arXiv:2603.11251v1 [math.AP] 11 Mar 2026

上半空间中椭圆系统的格林函数

˘MARTIN DINDOS、DORINA MITREA、IRINA MITREA 和 MARIUS MITREA

Abstract. 设 L 是定义在 $\mathbb{R}^n$上的二阶、齐次、常系数（复）椭圆系统。本文旨在对上半空间中与系统 L 相关的格林函数的性质进行定性和定量研究。我们从格林函数的定义出发，该定义突出体现了唯一确定这一对象所需的最基本特征；随后，我们建立了该格林函数的最优非切向极大函数估计和直到边界的正则性结果。证明中采用的主要工具包括 Agmon-Douglis-Nirenberg 为系统 L构造的泊松核、Agmon-Douglis-Nirenberg 边界附近的先验正则性估计，以及 [20] 中的一种散度定理，其中相应向量场的边界迹是在非切向逐点意义下取值的。

1. Introduction

固定空间维数 $n \in \mathbb{N}$，并且除非另有说明，均假设 $n \geq 2$。取整数 $M \in \mathbb{N}$，考虑如下二阶齐次 $M \times M$ 系统，其系数为常复系数（采用通常的重复指标求和约定）：

$$L := \left(a_{rs}^{\alpha\beta}\partial_r\partial_s\right)_{1\leq\alpha,\beta\leq M}, \tag{1.1}$$

自然作用于定义在（开集的）中的向量值（或矩阵值）分布上 $\mathbb{R}^n$。值得注意的例子包括拉普拉斯算子和 Lam´e 系统。通常会考虑两类椭圆性条件。首先，若存在实数 L，使得按（1.1）表示的强椭圆系统满足以下勒让德-阿达马条件： $c > 0$，则称其为强椭圆：

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left[a_{rs}^{\alpha\beta}\xi_r\xi_s\overline{\eta_\alpha}\eta_\beta\right] \geq c|\xi|^2|\eta|^2 \quad \text{for every}\\ &\xi = (\xi_r)_{1\leq r\leq n} \in \mathbb{R}^n \quad \text{and} \quad \eta = (\eta_\alpha)_{1\leq\alpha\leq M} \in \mathbb{C}^M.\end{aligned} \tag{1.2}$$

其次，若 L，则称其为弱椭圆：

$$\det\left[\left(a_{rs}^{\alpha\beta}\xi_r\xi_s\right)_{1\leq\alpha,\beta\leq M}\right] \neq 0 \quad \text{for every} \quad \xi = (\xi_r)_{1\leq r\leq n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{1.3}$$

显然，任何强椭圆系统都是弱椭圆的。例如，考虑 $\mathbb{R}^n$ 中由下式给出的一参数标量微分算子族

$$L_\lambda := \partial_1^2 + \cdots + \partial_{n-1}^2 + \lambda\partial_n^2, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：31A20、35C15、35J57、42B37。次要分类：42B25。
Key words and phrases. 格林函数、二阶椭圆系统、泊松核、非切向极大函数。第一作者部分获得英国工程与物理科学研究理事会项目 EP/Y033078/1 的资助。第二作者部分获得西蒙斯基金会项目 # 958374 的资助。第三作者部分获得西蒙斯基金会项目 # 00002820 的资助。第四作者部分获得西蒙斯基金会项目 # 637481 的资助。本研究得以完成，得益于 *Temple University*（美国）和 *Baylor University*（美国）的支持与接待。作者谨向这些机构致谢。

则 L_λ 满足 Legendre-Hadamard椭圆性条件（1.2）当且仅当 $\operatorname{Re}\lambda > 0$，而 L_λ 是弱椭圆的当且仅当 $\lambda \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,\ 0]$。关于这一主题及相关内容，读者可参阅 [22]。

正如从 S.Agmon、A.Douglis 与 L.Nirenberg 的经典工作中所知，在 [1]-[2]（另见 [14], [27], [29], [30], [12, §10.3], 以及 [11, 第 24] 页中的讨论），每个算子 L 如 (1.1)-(1.2) 中那样，都具有一个泊松核，记为 P^L（该对象的性质反映了经典调和泊松核最基本的特征）。详见下文定理 2.6。

我们的主要结果是定理 1.2，它阐述了与给定椭圆系统相关联的格林函数的性质。在陈述该结果之前，有必要对所用记号作一些说明。全文中，$\mathbb{R}^n_+ := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R} :\ x_n > 0\}$ 将表示上半空间。给定集合 $K \subseteq \mathbb{R}^n_+$ 以及定义于 $\mathbb{R}^n_+ \setminus K$ 中的函数 u，我们用 $\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K} u$ 表示 u 的、张角为 κ的非切向极大函数；精确定义见 (2.4)。其次，我们用 $u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}$ 表示给定函数 u 在上半空间边界（典范地等同于 $\mathbb{R}^{n-1}$）上的（κ-）非切向极限，其定义见 (2.3)。对任意 $n \in \mathbb{N}$，$\mathbb{R}^n$ 中的勒贝格测度将记为 $\mathscr{L}^n$。此外，我们用 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)$表示 $\mathbb{R}^n_+$中的分布空间。最后，我们约定将 $\operatorname{diag} := \{(x,x) :\ x \in \mathbb{R}^n_+\}$ 作为笛卡尔积 $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$中对角线的简记。

为做好铺垫，我们给出以下定义。

定义 *1.1*。固定 $n, M \in \mathbb{N}$，满足 $n \geq 2$。设 L 为 *(1.1)* 和 *(1.3)* 中所述的具有常复系数的 $M\times M$ 系统。若对每个 $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n_+$，以下性质均成立（其中某个孔径参数为 $\kappa > 0$），则称 $G^L(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \setminus \mathit{diag} \to \mathbb{C}^{M\times M}$ 是 $\mathbb{R}^n_+$ 中 L 的格林函数：

$$G^L(\cdot\,, y) \in \big[L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}, \tag{1.5}$$

$$G^L(\cdot\,, y)\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} = 0 \quad \textit{at } \mathscr{L}^{n-1}\textit{-a.e. point in } \mathbb{R}^{n-1} \equiv \partial\mathbb{R}^n_+, \tag{1.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus\overline{B(y,y_n/2)}}\, G^L(\cdot\,, y)\Big)(x')\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}} < +\infty, \tag{1.7}$$

$$L\big[G^L(\cdot\,, y)\big] = \delta_y\, I_{M\times M} \quad \textit{in } \big[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}, \tag{1.8}$$

其中，$M\times M$ 系统 L 作用于 G 各列的“点”变量上，而 δ_y 表示质量集中在 y 处的狄拉克分布。

关于定义的性质，1.1 有几点值得说明。我们指出，(1.5) 和 (1.8) 仅仅意味着矩阵值函数 $G(\cdot, y)$ 是系统 L 在上半空间中的一个基本解，并且适用于该区域，也就是说，它的边界迹为零（在“点”变量上按非切向意义理解；参见 (1.6)）。此外，椭圆正则性保证

$$G(\cdot\,, y) \in \big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{y\})\big]^{M\times M} \quad \text{for each } \ y \in \mathbb{R}^n_+. \tag{1.9}$$

话虽如此，$G(\cdot, y)$ 在极点 y 处有一个奇点，这也解释了为什么式 (1.7) 中的非切向极大函数只在 $\mathbb{R}^n_+\setminus B(y, y_n/2)$ 上取值；该区域避开了奇点 y。当然，我们也可以考虑该区域以外的区域（效果相同），即 $^\circ$ $\mathbb{R}^n_+ \setminus K$ 中任意一个紧子集 K，其 $\mathbb{R}^n_+$ 内部记作 K，且包含极点 y。

由于对每个 $\varepsilon>0$，都存在 $C=C(n,\kappa,\varepsilon,y)\in(0,\infty)$，使得（参见式 (3.96)）

$$\Big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus\overline{B(y,y_n/2)}}(1+|\cdot|)^{-\varepsilon}\Big)(x')\le C(1+|x'|)^{-\varepsilon}\quad\text{for all}\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},\tag{1.10}$$

由此可知，（1.7）中的有限性条件会自动满足，如果对每个固定的极点$y\in\mathbb{R}^n_+$，

$$\begin{aligned}&G^L(\cdot\,,y)\text{ is bounded away from the pole and there}\\&\text{exists }\varepsilon>0\text{ so that }G^L(x,y)=O\big(|x|^{-\varepsilon}\big)\text{ as }|x|\to\infty.\end{aligned}\tag{1.11}$$

性质（1.5）-（1.6）与（1.8）是任何格林函数概念的基本特征，但仅凭这些并不能唯一地确定所述格林函数。例如，将这样的格林函数加上 x_n 的任意常数倍，并不影响性质（1.5）-（1.6）与（1.8）。我们施加了（1.7）中的有限性条件，以期（希望如此！）保证唯一性。定义 1.1 中所规定的条件确实能唯一地确定格林函数，这一点构成了我们主要结果的主题，该结果陈述于下文的定理 1.2 。除存在性与唯一性之外，该结果还详细阐述了我们所定义的这类格林函数的大量其他基本性质。其中特别表明，（1.7）中表述的积分有限性条件会自改进为（1.11）中所述的逐点性质，至少在 $n\ge3$的情形下如此；参见（1.17）。

在陈述上述定理之前，我们先对记号作两项约定。首先，给定一个关于两个向量变量 $(\cdot,\cdot)$ 的一般函数 G，$(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\operatorname{diag}$，对于每个$k\in\{1,\dots,n\}$，我们约定分别用 $\partial_{X_k}G$ 和 $\partial_{Y_k}G$ 表示 G 关于 x_k 和 y_k 的偏导数。该约定可以迭代使用，因此对于每一对多重指标 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$，$\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G$ 也有自然的含义。其次，我们将 $\nabla_X G$ 和 $\nabla_Y G$ 分别解释为 $G(x,y)$ 关于 x 和 y 的梯度。最后，按照惯例，对每个 $t\in(0,\infty)$，令 $\log_+ t:=\max\{0\,,\ln\,t\}$。

定理 1.2。固定 n，$M\in\mathbb{N}$ 其中 $n\ge2$。假设 L 是一个 $M\times M$ 系统，其具有如（1.1）-（1.2）中的常复系数 $G^L(\cdot,\cdot)$ 对于 L在 $\mathbb{R}^n_+$中，按照定义 *1.1*，存在唯一的格林函数。此外，该格林函数还满足以下附加性质：

°（*1*）给定 $\kappa>0$，对于每个 $y\in\mathbb{R}^n_+$ 以及 $\mathbb{R}^n_+$ 的每个紧子集 K，若 $y\in K$，则存在有限常数 $C_{y,\,K}>0$，使得对于每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 都有

$$\Big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}G^L(\cdot,y)\Big)(x')\le C_{y,K}\Big(\frac{1+\log_+|x'|}{1+|x'|^{n-1}}\Big).\tag{1.12}$$

此外，对于满足 $|\alpha|+|\beta|>0$的任意多重指标 α、$\beta\in\mathbb{N}_0^n$，存在某个常数 $C_{y,\,K}\in$（0，∞）使得

$$\Big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L)(\cdot,y)\Big)(x')\le\frac{C_{y,K}}{1+|x'|^{n-2+|\alpha|+|\beta|}}.\tag{1.13}$$

特别地，

$$\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L)(\cdot\,,y)\in\bigcap_{1<p\le\infty}L^p(\mathbb{R}^{n-1}),\qquad\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n.\tag{1.14}$$

(2) 对每个固定的 $y\in\mathbb{R}^n_+$，都有

$$G^L(\cdot\,,y)\in\big[\mathscr{C}^\infty\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\setminus B(y,\varepsilon)\big)\big]^{M\times M}\quad\textit{for every}\quad\varepsilon>0.\tag{1.15}$$

(3) 对每个 α、$\beta\in\mathbb{N}_0^n$，函数 $\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L$ 关于切向变量是平移不变的，即

$$\begin{gathered}\big(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L\big)\big(x-(z',0),y-(z',0)\big)=\big(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L\big)(x,y)\\ \text{for each }\ (x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\operatorname{diag}\ \text{ and }\ z'\in\mathbb{R}^{n-1},\end{gathered}\tag{1.16}$$

并且是正齐次的，即

$$\begin{gathered}\big(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L\big)(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{2-n-|\alpha|-|\beta|}\big(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L\big)(x,y)\\ \text{for each }\ x,y\in\mathbb{R}^n_+\ \text{ with }\ x\neq y\ \text{ and }\ \lambda\in(0,\infty),\\ \text{provided either } n\geq 3,\ \text{or } |\alpha|+|\beta|>0.\end{gathered}\tag{1.17}$$

(4) 设 $W^{k,\,p}$ 表示 L^p阶 k 上的 Tr 表示 $\partial\mathbb{R}^n_+$ (参见 (2.37)-(2.39))，则有

$$\begin{gathered}G^L(\cdot\,,y)\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{\frac{n}{n-1}<p<\infty}\big[W^{k,p}(\mathbb{R}^n_+\setminus K)\big]^{M\times M}\ \text{ and }\ \operatorname{Tr}\big[G^L(\cdot\,,y)\big]=0,\\ \text{for every } y\in\mathbb{R}^n_+\ \text{ and every compact } K\subset\mathbb{R}^n_+\ \text{ with } y\in\mathring{K}.\end{gathered}\tag{1.18}$$

(5) 若 $G^{L^\top}(\cdot,\cdot)$ 表示(根据陈述中的第一个结论，该函数唯一) 格林函数，则对$L^\top$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中有

$$G^L(x,y)=\Big[G^{L^\top}(y,x)\Big]^\top,\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\operatorname{diag}.\tag{1.19}$$

因此 ，由 (1.19)、(1.6)和 (1.15)可知，对每个固定的 $x\in\mathbb{R}^n_+$ 和 $\varepsilon>0$,

$$G^L(x,\cdot)\in\big[\mathscr{C}^\infty\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\setminus B(x,\varepsilon)\big)\big]^{M\times M}\ \text{ and }\ G^L(x,\cdot)\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0\ \text{ on }\ \mathbb{R}^{n-1}.\tag{1.20}$$

(6) 若 E^L 表示定理2.8中的 L的基本解，则矩阵值函数

$$R_L(x,y):=E^L(x-y)-G^L(x,y),\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\operatorname{diag},\tag{1.21}$$

可延拓为函数

$$R_L(\cdot,\cdot)\in\big[\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\big)\big]^{M\times M}\tag{1.22}$$

它满足以下估计：对于任意多重指标 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$，存在有限常数 $C_{\alpha\beta}>0$，使得对每个 $(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+$,

$$\big|\big(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta R_L\big)(x,y)\big|\leq\begin{cases}C_{\alpha\beta}\,|x-\overline{y}|^{2-n-|\alpha|-|\beta|}\ \ \text{if } |\alpha|+|\beta|>0,\ \text{or } n\geq 3,\\ C+C\big|\ln|x-\overline{y}|\big|\ \ \text{if } |\alpha|=|\beta|=0\ \text{and } n=2,\end{cases}\tag{1.23}$$

其中 $C\in(0,\infty)$，且 $y\,\widetilde{=}\,(y',-y_n)$ 若 $y=(y',y_n)\in\mathbb{R}^n_+$。

(7) 对于任意多重指标 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$，存在有限常数 $C_{\alpha\beta}>0$，使得

$$\begin{gathered}\big|\big(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L\big)(x,y)\big|\leq C_{\alpha\beta}|x-y|^{2-n-|\alpha|-|\beta|}\\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\operatorname{diag},\ \text{if either } n\geq 3,\ \text{or } |\alpha|+|\beta|>0,\end{gathered}\tag{1.24}$$

并且，对应于 $|\alpha|=|\beta|=0$ 和 $n=2$，存在 $C\in(0,\infty)$，使得

$$\big|G^L(x,y)\big|\leq C\big(1+\big|\ln|x-\overline{y}|\big|\big),\quad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2_+\times\mathbb{R}^2_+\setminus\operatorname{diag}.\tag{1.25}$$

(8) 对每个 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$，都有

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n_+}\left\|\left(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta G^L\right)(\cdot,y)\right\|_{\left[L^{\frac{n}{n-2+|\alpha|+|\beta|},\infty}(\mathbb{R}^n_+)\right]^{M\times M}}<+\infty,\quad \text{if either } n\geq 3,\ \text{or } |\alpha|+|\beta|>0. \tag{1.26}$$

特别是，对于 $y\in\mathbb{R}^n_+$，其形式具有一致性，

$$\text{the entries of } G^L(\cdot,y) \text{ are in } L^{\frac{n}{n-2},\infty}(\mathbb{R}^n_+) \text{ if } n\geq 3, \tag{1.27}$$

$$\text{the entries of } \nabla_X G^L(\cdot,y) \text{ and } \nabla_Y G^L(\cdot,y) \text{ are in } L^{\frac{n}{n-1},\infty}(\mathbb{R}^n_+), \tag{1.28}$$

$$\text{the entries of } \nabla_X^2 G^L(\cdot,y), \nabla_X\nabla_Y G^L(\cdot,y), \nabla_Y^2 G^L(\cdot,y) \text{ are in } L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n_+). \tag{1.29}$$

(9) 若 $p\in\left[1,\frac{n}{n-1}\right),$，则对每个标量函数 $\zeta\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，有

$$\zeta G^L(\cdot,y)\in\left[\mathring{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)\right]^{M\times M} \text{ for each } y\in\mathbb{R}^n_+ \quad \text{and} \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^n_+}\left\|\zeta G^L(\cdot,y)\right\|_{[W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)]^{M\times M}}<+\infty, \tag{1.30}$$

其中，$\mathring{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ 表示 $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ 中的闭包。

(10) 对每个 $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n_+$ 以及每个 $y\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{x\}$，都有 (其中 P^L 表示定理 *2.6* 中 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上的泊松核*2.6*)

$$G^L(x,y)=E^L(x-y)-P_t^L*\left(\left[E^L(\cdot-y)\right]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\right)(x'), \tag{1.31}$$

卷积作用于圆括号内矩阵的每一列。

我们证明定理 1.2 的策略包括以下几个步骤。

在步骤 1 中，我们利用定理 2.8 中的 E^L L在 $\mathbb{R}^n$ 中的基本解，以及定理 2.6 中系统 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的 Agmon-Douglis-Nirenberg 泊松核 P^L，按照（1.31）的思路定义 $G^L(\cdot,\cdot)$，但需作一处调整。具体而言，在证明的这一早期阶段，我们发现，将 $E^L(\cdot-y)$ 替换为 $E^L(\cdot-y)-E^L(\cdot-y)$（见（3.2）），便于增强基本解在无穷远处的衰减。根据基本解和泊松核的性质，我们进而发现该函数满足（1.12）。随后在步骤 2 中，我们利用椭圆正则性证明（1.15）。

在步骤 3 中，我们对误差 $R^L(\cdot,\cdot)$ 作逐点估计，其中误差的定义与（1.21）相同；这相当于（$|\alpha|=|\beta|=0$ （1.23）中的情形。这一过程已颇为精细，因为它要用到基本解 E^L 和泊松核 P^L 的若干更专门的性质，还要用到 L^∞-狄利克雷边值问题在 $\mathbb{R}^n_+$中的唯一性。要估计 $R^L(\cdot,\cdot)$ 的高阶导数则困难得多，需要采用迂回的方法。首先，在步骤 4 中，我们充分运用边界附近的 Agmon-Douglis-Nirenberg 估计（参见命题 2.13）来处理 $\left(\partial_X^\alpha R_L\right)(\cdot,\cdot)$。进而，这

使我们能够在步骤 5 中估计非切向极大函数 $\mathcal{N}\left((\partial_X^\alpha G_L)(\cdot,\cdot)\right)$ 与 (1.13) 中的情况相同，其中 $|\beta|=0$。有了这一点，在步骤 6 中，我们便能运用 [20] 中提出的散度定理（现于定理 2.14 中回顾，随后用于证明引理 2.15），从而得出 $G^L(\cdot,\cdot)$ 是 L 的唯一格林函数，符合定义 1.1 的意义。正如步骤 7 中详述的，引理 2.15 以及步骤 1 和步骤 5 中关于 $G^L(\cdot,\cdot)$ 的定量结果，对于论证转置公式 (1.19) 至关重要。现在的思路是，根据步骤 4 中关于 $\left(\partial_X^\alpha R_{L^\top}\right)(\cdot,\cdot)$ 的结论以及转置公式 (1.19)，估计 $\left(\partial_X^\alpha\partial_Y^\alpha R_L\right)(\cdot,\cdot)$。在步骤 8 中，我们再次充分利用边界附近的 Agmon-Douglis-Nirenberg 估计来实施这一策略，其形式见命题 2.13 中的回顾。至此，我们已具备充分条件来证明这些断言

定理陈述中的条目*(1)-(9)* 所作的1.2，我们将在步骤 9–10 中予以证明。最后，利用步骤 11 中由 [17, 定理 1.21], 确立的适定性结果，我们证明 $G^L(\cdot,\cdot)$ 中的初始公式（见 (3.2)）实际上可简化为 (1.31)。

以下是上半空间中 Legendre-Hadamard 椭圆系统的狄利克雷边值问题的一个非常有用的唯一性结果：

推论 1.3. 设 L 是一个 $M\times M$ 系统，其具有常复系数，如 (1.1)-(1.2)，并固定某个孔径参数 $\kappa>0$。则

$$\left.\begin{array}{r} u\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^M,\quad Lu=0\ \ in\ \ \mathbb{R}^n_+ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x')\,\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}<\infty \\ u\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0\ \ at\ \mathscr{L}^{n-1}\text{-a.e. point in}\ \ \mathbb{R}^{n-1} \end{array}\right\}\Longrightarrow u\equiv 0\ \ in\ \ \mathbb{R}^n_+. \tag{1.32}$$

正如在（3.66）中所指出的，这是定理 1.2 中所述格林函数存在性的一个推论。鉴于此，由推论 1.3 以及 [24, (2.6.13)，第 104] 页，我们得出弱椭圆 $n\times n$ 系统

$$L_D:=\Delta-2\nabla\text{div}\ \ \text{in}\ \ \mathbb{R}^n \tag{1.33}$$

并不具有定理 1.2 中所述类型的格林函数（因为实际上存在无穷多个线性无关的零解，它们对应于 L^p-狄利克雷边值问题，该问题针对 L_D，于 $\mathbb{R}^n_+$ 中，只要 $1<p<\infty$）。特别地，这表明 Legendre-Hadamard 椭圆性（参见（1.2））不能放宽为仅仅是弱椭圆性（参见（1.3））， 在定理 1.2的框架内。

