.1103/physrevlett.101.060401。[11] Giulio Chiribella、Giacomo Mauro D’Ariano 和 Paolo Perinotti。变换量子操作：量子超映射。《欧洲物理学快报》，83(3):30004，2008年。doi:10.1209/0295-5075/83/30004。[12] Giulio Chiribella、Giacomo Mauro D’Ariano 和 Paolo Perinotti。具有纯化的概率理论。《物理评论*A*》，81:062348，2010年。doi:10.1103/PhysRevA.81.062348。[13] Giulio Chiribella、Giacomo Mauro D’Ariano、Paolo Perinotti 和 Benoît Valiron。无确定因果结构的量子计算。《物理评论*A*》，88:022318，2013年。doi:10.1103/PhysRevA.88.022318。[14] Po-Hsiang Chu。构造 $*$-自伴范畴。 [4]的附录。[15] Brian Day。《双闭范畴的构造》。博士论文，新南威尔士大学，1970年。doi: 10.26190/unsworks/8048。[16] Brian Day。关于函子的闭范畴。载于中西部范畴研讨会报告 *IV*，第137卷，第1–38页，柏林、海德堡，1970年。施普林格·柏林·海德堡。doi:10.1007/BFb0060438。[17] Matt Earnshaw、James Hefford 和 Mario Román。过程分解的积幺半结构代数，2023年。doi:10.48550/ARXIV.2301.11867。

[18] T Eggeling、D Schlingemann 和 R. F Werner。半因果操作是半局域化的。《欧洲物理快报（EPL）》，57(6):782–788，2002年3月。doi:10.1209/epl/i2002-00579-4。[19] Richard Garner 和 Ignacio López Franco。交换性。《纯粹与应用代数杂志》，220(5):1707–1751，2016年。doi:10.1016/j.jpaa.2015.09.003。[20] Stefano Gogioso 和 Carlo Maria Scandolo。范畴概率理论。《EPTCS》，266:367–385，2018年。doi:10.4204/EPTCS.266.23。[21] Maarten Grothus、Alastair A. Abbott、Augustin Vanrietvelde 和 Cyril Branciard。因果顺序的路由量子控制，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2507.08781，arXiv:2507.08781。[22] James Hefford 和 Cole Comfort。量子梳的余端光学。载于*ACT 2022*会议论文集，第380卷，第63–76页，2023年。doi:10.4204/EPTCS.380.4。[23] James Hefford 和 Matt Wilson。量子超映射的预函子语义。载于第*39*届*ACM/IEEE*计算机科学逻辑年会论文集，LICS '24，第1–15页。ACM，2024年7月。网址：http://dx.doi.org/10.1145/3661814.3662123，doi:10.1145/3661814.3662123。[24] James Hefford 和 Matt Wilson。时空干预的 BV 范畴，2025年。网址：https://arxiv. org/abs/2502.19022，arXiv:2502.19022。[25] Timothée Hoffreumon 和 Ognyan Oreshkov。高阶量子变换的射影刻画，2022年。arXiv:2206.06206。[26] J.M.E. Hyland。抽象证明论。《纯粹与应用逻辑年刊》，114(1):43–78，2002年。doi: 10.1016/S0168-0072(01)00075-6。[27] Anna Jencova。论高阶量子映射的结构，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/ 2411.09256，arXiv:2411.09256。[28] Aleks Kissinger 和 Sander Uijlen。因果结构的范畴语义。《计算机科学逻辑方法》，15，2019年。doi:10.23638/LMCS-15(3:15)2019。[29] Fosco Loregian。《（余）端演算》。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，2021年。doi:10.1017/9781108778657。[30] Robin Lorenz 和 Jonathan Barrett。酉变换的因果与组合结构。《Quantum》，5:511，2021年。doi:10.22331/q-2021-07-28-511。[31] Ilyass Mejdoub 和 Augustin Vanrietvelde。循环过程中因果顺序的单边判定，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2506.18540，arXiv:2506.18540。[32] Octave Mestoudjian、Matt Wilson、Augustin Vanrietvelde 和 Pablo Arrighi。描绘一般量子子系统，2026年。网址：https://arxiv.org/abs/2511.09494，arXiv:2511.09494。[33] Simon Milz 和 Marco Túlio Quintino。刻画量子对象之间的变换、量子性质的完备性，以及无固定因果顺序的变换。《Quantum》，8:1415，2024年7月。网址：http://dx.doi.org/10.22331/q-2024-07-17-1415，doi:10.22331/q-2024-07-17-1415。[34] Luke Mrini 和 Lucien Hardy。不定因果结构与具有时间对称性的因果不等式，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2406.18489，arXiv:2406.18489。[35] Ognyan Oreshkov、Fabio Costa 和 Caslav Brukner。无因果顺序的量子关联。《自然·通讯》，3(1092)，2012年。doi:10.1038/ncomms2076。[36] Craig Pastro 和 Ross Street。幺半范畴的双重范畴。《范畴理论及其应用》，21(4):61–75，2008年。[37] Peter Selinger。匕首紧闭范畴与完全正映射。《电子理论计算机科学笔记》，170:139–163，2007年。doi:10.1016/j.entcs.2006.12.018。[38] Kuntal Sengupta。在最大非局域理论中实现最大因果不定性，2024年。网址：https://arxiv.org/abs/2411.04201，arXiv:2411.04201。[39] Michael Shulman。 $*$-自伴包络与保守性。《电子理论计算机科学论文集》，353:175–194，2021年。doi:10.4204/eptcs.353.9。

