arXiv:2603.11255v1 [math.DG] 11 Mar 2026

论三维斜多项式环的光滑性

ANDRÉS RUBIANO 和 ARMANDO REYES

谨以此文献给 *Oswaldo Lezama*教授，祝贺他七十华诞

摘要。 本文是我们研究非交换代数族的微分光滑性系列论文的一部分。本文将这一主题应用于 Bell 和 Smith 所刻画的三维斜多项式环族 [2]。

1. 引言

Brzeziński 和 Sitarz [11] 定义了一种代数的光滑性概念，称为微分光滑性，因为它借助指定维数的微分分次代数；这种代数允许定义霍奇星同构的非交换版本。该概念考察了代数上的微分演算中顶形式的存在性，并将微分形式与积分形式复形之间的同构视为庞加莱对偶的一种链式版本。“代数微分光滑性 这一概念源于这样一种观察：经典的光滑可定向流形除了具有由微分形式构成的德拉姆复形外，还具有一个积分形式复形，该复形与德拉姆复形同构 [31, 第 4 节5]。德拉姆微分可以理解为一种特殊的左联络，而积分形式复形中的边界算子则是右联络的一个例子”[11, 第 413] 页。这种光滑性概念不同于文献中讨论的其他同调光滑性，而且更具构造性（有关该主题的更多详情，请参见 [4, 6, 14, 22, 29, 47, 49, 50]）。

自 Brzeziński 引入以来，Brzeziński 和多位作者（例如 [7] - [11], [15, 16, 27, 28, 38]）已刻画了不同类型非交换代数的微分光滑性，包括：量子球面、非交换环面、量子群 $SU_q(2)$ 的坐标代数、非交换枕形代数、量子多项式代数、霍普夫代数整环、若干类 Ore 扩张、一些三维斜多项式代数、由三个生成元生成的扩散代数，以及经典轨形实例变形后的非交换坐标代数。最近，在一系列论文 [41] - [46]，中，作者探讨了非交换代数几何中出现的不同类型代数的微分光滑性问题。本文关注的对象是 Bell 和 Smith 引入的三维斜多项式环

2020年 数学主题分类。 16E45, 16S30, 16S32, 16S36, 16S38, 16S99, 16T05, 58B34。关键词和短语。 微分光滑代数、可积微积分、斜多项式环。第二作者获哥伦比亚国立大学波哥大校区科学学院资助， [资助编号为 65488]。

[2], 这些代数已从环论和非交换代数几何的角度得到研究（例如 [12, 18, 33, 35, 36, 37, 39, 40], 及其中的参考文献）。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们介绍代数和三维斜多项式环的微分光滑性相关预备知识，以便确立记号并使本文自成一体。第3 节包含本文的原创结果：定理3.1给出了保证三维斜多项式环微分光滑的充分条件；定理3.2 则确立了断言这些环上不存在一维连通可积演算的充分条件。第4 节提出了一些未来可能的研究思路。

全文中， $\mathbb{N}$ 表示包含零的自然数集合。环一词指带单位元但不一定交换的结合环。所有向量空间和代数（均为结合且含单位元）都定义在固定的域 $\Bbbk$上。$\Bbbk^\times$ 表示 $\Bbbk$的非零元素。按照惯例，符号 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 分别表示实数域和复数域。按照惯例，$|\square|$表示集合 $\square$中元素的个数。$\mathrm{Aut}(R)$是环 R的自同构集合。

2. 定义与预备知识

2.1. **代数的微分光滑性**。 我们沿用 Brzeziński 和 Sitarz 关于微分光滑性的思路，这些思路见于 [11, 第 2](另见 [4, 6, 9])。

定义 2.1 ([11, 第 2 节.1]). (i) 微分分次代数 是一个非负分次代数 Ω，其乘积记作 $\wedge$，并配有一个次数为一的线性映射 $d\colon \Omega^\bullet \to \Omega^{\bullet+1}$ ，该映射满足分次莱布尼茨法则，且满足 $d\circ d = 0$。

(ii) 微分分次代数 $(\Omega\ d)$ 是代数上的微分演算 A ，如果

$\Omega^0 A = A$ 且 $\Omega^n A = A\ dA \wedge dA \wedge \cdots \wedge dA$ （dA 出现 $n-$ 次），

对于所有 $n \in \mathbb{N}$ （最后这一条件称为稠密性条件）。我们记作 $(\Omega A, d)$，其中 $\Omega A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Omega^n A$。由莱布尼茨法则可得

$$\Omega^n A = dA \wedge dA \wedge \cdots \wedge dA\ A.$$

微分演算 ΩA 称为连通，如果 $\ker(d\,|_{\Omega^0 A}) = \Bbbk$。

(iii) 若微分演算 $(\Omega A, d)$ 满足 $\Omega^n A \neq 0$ 且对所有 $m > n$ 都有 $\Omega^m A = 0$，则称其维数为 n 。若一个 n 维微分演算 ΩA 存在体积形式，则 $\Omega^n A$ 与 A 同构，且这种同构是左、右 A-模同构。

存在右 A-模同构意味着存在一个自由生成元，例如 ω，它是 $\Omega^n A$ 的右 A-模自由生成元，即 $\omega \in \Omega^n A$，使得 $\Omega^n A$ 的所有元素都能唯一表示为 ωa ，其中 $a \in A$。如果 ω 同时也是 $\Omega^n A$ 作为左 A-模的自由生成元，则称其为 ΩA 上的体积形式。

与体积形式 ω 对应的右 A-模同构 $\Omega^n A \to A$ 记作 π_ω，即

$$\pi_\omega(\omega a) = a, \quad \text{for all } a \in A. \tag{2.1}$$

利用 $\Omega^n A$ 作为左 A-模也同构于 A 这一事实，任一自由生成元 ω 通过如下公式诱导出 A 的一个代数自同态 ν_ω

$$a\omega = \omega \nu_\omega(a). \tag{2.2}$$

注意，若 ω 是体积形式，则 ν_ω 是代数自同构。

接下来，我们回顾 A上作为其微分演算之对偶的积分演算 的关键要素。

设$(\Omega A, d)$为 A上的微分演算。 n-形式的空间$\Omega^n A$ 是一个A-双模。考虑 $\mathcal{I}_n A$ $\Omega^n A$的右对偶，即所有右 A-线性映射$\Omega^n A \to A$的空间，也就是 $\mathcal{I}_n A := \mathrm{Hom}_A($ $\Omega^n(A)$ $A)$。注意，每一个 $\mathcal{I}_n A$ 都是一个 A-双模，其作用由下式给出

$$(a \cdot \phi \cdot b)(\omega) = a\phi(b\omega), \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{I}_n A,\ \omega \in \Omega^n A \text{ and } a, b \in A.$$

所有 $\mathcal{I}_n A$的直和，即 $\mathcal{I}A = \bigoplus_n \mathcal{I}_n A$，是一个右$\Omega A$-模，其作用由下式给出

$$(\phi \cdot \omega)(\omega') = \phi(\omega \wedge \omega'), \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{I}_{n+m} A,\ \omega \in \Omega^n A \text{ and } \omega' \in \Omega^m A. \tag{2.3}$$

定义 2.2 ([4, 定义 2.1])。 一个 散度 (也称为同态联络)，定义在A 上，是一个线性映射 $\nabla : \mathcal{I}_1 A \to A$ ，满足

$$\nabla(\phi \cdot a) = \nabla(\phi)a + \phi(da), \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{I}_1 A \text{ and } a \in A. \tag{2.4}$$

注意，散度可以扩展到整个 $\mathcal{I}A$,

$$\nabla_n : \mathcal{I}_{n+1} A \to \mathcal{I}_n A,$$

方法是考虑

$$\nabla_n(\phi)(\omega) = \nabla(\phi \cdot \omega) + (-1)^{n+1}\phi(d\omega), \quad \text{for all } \phi \in \mathcal{I}_{n+1}(A) \text{ and } \omega \in \Omega^n A. \tag{2.5}$$

将 (2.4) 和 (2.5) 合并，可得莱布尼茨法则

$$\nabla_n(\phi \cdot \omega) = \nabla_{m+n}(\phi) \cdot \omega + (-1)^{m+n}\phi \cdot d\omega, \tag{2.6}$$

对所有元素 $\phi \in \mathcal{I}_{m+n+1} A$ 和 $\omega \in \Omega^m A$ [4, 引理 3.2]。在 $n = 0$的情形下，若 $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ 被自然地识别为 M，则 ∇_0化为经典的莱布尼茨法则。

定义 2.3 ([4, 定义 3.4])。 右 A-模映射

$$F = \nabla_0 \circ \nabla_1 : \mathrm{Hom}_A(\Omega^2 A, M) \to M$$

称为同态联络 (M, ∇_0) 的曲率。若其曲率为零映射，则称 (M, ∇_0) 为平坦的，也就是说，若 $\nabla \circ \nabla_1 = 0$。该条件意味着，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\nabla_n \circ \nabla_{n+1} = 0$ 。

$\mathcal{I}A$ 与 ∇_n 共同构成一个链复形，称为 A上的积分形式复形。 ∇的余核映射，即 $\Lambda : A \to \mathrm{Coker}\nabla = A/\mathrm{Im}\nabla$ ，称为与 $\mathcal{I}A$相关联的 A 上的积分。