定理 1.2 有一个版本，在下文定理 1.4 中给出。该版本对系统 L 假设了另一组不同的条件，并且对格林函数G^L 的结论进行了不同的细化。在给出正式表述之前，我们需要先作一些定义。给定一个二阶、齐次、复常系数的 $M\times M$ 系统 L，其定义于 $\mathbb{R}^n$ 中，并如（1.1）所示表示，同时给定一个矩阵 $W=(w_{jk})_{1\leq j,\ k\leq n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，定义定义于 $\mathbb{R}^n$ 中的二阶、齐次、复常系数 $M\times M$ 系统，其形式上写作

$$L\circ W:=\Big(a^{\alpha\beta}_{jk}(W\nabla)_j(W\nabla)_k\Big)_{1\leq\alpha,\beta\leq M}. \tag{1.34}$$

我们称 L 在 W 下不变， $L\circ W=L$如果 L 按（1.1）所示表示，则 L在 W 下不变，当且仅当

$$\begin{array}{c}\text{for each }\alpha,\beta\in\{1,\dots,M\}\text{ and }j,k\in\{1,\dots,n\}\\ \text{one has}\ \ \big(a^{\alpha\beta}_{rs}+a^{\alpha\beta}_{sr}\big)w_{rj}w_{sk}=a^{\alpha\beta}_{jk}+a^{\alpha\beta}_{kj}.\end{array} \tag{1.35}$$

对我们而言尤其重要的是 W 是关于 $\mathbb{R}^n$ 水平面 $x_n=0$的反射，即 $Wx=x$ 对每个 $x\in\mathbb{R}^n$ 都成立的情形。在这种情况下，我们不再说 L在 W 下不变，而是简单地称 L为反射不变。由（1.35）可见，若 L按（1.1）所示表示，则 L 反射不变，当且仅当

$$\begin{array}{c}\text{for each }\alpha,\beta\in\{1,\dots,M\}\text{ one has}\\ a^{\alpha\beta}_{jn}+a^{\alpha\beta}_{nj}=0\ \ \text{whenever}\ \ 1\leq j<n.\end{array} \tag{1.36}$$

特别地，

$$\begin{array}{l}\text{the system } L \text{ is reflection invariant if it may be written as in (1.1)}\\ \text{using a coefficient tensor } A=\big(a^{\alpha\beta}_{jk}\big)_{\substack{1\leq j,k\leq n\\ 1\leq\alpha,\beta\leq M}}\text{ which has the follow-}\\ \text{ing block-structure: } a^{\alpha\beta}_{jn}=a^{\alpha\beta}_{nj}=0\text{ for each } j\in\{1,\dots,n-1\}.\end{array} \tag{1.37}$$

我们希望指出，如果系统 L在旋转下不变，则 L 是反射不变的。最后，如（2.35）所述，弱椭圆系统 L 是旋转不变的，当且仅当基本解 E^L 典范关联于 L，如定理2.8 所述，是旋转不变的，因而是径向函数于 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$。

下述定理的要点在于，在上述情形中，(1.12)右侧的对数项实际上可以省略，并且 (1.13) 中的衰减更快（至少在$\beta = 0$时如此）。另一个值得注意的特点是，在假设 L 反射不变的条件下，我们可以放宽定理1.2 中的强椭圆性假设，只要求 L是弱椭圆的。这些假设不再保证 L 的泊松核存在，因此需要一个新的格林函数公式（比较 (1.31) 与 (1.38)）。

定理 1.4. 取 n，$M \in \mathbb{N}$，其中 $n \geq 2$，并考虑一个定义在 $\mathbb{R}^n$上的二阶、齐次、复常系数 $M \times M$ 系统 L。若 L 是弱椭圆且反射不变的，则存在唯一的格林函数 $G^L(\cdot,\ \cdot)$，它定义在 $\mathbb{R}^n_+$上，且意义如定义1.1所述。具体而言，令 E^L 表示按照定理2.8中所述方式与 L 规范关联的基本解，则上述唯一的格林函数由下式给出：

$$G^L(x,y) := E^L(x-y) - E^L(x-\overline{y}) \quad \textit{for all} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \setminus \operatorname{diag}. \tag{1.38}$$

此外，对于以下对(1.12)-(1.13)的部分改进：给定任意张角°参数 $\kappa > 0$、任意极点 $y \in \mathbb{R}^n_+$、$\mathbb{R}^n_+$ 的任意紧子集 K（其中 $y \in K$），以及任意多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$，存在有限常数 $C^\alpha_{y,\,K,\,\kappa} > 0$ 使得

$$\Big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+ \setminus K}(\partial_X^\alpha G^L)(\cdot,y)\Big)(x') \leq \frac{C^\alpha_{y,K,\kappa}}{1+|x'|^{n-1+|\alpha|}} \tag{1.39}$$

对于每个 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$。此外，对(1.19)还有如下改进：如果 $G^{L^\top}(\cdot,\ \cdot)$表示(根据本陈述中的第一个结论是唯一的）关于 $L^\top$ 在 $\mathbb{R}^n_+$中的格林函数，那么

$$\begin{gathered} G^L(x,y) = G^L(y,x) \quad \textit{and} \quad G^L(x,y) = \Big[G^{L^\top}(x,y)\Big]^\top \\ \textit{for all pairs} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \setminus \operatorname{diag}. \end{gathered} \tag{1.40}$$

最后，如果 L 如(1.1)-(1.2）所述且具有反射不变性，那么在(1.38) 中构造的格林函数与定理1.2中的格林函数一致。

例如，算子 $L_\lambda := \partial_1^2 + \cdots + \partial_{n-1}^2 + \lambda\partial_n^2$由（1.4）知，当 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty,\ 0]$时具有定理1.4 中的格林函数；此外，当 $\operatorname{Re}\lambda > 0$时，该格林函数还满足定理1.2 中的结论。

我们的下一个结果描述了 Agmon-Douglis-Nirenberg 泊松核与定理 1.2 中所考虑的格林函数之间相当精确的关系。

推论 1.5。假设 L 是一个具有常复系数的 $M \times M$ 系统，如 (1.1)-(1.2) 中所示。那么，按照定义 2.4 的意义，存在唯一的 $\mathbb{R}^n_+$ 中的 L 对应的泊松核 P^L。此外，可以根据以下公式由格林函数 G^L 求出 $P^L = \big(P^L_{\gamma\alpha}\big)_{1\leq\gamma,\alpha\leq M}$

$$\begin{gathered} P^L_{\gamma\alpha}(x') = -a^{\beta\alpha}_{nn}\big(\partial_{Y_n} G^L_{\gamma\beta}\big)\big((x',1),0\big), \quad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ \textit{for each pair of indexes} \quad \alpha,\gamma \in \{1,\ldots,M\}. \end{gathered} \tag{1.41}$$

此外，如果基本解 $E^L = \big(E^L_{\gamma\beta}\big)_{1\leq\gamma,\ \beta\leq M}$ 即 L 定理 2.8 中的基本解是径向函数，那么对每个 $\alpha,\ \gamma \in \{1,\ldots,M\}$ 都有

$$P^L_{\gamma\alpha}(x') = 2a^{\beta\alpha}_{nn}(\partial_n E^L_{\gamma\beta})(x',1), \qquad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{1.42}$$

历史上，格林函数估计及相关的正则性结果在偏微分方程中一直发挥着根本性作用。定理 1.2 对于处理这类系统的边值问题尤其有用，在这些问题中，解的大小是通过非切向极大算子来衡量的。关于以这种方式表述的上半空间中椭圆系统的狄利克雷边值问题的大量实例，读者可参阅 [17], [24], [16], [13], [25]。

为说明这一联系，我们在此给出一个椭圆系统的 Fatou 型定理和泊松积分公式。

定理 1.6。设 L 是一个 $M\times M$ 系统，其具有常复系数，如 (1.1)-(1.2)所示，并固定某个孔径参数 $\kappa>0$。则

$$\begin{cases} u\in\big[\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M, \quad Lu=0 \quad in \quad \mathbb{R}^n_+, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x')\,\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}<\infty, \end{cases} \tag{1.43}$$

意味着

$$\begin{cases} u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \quad exists\ at\ \mathscr{L}^{n-1}\text{-}a.e.\ point\ in\ \ \mathbb{R}^{n-1}, \\ u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \quad belongs\ to\ \ \Big[L^1\Big(\mathbb{R}^{n-1},\,\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}\Big)\Big]^M, \\ u(x',t)=\Big(P_t^L*\big(u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\big)\Big)(x') \quad for\ each\ \ (x',t)\in\mathbb{R}^n_+, \end{cases} \tag{1.44}$$

其中 $P^L=\big(P^L_{\beta\alpha}\big)_{1\leq\beta,\,\alpha\leq M}$ 是系统 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的 *Agmon-Douglis-Nirenberg* 泊松核，且 $P_t^L(x')\colon=t^{1-n}P^L(x'/t)$ 对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 和 $t>0$均成立。

此外 r，此外假设 L 也具有反射不变性，只要 r

$$\begin{cases} u\in\big[\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M, \quad Lu=0 \quad in \quad \mathbb{R}^n_+, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x')\,\frac{dx'}{1+|x'|^{n}}<\infty, \end{cases} \tag{1.45}$$

便可推出

$$\begin{cases} u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \quad exists\ at\ \mathscr{L}^{n-1}\text{-}a.e.\ point\ in\ \ \mathbb{R}^{n-1}, \\ u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \quad belongs\ to\ \ \Big[L^1\Big(\mathbb{R}^{n-1},\,\frac{dx'}{1+|x'|^{n}}\Big)\Big]^M, \\ u(x',t)=\Big(P_t^L*\big(u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\big)\Big)(x') \quad for\ each\ \ (x',t)\in\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{1.46}$$

这是对 [17, 定理 6.1，第 956]页的改进。另一种证明方法充分利用了定理1.2，见 [15]。我们还想指出，即使在$L\colon=\Delta$这一经典情形下，$\mathbb{R}^n$中的拉普拉斯算子，定理1.6 也比文献中的现有结果更一般（也就是说，它允许更广泛的函数类）。事实上，后者通常对调和函数假设一个 L^p 可积性条件；在范围 $1<p<\infty$内，该条件蕴含了我们对非切向极大函数所要求的加权 L^1 可积性条件，见（1.43）。关于这一点，参见例如 [6, 定理 4.8–4.9，第 174–175], [31, 推论，第 200], [32,命题 1，第 119]。

定理的一个显著特点是1.6 尽管其陈述完全以 Agmon-Douglis-Nirenberg 泊松核 P^L来表述，但其证明实际上主要是通过与上半空间中的系统 L 相关联的格林函数来完成的。

值得确定一个相当宽泛的框架，使现有方法能够得出适定性结果。用 $\mathcal{M}$表示 $\mathbb{R}^{n-1}$中的 Hardy-Littlewood 极大算子，对每个 $m\in\mathbb{N}$，考虑线性空间

$$\mathscr{Z}_m:=\Big\{f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{C}:\ \mathscr{L}^{n-1}\text{-measurable and }\ \mathcal{M}f\in L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\tfrac{dx'}{1+|x'|^m}\big)\Big\}\tag{1.47}$$

赋予范数

$$\|f\|_{\mathscr{Z}_m}:=\|\mathcal{M}f\|_{L^1\left(\mathbb{R}^{n-1},\frac{dx'}{1+|x'|^m}\right)},\qquad\forall\,f\in\mathscr{Z}_m.\tag{1.48}$$

推论 1.7。设 L 为一个 $M\times M$ 系统，其具有常复系数，如 (1.1)-(1.2)所示，并固定孔径参数 $\kappa>0$。则以下边值问题是适定的：

$$\begin{cases}u\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^M,\quad Lu=0\ \ in\ \ \mathbb{R}^n_+,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x')\,\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}<\infty,\\ u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}=f\in[\mathscr{Z}_{n-1}]^M.\end{cases}\tag{1.49}$$

此外，在进一步假设 L也具有反射不变性的条件下，以下边值问题同样是适定的：

$$\begin{cases}u\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^M,\quad Lu=0\ \ in\ \ \mathbb{R}^n_+,\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x')\,\frac{dx'}{1+|x'|^{n}}<\infty,\\ u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}=f\in[\mathscr{Z}_{n}]^M.\end{cases}\tag{1.50}$$

作为一个非常特殊的情形，（1.50）蕴含了上半空间中拉普拉斯算子的 L^p-狄利克雷问题的适定性，其中$1<p<\infty$；这一结论的证明并未使用极大值原理（如 Stein 的 1970年著作 [31]），也未使用 Schwarz 反射原理（如 García-Cuerva 和 Rubio de Francia 于 1991 年出版的著作所示 [6]）。

在边值问题（1.43）蕴含（1.44）这一事实的背景下，其重要性在于：在所述问题的表述中，对函数 u 施加的其他条件保证了非切向边界迹 $u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}$ 存在，并且可以通过与该系统 L 的规范关联泊松核作卷积，从边界数据恢复解。对于边值问题（1.45）蕴含（1.46）这一事实，在边值问题（1.50）的情形下，也有类似的说明。

此处讨论的这类边值问题中，解的大小以其非切向极大函数来衡量，且其迹取为非切向逐点意义下的迹。在 $L=\Delta$中的拉普拉斯算子这一特例下，这类问题已在多部专著中得到研究，其中包括 [3], [6], [31], [32], 和 [33]。在这些著作中，存在性部分均利用了调和泊松核的显式形式，而唯一性则依赖于极大值原理或调和函数的施瓦茨反射原理。对于本文研究的一般强椭圆系统，后两种方法都无法有效地用于证明唯一性；我们的思路更接近 [17]中的工作（该工作涉及格林函数估计以及散度定理的一个精确版本），并在此基础上作了若干重要改进。值得注意的是，我们的方法适用于（ L）中（1.1）至（1.2）所述的整个椭圆系统类。

最后，我们指出，在特定几何环境中针对各类偏微分算子（或系统）构造格林函数，仍是一个活跃且重要的研究课题；更多信息和参考文献可见 [5], [7], [10],[26], [34]。

2. Preliminaries

在全文中， $\mathbb{N}$ 表示所有严格正整数的集合，且 $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$。因此，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathbb{N}_0^k$ 表示所有多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 的集合，其中 $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ ，适用于 $1 \leq j \leq k$。此外，取定满足 $n \geq 2$ 的 $n \in \mathbb{N}$ 。我们将在上半空间 $\mathbb{R}^n_+$ 中开展工作，其拓扑边界 $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ 常通过 $(x', 0) \equiv x'$ 与水平超平面 $\mathbb{R}^{n-1}$ 等同。 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的原点记作 $0'$ ，并令 $B_{n-1}(x', r)$ 表示以 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 为中心、半径为 r 的 $(n-1)$ 维欧几里得球。取定 $\kappa > 0$ 后，对于每个边界点 $x' \in \partial\mathbb{R}^n_+$ ，引入顶点位于 x' 的锥形非切向趋近区域，其定义如下：

$$\Gamma_\kappa(x') := \big\{ y = (y', t) \in \mathbb{R}^n_+ : |x' - y'| < \kappa\, t \big\}. \tag{2.1}$$

给定一个向量值函数 $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}^M$， u 的非切向极大函数定义为

$$\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x') := \|u\|_{L^\infty(\Gamma_\kappa(x'))}, \qquad \forall\, x' \in \partial\mathbb{R}^n_+ \equiv \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.2}$$

其中，本质上确界范数是相对于勒贝格测度 $\mathscr{L}^n$ 取的。在有意义的情况下，我们还将函数 u 在 $\mathbb{R}^n_+$ 的边界附近连续时的非切向迹定义为

$$\big(u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\big)(x') := \lim_{\Gamma_\kappa(x') \ni y \to (x', 0)} u(y) \quad \text{for } x' \in \partial\mathbb{R}^n_+ \equiv \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.3}$$

接下来，我们需要考虑非切向极大算子的局部化版本。具体而言，给定任意 $E \subset \mathbb{R}^n_+$，对于每个 $u : E \to \mathbb{C}^M$，定义

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^E u\big)(x') := \|u\|_{L^\infty(\Gamma_\kappa(x') \cap E)}, \qquad \forall\, x' \in \partial\mathbb{R}^n_+ \equiv \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.4}$$

因此， $\mathcal{N}_\kappa^E u = \mathcal{N}_\kappa \widetilde{u}$ ，其中 $\widetilde{u}$ 是将 u 在 E 外延拓为零至 $\mathbb{R}^n_+$ 所得的函数。在 u 一开始就在整个上半空间 $\mathbb{R}^n_+$ 中定义的情形下，我们因此可以写成

$$\mathcal{N}_\kappa^E u = \mathcal{N}_\kappa(\mathbf{1}_E u). \tag{2.5}$$

稍后，我们还需要以下结果。

命题 2.1。 对于每个数 $\kappa > 0$ 和指数 $p \in (0, \infty)$ ，存在某个有限常数 $C = C(n, p, \kappa) > 0$ ，使得对于每个可测集 $E \subseteq \mathbb{R}^n_+$ 及每个可测函数 $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$ ，都有

$$\|u\|_{L^{\frac{np}{n-1}}(E)} \leq C \big\|\mathcal{N}_\kappa^E u\big\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{2.6}$$

证明。当 $E = \mathbb{R}^n_+$ 时，这是一个更一般估计的特例，该估计证明于 [9,命题 3.24，第 2647]页。因此，按所述方式，(2.6) 可由此及 (2.5) 推出。□

Hardy-Littlewood 极大算子在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上对定义于 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的任意勒贝格可测函数 f 的作用为

$$\big(\mathcal{M} f\big)(x') := \sup_{r>0} \fint_{B_{n-1}(x', r)} |f|\, d\mathscr{L}^{n-1}, \qquad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.7}$$

其中，带横线积分表示平均值（对于取值于 $\mathbb{C}^M$ 的函数，平均值按分量计算）。此外，我们将沿用惯用记号 $A \approx B$ ，以便

表示每个量 A, B 都被对方的一个固定倍数所控制（该倍数由与 A, B 中相关基本参数无关的常数给出）。回顾一下，对每个 $_+t:=$最大值 $\{0,\ln t\}$，都有 $\log t\in(0,\ \infty)$。以下引理的证明可参见 [17, 引理 21]。

引理 2.2。考虑由 $f(x'):=(1+|x'|)^{1-n}$ 给出的 $f\colon \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$，对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 均成立。则

$$\big(\mathcal{M}f\big)(x')\approx\frac{1+\log_+|x'|}{1+|x'|^{n-1}},\qquad x'\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.8}$$

其中隐含常数仅依赖于 n。

我们还回顾一个有用的弱紧性结果 [22, 引理 4.6.1，第 822] 页。

引理 2.3。设 $\omega\colon \mathbb{R}^{n-1}\to(0,\infty)$ 为一个勒贝格可测函数，并考虑一个序列$\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset L^1(\mathbb{R}^{n-1},\omega\mathscr{L}^{n-1})$，使得

$$F:=\sup_{j\in\mathbb{N}}|f_j|\in L^1(\mathbb{R}^{n-1},\omega\mathscr{L}^{n-1}). \tag{2.9}$$

那么存在 $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列 $\{f_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 以及一个函数 $f\in L^1(\mathbb{R}^{n-1},\omega\mathscr{L}^{n-1})$，具有如下性质

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_{j_k}\varphi\,\omega\,d\mathscr{L}^{n-1}\longrightarrow\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f\varphi\,\omega\,d\mathscr{L}^{n-1}\quad as\quad k\to\infty,\\ &for\ every\ function\ \ \varphi\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^{n-1})\cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1},\mathscr{L}^{n-1}).\end{aligned} \tag{2.10}$$

We n进一步讨论 $\mathbb{R}^n_+$ 中算子 L （如（1.1）-（1.2））的泊松核概念).

定义 2.4。设 L 为 $M\times M$ 中具有常复系数的系统，如 (1.1)-(1.2)所示。对于 泊松核， L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 是一个矩阵值函数

$$P^L=\big(P^L_{\alpha\beta}\big)_{1\le\alpha,\beta\le M}:\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{C}^{M\times M} \tag{2.11}$$

满足以下条件：

(a) *there exists* $C\in(0,\infty)$ *such that* $|P^L(x')|\le\dfrac{C}{(1+|x'|^2)^{\frac{n}{2}}}$ *for each* $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$;

(b) 函数 P^L 是勒贝格可测的，且 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}}P^L(x')\,dx'=I_{M\times M}$，即 $M\times M$ 单位矩阵；

(c) 若 $K^L(x',t):=P^L_t(x'):=t^{1-n}P^L(x'/t)$，对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 和 $t\in(0,\infty)$，则函数 $K^L=\big(K^L_{\alpha\beta}\big)_{1\le\alpha,\beta\le M}$ 满足(在分布意义下)

$$LK^L_{\cdot\beta}=0\quad in\quad\mathbb{R}^n_+\quad for\ each\quad\beta\in\{1,\dots,M\}, \tag{2.12}$$

其中 $K^L_{\cdot\beta}:=\big(K^L_{\alpha\beta}\big)_{1\le\alpha\le M}$。

注释 2.5。以下说明适用于定义2.4。

(i) 条件 *(a)*确保第 *(b)* 部分中的积分绝对收敛 .