[40] Will Simmons 和 Aleks Kissinger。高阶因果理论是 BV 逻辑的模型。载于 Stefan Szeider、Robert Ganian 和 Alexandra Silva（编），第 *47* 届数学基础与计算机科学国际研讨会（*MFCS 2022*），第 241 卷，莱布尼茨国际信息学论文集（*LIPIcs*），第 80:1–80:14 页，德国 Dagstuhl，2022年。Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心。doi:10.4230/LIPIcs.MFCS.2022.80.[41] Will Simmons 和 Aleks Kissinger。因果一致性的完备逻辑，2024年。网址：https://arxiv. org/abs/2403.09297, arXiv:2403.09297.[42] Daisuke Tambara。张量范畴上的分配子。《北海道数学杂志》，35(2):379 – 425，2006年。doi:10.14492/hokmj/1285766362.[43] Philip Taranto、Simon Milz、Mio Murao、Marco Túlio Quintino 和 Kavan Modi。高阶量子操作，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2503.09693，arXiv:2503.09693.[44]Augustin Vanrietvelde、Hlér Kristjánsson 和 Jonathan Barrett。路由量子电路。*Quantum*，5:503，2021年7月。网址：http://dx.doi.org/10.22331/q-2021-07-13-503，doi:10.22331/ q-2021-07-13-503.[45] Augustin Vanrietvelde、Octave Mestoudjian 和 Pablo Arrighi。一维量子元胞自动机的因果分解，2025年。网址：https://arxiv.org/abs/2506.22219，arXiv:2506.22219.[46] Augustin Vanrietvelde、Nick Ormrod、Hlér Kristjánsson 和 Jonathan Barrett。不定因果序的一致电路。*Quantum*，9:1923，2025年12月。网址：http://dx.doi.org/10.22331/ q-2025-12-02-1923，doi:10.22331/q-2025-12-02-1923.[47] Matt Wilson。高阶电路，2026年。网址：https://arxiv.org/abs/2602.18701，arXiv:2602. 18701.[48] Matt Wilson 和 Giulio Chiribella。高阶过程理论中的因果性。载于*QPL 2021* 会议论文集，第 343 卷，第 265–300 页。开放出版协会，2021年。网址：http://dx.doi.org/10.4204/ EPTCS.343.12，doi:10.4204/eptcs.343.12.[49] Matt Wilson 和 Giulio Chiribella。任意维数酉超映射的自由多范畴，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2207.09180.[50] Matt Wilson 和 Giulio Chiribella。物理过程变换的数学框架，2023年。arXiv:2204.04319.[51] Matt Wilson、Giulio Chiribella 和 Aleks Kissinger。量子超映射由局域性刻画，2022年。doi:10.48550/ARXIV.2205.09844.[52] Matt Wilson、James Hefford 和 Timothée Hoffreumon。广义理论上的超映射，2026年。网址：https://arxiv.org/abs/2602.23865，arXiv:2602.23865。