给定一个左 A-模 X，其作用为 $a \cdot x$，对所有 $a \in A,\ x \in X$ 均成立；再给定 A 的一个代数自同构 ν，记号 ${}^{\nu}X$ 表示具有由 ν 扭曲的 A-模结构的 X，即其 A-作用为 $a \otimes x \mapsto \nu(a) \cdot x$。

下述可积微分演算 的定义旨在刻画可微流形的微分形式复形与其对偶模复形之间的一种霍奇星同构 [7, p. 112]。

定义 2.4 ([11, 定义 2.1])。 若一个 n 维微分演算 $(\Omega A,\ d)$ 满足条件： $(\Omega A,\ d)$ 存在一个积分形式复形 $(\mathcal{I}A,\ \nabla)$，则称其为可积，其中

存在 A 的一个代数自同构 ν，以及 A-双模同构$\Theta_k\colon \Omega^k A \to {}^{\nu}\mathcal{I}_{n-k}A$, $k=0,\ldots,n$, 使下图交换:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
A & \xrightarrow{d} & \Omega^1 A & \xrightarrow{d} & \Omega^2 A & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d} & \Omega^{n-1}A & \xrightarrow{d} & \Omega^n A \\
\downarrow{\scriptstyle \Theta_0} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_1} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_2} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_{n-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \Theta_n} \\
{}^{\nu}\mathcal{I}_n A & \xrightarrow[\nabla_{n-1}]{} & {}^{\nu}\mathcal{I}_{n-1}A & \xrightarrow[\nabla_{n-2}]{} & {}^{\nu}\mathcal{I}_{n-2}A & \xrightarrow[\nabla_{n-3}]{} & \cdots & \xrightarrow[\nabla_1]{} & {}^{\nu}\mathcal{I}_1 A & \xrightarrow[\nabla]{} & {}^{\nu}A
\end{array}$$

称 n 形式 $\omega := \Theta_n^{-1}(1) \in \Omega^n A$ 为可积体积形式。

复矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 具有 n 维微分演算，由 Dubois-Violette 等人提出的导子生成。 [15, 16], 量子群$SU_q(2)$具有 Woronowicz 建立的三维左协变微分演算 [51] ，以及带有上述微分演算限制的量子标准球面，都是具有可积演算的代数的例子。

以下命题表明，无需明确提及积分形式，也可以定义微分演算的可积性。通过考察有限个生成元的存在性，我们可以确保可积性；这些生成元可用于确定 $\Omega(A)$ 中任意齐次元的左、右分量。

命题 2.5 ([11, 定理 2.2])。 设$(\Omega A, d)$ 是代数 A 上的 n 维微分演算。以下断言等价:

(1) $(\Omega A, d)$ 是一个可积微分演算。(2) 存在 A 的一个代数自同构 ν 以及 A-双模同构

$$\Theta_k : \Omega^k A \to {}^{\nu}\mathcal{I}_{n-k}A, \quad k=0,\ldots,n,$$

使得对所有 $\omega' \in \Omega^k A$ 与 $\omega'' \in \Omega^m A$，我们有

$$\Theta_{k+m}(\omega' \wedge \omega'') = (-1)^{(n-1)m}\Theta_k(\omega')\cdot\omega''.$$

(3) 存在 A 的一个代数自同构 ν 以及一个 A-双模映射 $\vartheta\colon \Omega^n A \to {}^{\nu}A$，使得所有左乘映射

$$\begin{aligned} \ell^k_{\vartheta} : \Omega^k A &\to \mathcal{I}_{n-k}A, \\ \omega' &\mapsto \vartheta\cdot\omega', \quad k=0,1,\ldots,n, \end{aligned}$$

其中作用 $\cdot$ 由(2.3)定义，均为双射。

(4) $(\Omega A, d)$ 具有体积形式 ω，使得所有左乘映射

$$\begin{aligned} \ell^k_{\pi_\omega} : \Omega^k A &\to \mathcal{I}_{n-k}A, \\ \omega' &\mapsto \pi_\omega\cdot\omega', \quad k=0,1,\ldots,n-1, \end{aligned}$$

其中 π_ω 由(2.1)定义，均为双射。

体积形式 $\omega \in \Omega^n A$ 是 可积形式，当且仅当它满足条件(4)（命题2）。5 [11, 注记2。3]

微分微积分中最有趣的情形，是那些$\Omega^k A$ 作为右或左（或双侧） A-模为有限生成且投射的情形（更多细节参见[5]）。

命题 2.6。 (1) [11, 引理 2。6] 设 $(\Omega A,\ d)$ 是 A 上的一个可积且具有 n 维的微分演算，其可积形式为 ω。那么，$\Omega^k A$ 是有限

生成的投射右 A-模，当且仅当存在有限个形式 $\omega_i \in \Omega^k A$ 和 $\omega_i \in \Omega^{n-k} A$，使得对于所有 $\omega' \overline{\in} \Omega^k A$，都有

$$\omega' = \sum_i \omega_i \pi_\omega(\overline{\omega}_i \wedge \omega').$$

(2) [11, 引理 2.7] 设 $(\Omega A, d)$ 为一个 n-维微分演算，定义在 A 上，并容许体积形式 ω。假设对所有 $k = 1, \ldots\ldots, \underline{n-1}$，存在有限多个形式 ω_i^k，$\omega_i^k \in \Omega^k(A)$ 使得对所有 $\omega' \in \Omega^k A$，我们有

$$\omega' = \sum_i \omega_i^k \pi_\omega(\overline{\omega}_i^{n-k} \wedge \omega') = \sum_i \nu_\omega^{-1}(\pi_\omega(\omega' \wedge \omega_i^{n-k}))\overline{\omega}_i^k,$$

其中 π_ω 与 ν_ω 分别由 (2.1)与 (2.2)定义。则 ω 是积分形式，且所有 $\Omega^k A$ 作为左、右 A-模都是有限生成且投射的。

Brzeziński 与 Sitarz [11, 第 421] 页指出，为了将可积微积分 $(\Omega A, d)$ 的维数与底仿射代数 A的“规模”联系起来，需要一个合适的维数概念：其 Gelfand-Kirillov 维数 GK 维数(A)由 Gelfand 与 Kirillov [19, 20] 引入（在某种意义上，这一维数衡量代数 A偏离有限维性的程度）。关于这一维数的更多细节，见 Krause 与 Lenagan [30]的出色论述。

我们接下来介绍本文的关键概念。

定义 2.7 ([11, 定义 2.4])：若仿射代数 A 的 Gelfand-Kirillov 维数为整数 n，且存在一个 n 维连通可积微分演算（ΩA， d），则称其为微分光滑代数。

由定义2.7 可知，微分光滑代数具有良好性质的微分结构以及精确的积分概念 [10,第 2414]页。

正如我们在引言中所述，已有若干非交换代数被证明是微分光滑的（例如 [7, 9, 10, 11, 27, 28, 38]）。当然，也存在并非微分光滑的代数。考虑交换代数 $A = \mathbb{C}[x, y]/\langle xy \rangle$。反证法表明，对于该代数，在 A上不存在一维连通可积微分演算，因此它不可能是微分光滑的 [11, 例 2.5]。

2.2. **三维斜多项式代数。** Bell 和 Smith [2] （另见[40, 定义 C4.3]）将三维斜多项式环定义为由不定元 x、 y、 z生成的$\Bbbk$-代数，并受以下关系约束

$$yz - \alpha zy = \lambda, \quad zx - \beta xz = \mu \quad \text{and } xy - \gamma yx = \nu,$$

使得

(i) λ、 μ、 $\nu \in \Bbbk + \Bbbk x + \Bbbk y + \Bbbk z$，以及 α、 β、 $\gamma \in \Bbbk \setminus \{0\}$；且 (ii) 标准单项式 $\{x^i y^j z^l \mid i, j, l \geq 0\}$ 构成代数 A 的 $\Bbbk$-基。

这些斜多项式环的分类将在下面的命题中给出。

命题 2.8 ([40, 定理C.4.3.1])。 若 A 是三维斜多项式环，则 A 是以下代数之一：

(1) 若 $|\{\alpha,\beta,\gamma\}|=3$，则 A 由以下关系给出

$$yz-\alpha zy=0,\ zx-\beta xz=0 \text{ and } xy-\gamma yx=0.$$

(2) 若 $|\{\alpha,\beta,\gamma\}|=2$ 和 $\beta\neq\alpha=\gamma=1$，则 A 是下列代数之一：

(i) $yz-zy=z$、$zx-\beta xz=y$ 和 $xy-yx=x$ (若 $\beta=-1$，则得到 *Dispin* 代数)。(ii) $yz-zy=z$、$zx-\beta xz=b$ 和 $xy-yx=x$；**(iii)** $yz-zy=0$、$zx-\beta xz=y$ 和 $xy-yx=0$；**(iv)** $yz-zy=0$、$zx-\beta xz=b$ 和 $xy-yx=0$；**(v)** $yz-zy=az$、$zx-\beta xz=0$ 和 $xy-yx=x$；**(vi)** $yz-zy=z$、$zx-\beta xz=0$ 和 $xy-yx=0$，