(ii) 条件 *(c)* 以及算子 L 的椭圆性确保（参见 [19, 定理 10.9，第363-364]页） $K^L\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)$。特别地，(2.12) 逐点成立。此外，鉴于 $P^L(x')=K^L(x',\ 1)$ 对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$，我们推得 $P^L\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$。

*(iii)*条件*(b)*等价于 $\lim_{t\to0^+}P^L_t(x')=\delta_{0'}(x')\ I_{M\times M}$in $\big[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\big]^{M\times M}$，其中 $\delta_{0'}$是原点 $0'$ 处的狄拉克分布，其质量为 $\mathbb{R}^{n-1}$。

(iv) 对于所有 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 和 $\lambda > 0$，都有 $K^L(\lambda x) = \lambda^{1-n} K^L(x)$。

椭圆边值问题在半空间中的泊松核已得到广泛研究，参见 [1], [2], [12, §10。3], [28], [29], [30] 这里记录 S. Agmon、A. Douglis 和 L. Nirenberg 所做更一般工作的一个推论，见 [2]。

定理 2.6。任意 $M \times M$ 系统 L 若具有 (1.1)-(1.2) 所示的常复系数，则存在一个泊松核 P^L（定义见 *2.4*），且它还具有如下性质：函数

$$K^L(x', t) := P^L_t(x') \quad \textit{for all} \quad (x', t) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.13}$$

对每个 $\varepsilon > 0$ 均满足 $K^L \in \big[\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n_+ \setminus B(0, \varepsilon)\big)\big]^{M\times M}$，并且具有如下性质：对于每个多重指标 $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$，都存在 $C_\alpha \in (0, \infty)$ 使得

$$\big|(\partial^\alpha K^L)(x)\big| \leq C_\alpha\, |x|^{1-n-|\alpha|}, \quad \textit{for every} \quad x \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \setminus \{0\}. \tag{2.14}$$

以下我们将把函数 K^L （定义于（2.13））称为与 L相关的 Agmon-Douglis-Nirenberg 核。

接下来，我们约定：两个函数分别为矩阵值和向量值时，它们的卷积自然地包含矩阵与向量之间的代数乘法。我们回顾的下一个结果已在 [17, 定理 3.1，第 934]页中证明。

命题 2.7。设 L 是一个 $M \times M$ 具有常复系数的系统，如（1.1）-（1.2）所示，并回忆定理 P^L 中 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 的泊松核，该核见定理 *2.6*。此外，任取一个孔径参数 $\kappa > 0$。给定一个函数

$$f \in \left[L^1\Big(\mathbb{R}^{n-1}, \frac{dx'}{1+|x'|^n}\Big)\right]^M, \tag{2.15}$$

set

$$u(x', t) := (P^L_t * f)(x'), \qquad \forall\, (x', t) \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.16}$$

那么，通过一个绝对收敛的积分，可以有意义地定义 u，

$$u \in \big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^M, \quad Lu = 0 \ \ \textit{in} \ \ \mathbb{R}^n_+, \quad u\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+} = f \ \ \textit{at} \ \mathscr{L}^{n-1}\textit{-a.e. point in} \ \ \mathbb{R}^{n-1} \tag{2.17}$$

（最后一个等式在 f的勒贝格点集合上成立），并且存在一个常数$C = C$（n、L、κ）$\in$（0，∞），使得

$$\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x') \leq C\big(\mathcal{M} f\big)(x'), \qquad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.18}$$

接下来我们记录以下结果，详细说明了如何构造二阶齐次复常系数弱椭圆系统的基本解；这是 [19, 定理 11.1，第 393–396]页的一个特例。全文采用重复指标求和约定。此外，$\mathcal{H}^{n-1}$ 表示$n-1$中的（$\mathbb{R}^n$）维豪斯多夫测度。

定理 2.8。固定 n、$M \in \mathbb{N}$，其中 $n \geq 2$，并令

$$L = \big(a^{\alpha\beta}_{rs}\partial_r\partial_s\big)_{1\leq\alpha,\beta\leq M} \tag{2.19}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个齐次 $M\times M$二阶系统，具有复常系数，并且按如下意义为弱椭圆：其 $M \times M$ 特征矩阵

$$L(\xi) := \big(a^{\alpha\beta}_{rs}\xi_r\xi_s\big)_{1\leq\alpha,\beta\leq M}, \qquad \forall\, \xi = (\xi_r)_{1\leq r\leq n} \in \mathbb{R}^n, \tag{2.20}$$

满足

$$\det\big[L(\xi)\big] \neq 0, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.21}$$

考虑矩阵值函数 $E^L = \big(E^L_{\alpha\beta}\big)_{1\le\alpha,\ \beta\le M}$，它在每个 $x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ 处定义为 *

$$E^L(x) := \begin{cases} \dfrac{\Delta_x^{(n-1)/2}}{4(2\pi\, i)^{n-1}} \left\{ \displaystyle\int_{S^{n-1}} \big|\langle x,\xi\rangle\big| \big[L(\xi)\big]^{-1} d\mathcal{H}^{\,n-1}(\xi) \right\} & \text{if } n \text{ is odd,} \\[2ex] -\dfrac{\Delta_x^{(n-2)/2}}{(2\pi\, i)^{n}} \left\{ \displaystyle\int_{S^{n-1}} \ln\big|\langle x,\xi\rangle\big| \, \big[L(\xi)\big]^{-1} d\mathcal{H}^{\,n-1}(\xi) \right\} & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{2.22}$$

关于 $\mathbb{C}^{M\times M}$值函数(2.22)，有以下性质：

(1) 对每个 $\alpha,\beta\in\{1,\dots,M\}$，有

$$\begin{aligned} &E^L_{\alpha\beta}\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})\cap L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n), \\ &E^L_{\alpha\beta}(-x) = E_{\alpha\beta}(x) \quad \textit{for all} \quad x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

事实上，每个 $E^L_{\alpha\beta}$ 都是 $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$中的实解析函数。此外，每个 $E^L_{\alpha\beta}$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的偶温和分布（通过对施瓦茨函数积分而诱导）。另外，如果 $n\ge 3$，则每个 $E^L_{\alpha\beta}$ 都是次数为 $2-n$ 的正齐次函数。

(2) 若对每个 $y\in\mathbb{R}^n$，将 δ_y 记为在 $\mathbb{R}^n$中以 y 为质量点的狄拉克δ分布，则在 $\mathbb{R}^n$ 中的温和分布意义下，有

$$L_x\big[E^L(x-y)\big] = \delta_y(x)\, I_{M\times M}, \qquad \forall\, y\in\mathbb{R}^n, \tag{2.24}$$

其中，$I_{M\times M}$ 是 $M\times M$ 单位矩阵，下标 x 表示算子 L 在(2.24) 作用于矩阵 $E^L(x-y)$ 关于变量x的每一列。

(3) 对于每个满足 $|\gamma|>0$ 的多重指标 $\gamma\in\mathbb{N}_0^n$，温和分布 $\partial^\gamma E^L$ 关于 $\mathbb{R}^n$ 是次数为 $2-n-|\gamma|$ 的正齐次分布。对于 $|\gamma|=0$，只要满足 $n\ge 3$，这一结论同样成立；也就是说，温和分布 E^L 在 $n\ge 3$ 时关于 $\mathbb{R}^n$ 是次数为 $2-n$ 的正齐次分布。最后，对应于 $n=2$ 和 $|\gamma|=0$，可以表示为

$$E^L(x) = \Phi(x) + \frac{\ln|x|}{4\pi^2}\int_{S^1}\big[L(\xi)\big]^{-1}\, d\mathcal{H}^1(\xi), \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \tag{2.25}$$

其中 $\Phi:\ \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{C}^{M\times M}$，定义为

$$\Phi(x) := \frac{1}{4\pi^2}\int_{S^1}\ln\Big|\Big\langle\frac{x}{|x|},\xi\Big\rangle\Big|\,\big[L(\xi)\big]^{-1}\, d\mathcal{H}^1(\xi), \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}, \tag{2.26}$$

是一个 $\mathscr{C}^\infty$ 类函数，并且关于 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 是次数为0 的正齐次函数。

(4) 对于 *each* $\gamma\in\mathbb{N}_0^n$ 存在有限常数 $C_\gamma>0$，使得对于每个 $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

$$\big|(\partial^\gamma E^L)(x)\big| \le \begin{cases} \dfrac{C_\gamma}{|x|^{n+|\gamma|-2}} & \textit{if either } n\ge 3,\ \textit{or } n=2 \textit{ and } |\gamma|>0, \\[2ex] C_0\big(1+\big|\ln|x|\big|\big) & \textit{whenever } n=2 \textit{ and } |\gamma|=0. \end{cases} \tag{2.27}$$

* 对每个 $m\in\mathbb{N}$，我们用 Δ_x^m 表示关于变量 x 的拉普拉斯算子的 m 次迭代

(5) 基本解 E^L 定义于 (2.22) 满足

$$\begin{aligned}&\big(E^L\big)^{\top}=E^{L^{\top}},\quad \overline{\big(E^L\big)}=E^{\overline{L}},\quad \big(E^L\big)^{*}=E^{L^{*}},\\ &\text{as well as }\ E^{\lambda L}=\lambda^{-1}E^L\ \text{ for each }\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

其中，$\top$、$\overline{\cdot}$、$*$ 分别表示转置、复共轭和复(或 *Hermitian*) 伴随。

(6) 用“帽子”表示 $\mathbb{R}^n$ (上的傅里叶变换（最初定义在施瓦茨函数上，$\widehat{\ }$随后通过对偶性扩展到缓增分布)。那么 E 是 $\mathbb{R}^n$ (上的缓增分布（若 $n\geq 3$)，则其为次数 -2 的正齐次分布），其在$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 上的限制是一个 $\mathscr{C}^\infty$类(矩阵值) 函数。事实上，

$$\widehat{E}(\xi)=\big[L(\xi)\big]^{-1}\ \text{ for every }\ \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}.\tag{2.29}$$

我们在上述定理的基础上补充几点说明。

注 2.9。 从定义容易看出，两个系统相等（作为作用于 $\mathbb{R}^n$中的分布空间上的线性映射）当且仅当它们的特征矩阵（作为定义在 $\mathbb{R}^n$上的矩阵值函数）相同；也就是说，使用（2.20）中引入的记号，

$$L_1=L_2\iff L_1(\xi)=L_2(\xi)\ \text{ for each }\ \xi\in\mathbb{R}^n.\tag{2.30}$$

或者，

$$\Big(a_{rs}^{\alpha\beta}\partial_r\partial_s\Big)_{1\leq\alpha,\beta\leq M}=\Big(\widetilde{a}_{rs}^{\alpha\beta}\partial_r\partial_s\Big)_{1\leq\alpha,\beta\leq M}\tag{2.31}$$

（作为向量分布上的映射）当且仅当

$$a_{rs}^{\alpha\beta}+a_{sr}^{\alpha\beta}=\widetilde{a}_{rs}^{\alpha\beta}+\widetilde{a}_{sr}^{\alpha\beta}\ \text{ for all }\ \alpha,\beta\in\{1,\dots,M\},\ r,s\in\{1,\dots,n\}.\tag{2.32}$$

注2.10。采用（1.34）和（2.22）中引入的记号，有

$$E^{L\circ R}=E^L\circ R\ \text{ for any unitary transformation } R \text{ in } \mathbb{R}^n.\tag{2.33}$$

事实上，这可由定义、积分在酉变换下于单位球面上的不变性（例如参见 [8], [21]），以及拉普拉斯算子在酉变换下的不变性（例如参见 [19, 练习 7.77，（7.14.3），第 319] 页）得出。因此，由（2.33）、（2.30）和（2.29）可知

$$\begin{aligned}&\text{given a unitary transformation } R \text{ in } \mathbb{R}^n, \text{ it follows that } E^L\\ &\text{is invariant under } R \text{ if and only if } L \text{ is invariant under } R.\end{aligned}\tag{2.34}$$

特别是，

$$\begin{aligned}&E^L \text{ is rotation (respectively, reflection) invariant if and}\\ &\text{only if } L \text{ is rotation (respectively, reflection) invariant.}\end{aligned}\tag{2.35}$$

接下来，我们将给出二阶椭圆系统内部估计的一个通用版本。证明见 [19, 定理 11.12，第 415]。

定理 2.11. 考虑一个满足弱椭圆性条件 $\det[L(\xi)]\neq 0$（对每个 $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$）的齐次常系数二阶系统 L。那么，对于球 $B(x,R)$ (其中 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $R>0$)内 L 的每个零解 u，若 $p\in(0,\infty)$，$\lambda\in(0,1)$,$\ell\in\mathbb{N}_0$，且 $r\in(0,R)$，则有

$$\sup_{z\in B(x,\lambda r)}|(\nabla^\ell u)(z)|\leq\frac{C}{r^\ell}\left(\fint_{B(x,r)}|u|^p\,d\mathscr{L}^n\right)^{1/p},\tag{2.36}$$

其中 $C=C(L,p,\ell,\lambda,n)>0$ 是一个有限常数。

给定 $u:\ \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}$，它在 $\mathbb{R}^n_+$ 的有界勒贝格可测子集上绝对可积，定义（在有意义时）Sobole夫迹

$$\big(\operatorname{Tr} u\big)(x') := \lim_{r\to 0^+} \fint_{B((x',0),r)\cap\mathbb{R}^n_+} u\, d\mathscr{L}^n, \qquad x'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.37}$$

于是，对于每个 $u\in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+)$，$1<p<\infty$，迹 $\operatorname{Tr} u$ 在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上几乎处处存在，且属于$B^{p,\,p}_{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$，其中，对于每个 $p\in(1,\ \infty)$ 和 $s\in(0,\ 1)$，Besov空间 $B^{p,\,p}_{s}(\mathbb{R}^{n-1})$ 定义为所有满足以下性质的可测函数 $f:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{C}$ 的集合：

$$\|f\|_{B^{p,p}_s(\mathbb{R}^{n-1})} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} + \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|f(x')-f(y')|^p}{|x'-y'|^{n-1+sp}}\,dx'dy'\Big)^{1/p} < +\infty. \tag{2.38}$$

事实上，对于每个 $p\in(1,\ \infty)$，算子

$$\operatorname{Tr} : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow B^{p,p}_{1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{2.39}$$

是定义良好的线性有界算子，并且有一个线性有界的右逆。下面记录的命题是 [4, 定理 5.6，第 4372]页 中证明的一个更一般结果的特例。

命题 2.12。对于每个 $u\in W^{1,\,p}(\mathbb{R}^n_+)$，若 $p\in(1、\ \infty)$，且对于每个 $M>1$，有

$$\big(\operatorname{Tr} u\big)(x') = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B((x',r),\,r/M)} u\, d\mathscr{L}^n \quad at\ a.e.\ \ x'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.40}$$

下述结果可见于 [18, 推论2.4]，，它是由 [2]中得到的先验正则性估计以及Sobolev嵌入所推出的结论。

命题 2.13. 设 L 是一个 $M\times M$ 系统，其常复系数如 (1.1)-(1.2)。考虑一个函数 $u:\ \mathbb{R}^n_+\to\mathbb{C}^M$，它具有如下性质：$u\in\big[W^{1,2}\big(\mathbb{R}^n_+\cap B(0,R)\big)\big]^M$对每个 $R>0$，并且

$$\begin{cases} Lu=0 & in\ \ \mathbb{R}^n_+,\\ \operatorname{Tr} u = f & on\ \ \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{2.41}$$

对某个$f\in\big[\mathscr{C}^{k+1}{}_{\rm loc}\,(\mathbb{R}^{n-1})\big]^M$，其中 $k\in\mathbb{N}$。则对任意 $z\in\mathbb{R}^n_+$ 与 $\rho>0$，

$$\sup_{\mathbb{R}^n_+\cap B(z,\rho)} |\nabla^k u| \le C\Big(\rho^{-k}\sup_{\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho)}|u| + \sum_{\ell=0}^{k+1}\rho^{\ell-k}\sup_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho)}|\nabla^\ell f|\Big), \tag{2.42}$$

其中 $C\in(0,\infty)$ 是一个与 ρ、z、u 及 f 无关的常数。

下面我们记录一个在 [20], 中得到的散度定理版本，它尤其适用于我们所需的目的。陈述该定理需要一些预备知识，我们先简要介绍。记 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)$为 $\mathbb{R}^n_+$ 中由任意阶导数在紧集上一致收敛的拓扑赋予的光滑函数空间。其对偶空间 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)$可识别为 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)$中由紧集支撑的分布所构成的子空间。因此，

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+) \ \text{ and } \ L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\hookrightarrow\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.43}$$

对于每个紧集 $K\subset\mathbb{R}^n_+$，定义 $\mathcal{E}'_K(\mathbb{R}^n_+) := \big\{u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+) : \operatorname{supp} u\subset K\big\}$ 并考虑

$$\mathcal{E}'_K(\mathbb{R}^n_+)+L^1(\mathbb{R}^n_+) := \big\{u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+):\ \exists\, v_1\in\mathcal{E}'_K(\mathbb{R}^n_+)\ \text{ and }\ \exists\, v_2\in L^1(\mathbb{R}^n_+)$$
$$\text{使得}\ \ u=v_1+v_2 \text{ 属于 } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)\big\}. \tag{2.44}$$

此外，引入 $\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+) := \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$，并令 $\big(\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big)^*$ 表示其代数对偶。再者，我们令 ${}_{(\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+))^*}\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+)}$ 表示这些空间之间的自然对偶配对。值得注意的是，对于每个紧集 $K \subset \mathbb{R}^n_+$，有

$$\mathcal{E}'_K(\mathbb{R}^n_+) + L^1(\mathbb{R}^n_+) \subset \big(\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big)^*. \tag{2.45}$$

根据 [20, 推论 1.4.2（第 40–41] 页）最后一部分，我们有如下结果：

定理 2.14。假设 $K \subset \mathbb{R}^n_+$ 是一个紧集，并且 $\vec{F} \in \big[L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\big]^n$ 是满足以下条件的向量场(其中孔径参数为 $\kappa > 0$)：

(a) 散度 $\vec{F} \in \mathcal{E}'_K(\mathbb{R}^n_+) + L^1(\mathbb{R}^n_+)$，其中散度取分布意义下的定义 ;

(b) 非切向极大函数 $\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}\vec{F}$ 属于 $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$;

(c) the nontangential boundary trace $\vec{F}\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}$ *exists* (*in* $\mathbb{C}^n$) *at* $\mathscr{L}^{n-1}$*-a.e. point in* $\mathbb{R}^{n-1}$.

那么，令 $e_n := (0, \ldots\ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$，并用“点”表示 $\mathbb{R}^n$中的标准内积，

$${}_{(\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+))^*}\big\langle \operatorname{div}\vec{F}, 1\big\rangle_{\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+)} = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e_n \cdot \big(\vec{F}\,\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\big)\, d\mathscr{L}^{n-1}. \tag{2.46}$$

接着，定理 2.14被用来证明一个分部积分公式，而该公式是证明定理 1.2的关键技术步骤。

引理 2.15。设 L 是一个 $M\times M$ 常系数复系数系统，如 (1.1) 和(1.3)中所述，并固定一个孔径参数 $\kappa > 0$。取两个点 $x_j^\star \in \mathbb{R}^n_+$ 和两个半径 $r_j \in (0, \infty)$，$j \in \{1,2\}$使得

$$r_j < \operatorname{dist}(x_j^\star, \partial\mathbb{R}^n_+)\frac{\kappa}{\sqrt{1+\kappa^2}} \quad \textit{for} \quad j\in\{1,2\}, \quad \textit{and} \quad |x_1^\star - x_2^\star| > r_1 + r_2, \tag{2.47}$$

那么将 $K_j := B(x_j^\star, \overline{r_j)}$ 记作 $j \in \{1,2\}$。

接下来，考虑两个向量值函数

$$u = \big(u_\alpha\big)_{1\le\alpha\le M} \in \big[W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M, \quad v = \big(v_\alpha\big)_{1\le\alpha\le M} \in \big[W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M \tag{2.48}$$

满足

$$\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2} v,\ \mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v) \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad L^\top v \in \big[\mathcal{E}'_{K_2}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M, \tag{2.49}$$

$$v\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} = 0 \ \ \textit{a.e. in} \ \ \mathbb{R}^{n-1}, \quad \big(\nabla v\big)\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \ \ \textit{exists a.e. in} \ \ \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.50}$$

$$Lu \in \big[\mathcal{E}'_{K_1}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M, \quad u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \ \ \textit{exists a.e. in} \ \ \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.51}$$

$$\textit{and} \ \ \big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1} u\big)\cdot\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v)\big) \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.52}$$

最后，选取两个标量函数，

$$\begin{aligned} &\phi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+) \ \ \textit{such that}\ \phi\equiv 1 \ \textit{near}\ K_1 \ \textit{and}\ \phi\equiv 0 \ \textit{near}\ K_2,\\ &\psi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n_+) \ \ \textit{such that}\ \psi\equiv 1 \ \textit{near}\ K_2 \ \textit{and}\ \psi\equiv 0 \ \textit{near}\ K_1. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Then

$$\begin{aligned} {}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle Lu, \phi v\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M} &= {}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle L^\top v, \psi u\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(u_\alpha\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big) a_{nn}^{\beta\alpha}\Big[\big(\partial_n v_\beta\big)\Big]\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} d\mathscr{L}^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

证明。注意， $L^\top$ 的椭圆性（由 L 的椭圆性推出）以及 $v\in\big[L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M$ 满足 $L^\top v\in\big[\mathcal{E}'_{K_2}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M$ 这一事实意味着

$$v\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+\setminus K_2)\big]^M\quad\text{and}\quad L^\top v=0\quad\text{pointwise in}\quad\mathbb{R}^n_+\setminus K_2. \tag{2.55}$$

同样， u 上的条件给出

$$u\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+\setminus K_1)\big]^M\quad\text{and}\quad Lu=0\quad\text{pointwise in}\quad\mathbb{R}^n_+\setminus K_1. \tag{2.56}$$

我们首先在附加假设2.54下建立公式（

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}v\big)\cdot\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1}(\nabla u)\big)\in L^1(\mathbb{R}^{n-1})\quad\text{and}\quad(\nabla u)\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\quad\text{exists a.e. in}\quad\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.57}$$

假设情况确实如此，定义

$$\vec{F}:=\Big(v_\alpha\,a^{\alpha\beta}_{jk}\,\partial_k u_\beta-u_\alpha a^{\beta\alpha}_{kj}\partial_k v_\beta\Big)_{1\le j\le n}\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^n_+. \tag{2.58}$$

于是（2.58）意味着

$$\big|\vec{F}\big|\le C\big(|v||\nabla u|+|u|\big|\nabla v\big|\big)\quad\text{a.e. in}\quad\mathbb{R}^n_+. \tag{2.59}$$

注意， $|v|$ 局部绝对可积（由（2.48）可知），而 $|\nabla u|$ 在 K_2 的某个邻域内有界（由（2.56）以及 $K_1\cap K_2=\varnothing$这一事实可知），因此乘积 $|v||\nabla u|$ 在 K_2的某个邻域内绝对可积。远离 K_2 时，有 $|v|$ 局部有界（由（2.55）可知），而 $|\nabla u|$ 局部可积（由（2.48）可知）。因此，乘积 $|v||\nabla u|$在远离 K_2处也局部绝对可积。综上， $|v||\nabla u|\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ 。同理，还可得到 $|u||\nabla v|\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ ，最终得到：

$$\vec{F}\in\big[L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)\big]^n. \tag{2.60}$$

特别是，在 $\mathbb{R}^n_+$ 中以分布的意义考虑 $\mathrm{div}F$ 是有意义的。事实上，直接计算可得

$$\mathrm{div}\vec{F}=-u_\alpha\,(L^\top v)_\alpha+v_\alpha\,(Lu)_\alpha\quad\text{in}\quad\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.61}$$

因此，若 $K_\star:=K_1\cup K_2$ 则 $K_\star$ 是 $\mathbb{R}^n_+$ 的紧子集；并且由（2.61）可见，结合（2.49）中的最后一个隶属关系、（2.51）中的隶属关系以及（2.55）—（2.56），我们有

$$\mathrm{div}\vec{F}\in\mathcal{E}'_{K_\star}(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.62}$$

此外，（2.59）给出

$$\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_\star}\vec{F}\le C\Big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}v\cdot\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1}(\nabla u)+\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1}u\cdot\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v)\Big)\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.63}$$