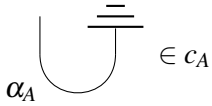
# A 忠实性

**命题 A.1.** 函子 $\mathscr{F}\colon \mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_!)$ 是忠实的。

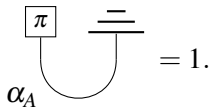
证明。 考虑 $f\colon A \to B$ 以及 $g\colon A \to B$，满足 $\mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(g)$。注意，对于任意对象 $A$，我们都可以将 $|A|$定义为 **Caus(C)** 中的一个对象：它与 $A$ 具有相同的底层对象，但具有所有因果态。于是可见，对于任意对象 $A$，都存在一个可逆标量 $\alpha_A$，使得



更准确地说，只需选择满足以下条件的 $\alpha$：

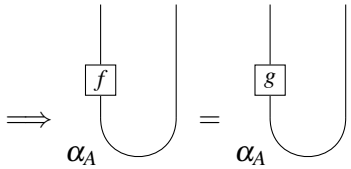


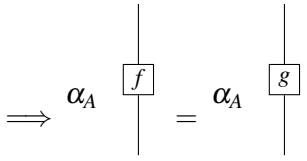

然后指出，对于此 $\alpha$ 以及对于任意 $\pi \in (c_A)^*$，

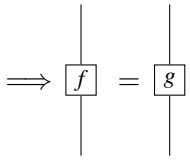



最后，注意到$A \parr |A| \cong A \parr A[I\ |A|]$，且 $|A|$ 为一阶对象，我们有

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f) = \mathscr{F}(g) &\implies \mathscr{F}(f)_{I,|A|} = \mathscr{F}(g)_{I,|A|} \\
&\implies \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(I, f \parr [I,|A|]) = \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(I, g \parr [I,|A|]) \\
&\implies \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(I, f \parr [I,|A|])(\alpha\cup) = \mathbf{Caus}(\mathbf{C})(I, g \parr [I,|A|])(\alpha\cup)
\end{aligned}$$




□

## B 加性前因果范畴嵌入的满性

**命题 B.1.** 设**C**为加性前因果范畴，则每个$c_A$ 是凸的（在前因果范畴中对标量的凸组合封闭）。

证明. 回顾每个$c_A$ 是通过在效应空间$c_A^*$下归一化到1来定义的。事实上，设$\pi \circ \rho_i = 1$，对于 $\pi \in c_A^*$与 $\rho_i \in c_A$，则（利用加性充实）可得 $\pi \circ (\sum_i \rho_i) = \sum_i p_i \pi \circ \rho_i = \sum_i p_i = 1$，对任意离散概率分布$p_i$。

□

**命题 B.2**。对于任意状态集合 $\{\rho_i\}_{i\in 1\ldots N}$，存在一个态射 $ctrl\{\rho_i\}$ 其类型为$\oplus_{i=1}^n I \to A$，使得 $ctrl\{\rho_i\}\left(\ i\ \right) = \rho_i$。

这里，$\perp\!\!\!\perp^i : I \to \oplus_{i=1}^n I$ 我们指的是双积 $\oplus_{i=1}^n$ 的 $i^{\text{th}}$ 分量对应的典范映射 .