其中 a、b 是 $\Bbbk$ 的任意元素。b 的所有非零取值都给出同构的代数。

(3) 若 $|\{\alpha,\beta,\gamma\}|=2$ 且 $\beta\neq\alpha=\gamma\neq1$，则 A 是以下代数之一：

(i) $yz-\alpha zy=0$，$zx-\beta xz=y+b$ 和 $xy-\alpha yx=0$；
(ii) $yz-\alpha zy=0$，$zx-\beta xz=b$ 和 $xy-\alpha yx=0$。
在此情况下，b 是 $\Bbbk$ 的任意元素。同样，b 的任意非零取值都给出同构的代数。

(4) 若 $\alpha=\beta=\gamma\neq1$，则 A 是由以下关系定义的代数

$$\begin{aligned} yz-\alpha zy&=a_1x+b_1,\\ zx-\alpha xz&=a_2y+b_2, \text{ and}\\ xy-\alpha yx&=a_3z+b_3.\end{aligned}$$

若对所有 i 都有 $a_i=0$，则 b_i 的所有非零取值都会给出同构的代数。(5) 若 $\alpha=\beta=\gamma=1$，则 A 同构于以下代数之一：

(i) $yz-zy=x$、$zx-xz=y$ 和 $xy-yx=z$；**(ii)** $yz-zy=0$、$zx-xz=0$ 和 $xy-yx=z$；**(iii)** $yz-zy=0$、$zx-xz=0$ 和 $xy-yx=b$；**(iv)** $yz-zy=-y$、$zx-xz=x+y$ 和 $xy-yx=0$；**(v)** $yz-zy=az$、$zx-xz=z$ 和 $xy-yx=0$；参数 a、$b\in\Bbbk$ 任意，且 b 的所有非零取值都会生成同构的代数。

注2.9。正如我们上文所见，Rosenberg [40, 定理 C4.3.1，第 (5)(v) 种情形，第101] 页给出了如下关系

$$yz-zy=az,\ zx-xz=x \quad \text{and} \quad xy-yx=0.$$

然而，通过 Bergman 菱形引理可以验证，第二个关系中存在一个笔误 [3]，而该引理可用于保证该代数的 PBW 基（更多详情见注释 2.11）。事实上，他将该代数表示为如下 Ore 扩张[34]:

$$A=\Bbbk[x,y][z;\varphi],$$

其中，$\varphi\in\mathrm{Aut}(\Bbbk[x,y])$ 由 $\varphi(x)=x+1$ 和 $\varphi(y)=y-a$ [40, p. 108] 给出。根据定义规则 $za=\varphi(a)z$ 对所有 $a\in\Bbbk[x,y]$，我们得到

$$\begin{aligned} zx=\varphi(x)z=(x+1)z \quad &\text{whence} \quad zx-xz=z,\\ zy=\varphi(y)z=(y-a)z \quad &\text{i.e.} \quad yz-zy=az.\end{aligned}$$

因此，情形 (5)(v) 的正确定义关系为

$$yz - zy = az,\ zx - xz = z, \quad \text{and} \quad xy - yx = 0.$$

我们来看一些出现在Bavula 中的三维斜多项式环的显著例子 [1]。

例 2.10. (i) 三个不定元上的交换多项式环 $\Bbbk[x, y, z]$。(ii) 李代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 的泛包络代数 $U(\mathfrak{sl}(2))$。(iii) 由以下关系给出的商代数 $U(\mathcal{N})/\langle c-1\rangle$

$$\begin{aligned} xy - yx &= z, \\ xz - zx &= 0 \quad \text{and} \\ yz - zy &= 1. \end{aligned}$$

正如所见， $U(\mathcal{N})/\langle c-1\rangle$ 是其子代数的张量积 $A_1 \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[x']$：Weyl代数 $A_1 = \Bbbk\{y, z\}/\langle yz - zy - 1\rangle$ 和多项式代数 $\Bbbk[x']$，其中 $x' = x + \frac{1}{2}z^2$。

(iv)

$$U(\mathfrak{n}_2 \times \Bbbk z) \cong \Bbbk\{x, y, z\}/\langle xy - yx - y\rangle,$$

其中 z 是一个中心元。

(v)

$$U(\mathcal{M})/\langle c-1\rangle \cong \Bbbk\{x, y, z\}/\langle xy - yx = y,\ xz - zx = 1,\ yz - zy = 0\rangle.$$

注意， $U(\mathcal{M})/\langle c-1\rangle$ 是一个斜多项式代数 $A_1[y;\ \sigma]$ 其中

$$A_1 = \Bbbk\{x, z\}/\langle xz - zx - 1\rangle$$

是 Weyl代数，且 σ 是由以下规则给出的 A_1 的一个自同构：$\sigma(x) = x + 1$ 和 $\sigma(z) = z$。

(vi) Zhedanov 在第 [52, 节引入了*Askey-Wilson*代数 $AW(3)$，它是由三个算子 K_0, K_1 和 K_2生成的代数，这些算子满足以下对易关系

$$\begin{aligned} [K_0, K_1]_\omega &= K_2, \\ [K_2, K_0]_\omega &= BK_0 + C_1K_1 + D_1 \quad \text{and} \\ [K_1, K_2]_\omega &= BK_1 + C_0K_0 + D_0 \end{aligned}$$

其中 B, C_0, C_1, D_0 和 D_1 是该代数的结构常数，Zhedanov 假定它们为实数，而 q-对易子 $[-,-]_\omega$ 定义为

$$[\square, \triangle]_\omega := e^{\omega}\square\triangle - e^{-\omega}\triangle\square, \quad \text{where } \omega \in \mathbb{R}^{\times}.$$

注意，在极限 $\omega \to 0$ 下，代数 AW(3) 变为一个具有三个生成元的普通李代数（D_0 和 D_1 也被列为该代数的结构常数，以便涵盖海森堡–外尔型代数）。定义该代数的关系可写为

$$\begin{aligned} e^{\omega}K_0K_1 - e^{-\omega}K_1K_0 &= K_2, \\ e^{\omega}K_2K_0 - e^{-\omega}K_0K_2 &= BK_0 + C_1K_1 + D_1 \quad \text{and} \\ e^{\omega}K_1K_2 - e^{-\omega}K_2K_1 &= BK_1 + C_0K_0 + D_0. \end{aligned}$$

(vii) *Dispin* 代数 $U(\mathfrak{osp}(1,2))$ 由域 $\Bbbk$ 上的不定元 x、y、z生成，并满足以下关系

$$\begin{aligned} yz - zy &= z, \\ zx + xz &= y \quad \text{and} \\ xy - yx &= x. \end{aligned}$$

（viii）*Woronowicz*代数 $W_\nu(\mathfrak{sl}(2,\Bbbk))$ 由 Woronowicz 引入 [51]，它由 x、y、z生成，其定义关系为

$$\begin{aligned} xz - \nu^4 zx &= (1+\nu^2)x, \\ xy - \nu^2 yx &= \nu z \quad \text{and} \\ zy - \nu^4 yz &= (1+\nu^2)y \end{aligned}$$

（ix）Smith [48] 研究了与泛包络代数相似及不同的代数，该泛包络代数来自 $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$，即 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的泛包络代数。固定$f(h) \in \mathbb{C}[h]$ 并定义满足以下关系的 $\mathbb{C}$-代数 A

$$\begin{aligned} hx - xh &= x, \\ hy - yh &= -y \quad \text{and} \\ xy - yx &= f(H). \end{aligned}$$

如果 $\deg(f) \leq 1$，则 A 是一个包络代数的因子环。特别地，如果 $xy - yx = \alpha h + \beta$ 且 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$，则有以下可能性：

- 如果 $\alpha = 0$ 且 $\beta \neq 0$，则 $A \cong \mathbb{C}[t,\partial] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[s]$，其中 t 和 s 是交换不定元，且 $\partial = d/dt$。
- 若 $\alpha = 0$ 且 $\beta = 0$，则 $A \cong U(\mathfrak{h})$，其中 $\mathfrak{h}$ 是一个三维可解李代数。
- 若 $\alpha \neq 0$，则 $A \cong U(\mathfrak{sl}(2))$。

(x) 按照 Havliček 等人 [23, 第 79] 页（另见 [17, 32]），$\mathbb{C}$-代数$U_q'(\mathfrak{so}_3)$由不定元 I_1，I_2和 I_3生成，并服从如下给出的关系

$$\begin{aligned} I_2 I_1 - q I_1 I_2 &= -q^{\frac{1}{2}} I_3, \\ I_3 I_1 - q^{-1} I_1 I_3 &= q^{-\frac{1}{2}} I_2 \quad \text{and} \\ I_3 I_2 - q I_2 I_3 &= -q^{\frac{1}{2}} I_1, \end{aligned}$$

其中 q 是 $\mathbb{C}$的一个非零元。容易证明，$U_q'(\mathfrak{so}_3)$不能表示为 $\mathbb{C}$的迭代 Ore 扩张。