因此，由（2.63）、（2.57）中的第一个工作假设以及（2.52），可得（还需注意，此时非切向极大函数是下半连续的，因而是可测的）

$$\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_\star}\vec{F}\in L^1(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.64}$$

最后，由（2.58）、（2.50）、（2.57）中的第二个工作假设以及（2.51）中的中间条件可知，$\vec{F}\,\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}$ 几乎处处存在于 $\mathbb{R}^{n-1}$ ，事实上，

$$\vec{F}\,\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=-\Big(\Big(u_\alpha\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)a^{\beta\alpha}_{kj}\Big(\big(\partial_k v_\beta\big)\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)_{1\le j\le n}\quad\text{a.e. on}\quad\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.65}$$

于是定理 2.14 适用，并根据（2.61）和（2.65），对于任意给定的两个函数 ψ、ϕ （如（2.53）中所述），可得：

$$-\,{}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle L^\top v,\psi u\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}+{}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle Lu\,,\,\phi\,v\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}$$

$$= {}_{(\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+))^*}\big\langle \mathrm{div}\vec{F}, 1\big\rangle_{\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+)} = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e_n\cdot\big(\vec{F}\,\big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)\,d\mathscr{L}^{n-1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(u_\alpha\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big) a^{\beta\alpha}_{kn}\Big[\big(\partial_k v_\beta\big)\Big]\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\,d\mathscr{L}^{n-1}. \tag{2.66}$$

在此阶段，我们断言

$$\begin{aligned}&\Big[\big(\partial_k v_\beta\big)\Big]\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+} = 0 \quad \text{a.e. on } \partial\mathbb{R}^n_+\equiv\mathbb{R}^{n-1},\\ &\forall\, k\in\{1,\dots,n-1\} \text{ and } \forall\,\beta\in\{1,\dots,M\}.\end{aligned} \tag{2.67}$$

为证明这一点，固定 $k\in\{1,\dots,n-1\}$ 以及 $\beta\in\{1,\dots,M\}$，并任取一个函数

$$\varphi\in\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n) \text{ such that } K_2\cap\mathrm{supp}\,\varphi=\emptyset. \tag{2.68}$$

接下来，考虑向量场

$$\vec{H} := \Big(\big(\partial_k v_\beta\big)\varphi + v_\beta\partial_k\varphi\Big)e_n - \Big(\big(\partial_n v_\beta\big)\varphi + v_\beta\partial_n\varphi\Big)e_k \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+. \tag{2.69}$$

注意

$$\vec{H}\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^n \text{ and } \mathrm{div}\vec{H}=0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+), \tag{2.70}$$

根据（2.69）、（2.68）和（2.55）。此外，由于 $\mathcal{N}_\kappa\varphi$，$\mathcal{N}_\kappa(\nabla\varphi)$ 是定义在 $\mathbb{R}^{n-1}$上的有界紧支集函数，我们有

$$\mathcal{N}_\kappa\vec{H}\in L^1(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{2.71}$$

根据（2.69）、（2.68）和（2.49）。此外，由（2.50）可知，

$$\vec{H}\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+} = \big(\varphi|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)\Big[\big(\partial_k v_\beta\big)\Big]\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+} e_n - \big(\varphi|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)\Big[\big(\partial_n v_\beta\big)\Big]\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+} e_k, \tag{2.72}$$

在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上几乎处处成立。鉴于此，并记住 $k\in\{1,\dots,n-1\}$，因此我们得到

$$e_n\cdot\Big(\vec{H}\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big) = \big(\varphi|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)\Big[\big(\partial_k v_\beta\big)\Big]\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+} \quad \text{a.e. in } \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.73}$$

综上，(2.70)-(2.72) 确保定理2.14适用于向量场 $\vec{H}$。根据 (2.70) 中的第二个条件和 (2.73)，我们因此可以写出

$$0 = {}_{(\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+))^*}\big\langle \mathrm{div}\vec{H}, 1\big\rangle_{\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n_+)} = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e_n\cdot\big(\vec{H}\,\big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)\,d\mathscr{L}^{n-1}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(\varphi|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)\Big[\big(\partial_k v_\beta\big)\Big]\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\,d\mathscr{L}^{n-1}. \tag{2.74}$$

另一方面，

$$\Big\{\varphi|_{\partial\mathbb{R}^n_+} : \varphi\in\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n) \text{ such that } K_2\cap\mathrm{supp}\,\varphi=\varnothing\Big\} = \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{n-1}) \tag{2.75}$$

而由 (2.49)-(2.50) 可得

$$\Big[\big(\partial_k v_\beta\big)\Big]\Big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.76}$$

综上，2.76）、（2.74）和（2.75）最终证明了 $\big[\big(\partial_k v_\beta\big)\big]\big|^{\kappa-\mathrm{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$上几乎处处成立，从而完成了对（2.67）中所述断言的论证。反过来，（2.66）和（2.67）在附加假设（2.57）下证明了（2.54）。

为免除此项（2.57），固定 ϕ，ψ 如（2.53）所示。对每个 $\varepsilon>0$ 定义 $u^\varepsilon=(u_\alpha^\varepsilon)_{1\le\alpha\le M}$ 为

$$u^\varepsilon(x):=u(x+\varepsilon e_n),\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n_+. \tag{2.77}$$

那么，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，$u^\varepsilon\in\big[W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M$ 和 u^ε 可延拓为 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 两侧邻域内的函数。特别地，$u^\varepsilon\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}$ 和 $(\nabla u^\varepsilon)\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中几乎处处存在。此外，如果 $0<\varepsilon<\operatorname{dist}(K_1,\partial\mathbb{R}^n_+)$，则可知 $K_1-\varepsilon e_n$ 是 $\mathbb{R}^n_+$ 的紧子集，且 $Lu^\varepsilon\in\big[\mathcal{E}'_{K_1-\varepsilon e_n}(\mathbb{R}^n_+)\big]^M$。

接下来，固定满足以下条件的 $\kappa_o\in(0,\kappa)$：

$$r_j<\operatorname{dist}(x_j^\star,\partial\mathbb{R}^n_+)\frac{\kappa_o}{\sqrt{1+\kappa_o^2}}\quad\text{for}\quad j\in\{1,2\}. \tag{2.78}$$

现在，我们选择具有如下性质的 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}\equiv\partial\mathbb{R}^n_+$：$\big(v\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)(x')=0$。我们声称

$$|v(y)|\le Cy_n\cdot\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v)\big)(x')\quad\text{for each}\quad y=(y',y_n)\in\Gamma_{\kappa_o}(x')\setminus K_2. \tag{2.79}$$

为证明这一点，令 y 如（2.79）所述，并选取一条可求长曲线 $\gamma:\,[0,1]\to\mathbb{R}^n_+$ 连接 $\overline{(x',\,0)}$ 与 y，其长度为 $\le Cy_n$，且满足 $\gamma((0,\,1))\subseteq\Gamma_{\kappa_o}(x')\setminus K_2$。于是，对于某个常数$C\in(0,\,\infty)$，它与 x' 和 y无关，我们可以估计

$$\begin{aligned}
|v(y)|&=\Big|v(y)-\big(v\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\big)(x')\Big|=\Big|\int_0^1\frac{d}{dt}[v(\gamma(t))]\,dt\Big|\\
&=\Big|\int_0^1(\nabla v)(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\Big|\le\Big(\sup_{\xi\in\gamma((0,1))}|(\nabla v)(\xi)|\Big)\int_0^1|\gamma'(t)|\,dt\\
&\le Cy_n\cdot\big(\mathcal{N}_{\kappa_o}^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v)\big)(x')\le Cy_n\cdot\big(\mathcal{N}_{\kappa}^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v)\big)(x'),
\end{aligned}\tag{2.80}$$

利用微积分基本定理、链式法则和（2.4）。由此得证（2.79）。

在证明余下部分中，假设参数 $\varepsilon>0$ 充分小，例如$\varepsilon<\frac12\operatorname{dist}(K_1,\,\partial\mathbb{R}^n_+)$，并定义

$$K_1^\varepsilon:=\{z\in\mathbb{R}^n:\operatorname{dist}(z,K_1-\varepsilon e_n)\le\varepsilon\}. \tag{2.81}$$

这是 $\mathbb{R}^n_+$ 的一个紧子集。接下来，选取一个充分小的参数 $a\in(0,\,1)$。具体而言，先取一个满足下式的参数 a

$$0<a<\frac{\kappa-\kappa_o}{1+\kappa} \tag{2.82}$$

并且取得足够小，使得

$$B(y,a\cdot y_n)\cap(K_1-\varepsilon e_n)=\varnothing\quad\text{for each}\quad y\in\mathbb{R}^n_+\setminus K_1^\varepsilon. \tag{2.83}$$

为说明如何做到这一点，取 $R:=2\sup\{z_n:\,z=(z',z_n)\in K_1-\varepsilon e_n\}$，然后取$a<\min\{1/2\,,\,\varepsilon/R\}$。任取一点 $y=(y',y_n)\in\mathbb{R}^n_+\setminus K_1^\varepsilon$。一方面，若$y_n\ge R$，则 $B(y,a\cdot y_n)$ 位于条带 $\{z=(z',z_n)\in\mathbb{R}^n_+:\,z_n<(1-a)R\}$ 上方，而后一个条带包含集合 $K_1-\varepsilon e_n$。因此，在这种情况下，（2.83）中的不相交条件成立。另一方面，若 $y_n<R$，则 $a\cdot y_n<a\cdot R<\varepsilon$；并且由于 $B(y,\varepsilon)$ 与$K_1-\varepsilon e_n$ 不相交（因为 $\operatorname{dist}(y,K_1-\varepsilon e_n)>\varepsilon$，这是由于 $y\in\mathbb{R}^n_+\setminus K_1^\varepsilon$），此时（2.83）中的不相交条件也成立。

选取 a 如（2.82）所示，使得（2.83）成立后，我们现在固定任意一点 $y\in\Gamma_{\kappa_o}(x')\setminus K_1^\varepsilon$。注意，若有 $z=(z',z_n)\in B(y,a\cdot y_n)$，则意味着

$$y_n\le z_n+|z-y|<z_n+a\cdot y_n\Longrightarrow y_n<(1-a)^{-1}z_n, \tag{2.84}$$

考虑到 y当前所在的位置，我们可以由此得出

$$|z'-x'|\leq|z'-y'|+|y'-x'|\leq|z-y|+\kappa_o\cdot y_n<a\cdot y_n+\kappa_o\cdot y_n$$

$$=(\kappa_o+a)y_n<\frac{\kappa_o+a}{1-a}z_n<\kappa z_n, \tag{2.85}$$

其中，最后一个不等式由2.82保证。由（2.85）可知 $z\in\Gamma_\kappa(x')$ 。结合（2.83），可证明

$$B(y,a\cdot y_n)\subseteq\Gamma_\kappa(x')\setminus(K_1-\varepsilon e_n)\ \text{ for each }\ y\in\Gamma_{\kappa_o}(x')\setminus K_1^\varepsilon. \tag{2.86}$$

利用函数 u^ε 的内部估计（参见定理2.11），我们便可写出

$$\begin{aligned}|(\nabla u^\varepsilon)(y)|&\leq\frac{C}{y_n}\fint_{B(y,a\cdot y_n)}|u^\varepsilon(z)|\,dz\\&\leq Cy_n^{-1}\cdot\sup_{z\in\Gamma_\kappa(x')\setminus(K_1-\varepsilon e_n)}|u^\varepsilon(z)|\\&\leq Cy_n^{-1}\cdot\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus(K_1-\varepsilon e_n)}u^\varepsilon\big)(x')\\&\leq Cy_n^{-1}\cdot\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1}u\big)(x'),\end{aligned} \tag{2.87}$$

其中 $C=C(L,\ n,\ a)\ \in(0,\ \infty)$。将（2.79）与（2.87）结合，便得到

$$\big(\mathcal{N}_{\kappa_o}^{\mathbb{R}^n_+\setminus(K_1^\varepsilon\cup K_2)}(|v||\nabla u^\varepsilon|)\big)(x')\leq C\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v)\big)(x')\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1}u\big)(x'). \tag{2.88}$$

此外，显然

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus(K_1^\varepsilon\cup K_2)}(|\nabla v||u^\varepsilon|)\big)(x')\leq C\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_2}(\nabla v)\big)(x')\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1}u\big)(x'). \tag{2.89}$$

结合（2.52），最终可知，若现在定义

$$\vec{F}^\varepsilon:=\Big(v_\alpha\,a_{jk}^{\alpha\beta}\,\partial_k u_\beta^\varepsilon-u_\alpha^\varepsilon a_{kj}^{\beta\alpha}\partial_k v_\beta\Big)_{1\leq j\leq n}\ \text{ in }\ \mathbb{R}^n_+, \tag{2.90}$$

then

$$\mathcal{N}_{\kappa_o}^{\mathbb{R}^n_+\setminus(K_1^\varepsilon\cup K_2)}\vec{F}^\varepsilon\in L^1(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.91}$$

有了这一点，证明第一部分中依赖定理 2.14 的同类论证（现在以 $\vec{F}^\varepsilon$ 替代 $\vec{F}$，以 $K_1^\varepsilon\cup K_2$ 替代 $K_\star$，并取孔径参数 κ_o）可得

$$\begin{aligned}{}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle Lu^\varepsilon,\phi v\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}&={}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle L^\top v,\psi u^\varepsilon\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(u_\alpha^\varepsilon\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big)a_{nn}^{\beta\alpha}\Big[\big(\partial_n v_\beta\big)\Big]\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\,d\mathscr{L}^{n-1}.\end{aligned} \tag{2.92}$$

还需消去 $\varepsilon_\circ$ 为此，注意到

$${}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle Lu^\varepsilon,\phi v\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}={}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle Lu\,,\,\phi(\cdot-\varepsilon e_n)v(\cdot-\varepsilon e_n)\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}, \tag{2.93}$$

并且（由所涉及函数的光滑性可知）

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\big[\phi(\cdot-\varepsilon e_n)v(\cdot-\varepsilon e_n)\big]=\phi\,v\ \text{ and }\ \lim_{\varepsilon\to0^+}\big[\psi u^\varepsilon\big]=\psi\,u\ \text{ in }\ \mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+). \tag{2.94}$$

因此，

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}{}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle Lu^\varepsilon,\phi v\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}={}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle Lu,\phi v\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M} \tag{2.95}$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}{}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle L^\top v,\psi u^\varepsilon\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}={}_{[\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)]^M}\big\langle L^\top v,\psi u\big\rangle_{[\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)]^M}. \tag{2.96}$$

此外，我们有 $|u(\cdot+\varepsilon e_n)| \le \mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K_1} u$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$上，并且对于每个 $\alpha \in \{1,\dots,M\}$，(2.51) 中的最后一个条件意味着

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} u_\alpha(\cdot+\varepsilon e_n) = u_\alpha\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \quad \text{a.e. in} \quad \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.97}$$

因此，令 $\varepsilon \to 0^+$ 代入（2.92），结合（2.93）-（2.97）、（2.52）以及勒贝格控制收敛定理，即可得到公式（2.54）。□

我们通过证明一个正则性结果来结束本节，该结果将在定理1.2的证明中发挥重要作用。

引理 2.16。假设 L 是一个 $M\times M$ 系统，其具有常复系数，如(1.1)-(1.2)所示，并回顾与 K^L 相关联的 Agmon-Douglis-Nirenberg 核： $\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{C}^{M\times M}$ 如定理 L *2.6*中所示。另假设 $\psi \in \big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})\big]^M$ 是一个取值于 $\mathbb{C}^M$的函数，且满足以下性质：存在 $N>-1$，使得对每个多重指标 $\gamma' \in \mathbb{N}_0^{n-1}$，都可以找到$C_{\gamma'} \in (0,\ \infty)$，使得

$$\big|(\partial^{\gamma'}\psi)(z')\big| \le C_{\gamma'}\big[|z'|+1\big]^{-N-|\gamma'|}, \qquad \forall\, z'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.98}$$

最后，定义

$$u(x',t) := (P_t^L * \psi)(x') = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K^L(x'-y',t)\psi(y')\,dy', \qquad \forall\,(x',t)\in\mathbb{R}^n_+. \tag{2.99}$$

Then

$$u \in \big[\mathscr{C}^\infty\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\big)\big]^M. \tag{2.100}$$

证明。 按陈述固定 ψ，并选取某个标量值函数 $\theta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，使得

$$\theta \equiv 1 \ \text{ on } \ B_{n-1}(0',1) \ \text{ and } \ \operatorname{supp}\theta \subseteq B_{n-1}(0',2). \tag{2.101}$$

对每个 $R\in[1,\infty)$，通过令每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$满足 $\theta_R(x') := \theta(x'/R)$来定义 $\theta_R:\ \mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{C}$。因此，

$$\lim_{R\to\infty}\theta_R(x') = 1 \quad \text{for each} \quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.102}$$

接下来，对每个 $R\in[1,\infty)$引入 $\psi_R := \theta_R\psi$，并注意到

$$\psi_R \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{2.103}$$

此外，对每个满足 $|\alpha'|>0$ 的 $\alpha'\in\mathbb{N}_0^{n-1}$，我们有

$$\begin{aligned}(\partial^{\alpha'}\psi_R)(x') &= (\partial^{\alpha'}\psi)(x')\theta_R(x') \\ &\quad + \sum_{\substack{\beta'+\gamma'=\alpha'\\ |\beta'|>0}} \frac{\alpha'!}{\beta'!\gamma'!} R^{-|\beta'|}(\partial^{\beta'}\theta)(x'/R)(\partial^{\gamma'}\psi)(x'), \qquad \forall\, x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned} \tag{2.104}$$

结合（2.102），这立即意味着对于每个 $\alpha'\in\mathbb{N}_0^{n-1}$，

$$\lim_{R\to\infty}(\partial^{\alpha'}\psi_R)(x') = (\partial^{\alpha'}\psi)(x'), \qquad \forall\, x'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.105}$$

接下来，注意到 $R\le|x'|\le 2R$ 只要 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 和 $\beta'\in\mathbb{N}_0^{n-1}$满足 $|\beta'|>0$且 $(\partial^{\beta'}\theta)(x'/R)\neq 0$。根据这一点，利用 (2.104)、(2.98以及 θ的性质，我们推得以下衰减条件成立：

$$\begin{aligned}&\forall\,\alpha'\in\mathbb{N}_0^{n-1} \text{ there exists } C_{\theta,\alpha'}\in(0,\infty) \text{ so that for each } R\in[1,\infty)\\ &\qquad \big|(\partial^{\alpha'}\psi_R)(x')\big| \le C_{\theta,\alpha'}\big[|x'|+1\big]^{-N-|\alpha'|}, \qquad \forall\, x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned} \tag{2.106}$$

接下来，我们需要一个结构性结果，该结果证明见 [2, 第 56–57 页，以及第 58] 页上的引理 4.1（另见 [1, 第 636–637]页），其内容是：对每个

$$q \in \mathbb{N} \text{ with the same parity as } n \tag{2.107}$$

存在一个取值于 $\mathbb{C}^{M\times M}$ 的函数

$$K_q \in \big[\mathscr{C}^{q-1}\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\big) \cap \mathscr{C}^\infty\big(\overline{\mathbb{R}^n_+} \setminus B(0,\varepsilon)\big)\big]^{M\times M}, \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \tag{2.108}$$

（事实上，$K_q \in \big[\mathscr{C}^q\big(\mathbb{R}^n_+\big)\big]^{M\times M}$ 若 $n \geq 3$），具有如下性质：对于每个 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，都存在 $C_\alpha \in (0,\infty)$，使得

$$\big|\big(\partial^\alpha K_q\big)(x)\big| \leq C_\alpha |x|^{q-|\alpha|}\big(1 + \big|\ln|x|\big|\big), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.109}$$

（此外，若 $|\alpha| \geq q+1$ 则 $\partial^\alpha K_q$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中是次数为 $q-|\alpha|$ 的正齐次函数，且（2.109）中的对数项可以省略），并且满足

$$K^L(x',t) = \Delta_{x'}^{(n+q)/2}\big[K_q(x',t)\big], \qquad \forall\,(x',t) \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2.110}$$

其中 $\Delta_{x'}$ 表示关于变量 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 的（$n-1$）维拉普拉斯算子 .