证明。 对于任意一组类型为$A$ 的状态 $\{\rho_i\}_{i\in 1\ldots N}$，我们可以（利用双积的存在性）构造所需的类型为 $\oplus_{i=1}^n I \to A$ 的态射 $\mathtt{ctrl}\{\rho_i\}$，方法很简单：

$$\mathtt{ctrl}\{\rho_i\} \;=\; \sum_i \left( \begin{array}{c} A \\ \vert \\ \boxed{\rho_i} \\ \vert \\ i \\ \vert \\ \oplus_{i=1}^n I \end{array} \right).$$

事实上，我们可以确认，对于任意 $\tau \in c_{\oplus_{i=1}^n I}$，

$$\sum_i \left( \begin{array}{c} A \\ \vert \\ \boxed{\rho_i} \\ \vert \\ i \\ \vert \\ \boxed{\tau} \end{array} \right) \;=\; \sum_i p(i|\tau) \begin{array}{c} \\ \vert \\ \boxed{\rho_i} \end{array} \;\in\; c_A,$$

因此，该态射属于所需类型。最后，我们确认受控性质。

$$\sum_i \left( \begin{array}{c} \\ \vert \\ \boxed{\rho_i} \\ \vert \\ i \\ \vert \\ i \end{array} \right) \;=\; \sum_i p(i|\tau) \begin{array}{c} \\ \vert \\ \boxed{\rho_i} \end{array} \;\in\; c_A.$$

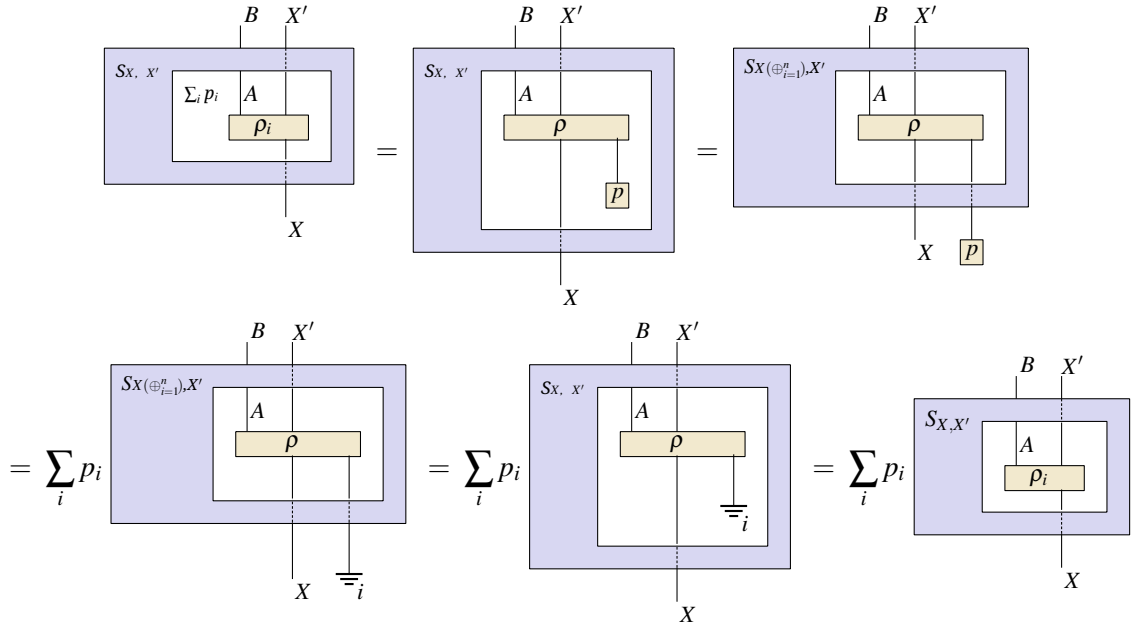
□

**命题 B.3.** 设 $\mathbf{C}$ 是一个加性前因果范畴，则函子 $\mathscr{F}\colon \mathbf{Caus}(\mathbf{C}) \to \mathbf{StProf}(\mathbf{C}_1)$是满的。