注 2.11. 从第2.2节考虑如下给出的记号

$$\begin{aligned} yz - \alpha zy &= a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda z + d_\lambda, \\ zx - \beta xz &= a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu \quad \text{and} \\ xy - \gamma yx &= a_\nu x + b_\nu y + c_\nu z + d_\nu, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中诸元素 a、b、c、d属于 $\Bbbk$，以及 $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \Bbbk \setminus \{0\}$。

固定 $x \prec y \prec z$。利用 Bergman 菱形引理，可以建立必要且充分的条件，以确保标准单项式 $\{x^i y^j z^l \mid i,j,l \geq 0\}$构成一个 $\Bbbk$-基。考虑到上述记号，这些关系可如下得出（参见 [39, 第 5]节）。

由于 α，β，$\gamma \neq 0$，定义关系导出以下重写规则

$$\begin{aligned} f_{21} &= \gamma^{-1}xy - \gamma^{-1}a_\nu x - \gamma^{-1}b_\nu y - \gamma^{-1}c_\nu z - \gamma^{-1}d_\nu, \\ f_{32} &= \alpha^{-1}yz - \alpha^{-1}a_\lambda x - \alpha^{-1}b_\lambda y - \alpha^{-1}c_\lambda z - \alpha^{-1}d_\lambda, \\ f_{31} &= \beta xz + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu, \end{aligned}$$

只需检查 zyx 的两个归约相同，即

$$zf_{21} = f_{32}x. \tag{2.8}$$

注意

$$\begin{aligned} zf_{21} &= z\big(\gamma^{-1}xy - \gamma^{-1}a_\nu x - \gamma^{-1}b_\nu y - \gamma^{-1}c_\nu z - \gamma^{-1}d_\nu\big) \\ &= \gamma^{-1}zxy - \gamma^{-1}a_\nu zx - \gamma^{-1}b_\nu zy - \gamma^{-1}c_\nu z^2 - \gamma^{-1}d_\nu z. \end{aligned}$$

利用 zx 和 zy的规则，我们得到等式

$$\begin{aligned} zxy &= (zx)y \\ &= (\beta xz + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu)y \\ &= \beta xzy + a_\mu xy + b_\mu y^2 + c_\mu zy + d_\mu y \\ &= \beta x\big(\alpha^{-1}yz - \alpha^{-1}a_\lambda x - \alpha^{-1}b_\lambda y - \alpha^{-1}c_\lambda z - \alpha^{-1}d_\lambda\big) \\ &\quad + a_\mu xy + b_\mu y^2 + c_\mu\big(\alpha^{-1}yz - \alpha^{-1}a_\lambda x - \alpha^{-1}b_\lambda y - \alpha^{-1}c_\lambda z - \alpha^{-1}d_\lambda\big) + d_\mu y \\ &= \frac{\beta}{\alpha}xyz - \frac{\beta a_\lambda}{\alpha}x^2 - \frac{\beta b_\lambda}{\alpha}xy - \frac{\beta c_\lambda}{\alpha}xz - \frac{\beta d_\lambda}{\alpha}x \\ &\quad + a_\mu xy + b_\mu y^2 + \frac{c_\mu}{\alpha}yz - \frac{a_\lambda c_\mu}{\alpha}x - \frac{b_\lambda c_\mu}{\alpha}y - \frac{c_\lambda c_\mu}{\alpha}z - \frac{c_\mu d_\lambda}{\alpha} + d_\mu y. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} -a_\nu zx &= -a_\nu\big(\beta xz + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu\big) \\ &= -\beta a_\nu xz - a_\mu a_\nu x - a_\nu b_\mu y - a_\nu c_\mu z - a_\nu d_\mu, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -b_\nu zy &= -b_\nu\big(\alpha^{-1}yz - \alpha^{-1}a_\lambda x - \alpha^{-1}b_\lambda y - \alpha^{-1}c_\lambda z - \alpha^{-1}d_\lambda\big) \\ &= -\frac{b_\nu}{\alpha}yz + \frac{a_\lambda b_\nu}{\alpha}x + \frac{b_\lambda b_\nu}{\alpha}y + \frac{b_\nu c_\lambda}{\alpha}z + \frac{b_\nu d_\lambda}{\alpha}. \end{aligned}$$

这样一来,

$$\begin{aligned} zf_{21} = \frac{\beta}{\alpha\gamma}xyz &- \frac{\beta a_\lambda}{\alpha\gamma}x^2 + \frac{\alpha a_\mu - \beta b_\lambda}{\alpha\gamma}xy - \frac{\beta(\alpha a_\nu + c_\lambda)}{\alpha\gamma}xz + \frac{b_\mu}{\gamma}y^2 + \frac{-b_\nu + c_\mu}{\alpha\gamma}yz \\ &- \frac{c_\nu}{\gamma}z^2 + \frac{a_\lambda b_\nu - a_\lambda c_\mu - \alpha a_\mu a_\nu - \beta d_\lambda}{\alpha\gamma}x + \frac{-\alpha a_\nu b_\mu + \alpha d_\mu + b_\lambda b_\nu - b_\lambda c_\mu}{\alpha\gamma}y \\ &+ \frac{-\alpha a_\nu c_\mu - \alpha d_\nu + b_\nu c_\lambda - c_\lambda c_\mu}{\alpha\gamma}z + \frac{-\alpha a_\nu d_\mu + b_\nu d_\lambda - c_\mu d_\lambda}{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned} f_{32}x &= \big(\alpha^{-1}yz - \alpha^{-1}a_\lambda x - \alpha^{-1}b_\lambda y - \alpha^{-1}c_\lambda z - \alpha^{-1}d_\lambda\big)x \\ &= \alpha^{-1}yzx - \alpha^{-1}a_\lambda x^2 - \alpha^{-1}b_\lambda yx - \alpha^{-1}c_\lambda zx - \alpha^{-1}d_\lambda x. \end{aligned}$$

我们首先化简 yzx:

$$\begin{aligned} yzx &= y(zx) \\ &= y(\beta xz + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu) \\ &= \beta yxz + a_\mu yx + b_\mu y^2 + c_\mu yz + d_\mu y. \end{aligned}$$

利用 yx的规则，我们得到

$$\begin{aligned} yxz &= \big(\gamma^{-1}xy - \gamma^{-1}a_\nu x - \gamma^{-1}b_\nu y - \gamma^{-1}c_\nu z - \gamma^{-1}d_\nu\big)z \\ &= \gamma^{-1}xyz - \gamma^{-1}a_\nu xz - \gamma^{-1}b_\nu yz - \gamma^{-1}c_\nu z^2 - \gamma^{-1}d_\nu z, \end{aligned}$$

并且类似地

$$a_\mu yx = a_\mu\big(\gamma^{-1}xy - \gamma^{-1}a_\nu x - \gamma^{-1}b_\nu y - \gamma^{-1}c_\nu z - \gamma^{-1}d_\nu\big).$$

因此

$$\begin{aligned} yzx = \frac{\beta}{\gamma}xyz + \frac{a_\mu}{\gamma}xy - \frac{\beta a_\nu}{\gamma}xz + b_\mu y^2 + \left(c_\mu - \frac{\beta b_\nu}{\gamma}\right)yz - \frac{\beta c_\nu}{\gamma}z^2 \\ - \frac{a_\mu a_\nu}{\gamma}x + \left(d_\mu - \frac{a_\mu b_\nu}{\gamma}\right)y - \left(\frac{a_\mu c_\nu}{\gamma} + \frac{\beta d_\nu}{\gamma}\right)z - \frac{a_\mu d_\nu}{\gamma}. \end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned} -b_\lambda yx &= -b_\lambda\big(\gamma^{-1}xy - \gamma^{-1}a_\nu x - \gamma^{-1}b_\nu y - \gamma^{-1}c_\nu z - \gamma^{-1}d_\nu\big) \\ &= -\frac{b_\lambda}{\gamma}xy + \frac{a_\nu b_\lambda}{\gamma}x + \frac{b_\lambda b_\nu}{\gamma}y + \frac{b_\lambda c_\nu}{\gamma}z + \frac{b_\lambda d_\nu}{\gamma}, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} -c_\lambda zx &= -c_\lambda\big(\beta xz + a_\mu x + b_\mu y + c_\mu z + d_\mu\big) \\ &= -\beta c_\lambda xz - a_\mu c_\lambda x - b_\mu c_\lambda y - c_\lambda c_\mu z - c_\lambda d_\mu. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} f_{32}x = \frac{\beta}{\alpha\gamma}xyz - \frac{a_\lambda}{\alpha}x^2 + \frac{a_\mu - b_\lambda}{\alpha\gamma}xy - \frac{\beta(a_\nu + \gamma c_\lambda)}{\alpha\gamma}xz + \frac{b_\mu}{\alpha}y^2 + \frac{\gamma c_\mu - \beta b_\nu}{\alpha\gamma}yz \\ - \frac{\beta c_\nu}{\alpha\gamma}z^2 + \frac{-\gamma a_\mu c_\lambda - a_\mu a_\nu + a_\nu b_\lambda - \gamma d_\lambda}{\alpha\gamma}x + \frac{-a_\mu b_\nu + b_\lambda b_\nu - \gamma b_\mu c_\lambda + \gamma d_\mu}{\alpha\gamma}y \\ + \frac{-a_\mu c_\nu + b_\lambda c_\nu - \beta d_\nu - \gamma c_\lambda c_\mu}{\alpha\gamma}z + \frac{-a_\mu d_\nu + b_\lambda d_\nu - \gamma c_\lambda d_\mu}{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