鉴于此，若 u 按照（2.99）定义为某个 $\mathbb{C}^M$值函数 $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，且满足（2.98），那么对于每个 q 如（2.107）所示，并对每个固定的（x',t） $\in \mathbb{R}^n_+$，我们可以写成

$$\begin{aligned}
u(x',t) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K^L(x'-y',t)\psi(y')\,dy' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_{x'}^{(n+q)/2}\big[K_q(x'-y',t)\big]\psi(y')\,dy' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_{y'}^{(n+q)/2}\big[K_q(x'-y',t)\big]\psi(y')\,dy' \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_{y'}^{(n+q)/2}\big[K_q(x'-y',t)\big]\psi_R(y')\,dy' \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_q(x'-y',t)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi_R(y')]\,dy' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_q(x'-y',t)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi(y')]\,dy',
\end{aligned} \tag{2.111}$$

由（2.110）、两次使用勒贝格控制收敛定理（该定理又基于（2.105）–（2.106）和（2.109））以及分部积分（依赖于（2.103）和（2.108））。因此，对于任意满足（ q 2.107）的，都有

$$u(x',t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_q(x'-y',t)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi(y')]\,dy', \qquad \forall\,(x',t) \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.112}$$

对（2.112）在积分号下求导（使用（2.109）、（2.98）以及勒贝格控制收敛定理），即可得出在每个点（x'， t）处 $\in \mathbb{R}^n_+$，对于任意满足（ q2.107）的，都有

$$(\partial^\alpha u)(x',t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\partial^\alpha K_q)(x'-y',t)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi(y')]\,dy', \qquad \forall\,\alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{2.113}$$

这证明了 $u \in \big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^M$，并给出了一个有用的导数积分表示公式。

关于（2.100）中论断的全部内容，我们首先将证明

$$\partial^\alpha u \text{ extends continuously to } \overline{\mathbb{R}^n_+} \text{ for each } \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{2.114}$$

为此，任取 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，并考虑 $\partial^\alpha u$ 在$\mathbb{R}^n_+$ 中的表示式，该表示式由（2.113）给出。现在我们进一步假设参数 q满足 $q \geq |\alpha| + 1$。特别地，这保证了

$$\partial^\alpha K_q \in \big[\mathscr{C}^0\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\big)\big]^{M\times M} \tag{2.115}$$

由 (2.108)。考虑极限的存在性问题

$$\lim_{\mathbb{R}^n_+ \ni (x',t)\to(z',0)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\partial^\alpha K_q)(x'-y',t)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi(y')]\,dy', \tag{2.116}$$

其中 $z' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 是任意固定点。对此，注意到 (2.109) 表明，对于每个 $\varepsilon \in (0, N+1)$，存在一个有限常数 $C = C(z',\varepsilon) > 0$，使得对于每个 $y' \in \mathbb{R}^{n-1}$，都有

$$\sup_{(x',t)\in B((z',0),1)\cap\mathbb{R}^n_+} \big|(\partial^\alpha K_q)(x'-y',t)\big| \leq C\big[|y'|+1\big]^{q-|\alpha|+\varepsilon}. \tag{2.117}$$

综合 (2.115)、(2.117)、(2.98) 以及勒贝格控制收敛定理可得，一方面，

$$\begin{aligned}&\lim_{\mathbb{R}^n_+ \ni (x',t)\to(z',0)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\partial^\alpha K_q)(x'-y',t)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi(y')]\,dy' \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\partial^\alpha K_q)(z'-y',0)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi(y')]\,dy',\end{aligned} \tag{2.118}$$

其中最后一个积分绝对收敛。此分析证明，对于任意 $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$，极限 $\lim_{\mathbb{R}^n_+ \ni (x',t)\to(z',0)}(\partial^\alpha u)(x',t)$ 对每个 $z' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 都存在且有限。此外，同样的

分析方法也可用于证明该函数

$$\Psi(z') := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\partial^\alpha K_q)(z'-y',0)\Delta_{y'}^{(n+q)/2}[\psi(y')]\,dy', \qquad z' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{2.119}$$

在 $\mathbb{R}^{n-1}$上连续。因此，(2.114) 得证。

引理证明的最后一步，是说明 (2.114) 蕴含 (2.100)。具体而言，由 (2.114) 可推出，对于每个 $z' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 和 $r > 0$，u 在 $B_r^+(z') := B\big((z',0)\ r\big) \cap \mathbb{R}^n_+$ 上的限制属于 Sobole夫空间 $\big[W^{k,p}\big(B_r^+(z')\big)\big]^M$，对于每个指数 $p \in (1,\infty)$ 及 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。利用例如 Stein通用延拓算子以及标准的索博列夫嵌入结果，可以找到 $U_{z',r} \in \big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\big]^M$，使得 $U_{z',r}\big|_{B_r^+(z')} = u\big|_{B_r^+(z')}$。最后，通过光滑单位分解将这些局部延拓拼接起来，即可得到 u 到 $\mathbb{R}^n_+$ 某个邻域的 $\mathscr{C}^\infty$ 延拓。□

3. Proofs of the Main Results

首先，我们着手给出定理1.2的证明。

定理*1.2*的证明。回顾定理 2.6 可知，L 有一个泊松核 P^L（按照定义 2.4的意义），它满足 $P^L(x',1) = K^L(x',1)$ 对每个 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$（参见备注*(ii)* 中的第2.5项）。特别地（参见定义*(c)*中的第 2.4项），

$$P_t^L(x'-z') = K^L(x'-z',t), \qquad \forall\, x',z' \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \forall\, t>0. \tag{3.1}$$

在整个证明过程中，给定任意一个点 $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n_+$ 我们将用 y表示其关于 $\partial\mathbb{R}^n_+$的反射，即 $y = (y_1,\dots,y_{n-1},-y_n) \in \mathbb{R}^n_-$: $= \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$。此外，$E_L$ 表示定理 L2.8中的 L基本解。

我们的策略是使用泊松核 P^L 来构造一个特定的格林函数。可以看出，与定义 1.1中规定的性质相比，该格林函数具有显著更强的性质。随后，我们将利用这个特殊的格林函数证明，按照定义 1.1的意义，格林函数恰好只有一个。证明分为一系列步骤，首先：

步骤 1： 对于每个 $y\in\mathbb{R}^n_+$ 以及每个 $x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{y\}$，定义

$$G^L(x,y):=E^L(x-y)-E^L(x-\underline{y})-P^L_t*\Big(\big[E^L(\cdot-y)-E^L(\cdot-\underline{y})\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x'),\tag{3.2}$$

其中，与 P^L_t的卷积作用于圆括号内矩阵的每一列。然后 $G^L(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus$对角 $\to\mathbb{C}^{M\times M}$ 是 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ (按照定义 *1.1*)的意义下的格林函数，并且还满足

$$G^L(\cdot\,,y)\in\big[W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}\quad \textit{for each}\quad y\in\mathbb{R}^n_+,\tag{3.3}$$

and

$$\begin{aligned}&{}^{\circ}\text{对于每个点 } y\in\mathbb{R}^n_+,\ \text{以及每个满足 } y\in K \text{ 的紧集 } K\subset\mathbb{R}^n_+,\\ &\textit{and each } \kappa>0,\ \textit{there exists a constant } C_{y,K}\in(0,\infty)\ \textit{such that}\\ &\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}G^L(\cdot,y)\big)(x')\le C_{y,K}\Big(\frac{1+\log_+|x'|}{1+|x'|^{n-1}}\Big)\quad \textit{at each}\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

首先，固定某个 $\kappa>0$ 以及一个点 $x^\star\in\mathbb{R}^n_+$，并考虑紧集

$$K_\star:=\overline{B(x^\star,r)}\subset\mathbb{R}^n_+\quad\text{ where }\quad r:=\tfrac14\,\text{dist}\,\big(x^\star,\partial\mathbb{R}^n_+\big).\tag{3.5}$$

然后我们断言，对任意 $N\ge0$ 都成立

$$\sup_{y\in\Gamma_\kappa(x')\setminus K_\star}\Big[|y-x^\star|^{-N}\Big]\approx\big|(x',0)-x^\star\big|^{-N},\quad\text{uniformly for }\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{3.6}$$

为了证明（3.6），固定 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 并注意到，在一个方向上，

$$\sup_{y\in\Gamma_\kappa(x')\setminus K_\star}\Big[|y-x^\star|^{-N}\Big]\ge\lim_{\Gamma_\kappa(x')\setminus K_\star\ni y\to(x',0)}\Big[|y-x^\star|^{-N}\Big]=\big|(x',0)-x^\star\big|^{-N}.\tag{3.7}$$

在相反方向上，首先考虑当

$$\big|x'-(x^\star)'\big|>8\big(1+(1+\kappa^2)^{1/2}\big)r.\tag{3.8}$$

给定 $y=(y',\ t)\in\Gamma_\kappa(x')$，可得 $|y'-x'|<\kappa\,t$，因此

$$\big|(y',t)-(x',0)\big|<(1+\kappa^2)^{1/2}t\le(1+\kappa^2)^{1/2}\big|(y',t)-((x^\star)',0)\big|.\tag{3.9}$$

据此以及（3.8），我们便可写出

$$\begin{aligned}|x'-(x^\star)'|=\big|(x',0)-((x^\star)',0)\big|&\le\big|(x',0)-(y',t)\big|+\big|(y',t)-((x^\star)',0)\big|\\&\le\big[1+(1+\kappa^2)^{1/2}\big]\big|(y',t)-((x^\star)',0)\big|\\&\le\big[1+(1+\kappa^2)^{1/2}\big]\big\{|y-x^\star|+4r\big\}\\&\le\big[1+(1+\kappa^2)^{1/2}\big]\Big\{|y-x^\star|+\frac{|x'-(x^\star)'|}{2\big(1+(1+\kappa^2)^{1/2}\big)}\Big\}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

因此，

$$|x'-(x^\star)'|\le2\big[1+(1+\kappa^2)^{1/2}\big]|y-x^\star|.\tag{3.11}$$

反过来，（3.11）使我们能够估计

$$\big|(x',0)-x^\star\big|\le\big|x'-(x^\star)'\big|+(x^\star)_n=\big|x'-(x^\star)'\big|+4r$$

$$\le \big|x' - (x^\star)'\big| + \frac{|x' - (x^\star)'|}{2\big(1 + (1+\kappa^2)^{1/2}\big)}$$

$$\le \big(3 + 2(1+\kappa^2)^{1/2}\big)|y - x^\star|. \tag{3.12}$$

有了这一结果，我们现在可以得出结论：

$$\sup_{y \in \Gamma_\kappa(x')} \Big[|y - x^\star|^{-N}\Big] \le C_{N,\kappa}\big|(x',0) - x^\star\big|^{-N} \quad \text{for all} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{as in} \quad (3.8). \tag{3.13}$$

接下来需要在以下情形下建立类似的估计：

$$\big|x' - (x^\star)'\big| \le 8\big(1 + (1+\kappa^2)^{1/2}\big) r. \tag{3.14}$$

为此，任取 $y \in \mathbb{R}^n_+ \setminus K_\star$，并注意到这迫使 $|y - x^\star| > r$。另一方面，

$$\big|(x',0) - x^\star\big| \le \big|x' - (x^\star)'\big| + (x^\star)_n \le 4\big(3 + 2(1+\kappa^2)^{1/2}\big) r, \tag{3.15}$$

因此 $\big|(x',0) - x^\star\big| \le 4\big(3 + 2(1+\kappa^2)^{1/2}\big)|y - x^\star|$，这表明

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n_+ \setminus K_\star} \Big[|y - x^\star|^{-N}\Big] \le C_{N,\kappa}\big|(x',0) - x^\star\big|^{-N} \quad \text{for all} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{as in} \quad (3.14). \tag{3.16}$$

综合来看，（3.13）和（3.16）证明了（3.6）中的左向不等式。由此完成了（3.6）的证明。

反过来，（3.6）很容易自我改进为如下形式的估计。

对每个点 $x^* \in \mathbb{R}^n_+$、每个满足 $x^* \in K$, 的紧集 $K \subset \mathbb{R}^n_+$，

每个 $N > 0$ 和每个 $\kappa > 0$，都存在一个常数 $C = C(x^*, K, N, \kappa) \in (0, \infty)$，使得

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+ \setminus K}\big(|\cdot - x^*|^{-N}\big)\big)(x') \le C(1 + |x'|)^{-N} \quad \text{for each} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.17}$$

进一步，固定任意一个 $y \in \mathbb{R}^n_+$，并取某个满足 $y \in K$ 的紧集 $K \subset \mathbb{R}^n_+$，对于任意多重指标 $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$，我们可以估计

$$\big|(\partial^\gamma E^L)(x - y) - (\partial^\gamma E^L)(x - \overline{y})\big| \le \frac{C(n, \gamma, K, y)}{|x - y|^{n-1+|\gamma|}}, \qquad \forall\, x \in \overline{\mathbb{R}^n_+} \setminus K, \tag{3.18}$$

对于某个有限常数 $C(n, \gamma, K) > 0$，由中值定理和定理 2.8可得。特别地，若考虑

$$f(x') := E^L\big((x',0) - y\big) - E^L\big((x',0) - \overline{y}\big), \qquad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.19}$$

那么 $f \in \big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})\big]^M$ 以及（3.18）使我们可以得出，对于每个 $\gamma' \in \mathbb{N}_0^{n-1}$，有

$$|(\partial^{\gamma'} f)(x')| \le \frac{C(y, \gamma')}{1 + |x'|^{n-1+|\gamma'|}} \quad \text{for each} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.20}$$

结合引理 2.2，与 $\gamma' = (0, \ldots, 0)$ 相对应的 (3.20) 版本可确保

$$\big(\mathcal{M} f\big)(x') \le C\Big(\frac{1 + \log_+ |x'|}{1 + |x'|^{n-1}}\Big) \quad \text{for each} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.21}$$

在此阶段，回到（3.2），并对每个 $y \in \mathbb{R}^n_+$ 和 $x = (x', t) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{y\}$，表示

$$G^L(x, y) = G_1^L(x, y) + G_2^L(x, y), \tag{3.22}$$

其中

$$G_1^L(x,y) := E^L(x-y) - E^L(x-\overline{y}) \quad \text{and}$$
$$G_2^L(x,y) := -P_t^L * \Big(\big[E^L(\cdot - y) - E^L(\cdot - \overline{y})\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+} \Big)(x'). \tag{3.23}$$

由（3.18）和（3.17）可知

$$\begin{aligned} &\text{对每个点 } y \in \mathbb{R}^n_+, \text{ 以及每个满足 } y \in K \text{ 的紧集，} \\ &\text{and each } \kappa > 0, \text{ there exists a constant } C_{y,K} \in (0,\infty) \text{ such that} \\ &\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+ \setminus K} G_1^L(\cdot,y)\big)(x') \leq \frac{C_{y,K}}{1+|x'|^{n-1}} \quad \text{for each } x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

而由（2.18）、（3.19）和（3.21）可知

$$\begin{aligned} &\text{for each point } y \in \mathbb{R}^n_+, \text{ each compact } K \subset \mathbb{R}^n_+ \text{ with } y \in \mathring{K}, \\ &\text{and each } \kappa > 0, \text{ there exists a constant } C_{y,K} \in (0,\infty) \text{ such that} \\ &\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+ \setminus K} G_2^L(\cdot,y)\big)(x') \leq C_{y,K}\Big(\frac{1+\log_+|x'|}{1+|x'|^{n-1}}\Big) \quad \text{for each } x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

综合起来，（3.24）和（3.25）证明了（3.4）。

继续来看，（3.3）中的隶属关系是（3.22）的结果；此外，函数$G_2^L(\cdot,y)$ 属于 $\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}$（这归功于（3.19）–（3.20）以及（2.17）中的第一条性质），再结合定理 2.8（特别参见第 *(4)*项）。

为了证明 $G^L(\cdot,\cdot)$（来自 (3.2)）是 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中、在定义 1.1 意义下的格林函数，注意到 (1.5) 包含于 (3.3)，而 (1.6) 由 (3.2) 以及 (2.17) 中所记录的最后一条性质推出。此外，(1.7) 由 (3.4) 所蕴含，而 (1.8) 可由定理 2.8 与 (2.17) 看出。

步骤 2：对每个 $y \in \mathbb{R}^n_+$，我们有 $G^L(\cdot,y) \in \big[\mathscr{C}^\infty\big(\overline{\mathbb{R}^n_+} \setminus B(y,\varepsilon)\big)\big]^{M\times M}$，对每个 $\varepsilon > 0$。

这是引理 2.16 的直接推论（同时注意 (3.1)），以及如下事实：由 (3.18) 可见，对每个固定的 $y \in \mathbb{R}^n_+$，函数 $\psi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{C}^{M\times M}$ 由下式给出

$$\psi(z') := E^L\big((z',0)-y\big) - E^L\big((z',0)-\overline{y}\big), \qquad \forall\, z' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.26}$$

是光滑的并满足（2.98），其中 $N\colon = n-1$（见（3.19）-（3.20））。

步骤 3：若 $R_L(x,y) \colon = E^L(x-y) - G^L(x,y)$ 对每个 x、$y \in \mathbb{R}^n_+$（其中 $x \neq y$），则这可延拓为一个函数

$$R_L(\cdot,\cdot) \in \big[\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+\big)\big]^{M\times M}, \tag{3.27}$$

它满足

$$|R_L(x,y)| \leq C\,|x-\overline{y}|^{2-n} + c_n\big|\ln|x-\overline{y}|\big|, \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+, \tag{3.28}$$

其中若 $n \geq 3$，则 $c_n = 0$。

为论证这一断言，利用（3.2）以便进行分解

$$R_L(x,y) = R_L^{(1)}(x,y) + R_L^{(2)}(x,y), \tag{3.29}$$

其中，对每个 $x = (x',\ x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ 以及每个 $y = (y',\ y_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{x\}$，我们定义

$$R_L^{(1)}(x,y) := E^L(x-\overline{y}), \tag{3.30}$$

and

$$R_L^{(2)}(x,y) := P_{x_n}^L * \Big(\big[E^L(\cdot - y) - E^L(\cdot - \overline{y}) \big] \big|_{\partial \mathbb{R}^n_+} \Big)(x')$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{x_n}^L(x' - z') \big[E^L\big((z',0) - y\big) - E^L\big((z',0) - \overline{y}\big) \big] \, dz'. \tag{3.31}$$

由（3.30）和（2.23）中的第一个条件可知，函数 $R_L^{(1)}(\cdot,\ \cdot)$ 属于$\big[\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+\big)\big]^{M\times M}$；而（3.19）-（3.20）以及（2.17）中的第一个性质表明，$R_L^{(2)}(\cdot,\ \cdot)$ 也属于 $\big[\mathscr{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+\big)\big]^{M\times M}$。因此，结合（3.27），由（3.29）可得。

接下来，根据定理*2.8*中的第（3）部分，我们知道

$$E^L(z) = \Phi(z) + \mathfrak{C}_n \ln|z|, \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{3.32}$$

其中 $\Phi = \big(\Phi_{\alpha\beta}\big)_{1\le\alpha,\ \beta\le M} \in \big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\big]^{M\times M}$ 是一个次数为 $2-n$ 的正齐次函数，而 $\mathfrak{C}_n \in \mathbb{C}^{M\times M}$ 是一个矩阵，当 $n \ge 3$时恒等于零；当$n = 2$ 时，则由下式给出

$$\mathfrak{C}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{S^1} \big[L(\xi)\big]^{-1} \, d\mathcal{H}^1(\xi). \tag{3.33}$$

关于 $R_L^{(2)}(\cdot,\ \cdot)$，我们断言存在一个有限常数 $C > 0$，使得

$$\big|R_L^{(2)}(x,y)\big| \le C\,|x - \overline{y}|^{2-n}, \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+. \tag{3.34}$$

为证明这一点，注意到 $\big|(\ (z',\ 0)\ - y)\big| = \big|(\ (z',\ 0)\ - y)\big|$ 对每个 $z' \in \mathbb{R}^{n-1}$均成立。由此以及（3.32）可知，一方面，

$$\big|E^L\big((z',0) - y\big) - E^L\big((z',0) - \overline{y}\big)\big| = \big|\Phi\big((z',0) - y\big) - \Phi\big((z',0) - \overline{y}\big)\big|$$
$$\le \frac{2\|\Phi\|_{[L^\infty(S^{n-1})]^{M\times M}}}{\big|\big((z',0) - y\big)\big|^{n-2}}, \qquad \forall\, z' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.35}$$

另一方面，第（a）部分在定义 2.4 中保证了常数 $C \in (0,\infty)$ 的存在性，使得

$$|P_t^L(z')| \le \frac{Ct}{(|z'|^2 + t^2)^{\frac{n}{2}}}, \qquad \forall\, z' \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad \forall\, t > 0. \tag{3.36}$$

在（3.35）-（3.36）成立的前提下，我们便可估计

$$\big|R_L^{(2)}(x,y)\big| \le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big|P_{x_n}^L(x' - z')\big|\big|E^L\big((z',0) - y\big) - E^L\big((z',0) - \overline{y}\big)\big| \, dz' \le C U_y(x), \tag{3.37}$$

其中，对每个固定的 $y = (y', y_n) \in \mathbb{R}^n_+$ 我们已令

$$U_y(x',t) := \frac{2}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{t}{(|x' - z'|^2 + t^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{(|z' - y'|^2 + y_n^2)^{\frac{n-2}{2}}} \, dz' \tag{3.38}$$

对于每个（x'，t）$\in \mathbb{R}^n_+$。因此，若 $n = 2$ 则 U_y（x'，t）≤ 1 对所有（x'，t）$\in \mathbb{R}^n_+$ 这结合（3.37）可得3.34），此情形下结论成立。为证明3.34）在 $n \ge 3$时成立，固定 $y \in \mathbb{R}^n_+$，并将 P^Δ记为拉普拉斯算子的泊松核 $\mathbb{R}^n_+$，即:

$$P^\Delta(x') := \frac{2}{\omega_{n-1}} \frac{1}{\big(1 + |x'|^2\big)^{\frac{n}{2}}}, \qquad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.39}$$

于是，由（3.38）和（3.39）可知，

$$\begin{aligned} &U_y(x',t)=\big(P_t^{\Delta}*f_y\big)(x'), \qquad \forall\,(x',t)\in\mathbb{R}^n_+,\\ &\text{where}\quad f_y(z'):=\big(|z'-y'|^2+y_n^2\big)^{\frac{2-n}{2}}, \quad \forall\, z'\in\mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

由于 $f_y\in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$，由命题 2.7 (用于 $L:=\Delta$) 和 (3.40) 可知（对每个固定的 $\kappa>0$），我们有

$$\Delta U_y=0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^n_+, \quad U_y\in L^\infty(\mathbb{R}^n_+), \quad U_y\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=f_y \ \text{ a.e. in } \ \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.41}$$

那么，由下式给出的函数

$$u(x',t):=U_y(x',t)-|x-\overline{y}|^{2-n}, \qquad \forall\, x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+, \tag{3.42}$$

在 $\mathbb{R}^n_+$ 中是调和的，并且对几乎处处的 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$，满足

$$\begin{aligned} \Big(u\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x') &=f_y(x')-\big|(x',0)-\overline{y}\big|^{2-n}\\ &=\big(|x'-y'|^2+y_n^2\big)^{\frac{2-n}{2}}-\big(|x'-y'|^2+y_n^2\big)^{\frac{2-n}{2}}=0, \end{aligned} \tag{3.43}$$

根据 (3.42)、(3.41) 和 (3.40)。由于由 (3.42) 和 (3.41) 还可得

$$u\in L^\infty(\mathbb{R}^n_+), \tag{3.44}$$

根据上述分析以及 [31, 命题 1，第 199] (同时牢记 (2.17) 中的最后一个性质)，我们可以得出 $u\equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中。回顾 (3.42)，还可进一步推出

$$U_y(x',t)=|x-\overline{y}|^{2-n}, \qquad \forall\, x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+, \tag{3.45}$$

由此，3.34) 可由 (3.37) 和 (3.45) 得出。

为完成 (3.28) 的证明，注意到由 (3.30) 和 (3.32) 还可得

$$\big|R_L^{(1)}(x,y)\big|=\big|E^L(x-\overline{y})\big|\le\|\Phi\|_{L^\infty(S^{n-1})}|x-\overline{y}|^{2-n}+\big|\mathfrak{C}_n\big|\,\big|\ln|x-\overline{y}|\big|. \tag{3.46}$$

现在，(3.28) 可由 (3.29)、(3.34) 和 (3.46) 得出。

步骤 3： 若 $R_L(\cdot,\cdot)$ 如步骤 *3* 中所述，则

$$\begin{aligned} &\textit{for each } \alpha\in\mathbb{N}_0^n \textit{ with } |\alpha|>0 \textit{ there exists } C_\alpha\in(0,\infty) \textit{ such that}\\ &\big|\big(\partial_X^\alpha R_L\big)(x,y)\big|\le C_\alpha|x-\overline{y}|^{2-n-|\alpha|} \textit{ for each } (x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{3.47}$$