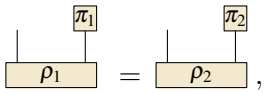
证明. 首先，我们将证明，对于任意强预函子之间的态射 $S\colon \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(B)$，每个分量 $S_{X,X'}$ 都是凸线性函数 $S_{X,X'} : c^{[X,A \parr X']} \to c^{[X,B \parr X']}$。为此，考虑一个类型为 $[X, A \parr X']$ 的状态族 $\rho_i$，并构造该状态族的受控版本，其类型为

$$[\oplus_{i=1}^n I, [X, A \parr X']] \cong [(\oplus_{i=1}^n I) \otimes X, A \parr X'].$$

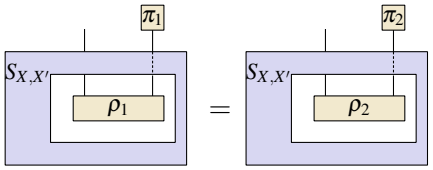
现在让我们确认凸性



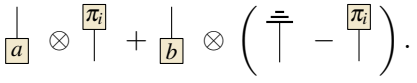
接下来，我们证明对于每个 $X$，$X'$，$S_{X,\,X'}$分量具有一个有用的技术性质。设想存在 $\pi_i$, $\rho_i$，其中每个 $\pi_i \leq i$ 满足



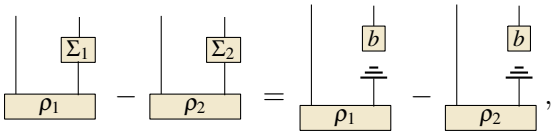

于是可得



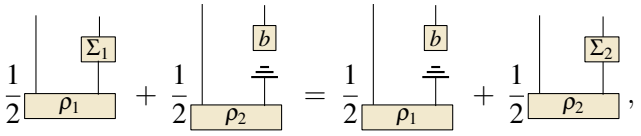

为证明这一点，注意到我们可以从底层前因果范畴中每个类型为 $\pi_i\, X_i \to I$ 的此类对象构造一个新态射 $\Sigma_i : X_i \to (I \oplus I)$，它属于 **Caus(C)**，构造方式如下