将两个约化表达式相减，得到如下结果:

$$\begin{aligned} (zf_{21} - f_{32}x) = &\frac{a_\lambda(\gamma - \beta)}{\alpha\gamma}x^2 + \frac{a_\mu(\alpha - 1) + b_\lambda(1 - \beta)}{\alpha\gamma}xy + \frac{b_\mu(\alpha - \gamma)}{\alpha\gamma}y^2 \\ &+ \frac{\beta\big(a_\nu(1 - \alpha) + c_\lambda(\gamma - 1)\big)}{\alpha\gamma}xz + \frac{b_\nu(\beta - 1) + c_\mu(1 - \gamma)}{\alpha\gamma}yz + \frac{c_\nu(\beta - \alpha)}{\alpha\gamma}z^2 \\ &+ \frac{a_\lambda b_\nu - a_\lambda c_\mu + a_\mu a_\nu(1 - \alpha) + \gamma a_\mu c_\lambda - a_\nu b_\lambda + (\gamma - \beta)d_\lambda}{\alpha\gamma}x \\ &+ \frac{a_\mu b_\nu - \alpha a_\nu b_\mu - b_\lambda c_\mu + \gamma b_\mu c_\lambda + (\alpha - \gamma)d_\mu}{\alpha\gamma}y \\ &+ \frac{a_\mu c_\nu - \alpha a_\nu c_\mu - b_\lambda c_\nu + b_\nu c_\lambda + (\gamma - 1)c_\lambda c_\mu + (\beta - \alpha)d_\nu}{\alpha\gamma}z \\ &+ \frac{a_\mu d_\nu - \alpha a_\nu d_\mu - b_\lambda d_\nu + b_\nu d_\lambda + \gamma c_\lambda d_\mu - c_\mu d_\lambda}{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

因此，表达式（2.8）成立，当且仅当上述各系数均为零，即:

$$a_\lambda(\gamma-\beta)=0, \tag{2.9}$$
$$a_\mu(\alpha-1)+b_\lambda(1-\beta)=0, \tag{2.10}$$
$$b_\mu(\alpha-\gamma)=0, \tag{2.11}$$
$$a_\nu(1-\alpha)+c_\lambda(\gamma-1)=0, \tag{2.12}$$
$$b_\nu(\beta-1)+c_\mu(1-\gamma)=0, \tag{2.13}$$
$$c_\nu(\beta-\alpha)=0, \tag{2.14}$$
$$a_\lambda b_\nu-a_\lambda c_\mu+a_\mu a_\nu(1-\alpha)+\gamma a_\mu c_\lambda-a_\nu b_\lambda+(\gamma-\beta)d_\lambda=0, \tag{2.15}$$
$$a_\mu b_\nu-\alpha a_\nu b_\mu-b_\lambda c_\mu+\gamma b_\mu c_\lambda+(\alpha-\gamma)d_\mu=0, \tag{2.16}$$
$$a_\mu c_\nu-\alpha a_\nu c_\mu-b_\lambda c_\nu+b_\nu c_\lambda+(\gamma-1)c_\lambda c_\mu+(\beta-\alpha)d_\nu=0, \tag{2.17}$$
$$a_\mu d_\nu-\alpha a_\nu d_\mu-b_\lambda d_\nu+b_\nu d_\lambda+\gamma c_\lambda d_\mu-c_\mu d_\lambda=0. \tag{2.18}$$

正如我们将在下一节看到的，为了断言我们所关注的代数的微分光滑性，需要满足其中一些关系。

3. 微分与积分演算

定理 3.1。 设 A 为一个具有 *PBW* 基的3维斜多项式环。若条件

$$\begin{aligned}
a_\lambda=b_\mu=c_\nu&=0,\\
c_\mu(\beta-1)&=0,\\
a_\mu c_\mu&=0,\\
b_\nu(\beta-1)&=0,\\
d_\nu(\gamma-\beta^{-1})&=a_\nu b_\nu,\\
d_\lambda(\alpha-1)&=c_\lambda b_\lambda,\\
d_\nu(\gamma-1)&=a_\nu b_\nu,\\
b_\lambda(\beta-1)&=0,\\
d_\lambda(\alpha\beta-1)&=b_\lambda c_\lambda \quad \text{and}\\
a_\mu(\beta-1)&=0,
\end{aligned}$$

满足条件，则 A 是微分光滑的。

证明。 为了定义一个以 dx、 dy 和 dz为生成元的一阶微分演算，我们要求左侧的 A作用于 Ω^1A 时，与通过代数自同构定义的右 A-模结构相容。更确切地说，我们假设对每个$p\in A$,

$$p\,dx_i=dx_i\,\nu_{x_i}(p),\quad \text{for } i=1,2,3, \tag{3.1}$$

其中每个 ν_{x_i} 都是一个代数自同构。

将微分 d 应用于定义关系（2.7），可得

$$\begin{aligned}
d(yz-\alpha zy)&=d(a_\lambda x+b_\lambda y+c_\lambda z+d_\lambda),\\
d(zx-\beta xz)&=d(a_\mu x+b_\mu y+c_\mu z+d_\mu) \text{ and}\\
d(xy-\gamma yx)&=d(a_\nu x+b_\nu y+c_\nu z+d_\nu).
\end{aligned}$$

利用 d 的 $\Bbbk$-线性,

$$\begin{aligned} d(yz) - \alpha\, d(zy) &= a_\lambda dx + b_\lambda dy + c_\lambda dz + d(d_\lambda), \\ d(zx) - \beta\, d(xz) &= a_\mu dx + b_\mu dy + c_\mu dz + d(d_\mu) \text{ and} \\ d(xy) - \gamma\, d(yx) &= a_\nu dx + b_\nu dy + c_\nu dz + d(d_\nu). \end{aligned}$$

莱布尼茨法则、表达式（3.1）以及 d 在 $\Bbbk$ 上为零这一事实蕴含

$$\begin{aligned} dy\, z + dz\, \nu_z(y) - \alpha\, dz\, y - \alpha\, dy\, \nu_y(z) &= a_\lambda dx + b_\lambda dy + c_\lambda dz, \\ dz\, x + dx\, \nu_x(z) - \beta\, dx\, z - \beta\, dz\, \nu_z(x) &= a_\mu dx + b_\mu dy + c_\mu dz \text{ and} \\ dx\, y + dy\, \nu_y(x) - \gamma\, dy\, x - \gamma\, dx\, \nu_x(y) &= a_\nu dx + b_\nu dy + c_\nu dz. \end{aligned}$$

按项分组后，这些恒等式可以改写为

$$\begin{aligned} a_\lambda dx + dy\big(z - \alpha\nu_y(z) - b_\lambda\big) + dz\big(\nu_z(y) - \alpha y - c_\lambda\big) &= 0, \\ dx\big(\nu_x(z) - \beta z - a_\mu\big) - b_\mu dy + dz\big(x - \beta\nu_z(x) - c_\mu\big) &= 0 \text{ and} \\ dx\big(y - \gamma\nu_x(y) - a_\nu\big) + dy\big(\nu_y(x) - \gamma x - b_\nu\big) - c_\nu dz &= 0. \end{aligned}$$

特别地，我们必须有 $a_\lambda = b_\mu = c_\nu = 0$，其余表达式则规定了自同构 ν_x、 ν_y和 ν_z 在生成元上的取值。

现在，我们考虑以下自同构:

$$\nu_x(x) = \beta^{-1}x, \qquad \nu_x(y) = \gamma^{-1}(y - a_\nu), \qquad \nu_x(z) = \beta z + a_\mu, \tag{3.2}$$

$$\nu_y(x) = \gamma x + b_\nu, \qquad \nu_y(y) = y, \qquad \nu_y(z) = \alpha^{-1}(z - b_\lambda), \tag{3.3}$$

$$\nu_z(x) = \beta^{-1}(x - c_\mu), \qquad \nu_z(y) = \alpha y + c_\lambda, \qquad \nu_z(z) = \beta z. \tag{3.4}$$

映射 ν_x 可扩张为代数同态 $A \to A$ 当且仅当（3.2）中的赋值满足关系（2.7），也就是说,

$$\begin{aligned} \nu_x(y)\nu_x(z) - \alpha\nu_x(z)\nu_x(y) &= b_\lambda\nu_x(y) + c_\lambda\nu_x(z) + d_\lambda, \\ \nu_x(z)\nu_x(x) - \beta\nu_x(x)\nu_x(z) &= a_\mu\nu_x(x) + c_\mu\nu_x(z) + d_\mu \text{ and} \\ \nu_x(x)\nu_x(y) - \gamma\nu_x(y)\nu_x(x) &= a_\nu\nu_x(x) + b_\nu\nu_x(y) + d_\nu. \end{aligned}$$

等价地，这得出新的条件

$$\begin{aligned} c_\mu(\beta - 1) &= 0, \\ c_\mu a_\mu &= 0, \\ b_\nu(\beta - 1) &= 0 \quad \text{and} \\ d_\nu(\gamma - \beta^{-1}) &= a_\nu b_\nu. \end{aligned}$$