为了获得函数$R_L(\cdot,\cdot)$ 关于第一组变量的导数的逐点估计，我们将依赖命题 2.13给出的边界附近的局部估计。为此，先回顾 $R_L^{(1)}(\cdot,\cdot)$、$R_L^{(2)}(\cdot,\cdot)$，见 (3.30)-(3.31)。此外，任取一点 $y\in\mathbb{R}^n_+$，并注意到由 (3.20) 和引理 2.16，

$$R_L^{(2)}(\cdot,y)\in\big[\mathscr{C}^\infty\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\big)\big]^{M\times M}. \tag{3.48}$$

特别地，

$$R_L^{(2)}(\cdot,y)\in\big[W^{1,2}(\mathbb{R}^n_+\cap B(0,R))\big]^{M\times M} \ \text{ for each } \ R>0. \tag{3.49}$$

此外，由于（3.31）和命题2.7，我们有

$$\begin{cases} L\big[R_L^{(2)}(\cdot,y)\big]=0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^n_+ \ \text{ and}\\ \big[R_L^{(2)}(\cdot,y)\big]\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=\big[E^L(\cdot-y)-E^L(\cdot-\overline{y})\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+} \ \text{ a.e. in } \ \mathbb{R}^{n-1}, \end{cases} \tag{3.50}$$

对每个 $\kappa>0$。事实上，由于（3.48），上面的最后一个条件可以改写为

$$\operatorname{Tr}\big[R_L^{(2)}(\cdot,y)\big]=\big[E^L(\cdot-y)-E^L(\cdot-\overline{y})\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})\big]^{M\times M}. \tag{3.51}$$

我们声称

$$\begin{aligned}&\text{for each multi-index }\ \alpha\in\mathbb{N}_0^n\ \text{ there exists }\ C_\alpha\in(0,\infty)\ \text{ such that}\\&\big|\big(\partial_X^\alpha R_L^{(2)}\big)(x,y)\big|\le C_\alpha|x-\overline{y}|^{2-n-|\alpha|}\ \text{ for each }\ (x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+.\end{aligned} \tag{3.52}$$

为证明这一断言，假设给定了两个任意的点 $x,\ y\in\mathbb{R}^n_+$。引入量

$$\rho:=|x-\overline{y}|/5>0 \tag{3.53}$$

并选取某个 $z\in\mathbb{R}^n_+$，使得 $|x-z|=\rho/2$。由此可知，对于任意 $w\in\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho)$，我们有

$$\begin{aligned}|x-\overline{y}|&\le|x-z|+|z-w|+|w-\overline{y}|\\&\le\rho/2+2\rho+|w-\overline{y}|=|x-\overline{y}|/2+|w-\overline{y}|.\end{aligned} \tag{3.54}$$

特别地，

$$|x-\overline{y}|/2\le|w-\overline{y}|=|w-y|\ \text{ for every }\ w\in\partial\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho). \tag{3.55}$$

还应注意，根据（3.32），给定任意 $\ell\in\mathbb{N}_0$，我们可以写成

$$\begin{aligned}&\big|\nabla_{\xi'}^\ell\big[E^L\big((\xi',0)-y\big)-E^L\big((\xi',0)-\overline{y}\big)\big]\big|\\&\qquad\le\big|(\nabla^\ell\Phi)\big((\xi',0)-y\big)\big|+\big|(\nabla^\ell\Phi)\big((\xi',0)-\overline{y}\big)\big|\\&\qquad\le\frac{2\|\nabla^\ell\Phi\|_{L^\infty(S^{n-1})}}{\big|\big((\xi',0)-y\big)\big|^{n-2+\ell}},\qquad\forall\,\xi'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned} \tag{3.56}$$

根据（3.53）和（3.55）-（3.56），因此对于每个 $\ell\in\mathbb{N}_0$ 我们都可以进行估计

$$\begin{aligned}&\rho^{\ell-1}\cdot\sup_{(\xi',0)\in\partial\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho)}\big|\nabla_{\xi'}^\ell\big[E^L\big((\xi',0)-y\big)-E^L\big((\xi',0)-\overline{y}\big)\big]\big|\\&\qquad\le\sup_{w\in\partial\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho)}\frac{C_\ell|x-\overline{y}|^{\ell-1}}{|w-y|^{n-2+\ell}}\le\frac{C_\ell}{|x-\overline{y}|^{n-1}}.\end{aligned} \tag{3.57}$$

有了这一结果，对于每个 $k\in\mathbb{N}$ 我们可以写出（请注意，$x\in\mathbb{R}^n_+\cap B(z,\ \rho)$）

$$\begin{aligned}\big|\big(\nabla_X^k R_L^{(2)}\big)(x,y)\big|&\le\sup_{\mathbb{R}^n_+\cap B(z,\rho)}\big|\big(\nabla_X^k R_L^{(2)}\big)(\cdot,y)\big|\\&\le C\,\rho^{-k}\Big(\sup_{\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho)}\big|R_L^{(2)}(\cdot,y)\big|\Big)\\&\quad+\rho^{1-k}\sum_{\ell=0}^{k+1}\rho^{\ell-1}\Big(\sup_{(\xi',0)\in\partial\mathbb{R}^n_+\cap B(z,2\rho)}\big|\nabla_{\xi'}^\ell\big[E^L\big((\xi',0)-y\big)-E^L\big((\xi',0)-\overline{y}\big)\big]\big|\Big)\\&\le C\rho^{-k}|x-\overline{y}|^{2-n}+C\rho^{1-k}|x-\overline{y}|^{1-n}=C|x-\overline{y}|^{2-n-k},\end{aligned} \tag{3.58}$$

由（3.49）-（3.54）、命题2.13、（3.34）和（3.57）。这就证明了在 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ 满足 $|\alpha|>0$ 的情形下，（3.52）成立。由于 $|\alpha|=0$ 的情形已包含在（3.34）中，

（3.52）的证明至此完成。至于 $R_L^{(1)}$ $(\cdot,\ \cdot)$，结合（3.30）和（2.27），可知

$$\begin{aligned}&\text{given } \alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n \text{ with } |\alpha|+|\beta|>0 \text{ there exists } C_{\alpha\beta}\in(0,\infty) \text{ so that}\\&\big|\big(\partial_X^\alpha\partial_Y^\beta R_L^{(1)}\big)(x,y)\big|\leq C_{\alpha\beta}|x-\overline{y}|^{2-n-|\alpha|-|\beta|} \text{ for each } (x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+.\end{aligned}\tag{3.59}$$

于是（3.47）由（3.29）、（3.52）和（3.59）得到。

步骤 5： 我们有

$$\begin{aligned}&\textit{for each point } y\in\mathbb{R}^n_+,\ \textit{each compact } K\subset\mathbb{R}^n_+ \textit{ with } y\in\mathring{K},\\&\textit{and each } \kappa>0,\ \textit{there exists a constant } C_{y,K}\in(0,\infty) \textit{ such that}\\&\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}(\nabla_X G^L)(\cdot\,,y)\big)(x')\leq C_{y,K}(1+|x'|)^{1-n} \quad \textit{at each } x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{aligned}\tag{3.60}$$

固定任意两个点 $x,\ y\in\mathbb{R}^n_+$ 满足 $x\neq y$，我们可以估计

$$\begin{aligned}\big|(\nabla_X G^L)(x,y)\big|\leq&\big|(\nabla_X E^L)(x-y)\big|+\big|(\nabla_X R_L)(x,y)\big|\\\leq&C|x-y|^{1-n}+C|x-\overline{y}|^{1-n}\leq C|x-y|^{1-n},\end{aligned}\tag{3.61}$$

利用定理 2.8、（3.47）以及以下事实

$$|x-y|=\big[|x'-y'|^2+|x_n-y_n|^2\big]^{1/2}\leq\big[|x'-y'|^2+(x_n+y_n)^2\big]^{1/2}=|x-\overline{y}|,\tag{3.62}$$

对于每个 $x=(x',\ x_n)\in\mathbb{R}^n_+$ 和 $y=(y',\ y_n)\in\mathbb{R}^n_+$。于是（3.60）是由（3.61）和（3.17）推出的。

步骤 6：按照定义 L在 $\mathbb{R}^n_+$的意义下，存在且仅存在一个格林函数*1.1*。

由步骤 1 可知，按照定义 1.1 的意义， L 在 $\mathbb{R}^n_+$中至少存在一个格林函数。为证明其唯一性，设 $G_1(\cdot,\cdot)$、 $G_2(\cdot,\cdot)$是两个这样的格林函数，并固定任意一点 $y\in\mathbb{R}^n_+$。若在 $\mathbb{R}^n_+\setminus\{y\}$中 $u:=G_1(\cdot,y)-G_2(\cdot,y)$，则性质 (1.5) 和 (1.8) 表明， $u\in\big[L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}$，且 $Lu=0$ 在 $\big[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}$中。特别地，

$$u\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M} \text{ and } Lu=0 \text{ pointwise in } \mathbb{R}^n_+,\tag{3.63}$$

根据椭圆正则性。此外，(1.6) 意味着存在 $\kappa>0$ 使得

$$u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}=0 \text{ a.e. in } \mathbb{R}^{n-1}.\tag{3.64}$$

此外，由（1.7）以及（3.63）中的第一个条件可推得

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(\mathcal{N}_\kappa u)(x')\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}<+\infty.\tag{3.65}$$

接下来，我们提出如下断言：

$$\text{any function } u \text{ satisfying (3.63)-(3.65) vanishes identically in } \mathbb{R}^n_+.\tag{3.66}$$

为证明这一结论，令 $G^{L^\top}(\cdot,\ \cdot)=\big(G^{L^\top}_{\alpha\gamma}(\cdot,\ \cdot)\big)_{1\leq\alpha,\ \gamma\leq M}$为按照步骤 1 构造的、对应于算子 $L^\top$ 的格林函数，并固定任意一点 $y\in\mathbb{R}^n_+$。特别地，根据步骤 1、步骤 2 和步骤 5（均以 $L^\top$ 替代 L 调用），我们知道，对于 $\mathbb{R}^n_+$ 中每个满足 $y\in K$ 的紧集°子集 K，都存在一个常数 $C_{y,\ K}\in(0,\ \infty)$，使得

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}G^{L^\top}(\cdot,y)\big)(x')\leq C_{y,K}\Big(\frac{1+\log_+|x'|}{1+|x'|^{n-1}}\Big) \text{ at each } x'\in\mathbb{R}^{n-1},\tag{3.67}$$

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}(\nabla_X G^{L^\top})(\cdot\,,y)\big)(x')\leq\frac{C_{y,K}}{1+|x'|^{n-1}} \text{ at each } x'\in\mathbb{R}^{n-1},\tag{3.68}$$

$$G^{L^\top}(\cdot\,,y)\in\big[W^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M},\qquad G^{L^\top}(\cdot\,,y)\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0\ \text{ a.e. on }\ \mathbb{R}^{n-1},\tag{3.69}$$

$$\text{and}\quad\big(\nabla_X G^{L^\top}\big)(\cdot\,,y)\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\ \text{ exists at a.e. point on }\ \mathbb{R}^{n-1}.\tag{3.70}$$

固定一个指标 $\gamma\in\{1,\dots,M\}$后，我们现在对函数 u（如上所述）以及 $v:=G^{L^\top}_{\cdot\gamma}(\cdot,y)$ 应用引理 2.15。性质（3.63）-（3.65）和（3.67）-（3.70）保证引理 2.15 的所有假设目前均已满足。由此，根据（2.54）和（3.63）-（3.64），对于每个孔径参数 $\kappa>0$，我们有

$$u_\gamma(y)=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(u_\alpha\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)a^{\beta\alpha}_{nn}\Big[\big(\partial_{X_n}G^{L^\top}_{\beta\gamma}\big)(\cdot,y)\Big]\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}d\mathscr{L}^{n-1}=0.\tag{3.71}$$

由于 y 和 γ 是任意的，这证明了 $u\equiv0$ 在 $\mathbb{R}^n_+$中成立，从而完成了对（3.66）的证明。在本情形下，这进一步意味着 $G_1(\cdot,\ y)\ =G_2(\cdot,\ y)$ 属于 $\mathbb{R}^n_+\setminus\{y\}$，这表明$G_1(\cdot,\ \cdot)\ =G_2(\cdot,\ \cdot)$ 属于 $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\text{diag}$，如所需。

步骤 7：记 $G^{L^\top}(\cdot,\cdot)$ 为 $L^\top$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的格林函数，其构造方式与（3.2）类似，只需将 L 替换为 $L^\top$。那么，对于所有满足 $x\neq y$的 $x,y\in\mathbb{R}^n_+$，有 $G^L(x,y)=\big[G^{L^\top}(y,x)\big]^\top$。

证明这一对称性条件的策略，是在以下设定中应用引理 2.15。任取两个不同的点 x，$y\in\mathbb{R}^n_+$，并选取某个孔径参数$\kappa>0$。取 $x^\star_1:=x$，$x^\star_2:=y$，并固定两个充分小的正数 r_1，r_2（使得（2.47）中的条件得到满足）。此外，针对这些参数，按（2.53）选取 ϕ,ψ。接下来，固定任意的 $\eta,\gamma\in\{1,\dots,M\}$，并考虑向量值函数 $u:=\big(G^L_{\alpha\eta}(\cdot,x)\big)_{1\le\alpha\le M}$和 $v:=\big(G^{L^\top}_{\beta\gamma}(\cdot,y)\big)_{1\le\beta\le M}$。

由于 $L^\top$ 具有与 L 类似的性质，由步骤 1、步骤 2 和步骤 5 可推得，(3.67)-(3.70) 对 $K:=B(y,r_2)$ 成立。类似地，将 $G^{L^\top}(\cdot,y)$ 替换为 $G^L(\cdot,x)$，并令 $K:=B(y,r_1)$，则 (3.67)-(3.70) 也成立。因此，函数 u,v 满足条件 (2.49)-(2.52)。于是，在此情形下，(2.54) 给出

$$\begin{aligned}{}_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)}\Big\langle\delta_{\beta\eta}\delta_x,\phi\,G^{L^\top}_{\beta\gamma}(\cdot,y)\Big\rangle_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)}&={}_{\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n_+)}\Big\langle\delta_{\alpha\gamma}\delta_y,\psi\,G^L_{\alpha\eta}(\cdot,x)\Big\rangle_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^n_+)}\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(G^L_{\alpha\eta}(\cdot,x)\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)a^{\beta\alpha}_{nn}\Big[\big(\partial_{X_n}G^{L^\top}_{\beta\gamma}\big)(\cdot,y)\Big]\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}d\mathscr{L}^{n-1}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

回想 $G^L_{\alpha\eta}(\cdot,\ x)\big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中几乎处处成立，并注意到 $\phi(x)\ =\psi(y)\ =1$，公式 (3.72) 便可简化为 $G^{L^\top}_{\eta\gamma}(x,\ y)\ =G^L_{\gamma\eta}(y,\ x)$，从而证明了所需的对称性条件。

步骤 8：若 $R_L(\cdot,\cdot)$ 如步骤 3 中所述，则对任意 α、$\beta\in\mathbb{N}^n_0$，存在 $C_{\alpha\beta}\in(0,\infty)$，使得对每个 $(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+$，均有

$$\big|\big(\partial^\alpha_X\partial^\beta_Y R_L\big)(x,y)\big|\le C_{\alpha\beta}\,|x-\overline{y}|^{2-n-|\alpha|-|\beta|}\ \text{ if }|\alpha|+|\beta|>0,\text{ or }n\ge3.\tag{3.73}$$

鉴于 (3.29) 和 (3.59)，只需证明

$$\begin{aligned}&\text{for each multi-indices }\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n_0\ \text{ there exists }\ C_{\alpha\beta}\in(0,\infty)\ \text{ such that}\\&\big|\big(\partial^\alpha_X\partial^\beta_Y R^{(2)}_L\big)(x,y)\big|\le C_{\alpha\beta}|x-\overline{y}|^{2-n-|\alpha|-|\beta|}\ \text{ for each }\ (x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+.\end{aligned}\tag{3.74}$$

为此，我们首先注意到，结合 (2.28) 和 (3.27)，第 7 步中证明的转置律意味着

$$R_L(x,y)=\big[R_{L^\top}(y,x)\big]^\top,\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+. \tag{3.75}$$

取任意一个多重指标 $\beta\in\mathbb{N}_0^n$ 并注意到（3.75）蕴含

$$\big(\partial_Y^\beta R_L\big)(x,y)=\Big[\big(\partial_X^\beta R_{L^\top}\big)(y,x)\Big]^\top,\qquad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+. \tag{3.76}$$

因此，若 $R^{(1)}_{L^\top}(\cdot,\cdot)$ 和 $R^{(2)}_{L^\top}(\cdot,\cdot)$ 的定义方式与 $R^{(1)}_{L}(\cdot,\cdot)$ 和 $R^{(2)}_{L}(\cdot,\cdot)$ 类似，其中 $L^\top$现在起到 L 的作用，那么对于每个 $(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+$，我们得到

$$\big(\partial_Y^\beta R^{(2)}_L\big)(x,y)=\Big[\big(\partial_X^\beta R^{(1)}_{L^\top}\big)(y,x)\Big]^\top+\Big[\big(\partial_X^\beta R^{(2)}_{L^\top}\big)(y,x)\Big]^\top-\big(\partial_Y^\beta R^{(1)}_L\big)(x,y). \tag{3.77}$$

注意，$R^{(1)}_{L^\top}(\cdot,\cdot)$ 和 $R^{(2)}_{L^\top}(\cdot,\cdot)$ 分别具有与 $R^{(1)}_{L}(\cdot,\cdot)$ 和 $R^{(2)}_{L}(\cdot,\cdot)$ 类似的性质。有了这一点，将（3.77）、（3.52）以及（3.59）中的 $L^\top$ 替换为 L，并结合原本陈述的（3.59），我们得到（注意到对于所有 $x,y\in\mathbb{R}^n_+$，$|y-x|=|x-y|$）

$$\begin{gathered}\big|\big(\partial_Y^\beta R^{(2)}_L\big)(x,y)\big|\leq C_\beta|x-\overline{y}|^{2-n-|\beta|},\quad\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+,\\ \text{for every multi-index }\ \beta\in\mathbb{N}_0^n\ \text{ with length }\ |\beta|>0.\end{gathered} \tag{3.78}$$

还需指出，对3.31关于 y 求导可得

$$\begin{gathered}\big(\partial_Y^\beta R^{(2)}_L\big)(x,y)=(-1)^{|\beta|}P^L_{x_n}*\Big(\big[(\partial^\beta E^L)(\cdot-y)-(\partial^\beta E^L)(\cdot-\overline{y})\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x'),\\ \text{for each }x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n_+,\text{ each }y\in\mathbb{R}^n_+,\text{ and each }\beta\in\mathbb{N}_0^n.\end{gathered} \tag{3.79}$$

与前面类似，这意味着对每个 $\beta\in\mathbb{N}_0^n$，

$$\begin{cases}\big(\partial_Y^\beta R^{(2)}_L\big)(\cdot,y)\in\big[W^{1,2}\big(\mathbb{R}^n_+\cap B(0,R)\big)\big]^{M\times M}\ \text{ for each }\ R>0,\\ L\big[\big(\partial_Y^\beta R^{(2)}_L\big)(\cdot,y)\big]=0\ \text{ in }\mathbb{R}^n_+,\\ \operatorname{Tr}\big[\big(\partial_Y^\beta R^{(2)}_L\big)(\cdot,y)\big]=(-1)^{|\beta|}\big[(\partial^\beta E^L)(\cdot-y)-(\partial^\beta E^L)(\cdot-\overline{y})\big]\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\ \text{ on }\ \mathbb{R}^{n-1}.\end{cases} \tag{3.80}$$

以（3.78）和（3.80）分别代替（3.34）和（3.49）–（3.51），现在我们可以重复导出（3.52）的同一推导过程，从而在 $|\beta|>0$ 时得到（3.74）。还需注意，当 $|\beta|=0$ 时，（3.74）中的结论已包含在（3.52）中。因此，（3.74）如上所述成立。

第9步：证明定理*1.2*陈述中第（*6*）–（*9*）部分的结论。

当 $|\alpha|=|\beta|=0$ 且 $n=2$ 时，估计（1.23）包含在（3.28）中；而当 $|\alpha|+|\beta|>0$ 或 $n\geq3$ 时，则由（3.29）、（3.59）和（3.74）可得。此外，G^L（·，·）满足（1.24）–（1.25），这是（1.21）–（1.23）、（2.27）和（3.62）的推论。

接下来，格林函数满足 G^L（·，·）这一性质，即式（1.26，由式（1.24）以及如下观察可得：给定 $N\in$（0，∞）和 $x_\star\in\mathbb{R}^n$ 由 f定义的函数 f（x）：$=|x-x_\star|^{-N}$ 对于每个 $x\in\mathbb{R}^n_+$ 都具有如下性质：

$$\|f\|_{L^{n/N,\infty}(\mathbb{R}^n_+)}\leq\big(n\,\omega_{n-1}\big)^{N/n}. \tag{3.81}$$

事实上，对于每个 $\lambda>0$，我们有

$$\mathscr{L}^n\Big(\big\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|f(x)|>\lambda\big\}\Big)=\mathscr{L}^n\Big(\big\{x\in\mathbb{R}^n_+:\,|x-x_\star|<\lambda^{-1/N}\big\}\Big)$$

$$\leq \mathscr{L}^n\Big(B\big(x_\star, \lambda^{-1/N}\big)\Big) = \frac{n\,\omega_{n-1}}{\lambda^{n/N}}, \tag{3.82}$$

因此，3.81）可通过写出

$$\|f\|_{L^{n/N,\infty}(\mathbb{R}^n_+)} = \sup\Big\{\lambda\,\mathscr{L}^n\Big(\big\{x\in\mathbb{R}^n_+ : |f(x)|>\lambda\big\}\Big)^{N/n} : \lambda>0\Big\} \leq \big(n\,\omega_{n-1}\big)^{N/n}. \tag{3.83}$$

接下来，我们的目标是证明：如果$p\in\big[1, \frac{n}{n-1}\big)$，那么所列出的性质（1.30）对每个$\zeta\in\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$都成立。为证明这一点，取$\zeta\in\overline{\mathscr{C}^\infty_c}(\mathbb{R}^n)$，并固定任意一个$y\in\mathbb{R}^n_+$。于是，由（1.24）-（1.25）可得

$$\begin{aligned}\big|\nabla(\zeta G^L(\cdot,y))\big| \leq& \|\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\big|(\nabla_X G^L)(\cdot,y)\big| + |\nabla\zeta|\big|G^L(\cdot,y)\big|\\ \leq& C\|\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\mathbf{1}_{\operatorname{supp}\zeta}|\cdot-y|^{1-n}\\ &+ C\|\nabla\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\mathbf{1}_{\operatorname{supp}\zeta}\begin{cases}|\cdot-y|^{2-n} & \text{if } n\geq 3,\\ 1+\big|\ln|\cdot-\overline{y}|\big| & \text{if } n=2,\end{cases}\end{aligned} \tag{3.84}$$