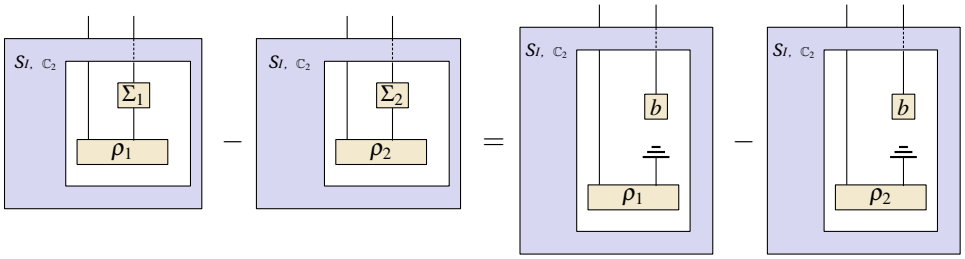

现在注意到



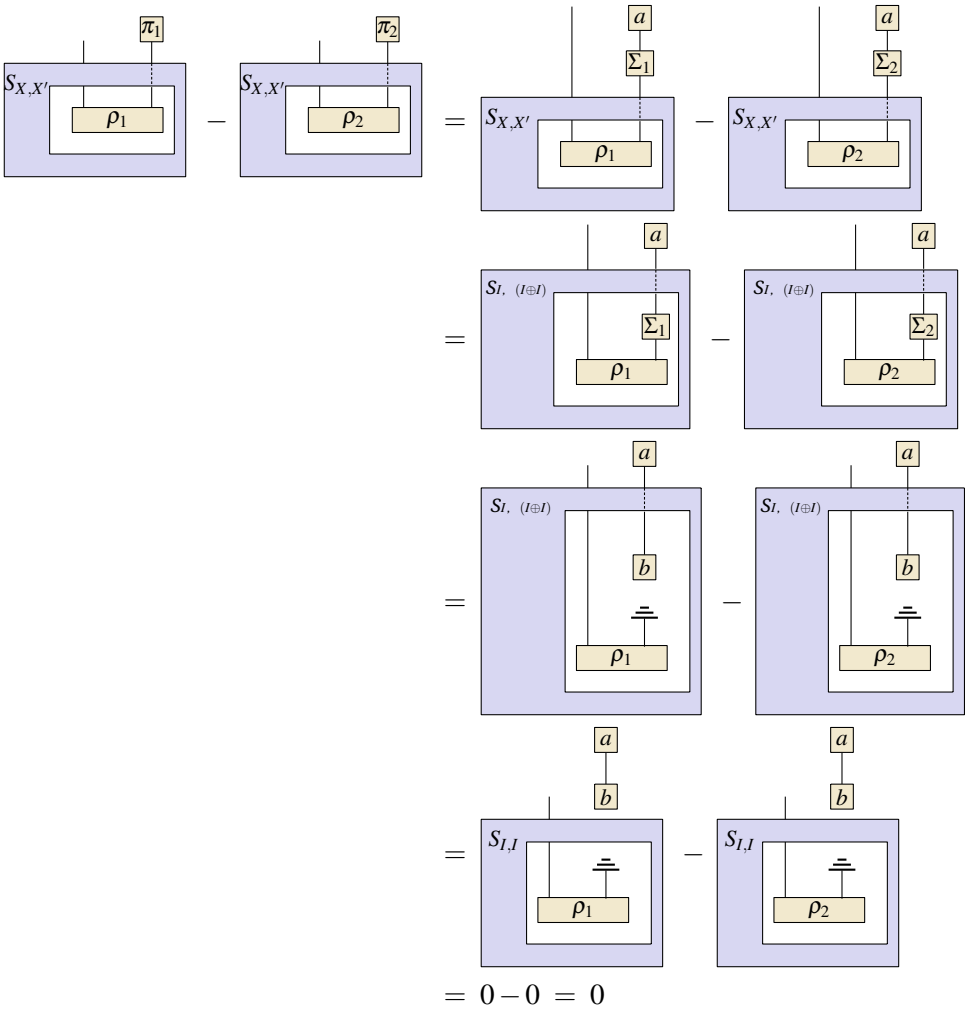

由此可得



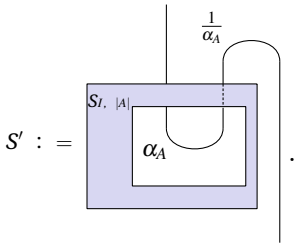

对等式两边分别应用 $S_{I,\,(I\oplus I)}$ 利用凸线性，然后重新整理，得到



现在我们可以证明：

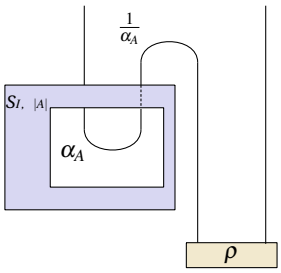



最后，我们得以证明主要的刻画定理：通过证明每个可能的强预函子态射 $S\colon \mathscr{F}(A) \to \mathscr{F}(B)$ 都在 $\mathscr{F}$ 的像中，即都具有 $\mathscr{F}(S')$ 的形式，从而确立 $\mathscr{F}$ 是满的。我们必须明确构造这个原像 $S' : A \to B$ in **Caus(C)**，而这只需通过定义