类似地， ν_y 可扩张为 A 的代数同态，当且仅当等式

$$\begin{aligned} d_\lambda(\alpha - 1) &= c_\lambda b_\lambda \quad \text{and} \\ d_\nu(\gamma - 1) &= a_\nu b_\nu \end{aligned}$$

成立。最后，要求 ν_z 扩展为代数同态，还需满足以下条件

$$\begin{aligned} b_\lambda(\beta - 1) &= 0 \quad \text{and} \\ a_\mu(\beta - 1) &= 0. \end{aligned}$$

为使自同构彼此可交换，即，

$$\nu_x \circ \nu_y = \nu_y \circ \nu_x, \tag{3.5}$$

$$\nu_x \circ \nu_z = \nu_z \circ \nu_x \quad \text{and} \tag{3.6}$$

$$\nu_z \circ \nu_y = \nu_y \circ \nu_z, \tag{3.7}$$

我们需要在生成元 x、 y和 z上验证这些等式。特别地，

$$\nu_x \circ \nu_y(x) = \gamma\beta^{-1}x + b_\nu, \tag{3.8}$$

$$\nu_y \circ \nu_x(x) = \gamma\beta^{-1}x + \beta^{-1}b_\nu, \tag{3.9}$$

$$\nu_x \circ \nu_y(y) = \gamma^{-1}(y - a_\nu), \tag{3.10}$$

$$\nu_y \circ \nu_x(y) = \gamma^{-1}(y - a_\nu), \tag{3.11}$$

$$\nu_x \circ \nu_y(z) = \alpha^{-1}(\beta z + a_\mu - b_\lambda) \quad \text{and} \tag{3.12}$$

$$\nu_y \circ \nu_x(z) = \alpha^{-1}(\beta z - \beta b_\lambda) + a_\mu. \tag{3.13}$$

比较（3.8）与（3.9）以及（3.12）与（3.13），这些对重合，当且仅当这些等式

$$b_\nu(1-\beta) = 0 \quad \text{and} \quad a_\mu(1-\alpha) = b_\lambda(1-\beta)$$

成立。注意，

$$\nu_x \circ \nu_z(x) = \beta^{-2}x - \beta^{-1}c_\mu, \tag{3.14}$$

$$\nu_z \circ \nu_x(x) = \beta^{-2}(x - c_\mu), \tag{3.15}$$

$$\nu_x \circ \nu_z(y) = \gamma^{-1}\alpha(y - a_\nu) + c_\lambda, \tag{3.16}$$

$$\nu_z \circ \nu_x(y) = \gamma^{-1}(\alpha y + c_\lambda - a_\nu), \tag{3.17}$$

$$\nu_x \circ \nu_z(z) = \beta^2 z + \beta a_\mu \quad \text{and} \tag{3.18}$$

$$\nu_z \circ \nu_x(z) = \beta^2 z + a_\mu, \tag{3.19}$$

并且，当满足以下条件时，以下各组关系3.14–3.15、3.16–3.17以及3.18–3.19彼此一致:

$$c_\mu(\beta - 1) = 0, \quad c_\lambda(1-\gamma) = a_\nu(1-\alpha) \quad \text{and} \quad a_\mu(\beta - 1) = 0.$$

最后，

$$\nu_z \circ \nu_y(x) = \gamma\beta^{-1}x - \gamma\beta^{-1}c_\mu + b_\nu, \tag{3.20}$$

$$\nu_y \circ \nu_z(x) = \beta^{-1}(\gamma x + b_\nu - c_\mu), \tag{3.21}$$

$$\nu_z \circ \nu_y(y) = \alpha y + c_\lambda, \tag{3.22}$$

$$\nu_y \circ \nu_z(y) = \alpha y + c_\lambda, \tag{3.23}$$

$$\nu_z \circ \nu_y(z) = \alpha^{-1}(\beta z - b_\lambda) \quad \text{and} \tag{3.24}$$

$$\nu_y \circ \nu_z(z) = \beta\alpha^{-1}(z - b_\lambda). \tag{3.25}$$

因此，当.....时，(3.20) 和 (3.21)，以及 (3.24) 和 (3.25) 相同

$$b_\nu(1-\beta) = c_\mu(1-\gamma) \quad \text{and} \quad b_\lambda(\beta - 1) = 0.$$

设 $\Omega^1 A$ 是一个秩为三、由 dx、dy 和 dz 生成的自由右 A-模。对每个 $p \in A$，定义一个左 A-模结构如下：

$$\begin{aligned} p\,dx &= dx\nu_x(p), \\ p\,dy &= dy\nu_y(p) \quad \text{and} \\ p\,dz &= dz\nu_z(p). \end{aligned} \tag{3.26}$$

于是，$\Omega^1 A$ 中的双模关系为

$$\begin{aligned} x\,dx &= dx\beta^{-1}x, \\ x\,dy &= dy(\gamma x + b_\nu), \\ x\,dz &= dz\beta^{-1}(x - c_\mu), \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} y\,dx &= dx\gamma^{-1}(y - a_\nu), \\ y\,dy &= dy\,y, \\ y\,dz &= dz(\alpha y + c_\lambda), \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} z\,dx &= dx(\beta z + a_\mu), \\ z\,dy &= dy\alpha^{-1}(z - b_\lambda) \quad \text{and} \\ z\,dz &= dz\beta z. \end{aligned} \tag{3.29}$$

我们的目标是扩展这一赋值

$$x \mapsto dx, \qquad y \mapsto dy \quad \text{and} \quad z \mapsto dz$$

为 $\Bbbk$-线性映射 $d : A \to \Omega^1 A$，使其满足莱布尼茨法则。恰当的充要条件是 d 与非平凡关系（2.7）相容，即

$$\begin{aligned} d(yz) - \alpha\, d(zy) &= b_\lambda dy + c_\lambda dz + d(d_\lambda), \\ d(zx) - \beta\, d(xz) &= a_\mu dx + c_\mu dz + d(d_\mu) \text{ and} \\ d(xy) - \gamma\, d(yx) &= a_\nu dx + b_\nu dy + d(d_\nu) \end{aligned}$$

成立。

定义 $\Bbbk$-线性映射

$$\partial_x, \partial_y, \partial_z : A \to A$$

通过要求

$$d(a) = dx\,\partial_x(a) + dy\,\partial_y(a) + dz\,\partial_z(a), \quad \text{for all } a \in A.$$

由于 dx、dy 和 dz 构成右 A-模 $\Omega^1 A$ 的自由基，因此映射∂_x, ∂_y, ∂_z 是良定义的。此外，

$$d(a) = 0 \quad \text{if and only if} \quad \partial_x(a) = \partial_y(a) = \partial_z(a) = 0.$$

利用（3.26）中的关系以及 ν_x、ν_y 和 ν_z 的定义，可得

$$\begin{aligned} \partial_x(x^k y^l z^s) &= \sum_{i=0}^{k-1} \beta^{-i} x^{k-1} y^l z^s, \\ \partial_y(x^k y^l z^s) &= l(\gamma x + b_\nu)^k y^{l-1} z^s \quad \text{and} \\ \partial_z(x^k y^l z^s) &= \sum_{i=0}^{s-1} \beta^{i-k} (x - c_\mu)^k (\alpha y + c_\lambda)^l z^{s-1}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

因此， $d(a)=0$ 当且仅当 a 是单位元的数乘，这表明 $(\Omega A,\ d)$ 是连通的，其中

$$\Omega A=\Omega^0A\oplus\Omega^1A\oplus\Omega^2A.$$

将 d 的普适扩张推广到高阶形式，并与(3.27)、(3.28)和(3.29)相容，可得Ω^2A中的下列关系:

$$dy\wedge dx=-\gamma^{-1}dx\wedge dy, \tag{3.31}$$

$$dz\wedge dx=-\beta\,dx\wedge dz\quad\text{and} \tag{3.32}$$

$$dz\wedge dy=-\alpha^{-1}dy\wedge dz. \tag{3.33}$$

由于 ν_x、 ν_y 和 ν_z 可交换，因此不会产生其他关系，从而

$$\Omega^2A=dx\wedge dy\,A\oplus dx\wedge dz\,A\oplus dy\wedge dz\,A.$$

最后，由于 $\Omega^3A=\omega A\cong A$ 作为右、左 A-模，其 $\omega=dx\wedge dy\wedge dz$和 $\nu_\omega=\nu_x\circ\nu_y\circ\nu_z$，形式 ω 是 A的体积形式。根据命题 2.6 (2)，ω 取

$$\begin{aligned}
\omega_1^1&=\bar\omega_1^1=dx,\\
\omega_2^1&=\bar\omega_2^1=dy,\\
\omega_3^1&=\bar\omega_3^1=dz,\\
\omega_1^2&=dy\wedge dz,\\
\omega_2^2&=-\gamma dx\wedge dz,\\
\omega_3^2&=\alpha\beta^{-1}dx\wedge dz,\\
\bar\omega_1^2&=\gamma\beta^{-1}dy\wedge dz,\\
\bar\omega_2^2&=-\alpha dx\wedge dy\quad\text{and}\\
\bar\omega_3^2&=dx\wedge dy.
\end{aligned}$$