因此，$\nabla(\zeta G^L(\cdot,y)$的各分量均属于$L^p(\mathbb{R}^n_+)$，对每个$p\in\big[1, \frac{n}{n-1}\big)$,都一致地成立于$y$。类似地，$\zeta G^L(\cdot,y)\in\big[L^p(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}$对每个$p\in\big[1, \frac{n}{n-1}\big)$,都一致地成立于$y$，从而完成了（1.30）中不等式的证明。最后，（1.30）中的隶属关系同样成立，这是我们刚刚证明的结果、（1.6）以及步骤 2 的直接推论。

步骤 10：定理陈述中第 *(1)-(5)* 部分和第 *(10)* 部分各项断言的证明，即定理*1.2*。

隶属关系 (1.14) 在如下情形成立：当 $|\alpha|=|\beta|=0$ 包含于 (3.4) 时；而当 $|\alpha|+|\beta|>0$ 时，则由 (1.24) 与 (3.17) 得出。正则性性质 (1.15) 已在步骤 2 中得到证明，而 (1.18) 中的断言是 (1.14)、命题 2.1 与 (1.6) 的推论。至于平移不变性 (1.16)，对每一 $(x,\ y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus$ diag 且 $z'\in\mathbb{R}^{n-1}$，我们可基于 (3.2) 写出

$$\begin{aligned}&G^L\big(x-(z',0),y-(z',0)\big)\\ &\quad= E^L\big(x-(z',0)-y+(z',0)\big)-E^L\big(x-(z',0)-\overline{y-(z',0)}\big)\\ &\qquad- P^L_t*\Big(\big[E^L\big(\cdot-y+(z',0)\big)-E^L\big(\cdot-\overline{y-(z',0)}\big)\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)\big((x-(z',0))'\big).\end{aligned} \tag{3.85}$$

注意，反射 $y\mapsto y$ 的平移不变性直接给出

$$\begin{aligned}&E^L\big(x-(z',0)-y+(z',0)\big)-E^L\big(x-(z',0)-\overline{y-(z',0)}\big)\\ &\qquad= E^L(x-y)-E^L(x-\overline{y}\,)\end{aligned} \tag{3.86}$$

而卷积的平移不变性使我们可以写成

$$\begin{aligned}&P^L_t*\Big(\big[E^L\big(\cdot-y+(z',0)\big)-E^L\big(\cdot-\overline{y}+(z',0)\big)\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x'-z')\\ &\qquad=P^L_t*\Big(\big[E^L(\cdot-y)-E^L(\cdot-\overline{y}\,)\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}(\cdot+z')\Big)(x'-z')\\ &\qquad=P^L_t*\Big(\big[E^L(\cdot-y)-E^L(\cdot-\overline{y}\,)\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x').\end{aligned} \tag{3.87}$$

因此，(1.16) 可由 (3.85)-(3.87) 得出。

最后，式（1.17）中所记载的齐次性由式（3.2）中的第1项、定理 2.8中的第 （iv） 项，以及注 2.5 中的第 （c） 部分得出（注意 P^L 与 K^L之间的关系；参见定义 2.4）。

步骤 11：格林函数 $G^L(\cdot,\ \cdot)$ 对于 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中可写成式 （1.31）的形式。

为验证这一点，固定 $y\in\mathbb{R}^n_+$，并注意到（2.27）给出

$$\big|E^L((x',0)-y)\big|+\big|E^L((x',0)-\overline{y}\,)\big|\leq C\begin{cases}\dfrac{1}{1+|x'|^{n-2}} & \text{if } n\geq 3,\\[2mm] 1+|\ln|x'||\ & \text{if } n=2,\end{cases}\tag{3.88}$$

对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$，存在某个 $C\in(0,\infty)$，它仅依赖于 y。结合定义2.4中条目*(a)* 的估计可知，（3.2）最后一项中的卷积可以解耦。因此，对每个 $y\in\mathbb{R}^n_+$ 以及每个 $x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{y\}$，

$$\begin{aligned}G^L(x,y)=&E^L(x-y)-P^L_t*\Big(\big[E^L(\cdot-y)\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x')\\&-E^L(x-\overline{y}\,)+P^L_t*\Big(\big[E^L(\cdot-\overline{y}\,)\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x').\end{aligned}\tag{3.89}$$

因此，问题归结为证明上面最后一行中的两项相互抵消。为此，定义 $u,v\colon\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{C}^M$，令每个 $x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+$

$$u(x):=E^L(x-\overline{y}\,)\ \text{ and }\ v(x):=P^L_t*\Big(\big[E^L(\cdot-\overline{y}\,)\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Big)(x').\tag{3.90}$$

从现在起，假设 $n\geq 3$。那么，令

$$f:=E^L(\cdot-\overline{y}\,)\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+},\tag{3.91}$$

由（2.27）可得

$$|f(x')|\leq C(1+|x'|)^{2-n}\ \text{ for each }\ x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{3.92}$$

特别是，

$$f\in\bigcap_{p>\frac{n-1}{n-2}}\big[L^p(\mathbb{R}^{n-1},\mathcal{L}^{n-1})\big]^{M\times M}\subseteq\Big[L^1\Big(\mathbb{R}^{n-1},\frac{dx'}{1+|x'|^n}\Big)\Big]^{M\times M}\tag{3.93}$$

因此，命题 2.7 以及 E^L 定理 2.8 中的性质表明，对每个 $\kappa>0$ 都有

$$u,v\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M},\quad Lu=Lv=0\ \text{ in }\ \mathbb{R}^n_+,\ \text{ and }\ u\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}=f=v\Big|^{\kappa-\text{n.t.}}_{\partial\mathbb{R}^n_+}.\tag{3.94}$$

此外，由（3.90）、（2.18）、（3.93）以及 Hardy-Littlewood 极大算子的有界性可知

$$\mathcal{N}_\kappa v\in\bigcap_{p>\frac{n-1}{n-2}}L^p(\mathbb{R}^{n-1},\mathcal{L}^{n-1})\subseteq L^1\Big(\mathbb{R}^{n-1},\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}\Big).\tag{3.95}$$

因此，只要证明当前函数 u 满足 (3.65)，根据 (3.66)，我们就可以得出 $u=v$ in $\mathbb{R}^n_+$，这正是所需的结论。反过来，这将直接由 (3.90)、(2.27) 以及如下的一般事实推出：对于任意满足 $n\geq 2$ 的维数 $n\in\mathbb{N}$ 、任意 $^\circ$ 指数 $N\geq 0$、任意紧集 $K\subset\mathbb{R}^n$、任意点 $z\in K$ 以及任意孔径参数$\kappa>0$，存在一个有限常数 $C(n,N,K,\kappa,z)>0$，使得

$$\sup_{y\in\Gamma_\kappa(x')\setminus K}\Big[|y-z|^{-N}\Big]\leq C(n,N,K,\kappa,z)\big[|x'|+1\big]^{-N}\ \text{ for each }\ x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\tag{3.96}$$

为证明 (3.96) 中的断言，只需证明存在一个有限常数 $C(n,\ K,\ \kappa,\ z)>0$ 使得

$$\inf_{y\in\Gamma_\kappa(x')\backslash K}|y-z|\geq C(n,K,\kappa,z)\max\left\{|x'|,1\right\}\quad\text{for each}\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.97}$$

为实现这一目标，我们首先估计

$$\inf_{y\in\Gamma_\kappa(x')\backslash K}|y-z|\geq \operatorname{dist}(z,\partial K)=:C(n,K,\kappa,z)\in(0,\infty). \tag{3.98}$$

因此，接下来需要证明存在常数 $C(n,\ K,\ \kappa,\ z)\in(0,\ \infty)$，使得

$$\inf_{y\in\Gamma_\kappa(x')\backslash K}|y-z|\geq C(n,K,\kappa,z)|x'|\quad\text{for each}\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.99}$$

为证明（3.99），固定 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 并定义角 $\alpha\in(0,\ \pi/2$为圆锥 $\Gamma_\kappa(x'$张角的一半（注意，α 仅取决于 κ）。另外，取足够大的 $R_K\in(0,\ \infty$，使得 $K\subseteq B(0,\ R_K)$，并定义

$$C_*:=\frac{2R_K}{\cos\alpha\cdot\operatorname{dist}(z,\partial K)}\in(0,\infty). \tag{3.100}$$

接下来考虑两种情况。首先，若 $|x'|\leq C_*\cdot\operatorname{dist}(z,\ \partial K)$，则

$$\inf_{y\in\Gamma_\kappa(x')\backslash K}|y-z|\geq\operatorname{dist}(z,\partial K)\geq|x'|/C_* \tag{3.101}$$

因此，在这种情况下（3.99）成立。其次，若 $|x'|>C_*\cdot\operatorname{dist}(z,\ \partial K)$，则（3.100）推出 $|x'|>2R_K$余弦 α。因此，$\operatorname{dist}\left(0,\ \Gamma_\kappa(x')\right)=|x'|$余弦 $\alpha>R_K$，这迫使 $B(0,\ R_K)$ 与$\Gamma_\kappa(x')$不相交。特别地，K 与 $\Gamma_\kappa(x')$不相交。还需注意，由于 $z\in K\subseteq B(0,\ R_K)$，我们有 $|z|<R_K$。考虑到这两个性质，接下来可以估计

$$\begin{aligned}
|x'|\cos\alpha&=\operatorname{dist}\left(0,\Gamma_\kappa(x')\right)\leq\operatorname{dist}\left(z,\Gamma_\kappa(x')\right)+|z|\\
&<\inf_{y\in\Gamma_\kappa(x')}|y-z|+\Big(\frac{R_K}{\operatorname{dist}(z,\partial K)}\Big)\operatorname{dist}(z,\partial K)\\
&<\inf_{y\in\Gamma_\kappa(x')\backslash K}|y-z|+\Big(\frac{R_K}{\operatorname{dist}(z,\partial K)}\Big)\frac{|x'|}{C_*}\\
&=\inf_{y\in\Gamma_\kappa(x')\backslash K}|y-z|+\frac{|x'|\cos\alpha}{2},
\end{aligned} \tag{3.102}$$

这说明在此情形下，(3.99) 也成立。至此，(3.99) 的证明完成，因此 (3.96) 已得到证明。正如前面所述，证明了 (3.96) 就完成了 $n\geq3$ 时 (1.31) 的证明。

(1.31) 在 $n\geq2$ 下成立的一种证明如下。取指数 $\eta\in(0,1)$，并取一点 $y=(y',y_n)\in\mathbb{R}^n_+$，注意到对每个 $x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n_+$，我们可以利用 (2.27) 作出估计

$$\begin{aligned}
x_n^{1-\eta}|(\nabla E^L)(x-\overline{y})|&\leq\frac{Cx_n^{1-\eta}}{\left[|x'-y'|^2+(x_n+y_n)^2\right]^{(n-1)/2}}\\
&\leq\frac{Cx_n^{1-\eta}}{(x_n+y_n)^{n-1}}\leq\frac{C}{y_n^{n-2+\eta}}.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

因此，

$$\sup_{x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n_+}\left[x_n^{1-\eta}|(\nabla E^L)(x-\overline{y})|\right]\leq\frac{C}{y_n^{n-2+\eta}}<+\infty. \tag{3.104}$$

此外，

$$E^L(\cdot-\overline{y})\in\big[\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}\quad\text{and}\quad L\big[E^L(\cdot-\overline{y})\big]=0\ \text{ in }\ \mathbb{R}^n_+. \tag{3.105}$$

由（3.105）和（3.104）可得（例如参见 [20, （5.11.78），第 490]页），即 t

$$E^L(\cdot-\overline{y})\ \text{ belongs to }\ \big[\dot{\mathscr{C}}^\eta\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\big)\big]^{M\times M}, \tag{3.106}$$

其中 $\dot{\mathscr{C}}^\eta\big(\overline{\mathbb{R}^n_+}\big)$ 表示阶数为¨的齐次 H η older 空间 $\mathbb{R}^n_+$。特别地，若 f 如（3.91）中所述，则

$$f\in\big[\dot{\mathscr{C}}^\eta(\mathbb{R}^{n-1})\big]^{M\times M}, \tag{3.107}$$

这很容易推出：对所有立方体 $Q\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ 取上确界，可得

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^{n-1}}\ell(Q)^{-\eta}\Big(\fint_Q\big|f(x')-f_Q\big|^2\,dx'\Big)^{\frac12}<+\infty, \tag{3.108}$$

其中 $\ell(Q)$ 表示 Q 的边长，且 f_Q 表示 f 在 Q上的积分平均值。由（3.103）还可推出，若 Q 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的任意立方体，则

$$\begin{aligned}&\ell(Q)^{-\eta}\Big(\fint_Q\Big(\int_0^{\ell(Q)}\big|(\nabla E^L)\big((x',t)-\overline{y}\big)\big|^2\,t\,dt\Big)\,dx'\Big)^{\frac12}\\&\qquad\le\frac{C\ell(Q)^{-\eta}}{y_n^{n-2+\eta}}\Big(\int_0^{\ell(Q)}\frac{1}{t^{2(1-\eta)}}t\,dt\Big)^{\frac12}=\frac{C}{y_n^{n-2+\eta}},\end{aligned} \tag{3.109}$$

因此

$$\sup_{Q\subset\mathbb{R}^{n-1}}\ell(Q)^{-\eta}\Big(\fint_Q\Big(\int_0^{\ell(Q)}\big|(\nabla E^L)\big((x',t)-\overline{y}\big)\big|^2\,t\,dt\Big)\,dx'\Big)^{\frac12}<+\infty. \tag{3.110}$$

由（3.105）、（3.91）、（3.108）和（3.110）可知，根据 [17, 定理 1。21] 中建立的适定性结果，函数 u和 v 在（3.90）中定义的函数在 $\mathbb{R}^n_+$上一致。鉴于此以及（3.89），公式（1.31）现已对 $n\ge2$成立。

定理 1.2 的证明至此完成。 □

其次，我们给出定理 1.4的证明。

定理 *1.4*的证明。 假设系统 L 是弱椭圆且反射不变的。于是，正如（2.35）中所述，与 L 规范关联的基本解 E^L 如定理 2.8 所述，是反射不变的。在这种情况下，固定一点$y\in\mathbb{R}^n_+$，我们有

$$\big[E^L(\cdot-y)-E^L(\cdot-\overline{y})\big]\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}=0 \tag{3.111}$$

由于 $\overline{(x',\,0)}-y=(x',-0)-y$对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$均成立。因此，在（ G^L（·，·）中定义的函数（1.38）满足定义 1.5）、（1.6）和（1.8）中的条件1.1。

下一步是证明，按（ $G^L(\cdot,\cdot)$ 定义的函数（1.38）也满足（1.39）。为此，取一个包含于 K 中的紧集 $\mathbb{R}^n_+$，并选取一个多重指标 $\alpha\in\mathbb{N}^n_0$。我们声称°对每个 $y\in K$，都存在一个常数 $C(L,K,\alpha,y)\in(0,\infty)$，使得

$$\big|(\partial^\alpha E^L)(x-y)-(\partial^\alpha E^L)(x-\overline{y})\big|\le\frac{C(L,K,\alpha,y)}{|x-y|^{n-1+|\alpha|}}\quad\text{for all}\quad x\in\mathbb{R}^n_+\setminus K. \tag{3.112}$$

°要看出这一点为何成立，取 $y=(y_1,\dots,y_n)\in K$ 以及 $x\in\mathbb{R}^n_+\setminus K$，并考虑两种情况。

第一种情况对应于 $|x-y|\ge4y_n$。由于对介于 y 与y 之间的任意 ξ，我们有 $-|x-y|\le|x-\xi|+|\xi-y|\le|x-\xi|+2y_n\le|x-\xi|+\frac12|x-y|$，因此对所有点 ξ

介于 y 与 y 之间，我们有 $|x-\xi| \geq \frac{1}{2}|x-y| > 0$。由此，结合中值定理以及（2.27），可得

$$\begin{aligned}\left|(\partial^{\alpha}E^{L})(x-y)-(\partial^{\alpha}E^{L})(x-\overline{y})\right| &\leq 2y_{n}\sup_{\xi\in[y,\overline{y}]}\left|(\nabla\partial^{\alpha}E^{L})(x-\xi)\right| \\ &\leq 2y_{n}\sup_{\xi\in[y,\overline{y}]}\frac{C(L,\alpha)}{|x-\xi|^{n-1+|\alpha|}} \\ &\leq \frac{C(L,\alpha,y)}{|x-y|^{n-1+|\alpha|}}. \end{aligned} \tag{3.113}$$

在第二种情形下，假设 $|x-y| < 4y_{n}$。又由于 $|x-y| \geq \operatorname{dist}(y,\partial K) > 0$，因此可得

$$|x-y| \approx 1 \text{ with proportionality constants depending only on } K \text{ and } y. \tag{3.114}$$

此外，$|x-y| \geq \operatorname{dist}(y,\mathbb{R}^{n}_{+}) = y_{n}$ 且 $|x-y| \leq |x-y|+|y-y| < 4y_{n}+2y_{n} = 6y_{n}$，因此

$$|x-\overline{y}| \approx 1 \text{ with proportionality constants depending only on } y. \tag{3.115}$$

由 (2.27) 和 (3.114)-(3.115)，可知存在 $C(L,K,\alpha,y) \in (0,\infty)$ 使得

$$\begin{aligned}\left|(\partial^{\alpha}E^{L})(x-y)-(\partial^{\alpha}E^{L})(x-\overline{y})\right| &\leq \left|(\partial^{\alpha}E^{L})(x-y)\right|+\left|(\partial^{\alpha}E^{L})(x-\overline{y})\right| \\ &\leq \frac{C(L,K,\alpha,y)}{|x-y|^{n-1+|\alpha|}}. \end{aligned} \tag{3.116}$$

综合来看，(3.113) 和 (3.116) 给出了对 (3.112) 中估计的处理。反过来，(3.112) 和 (1.38) 蕴含

$$\left|(\partial_{X}^{\alpha}G^{L})(x,y)\right| \leq \frac{C(L,K,\alpha,y)}{|x-y|^{n-1+|\alpha|}} \quad \text{for all} \quad x\in\mathbb{R}^{n}_{+}\setminus K. \tag{3.117}$$

据此，对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$ 我们可以援引（3.96）来估计

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{N}_{\kappa}^{\mathbb{R}^{n}_{+}\setminus K}(\partial_{X}^{\alpha}G^{L})(\cdot,y)\Big)(x') &\leq \Big(\mathcal{N}_{\kappa}^{\mathbb{R}^{n}_{+}\setminus K}\Big(\frac{C_{L,K,\alpha,y}}{|\,\cdot-y|^{n-1+|\alpha|}}\Big)\Big)(x') \\ &\leq \frac{C_{L,K,\alpha,\kappa,y}}{1+|x'|^{n-1+|\alpha|}}, \end{aligned} \tag{3.118}$$

正如（1.39）中所断言的。进而，由（1.39）（与 $|\alpha|=0$ 一起使用）显然（1.7）也成立。因此，我们现在可以断定 $G^{L}(\cdot,\cdot)$（在（1.38）中定义）是 L 在 $\mathbb{R}^{n}_{+}$ 中的格林函数，其意义见定义 1.1。

接下来，让我们证明对于 L 在 $\mathbb{R}^{n}_{+}$中恰好存在一个格林函数，其意义见定义 1.1。至此的论证表明，若假定 $L=\left(a_{rs}^{\alpha\beta}\partial_{r}\partial_{s}\right)_{1\leq\alpha,\,\beta\leq M}$ 是弱椭圆且反射不变的，则它在 $\mathbb{R}^{n}_{+}$ 中至少有一个格林函数，其意义见定义 1.1。为证明其唯一性，设 $G_{1}(\cdot,\cdot)$，$G_{2}(\cdot,\cdot)$ 是两个这样的格林函数。固定任意一点 $y\in\mathbb{R}^{n}_{+}$ 并定义

$$u := G_{1}(\cdot,y)-G_{2}(\cdot,y) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^{n}_{+}\setminus\{y\}. \tag{3.119}$$

因此，性质（1.5）和（1.8）保证 $u\in\left[L^{1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^{n}_{+})\right]^{M\times M}$ 以及 $Lu=0$ 在 $\left[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n}_{+})\right]^{M\times M}$中。因此，椭圆正则性保证

$$u\in\left[\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{n}_{+})\right]^{M\times M} \quad \text{and} \quad Lu=0 \quad \text{pointwise in} \quad \mathbb{R}^{n}_{+}. \tag{3.120}$$

此外，（1.6）保证存在 $\kappa>0$ 使得

$$u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}=0 \quad \text{a.e. in} \quad \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.121}$$

此外，由（1.7）中的有限性条件以及（3.120）中的第一条性质可知$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x')\frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}<+\infty$。特别地，

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\mathcal{N}_\kappa u\big)(x')\frac{dx'}{1+|x'|^{n}}<+\infty. \tag{3.122}$$

接下来，我们声称

$$\begin{aligned}&\text{if } L \text{ is weakly elliptic and reflection invariant then any func-}\\&\text{tion } u \text{ satisfying (3.120)-(3.122) vanishes identically in } \mathbb{R}^n_+.\end{aligned} \tag{3.123}$$

为证明这一断言，注意由（1.36）可知 L 是反射不变的，当且仅当 $L^\top$ 是反射不变的。此外，从定义显然可知，L 是弱椭圆的，当且仅当 $L^\top$是弱椭圆的。因此，考虑 $G^{L^\top}(\cdot,\ \cdot)=\big(G^{L^\top}_{\alpha\gamma}(\cdot,\ \cdot)\big)_{1\le\alpha,\ \gamma\le M}$，即按照（1.38）中关于算子 $L^\top$定义的格林函数：

$$G^{L^\top}(x,y):=E^{L^\top}(x-y)-E^{L^\top}(x-\overline{y}) \quad \text{for all} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\text{diag}. \tag{3.124}$$

接下来，固定任意一点 $y\in\mathbb{R}^n_+$。当前证明第一部分中得到的结果（将 L替换为 $L^\top$）表明，对于每个满足 $y\in\mathring{K}$ 的 $\mathbb{R}^n_+$ 的紧子集 K，都存在一个常数 $C_{y,\ K}\in(0,\ \infty)$，使得