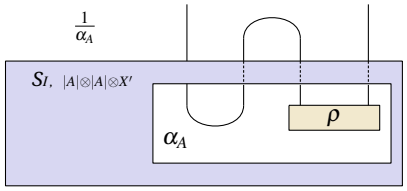


现在我们必须确认 $\mathscr{F}(S') = S$ 确实成立。为此，注意到

$\mathscr{F}(S')(X,\ X')(\rho)$ =

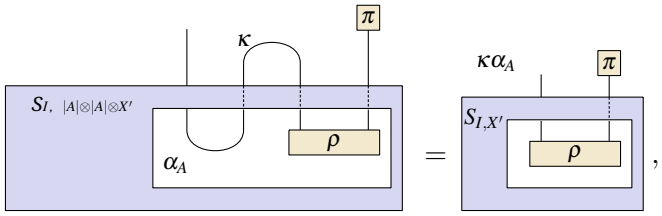



=



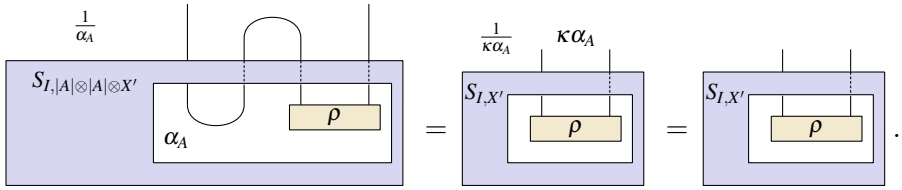

,

并且现在，由于对于所有 $\pi$，$\mathbf{C}$ 都是一个加性前因果范畴，因此存在 $\kappa$，使得 $\kappa(\cap\otimes\pi) \leq \doteq_{|\otimes}$ $\otimes$。这使我们可以使用前面的技术引理，从而得出对于所有此类 $\pi$，



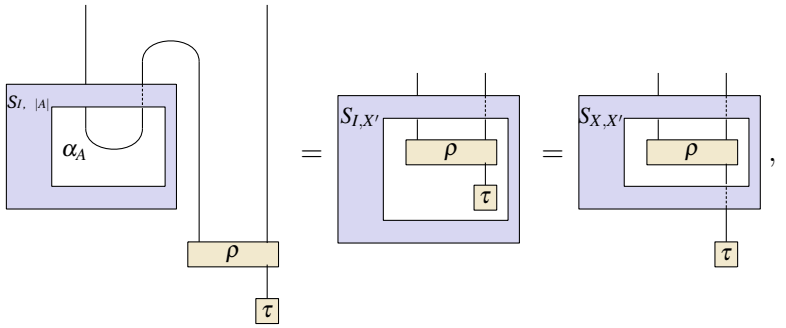

,

并且，由于这样的 $\pi$ 足以确定任意状态，我们可以得出结论：



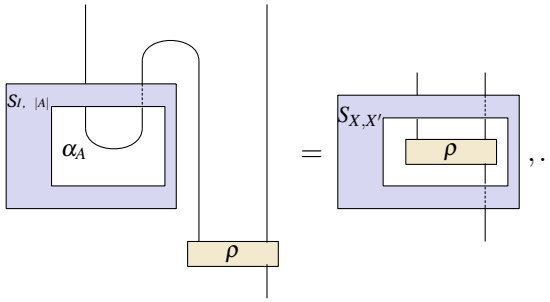

.

最后，我们注意到，对于所有 $\tau$




,

因此

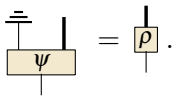



,.

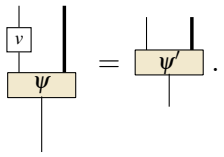
这就完成了证明，确实 $\mathscr{F}(S') = S$。 □

## C 高阶对象的阴影

**命题 C.1**。 考虑**Caus**(**完全正**)。对于任意类型为 $X \to A$ 的 $\rho$，都存在一个一阶对象 $E\psi$ 以及一个类型为 $X \to E_\psi \parr A$ 的纯态态射 $\psi$，使得

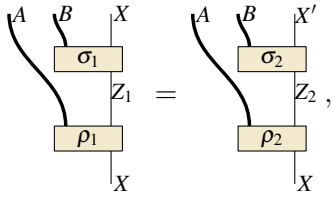



此外，这种纯化在等距同构意义下是唯一的，也就是说，对于任何其他纯化 $(E\psi', \psi')$，若 $dim(E\psi) \leq dim(E\psi')$，则存在一个类型为 $v : E_\psi \to E\psi'$ 的纯（一阶因果）态射，使得