事实上，对于 $\omega':=dx\,a+dy\,b+dz\,c$且 $a,\ b,\ c\in\Bbbk$，命题 2.6 (2) 给出

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\omega_i^1\pi_\omega(\bar\omega_i^2\wedge\omega')&=dx\,\pi_\omega(\gamma\beta^{-1}a\,dy\wedge dz\wedge dx)\\
&\quad+dy\,\pi_\omega(-\alpha b\,dx\wedge dz\wedge dy)\\
&\quad+dz\,\pi_\omega(c\,dx\wedge dy\wedge dz)\\
&=dx\,a+dy\,b+dz\,c=\omega'.
\end{aligned}$$

另一方面，如果

$$\omega'':=dx\wedge dy\,a+dx\wedge dz\,b+dy\wedge dz\,c\quad\text{with } a,b,c\in\Bbbk,$$

then

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\omega_i^2\pi_\omega(\bar\omega_i^1\wedge\omega'')&=dy\wedge dz\,\pi_\omega(c\,dx\wedge dy\wedge dz)\\
&\quad-\gamma dx\wedge dz\,\pi_\omega(b\,dy\wedge dx\wedge dz)\\
&\quad+\alpha\beta^{-1}dx\wedge dy\,\pi_\omega(a\,dz\wedge dx\wedge dy)\\
&=dx\wedge dy\,a+dx\wedge dz\,b+dy\wedge dz\,c=\omega''.
\end{aligned}$$

如上所示，所有 1 次和 2 次形式分别由 ω_i^j 和$\bar{\omega}_i^{3-j}$生成，其中 $j = 1$、2 以及 $i = 1$、2、3。因此，命题 2.6（2）确保 ω是一个积分形式。最后，命题 2.5 意味着 $(\Omega A, d)$ 是一个 3 次可积微分演算。由于 GKdim$(A) = 3$ [18, 第 8 节， A 是微分光滑的。□

定理 3.2. 如果条件 $a_\lambda \neq 0$、 $b_\mu \neq 0$ 或 $c_\nu \neq 0$ 之一成立，则在 A 上不存在一维连通可积微分演算。

证明。 用反证法。假设 A具有一阶微分演算$(\Omega A,\ d)$。不失一般性，我们考虑情形 $a_\lambda \neq 0$。由于 d 必须与关系（2.7）相容，则我们得到

$$dyz - \alpha ydz = a_\lambda dx + b_\lambda dy + c_\lambda dz,$$

由此， dx 由 dy 和 dz 生成。这意味着 $\Omega^1 A$ 由两个元素生成，且 $\Omega^3 A = \Omega^1 A \wedge \Omega^1 A \wedge \Omega^1 A = 0$，即不存在三阶演算。由于 GK 维数$(A) = 3$，结论成立。□

表 1包含这 15 个代数各自的参数值。根据定理 3.1 和 3.2，符号 ✓ 与 $\star$ 分别表示关于 3 维斜多项式代数微分光滑性的肯定答案和否定答案。

表 1. 三维斜多项式代数的参数值

	α	β	γ	a_λ	b_λ	c_λ	d_λ	a_μ	b_μ	c_μ	d_μ	a_ν	b_ν	c_ν	d_ν	D.S.
(1)	α	β	γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	✓
(2)(i)	1	β	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	$\star$
(2)(ii)	1	β	1	0	0	1	0	0	0	0	b	1	0	0	0	✓
(2)(iii)	1	β	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$\star$
(2)(iv)	1	β	1	0	0	0	0	0	0	0	b	0	0	0	0	✓
(2)(v)	1	β	1	0	0	a	0	0	0	0	0	1	0	0	0	✓
(2)(vi)	1	β	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	✓
(3)(i)	α	β	α	0	0	0	0	0	1	0	b	0	0	0	0	$\star$
(3)(ii)	α	β	α	0	0	0	0	0	0	0	b	0	0	0	0	✓
(4)	α	α	α	a_1	0	0	b_1	0	a_2	0	b_2	0	0	a_3	b_3	$\star$
(5)(i)	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	$\star$
(5)(ii)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$\star$
(5)(iii)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b	✓
(5)(iv)	1	1	1	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	$\star$
(5)(v)	1	1	1	0	0	a	0	0	0	1	0	0	0	0	0	✓

注3.3。 在 [38], 中，无法用其中提出的方法判定 (5)(v) 型代数的微分光滑性。这是因为 (5)(v) 型的定义关系取自 Rosenberg 在 [40,定理 C4.3.1 的 (e)(v) 情形中所作的陈述，第 101]页。正如注2.9所解释的，该陈述中有一处笔误：关系 $zx - xz = x$ 必须替换为 $zx - xz = z$。因此， [38]依赖于这一误印表示的论证并不

适用于真正的 (5)(v) 型代数；本文使用更正后的关系判定了其微分光滑性。

4. 未来工作

Jordan [24] 引入了某些迭代斜多项式环 $K[x;\ \sigma][y;\ \sigma^{-1},\ \delta]$ 它们是交换环上两个不定元生成的 K 其中包括李代数的泛包络代数 $\mathfrak{sl}(2)$ 以及若干量子群。两年后，在[25] 他通过考虑一个额外参数扩展了这类环 $\rho \in \Bbbk \setminus \{0\}$并纳入了量子化 Weyl 代数、Dispin 李超代数的泛包络代数，以及 Woronowicz 引入的一个代数 [51]。下面来看具体细节。

定义 4.1 ([25, 第 1 节.1]). 设 K 是代数闭域 $\Bbbk$上的有限生成交换代数， σ 是 K 的一个 $\Bbbk$-自同构，并考虑 $u \in K$ 和 $\rho \in \Bbbk \setminus \{0\}$。构造自同构型斜多项式环 $K[x;\ \sigma]$ 并通过如下设定将 σ 扩展为 $K[x;\ \sigma]$

$$\sigma(x) = \rho^{-1}x \quad \text{whence} \quad \sigma^{-1}(x) = \rho x.$$

存在一个 σ^{-1}-导子 δ 作用于 $K[x;\ \sigma]$ 使得 $\delta(K) = 0$，且 $\delta(x) = u - \rho\sigma(u)$[13, p。 41]（另见 [21, 第2节8]）。考虑斜多项式环

$$K[x;\sigma][y;\sigma^{-1},\delta],$$

其定义关系为

$$xk = \sigma(k)x, \tag{4.1}$$

$$yk = \sigma^{-1}(k)y, \quad \text{for } k \in K, \text{ and} \tag{4.2}$$

$$yx = \sigma^{-1}(x)y + \delta(x) = \rho xy + u - \rho\sigma(u). \tag{4.3}$$

他指出 [25, 第 1] Bell 和 Smith 研究的三元非交换多项式 $\Bbbk$-代数并非全部 [2] 都是基于 $\Bbbk$的迭代斜多项式环，但这些环可以通过定义4.1中的构造得到，$K = \Bbbk[t]$。此外，他还提到，他们的对象与 Goodearl 和 Letzter 定义的二元迭代斜多项式环这一类 [21], 称为 q-斜多项式环有关，因此，一个自然的任务是研究这两类斜多项式环的微分光滑性。

5. Declarations

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

参考文献

[1] V. V. Bavula. 具有 PBW 基的 3 个生成元上的双二次代数的描述。《代数杂志》 **631** 695 730 2023 10 1016 2023 05 013 –(). DOI: ./j.jalgebra...A. D. Bell 与 S. P. [2] 3 Smith. 某些-维斜多项式环。威斯康星大学密尔沃基分校（1990年）。[3] G. M. Bergman. 环论的菱形引理。《数学进展》 **29(2)** 178–218（1978年）。 DOI: 10 1016 0001 8708 78 90010 5 ./-()-T. [4] Brzeziński. 第二类非交换联络。《代数与应用杂志》 **7**(5) 557– 573 2008 10 1142 0219498808002977 (). DOI: ./ST. Brzeziński. 投射模上的散度与非交换积分。[5] 《国际几何方法与现代物理学杂志》 **8(4)** 885–896（2011年）。 DOI: 10.1142/S0219887811005440