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}G^{L^\top}(\cdot,y)\big)(x')\le\frac{C_{y,K}}{1+|x'|^{n-1}} \quad \text{for each} \quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.125}$$

$$\big(\mathcal{N}_\kappa^{\mathbb{R}^n_+\setminus K}(\nabla_X G^{L^\top})(\cdot\,,y)\big)(x')\le\frac{C_{y,K}}{1+|x'|^{n}} \quad \text{for each} \quad x'\in\mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.126}$$

$$G^{L^\top}(\cdot\,,y)\in\big[W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M},\qquad G^{L^\top}(\cdot\,,y)\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}=0 \quad \text{a.e. on} \quad \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.127}$$

$$\text{and}\quad \big(\nabla_X G^{L^\top}\big)(\cdot\,,y)\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}} \quad \text{exists on} \quad \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.128}$$

$$L^\top\big[G^{L^\top}(\cdot\,,y)\big]=\delta_y\,I_{M\times M} \quad \text{in} \quad \big[\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)\big]^{M\times M}, \tag{3.129}$$

最后一个性质可由 (3.124) 看出。

此时，固定一个指标 $\eta\in\{1,\dots,M\}$，并令 u如 (3.119) 中所示，定义 $w:=(u_{\gamma\eta})_{1\le\gamma,\ \eta\le M}$。接下来，固定 $\gamma\in\{1,\dots,M\}$并引入 $v:=G^{L^\top}_{\gamma}(\cdot,y)$。我们应用引理 2.15，将 u替换为 w，并取上述的 v。性质 (3.120)-(3.122) 和 (3.125)-(3.128) 确保引理 2.15 的假设均得到满足。因此，由 (2.54) 和 (3.120)-(3.121) 可知，对于每个孔径参数 $\kappa>0$，有

$$u_{\gamma\eta}(y)=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(u_{\alpha\eta}\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big)a^{\beta\alpha}_{nn}\Big[\big(\partial_{X_n}G^{L^\top}_{\beta\gamma}\big)(\cdot,y)\Big]\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}d\mathscr{L}^{n-1}=0. \tag{3.130}$$

鉴于 y 和 γ，η 均为任意的，这便迫使 $u\equiv0$ 在 $\mathbb{R}^n_+$中成立，从而完成了（3.123）的证明。现在，这进一步意味着 $G_1(\cdot,\ \cdot)=G_2(\cdot,\ \cdot)$ 属于 $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}^n_+\setminus\text{diag}$，正如所需。

更进一步，（1.40）中所断言的性质，可由$G^L(\cdot,\ \cdot)$ 在（1.38）中给出的定义，以及基本解 E^L 与 L如定理2.8中那样典范相伴、为偶（参见（2.23））、反射不变，并满足记录于第（5）项的定理2.8之转置性质这一事实清楚地看出。最后，当 L如（1.1）-（1.2）中所述并且还

反射不变时，在（1.38）中构造的格林函数与定理1.2中的格林函数相重合，这一点由上述格林函数所具有的唯一性性质清楚地看出。因此，定理1.4的证明即告完成。□

接下来我们给出推论1.5。

推论 1.5 的证明。固定某个函数 $f=(f_\alpha)_{1\le\alpha\le M}\in\big[\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})\big]^M$，以及某个点 $x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+$ 和某个指标 $\gamma\in\{1,\dots,M\}$。将 (2.54) 特化到如下情形：对每个 $(z',s)\in\mathbb{R}^n_+$，有 $u(z',s):=(P_s^L*f)(z')$，且 $v:=\big(G_{\beta\gamma}^{L^\top}(\cdot,(x',t))\big)_{1\le\beta\le M}$由此得出结论：对每个 $\gamma\in\{1,\dots,M\}$ 以及每个 $(x',t)\in\mathbb{R}^n_+$，我们有（对任意选定的孔径参数 $\kappa>0$）

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\big(P_{\gamma\alpha}^L\big)_t(x'-z')f_\alpha(z')\,dz' &= (P_t^L*f)_\gamma(x')=u_\gamma(x',t)\\
&=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_\alpha(z')a_{nn}^{\beta\alpha}\Big(\Big[\big(\partial_{X_n}G_{\beta\gamma}^{L^\top}\big)\big(\cdot,(x',t)\big)\Big]\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big)(z',0)\,dz'\\
&=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_\alpha(z')a_{nn}^{\beta\alpha}\big(\partial_{X_n}G_{\beta\gamma}^{L^\top}\big)\big((z',0),(x',t)\big)\,dz'\\
&=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_\alpha(z')a_{nn}^{\beta\alpha}\big(\partial_{Y_n}G_{\gamma\beta}^{L}\big)\big((x',t),(z',0)\big)\,dz'\\
&=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}f_\alpha(z')a_{nn}^{\beta\alpha}\big(\partial_{Y_n}G_{\gamma\beta}^{L}\big)\big((x'-z',t),0\big)\,dz',
\end{aligned}\tag{3.131}$$

根据 (1.19)、(1.15) 和 (1.16)。由 f 的任意性可知，对每个α，$\gamma\in\{1,\dots,M\}$ 均有

$$\big(P_{\gamma\alpha}^L\big)_t(x'-z')=-a_{nn}^{\beta\alpha}\big(\partial_{Y_n}G_{\gamma\beta}^L\big)\big((x'-z',t),0\big)\tag{3.132}$$

对每个 $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$，$t>0$，以及几乎处处的 $z'\in\mathbb{R}^{n-1}$。由所涉及函数的连续性可知，(3.132) 实际上对每个 $z'\in\mathbb{R}^{n-1}$都成立。进一步将此恒等式特化到 z' 时：$=0'$ 以及 t 时：$=1$ 便得到 (1.41)。

由于 L 的格林函数是唯一的（参见定理 1.2证明中的步骤 6），由 (1.41) 可知，定理 L 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的泊松核（其存在性由定理 2.6保证）也是唯一的。

最后，推论 1.5陈述中的最后一项（关于 (1.42)）是 (1.41) 和 (1.38) 的推论。□

我们接下来证明定理1.6。

定理*1.6*的证明。全程假设 L 是一个 $M\times M$ 如（1.1）-（1.2）中所述的具有常复系数的系统。首先，假设 u如（1.43）所述，且满足附加假设

$$u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\ \text{ exists at }\mathscr{L}^{n-1}\text{-a.e. point in }\ \mathbb{R}^{n-1}.\tag{3.133}$$

那么，对于每个 $x=(x',\ t)\in\mathbb{R}^n_+$ 以及任意 $\gamma\in\{1.\dots,M\}$，都有

$$u_\gamma(x)=-\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Big(u_\alpha\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big)(z')a_{nn}^{\beta\alpha}\Big(\Big[\big(\partial_{X_n}G_{\beta\gamma}^{L^\top}\big)\big(\cdot,(x',t)\big)\Big]\Big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big)(z',0)\,dz'$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(u_\alpha\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big)(z')a^{\beta\alpha}_{nn}\big(\partial_{Y_n}G^L_{\gamma\beta}\big)\big((x'-z',t),0\big)\,dz'$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(P^L_{\gamma\alpha}\big)_t(x'-z')\Big(u_\alpha\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\Big)(z')\,dz'. \tag{3.134}$$

上面的第一个等式是 (2.54) 的推论（其中取 $v := G^{L^\top}_{\cdot\gamma}(\cdot,x)$，并令 K_2 为 x 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的一个小紧邻域）；其在当前情形下适用，由 (1.43)、(3.133) 以及 (1.15) 和 (1.12)-(1.13)（将其中的 L 替换为 $L^\top$）保证。对于 (3.134) 中的第二个等式，可以仿照 (3.131)（最后一部分）的情形加以论证。最后，(3.134) 中的最终等式由 (3.132) 得出。建立了 (3.134) 之后，所需的所有结论（即 (1.44) 中的结论）便可直接得到。

为了省去在（3.133）中所作的附加假设，设 u恰如（1.43）中那样。沿用先前的论证，以 $u(\cdot,\ \cdot+\varepsilon)$ 代替 u，其中 $\varepsilon>0$ 为任意，我们得到

$$u(x',t+\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P^L_t(x'-y')f_\varepsilon(y')\,dy' \quad \text{for each} \quad x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+, \tag{3.135}$$

其中我们已简记

$$f_\varepsilon := u(\cdot,\varepsilon):\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow\mathbb{C}^M \quad \text{for each} \quad \varepsilon>0. \tag{3.136}$$

如果我们还考虑权函数

$$\begin{gathered}\omega:\mathbb{R}^{n-1}\to(0,\infty)\ \text{defined as}\\ \omega(x') := (1+|x'|^{n-1})^{-1}\ \text{for each}\ x'\in\mathbb{R}^{n-1},\end{gathered} \tag{3.137}$$

则（1.43）中的最后一个条件蕴含

$$\sup_{\varepsilon>0}|f_\varepsilon| \le \mathcal{N}_\kappa u \in L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\,\omega\mathscr{L}^{n-1}\big). \tag{3.138}$$

鉴于此，弱-∗收敛结果（引理 2.3 ）可用于序列$\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\subset L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \omega\mathscr{L}^{n-1}\big)$，从而断定存在某个 $f\in L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \omega\mathscr{L}^{n-1}\big)$ 以及某个序列 $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset(0,\ \infty)$，该序列收敛于零，并具有如下性质

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y')f_{\varepsilon_j}(y')\frac{dy'}{1+|y'|^{n-1}} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y')f(y')\frac{dy'}{1+|y'|^{n-1}} \tag{3.139}$$

对每个属于 $\mathbb{R}^{n-1}$的有界连续函数 φ 。存在一个常数$C\in(0,\ \infty)$这一事实表明

$$|P^L(z')| \le \frac{C}{(1+|z'|^2)^{n/2}} \quad \text{for each} \quad z'\in\mathbb{R}^{n-1} \tag{3.140}$$

（参见条 目 *(a)* 定义 2.4）保证对每个固定点（x'，t）$\in\mathbb{R}^n_+$ 赋值

$$\begin{gathered}\mathbb{R}^{n-1}\ni y'\mapsto\varphi(y') := (1+|y'|^{n-1})P^L_t(x'-y')\in\mathbb{C}^{M\times M}\\ \text{is a bounded continuous function in}\ \mathbb{R}^{n-1}.\end{gathered} \tag{3.141}$$

此时，由（3.135）和（3.139）以及定义于（ φ3.141）中的函数（注意到 u在 $\mathbb{R}^n_+$中连续）可得

$$u(x',t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P^L_t(x'-y')f(y')\,dy' \quad \text{for each} \quad x=(x',t)\in\mathbb{R}^n_+. \tag{3.142}$$

有了这一点，并且由于 $L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \omega\mathscr{L}^{n-1}\big)\subseteq L^1\Big(\mathbb{R}^{n-1},\ \frac{dx'}{1+|x'|^n}\Big)$，我们可以应用命题 2.7 得出

$$u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}\ \text{exists and equals } f \text{ at } \mathscr{L}^{n-1}\text{-a.e. point in } \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3.143}$$

一旦这一点得到确立，(1.44) 中的所有结论便可由 (3.142)-(3.143) 推出。

在证明的第二部分，额外假设 L 具有反射不变性，并且现在假设 u如 (1.45) 所述。与之前一样，我们首先在 (3.133) 中所作的附加假设下进行论证。在此假设下，(3.134) 中的所有等式仍然成立。最值得注意的是，尽管现在 u 满足 (1.45) 中较弱的可积性条件，但 L 具有反射不变性这一事实确保格林函数满足 (1.39) 中列出的较强条件。二者共同使我们最终能够使用分部积分公式 (2.54)。(3.134) 中的其他所有内容仍可像之前一样得到证明，因为定理 1.2-1.4) 中构造的格林函数彼此相容。

为去掉 (3.133) 中所作的附加假设，我们像之前一样采用弱 $*$论证，但需注意，现在我们用权函数

$$\begin{gathered}\omega:\mathbb{R}^{n-1}\to(0,\infty)\ \text{defined as}\\ \omega(x'):=(1+|x'|^n)^{-1}\ \text{for each } x'\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{gathered} \tag{3.144}$$

这样的选择与（1.45）中的最后一个条件配合良好，因为它保证（3.138）仍然成立。这为应用引理 $*$中的弱2.3 收敛结果来处理序列 $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\subset L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \omega\mathscr{L}^{n-1}\big)$ 并得出存在 $f\in L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \omega\mathscr{L}^{n-1}\big)$ 以及一个序列 $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset(0,\ \infty)$，使其收敛于零，打开了大门:

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y')f_{\varepsilon_j}(y')\frac{dy'}{1+|y'|^n}=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y')f(y')\frac{dy'}{1+|y'|^n} \tag{3.145}$$

对每个属于 φ 的有界连续函数 $\mathbb{R}^{n-1}$。回顾（3.140）中记录的泊松核估计。这立即意味着，对于每个固定的点（x'，t）$\in\mathbb{R}^n_+$，映射

$$\begin{gathered}\mathbb{R}^{n-1}\ni y'\mapsto\varphi(y'):=(1+|y'|^n)P_t^L(x'-y')\in\mathbb{C}^{M\times M}\\ \text{is a bounded continuous function in } \mathbb{R}^{n-1}.\end{gathered} \tag{3.146}$$

此时，将（3.135）和（3.145）应用于在（φ）中定义的函数 3.146，并考虑到 u 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中的连续性，我们得到泊松积分表示公式（3.142）此时成立。既然如此，并且现在确实有 $L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \omega\mathscr{L}^{n-1}\big)=L^1\Big(\mathbb{R}^{n-1},\ \frac{dx'}{1+|x'|^n}\Big)$，我们可以依靠命题 2.7 再次得出（3.143）。这就证明了（1.46）中的第一个性质。

(1.46) 中的第二个性质由 (1.45) 的第一行和第二行推出（注意到 $u\big|_{\partial\mathbb{R}^n_+}^{\kappa-\text{n.t.}}$ 是可测函数，如 (3.143) 所示）。(1.46) 中最后一个性质由 (3.143) 和 (3.142) 显然可得。□

我们以推论 1.7 的证明结束本节。

推论 *1.7* 的证明。一般而言，对于每个 $m\geq 0$ 隶属关系 $f\in\mathscr{Z}_m$ 蕴含$f\in L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \frac{dx'}{1+|x'|^m}\big)$，因为 f是可测的，且 $|f|\leq\mathcal{M}f$几乎处处在 $\mathbb{R}^{n-1}$中。因此，对于每个$m\geq 0$ 我们有一个连续嵌入

$$\mathscr{Z}_m\hookrightarrow L^1\big(\mathbb{R}^{n-1},\ \tfrac{dx'}{1+|x'|^m}\big). \tag{3.147}$$

就边值问题 (1.49) 而言，可通过定义$u(x) := (P_t^L * f)(x')$，对每个 $x = (x', t) \in \mathbb{R}^n_+$，得到一个解。由于 $f \in [\mathscr{Z}_{n-1}]^M$，(3.147) 中的嵌入（取 $m := n-1$）蕴含 $f \in \Big[L^1\big(\mathbb{R}^{n-1}, \frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}}\big)\Big]^M$。有了这一点，命题 2.7 保证 u 是在 $\mathbb{R}^n_+$ 中有意义地定义的光滑函数，在 $\mathbb{R}^n_+$ 中满足 $Lu = 0$，并且

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\mathcal{N}_\kappa u)(x') \frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}} \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\mathcal{M} f)(x') \frac{dx'}{1+|x'|^{n-1}} = C\|f\|_{[\mathscr{Z}_{n-1}]^M} < \infty. \tag{3.148}$$

这些性质表明，u确实是（1.49）的一个解。根据（3.66），可知此解是唯一的。

在附加假设 L也具有反射不变性的情况下，以类似方式可证明边界值问题（1.50）的适定性，其中唯一性由（3.123）保证。□

References

[1] S. Agmon、A. Douglis 和 L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I* 12 1959 , , 《纯粹与应用数学通讯》, （）, 623–727。[2] S. Agmon、A. Douglis 和 L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II* 17 1964 , , 《纯粹与应用数学通讯》, （）, 35–92。[3] S. Axler、P. Bourdon 和 W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, 第二版, 《数学研究生教材》第137卷, Springer-Verlag, 纽约, 2001年。[4] K. Brewster、D. Mitrea、I. Mitrea 和 M. Mitrea, *Extending Sobolev functions with partially vanishing traces from locally ε δ -domains and applications to mixed boundary problems* 266 （, ）, 《泛函分析杂志》, （2014年）, 4314–4421。[5] H. Dong 和 S. Kim, *Green's function for nondivergence elliptic operators in two dimensions*, 《SIAM数学分析杂志》, 53（2021年）, 第4期, 4637–4656。[6] J. Garc´ıa-Cuerva 和 J. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North Holland, 阿姆斯特丹, 1985年。[7] S. Hofmann 和 S. Kim, *The Green function estimates for strongly elliptic systems of second order*, 《数学手稿》, 124（2007年）, 139–172。[8] S. Hofmann、M. Mitrea 和 M. Taylor, *Geometric and transformational properties of Lipschitz domains, Semmes-Kenig-Toro domains and other classes of finite perimeter domains* 17 2007 , , 《几何分析杂志》, （）, 第4期, 593–647。[9] S. Hofmann、M. Mitrea 和 M. Taylor, *Singular integrals and elliptic boundary problems on regularSemmes-Kenig-Toro domains*, 《国际数学研究通知》, 牛津大学出版社, 2010年（14）, 2567–2865。[10] S. Hwang 和 S. Kim, *Green's function for second order elliptic equations in non-divergence form* 《势论》, 52（2020年）, 27–39。[11] G. Kresin 和 V. Maz'ya, *Maximum Principles and Sharp Constants for Solutions of Elliptic and Parabolic Systems* 183, , 《数学调查与专著》第 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 2012年。[12] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya 和 J. Rossmann, *Spectral Problems Associated with Corner Singularities of Solutions to Elliptic Equations* 2001 , AMS, 。

[13] M. Laurel 和 M. Mitrea, *Weighted Morrey Spaces: Calderón-Zygmund Theory and Boundary Problems*, 《德格鲁伊特数学研究》第99卷, 2024年。[14] Ya.B. Lopatinski ˘ *On a method of reducing boundary value problems for systems of differential equations of elliptic type to regular integral equations* 1, 5 1953 2, 123 151 , （俄文）, 《乌克兰数学杂志》, （）, 第 – 期。

[15] J.J. Mar´ *A Fatou theorem and Poisson's integral*ın、*representation formula for elliptic systems in the upper-half space* 105 124 J.M. Martell、D. Mitrea、I. Mitrea 和 M. Mitrea，，第 – 页，载于《Clifford分析专题》，纪念Wolfgang Spr¨oßig专辑，S. Bernstein编，Birkh¨auser，2019年，[16] J.J. Mar´ *Singular Integrals Quantitative Flat-*ın、J. Marıa *ness and Boundary Problems* 344, ¨ 2022 Martell、D. Mitrea、I. Mitrea 和 M. Mitrea，，，，数学进展，第 卷，Birkhauser，。[17] J.M. Martell、D. Mitrea、I. Mitrea 和 M. Mitrea, *The Dirichlet problem for elliptic systems with data in Köthe function spaces* 32 2016 913 970 ，《伊比利亚美洲数学杂志》，第 卷（），–。[18] V. Maz'ya、M. Mitrea 和 T. Shaposhnikova, *The Dirichlet problem in Lipschitz domains with boundary data in Besov spaces for higher order elliptic systems with rough coefficients*，《数学分析杂志》，110（2010年），第1期，167–239。[19] D. Mitrea, *Distributions, Partial Differential Equations, and Harmonic Analysis*，第二版，Springer Nature Switzerland，2018年。[20] D. Mitrea、I. Mitrea、M. Mitrea, *Geometric Harmonic Analysis - Volume I: A Sharp Divergence Theorem with Nontangential Pointwise Traces* 72, 2022 ，《数学进展丛书》第 卷，Springer，。[21] D. Mitrea、I. Mitrea、M. Mitrea, *Geometric Harmonic Analysis - Volume II: Function Spaces Measuring Size and Smoothness on Rough Sets* 73, 2022 ，《数学进展丛书》第 卷，Springer，。[22] D. Mitrea、I. Mitrea、M. Mitrea, *Geometric Harmonic Analysis - Volume III: Integral Representations,Calderón-Zygmund Theory, Fatou Theorems, and Applications to Scattering*，《数学进展丛书》第74卷，Springer，2023年。[23] D. Mitrea、I. Mitrea、M. Mitrea, *Geometric Harmonic Analysis - Volume IV: Boundary Layer Potentialsin Uniformly Rectifiable Domains, and Applications to Complex Analysis*，《数学进展丛书》第75卷，Springer，2023年。[24] D. Mitrea、I. Mitrea、M. Mitrea, *Geometric Harmonic Analysis - Volume V: Fredholm Theory and FinerEstimates for Integral Operators, with Applications to Boundary Problems*，《数学进展丛书》第76卷，Springer，2023年。[25] M. Mitrea 和 P. Takemura, *Singular Integrals, Herz-type Function Spaces, and Boundary Problems*，书稿，2024年。[26] K.A. Ott、S. Kim 和 R.M. Brown, *The Green function for the mixed problem for the linear Stokes system in domains in the plane* 288 2015 4, 452 464 ，《数学新闻》，（），第 – 期。[27] Z.Ya. Shapiro, *The first boundary value problem for an elliptic system of differential equations*，（俄文），《数学文集》，28（1951年），第1期，55–78。[28] V.A. Solonnikov, *Estimates for solutions of general boundary value problems for elliptic systems*，《苏联科学院院刊》，151（1963年），783–785（俄文）。英译见《苏联数学》，4（1963年），1089–1091。[29] V.A. Solonnikov, *General boundary value problems for systems elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. I* ，（俄文），28 1964 665 706 《苏联科学院学报：数学辑》，（），–。[30] V.A. Solonnikov, *General boundary value problems for systems elliptic in the sense of A. Douglis and L. Nirenberg. II* ，（俄文），92 1966 233 297 《斯捷克洛夫数学研究所论著》，（），–。[31] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*，《普林斯顿数学丛书》第30号，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1970年。[32] E.M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*，《普林斯顿数学丛书》第43卷，《调和分析专著》，III，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1993年。[33] E.M. Stein 和 G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*，《普林斯顿数学丛书》，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1971年。[34] J.L. Taylor、S. Kim 和 R.M. Brown, *The Green function for elliptic systems in two dimensions*，《偏微分方程通讯》，38(9)（2012年），1574–1600。

Martin Dindoš, School of Mathematics, The University of Edinburgh and, Maxwell Institute of Mathematical Sciences, UK

Email address: M.Dindos@ed.ac.uk

Dorina Mitrea Department of Mathematics Baylor University 1410 , , , Sid Richardson Bldg., , , S. 4th Street Waco TX 76706 USA

Email address: Dorina_Mitrea@baylor.edu

Irina Mitrea, Department of Mathematics, Temple University, 1805 N. Broad Street, Philadel-phia, PA 19122, USA

Email address: imitrea@temple.edu

Marius Mitrea Department of Mathematics Baylor University 1410 , , , Sid Richardson Bldg., , , S. 4th Street Waco TX 76706 USA

Email address: Marius_Mitrea@baylor.edu