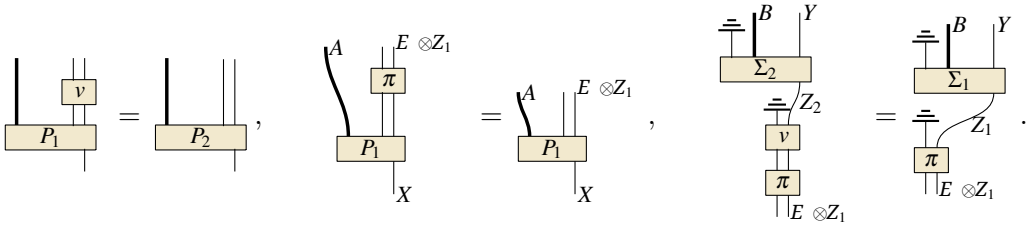



证明。 由完全正映射的扩张定理可立即得出，存在满足上述等式的 $\psi$。显然，它的类型为 $X \to E_\psi \parr A$，因为根据定义等式，它在 $c^*_{E_\psi} \times c^*_A$的任意元素下均归一化。满足所需等式的等距同构 $v$ 也可直接得到；由于它是等距同构，因此确实是类型为 $v : E_\psi \to E\psi'$ 的态射，其中 $E\psi$ 和$E\psi'$ 是 一阶类型。 □

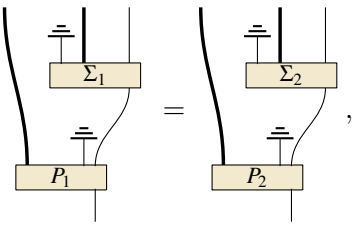
**命题 C.2**。 设 $\rho_1, \sigma_1, \rho_2', \sigma_2'$ 是 **Caus**(**CP**) 中的态射，使得



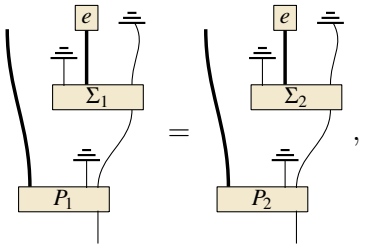

对于 $X$，$X'$，$Z_1$,$Z_2$一阶对象，存在相应的纯化 $P_1$，$\Sigma_1$，$P_2$，$\Sigma_2$，以及一阶因果过程 $\pi$ 和 $V$，使得：



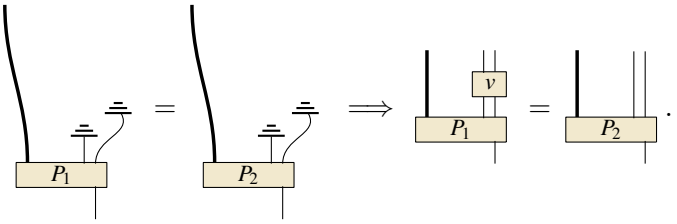

证明。 首先请注意，这些状态各自都配有相应的纯化 $P\,\Sigma$，$P'$，$\Sigma'$使得



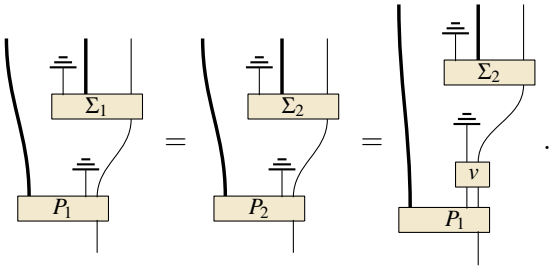
由此可得，对于 **Caus(完全正)** 中任意一个类型为



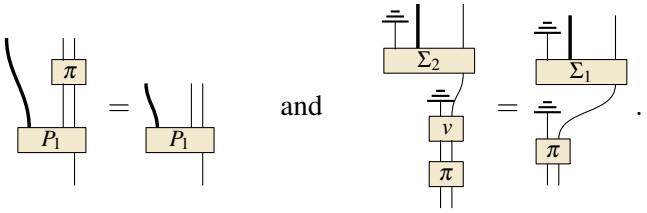

因此




由此可得，




由此， [9] 关于完全正映射的影子的存在性的证明适用，并且我们能够构造一个幂等的 CPTP（因而也是一阶因果的）映射 $\pi$，满足：




□