[6] T. Brzeziński. 关于非交换枕头与量子泪滴的光滑性。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 10(015) 1–8（2014年）。 10 3842 2014 015 . /SIGMA. . T. Brzeziński. Gelfand-Kirillov 维数为二的仿射霍普夫代数的微分光滑性。[7] Colloq. Math. **139** 1 111 119 2015 10 4064 139 1 6 ( ) – ( ). DOI: . /cm - - T. Brzeziński. 广义魏尔[8]代数的非交换微分几何。SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12** 059 1 18 2016 10 3842 2016 059 ( ) – ( ). . / SIGMA. . T. Brzeziński、L. El. Kaoutit 与 C. Lomp，非交换积分形式与扭曲多重导子。J. Noncommut. Geom. **4** 2 281 312 2010 10 4171 56 ( ) – ( ). DOI: . /JNCG/ [10] T. Brzeziński 与 C. Lomp. 斜多项式环的微分光滑性。J. Pure Appl. Algebra **222** 9 2413 2426 2018 10 1016 2017 09 020 ( ) – ( ). DOI: . /j.jpaa. . . T. Brzeziński 与 [11] A. Sitarz. 非交换枕头、锥与透镜空间的光滑几何。J. Noncommut. Geom. **11** 2 413 449 2017 10 4171 11 2 1 ( ) – ( ). DOI: . /JNCG/ - - A. [12] Chacón 与 A. Reyes. 非交换概形理论及半分次环的 Serre-Artin-Zhang-Verevkin 定理。J. Noncommut. Geom. 19(2) 495–532（2025年）。DOI: 10 4171 618 . /JNCG/ P. M. Cohn. 自由环及其关系。Academic Press，伦敦，第二版（1985年）。[14] J. [13] Cuntz 与 D. Quillen. 代数扩张与非奇异性。J. Amer. Math. Soc. 8(2) (1995 251 289 10 2307 2152819) – . DOI: . / M. Dubois-Violette. 导子与非交换微分演算。C. R. Acad. [15] Sci. Paris, Ser. I 307 403–408（1988年）。[16] M. Dubois-Violette、R. Kerner 与 J. Madore. 矩阵代数的非交换微分几何。J. Math. Phys. **31** 2 316 322 1990 10 1063 1 528916 ( ) – ( ). DOI: . / . D. Fairlie. [17]（） 的量子形变。J. Phys. A – ( ). DOI: 10.1088/0305- SU 2 4470 23 5 001 / / / 23 183 187 1990 W. Fajardo、C. Gallego、O. Lezama、A. Reyes、H. Suárez 与 H. Venegas. 斜 PBW 扩张：[18] 环与模论性质、矩阵与 Gröbner 方法及应用。Algebra and Applications **28** 2020 10 1007 978 3 030 53378 6 . Springer Cham ( ). [19] DOI: . / - - - - I. M. Gelfand 与 A. A. Kirillov. 关于与李代数的包络代数相关的域。Dokl. Akad. Nauk 167(3) 503–505（1966年）。[20] I. M. Gelfand 与 A. A. Kirillov. 关于与李代数包络代数相关的域。Publ. Math. IHES **31** 5 19 1966 10 1007 02684800 – ( ). DOI: . /BF K. R. Goodearl 与 E. S. [21] Letzter. 斜多项式环与-斜多项式环中的素理想。Mem. Amer. Math. Soc. 109(521)（1994年）。[22] A. Grothendieck. 代数几何原理。Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 20 (1964 5 251 10 1007 02684322) – . DOI: . / BF M. Havlíček、A. U. Klimyk 与 S. Pošta. 代数 $U_q'(\mathfrak{so}_m)$ [23] 与 U_q $\mathfrak{iso}_m$ **50** 1 79 84 2000 10 1023 1022825031633 ( ) 的中心元素。Czech. J. [24] Phys. ( ) – ( ). DOI: . /A: D. A. Jordan. 迭代斜多项式环与量子群。《代数杂志》156(1) 194 218 1993 10 1006 1993 1070 – ( ). DOI: . /jabr. . D. A. Jordan. 某些迭代斜多项式环上的有限维单模。[25] J. Pure Appl. Algebra **98** 1 45 55 1995 10 1016 0022 4049 95 90017 9 ( ) – ( ). DOI: . / - ( ) - V. G. Kac. 李超代数。《数学进展》 **26** 1 8 96 1977 ( ) – ( ). DOI: 10.1016/0001- [26] 8708 77 90017 2 ( ) - S. Karaçuha. 非交换微分几何的若干方面。博士论文，波尔图大学，波尔图，葡萄牙（2015年）。[28] S. [27] Karaçuha 与 C. Lomp. 量子外代数上的积分演算。《国际几何方法与现代物理学杂志》 **11** 04 1450026 2014 10 1142 0219887814500261 ( ) ( ). DOI: . /S U. Krähmer. 关于量子齐性空间的 Hochschild（上）同调。Israel J. Math. [29] **189** 1 237 266 2012 10 1007 11856 011 0168 4 ( ) – ( ). DOI: . /s - - - G. R. Krause 与 T. H. Lenagan. 代数的增长与 Gelfand–Kirillov 维数。修订版。Graduate Studies in Mathematics 22（美国数学会，2000年）。[31] Y. [30] Manin. 规范场论与复几何。第二版。Grundlehren der mathematischen Wissenschaften（Springer Berlin，海德堡，1997年），第289卷。DOI: 10 1007 978 3 662 07386 5 . / - - - - A. Odesskii. Sklyanin 代数的一个类似物。Funct. Anal. Appl. 20 152–154（1986年）。[32] DOI: 10.1007/BF01077280

[33] A. Niño 和 A. Reyes. 论具有 PBW 基的非交换环的中心化子与伪多重次数函数. 《代数与应用杂志》24(04) 2550109 (2025年). DOI: 10 1142 0219498825501099 . /S O. Ore. 非交换多项式理论. Ann. of Math. [34] (2) 34(3) 480–508 (1933). DOI: 10 2307 1968173 . / I. T. Redman. 若干斜多项式代数的非交换代数几何. [35] 博士论文，威斯康星大学密尔沃基分校，威斯康星州，美利坚合众国 (1996). [36] I. T. Redman. I 型三维斜多项式代数的齐次化. Comm. Algebra **27** 11 5587 5602 1999 10 1080 00927879908826775 ( ) – ( ). DOI: . / A. [37] Reyes 和 C. Rodríguez. 斜 Poincaré-Birkhoff-Witt 扩张的 McCoy条件. Commun. Math. Stat. **9** 1 1 21 2021 10 1007 40304 019 00184 5 ( ) – ( ). DOI: . /s - - - [38] A. Reyes 和 C. Sarmiento. -维斜多项式代数和扩散代数的微分光滑性. Internat. J. Algebra and Comput. 32(3) 529–559 (2022). DOI: 3 10 1142 0218196722500242 . /S A. Reyes 和 H. Suárez. 若干三维斜多项式代数的 PBW 基. Far East J. Math. Sci. 101(6) 1207–1228 (2017年). [39] [40] A. L. Rosenberg. 非交换代数几何与量子化代数的表示，数学及其应用丛书，第330卷 (Springer Dordrecht, 1995年). DOI: 10 1007 978 94 015 8430 2 . / - - - A. Rubiano. 维数为 [41] 5 2 **75** 63 2026 10 1007 12215 026 01390 1 的某些 Artin-Schelter正则代数的微分光滑性. Rend. Circ. Mat. Palermo ( ) ( ) ( ). DOI: . /s - - - A. Rubiano 和 A. Reyes. [42] 交换多项式环上斜 PBW 扩张的光滑几何 I. Bull. Iranian Math. Soc. 51 (77) 1–47 (2025年). DOI: 10.1007/s41980-025- 01015-w[43] A. Rubiano 和 A. Reyes. 关于斜 PBW 扩张的微分光滑性札记. Algebra Discrete Math. **40** 2 226 254 2025 10 12958 2380 ( ) – ( ). DOI: . / adm [44] A. Rubiano 和 A. Reyes. 具有 PBW 基的三生成元双二次代数的光滑几何. Comm. Algebra 1 21 2026 10 1080 00927872 2026 2630014 – ( ). DOI: . / . . A. [45] Rubiano 和 A. Reyes. 扩散代数的光滑几何. Rev. Un. Mat. Argentina (2026 10 33044 5479). DOI: . /revuma. A. Rubiano 和 A. Reyes. 具有 PBW 基的双二次代 [46] 数的微分光滑性. Beitr. Algebra Geom. (2026). 即将发表. [47] W. F. Schelter. 光滑代数. 《代数杂志》. 103(2) 677–685 (1986年). DOI: 10.1016/0021- 8693 86 90160 2 ( ) - S. P. Smith. 一类类似于 $\mathfrak{sl}(2)$ 包络代数的代数. [48] Trans. Amer. Math. Soc. **322** 1 1 30 1990 10 1090 0002 9947 1990 0972706 5 ( ) – ( ). DOI: . /S - - - - J. T. Stafford 和 J. J. Zhang. （分次）诺特 PI 环的同调性质 . 《代数杂志》 [49] **168** 3 988 1026 1994 10 1006 1994 1267 ( ) – ( ). DOI: . /jabr. . M. Van den Bergh. Gorenstein环的 Hochschild 同调与上同调之间的关系. Proc. Amer. Math. Soc. 126(5) (1998) 1345–1348. DOI: 10.1090/S0002-9939-98-04210- 5[51] S. L. Woronowicz. 扭曲的 $SU(2)$ 群：非交换微分演算的一个例子. Publ. Res. Inst. Math. Sci. [50] **23** 1 117 181 1987 10 2977 1195176848 ( ) – ( ). DOI: . /prims/ A. S. Zhedanov, Askey-Wilson多项式的“隐藏对称性”. Theoret. and Math. Phys. 89(2) 1146–1157 (1991). DOI: 10.1007/BF01015906 [52]

弗朗西斯科·何塞·德·卡尔达斯区立大学现地址：大学校园
电子邮箱：aarubianos@udistrital.edu.co

哥伦比亚国立大学波哥大校区现地址：大学校园电子邮箱：
mareyesv@unal.edu.co