arXiv:2603.11270v1 [cs.DS] 11 Mar 2026

旅行商问题的 k-Opt 局部搜索的 PLS 完全性

Sophia Heimann*、Hung P. Hoang†、Stefan Hougardy‡

2026年3月13日

摘要

k-Opt 算法是一种用于旅行商问题的局部搜索算法。从一个初始巡回出发，该算法迭代地将巡回中的至多 k 条边替换为数量相同的边，从而得到更优的巡回。Krentel（FOCS 1989）证明了采用 k-Opt 邻域的旅行商问题对于 PLS（多项式时间局部搜索）类是完全的。然而，他的证明需要 $k \gg 1000$，且存在一个重大漏洞。我们给出了首个严谨的 PLS 完全性证明，同时大幅降低了 k 的取值至 $k \geq 15$，回答了 Monien、Dumrauf 和 Tscheuschner（ICALP 2010）提出的一个开放问题。我们的结果适用于一般旅行商问题和度量旅行商问题。

1 引言

众所周知的旅行商问题（TSP）旨在带边权完全图中寻找一个哈密顿回路，使该回路的总边权尽可能小。该问题的一种常用启发式算法是称为 k-Opt 的局部搜索算法。从任意巡回开始，只要得到的巡回具有更小的总边权，该算法就会迭代地将巡回中的至多 k 条边替换为数量相同的边。我们将 TSP/k-Opt 定义为：对于一个 TSP 实例，使用 k-Opt 算法寻找局部最优解的问题。参见 [HHH26]，其中总结了该问题及 k-Opt 算法的相关工作。

分析此类局部搜索问题复杂度的一种经典方法，是借助复杂度类 PLS 以及 PLS-完全性的概念（定义见第 2 节）。1988年，Johnson、Papadimitriou 和 Yannakakis [JPY88]引入了这些概念，用于刻画这样一种现象：对于许多 NP-困难问题，不仅难以计算全局最优解，甚至连计算局部最优解也很困难。这类问题的例子包括最大可满足性问题 [Kre90]，最大割 [SY91]，和集合覆盖 [DS10]。一个问题具有 PLS-完全性，意味着：如果存在一个多项式时间算法能够为该问题寻找局部最优解，那么就可以推出针对 PLS 中所有问题寻找局部最优解的多项式时间算法。

TSP/k-Opt 的 PLS-完备性由 Krentel 证明 [Kre89]，针对 $k \gg 1000$。Krentel 估计，其证明得到的 k 数值介于 1，000 和 10，000 之间。最近，通过以直接的方式实现 Krentel 证明中缺失的一些细节，研究表明其证明得到的数值为 14，208，针对 k [HH23]。此外，他的证明还存在一个重大漏洞，因为他假设权重为无穷大的边不可能出现在局部最优解中（详情请参见

该结果的初步版本已在 ICALP 上公布 2024 [HHH24]。

*赫茨算法与优化讲席，波恩大学，德国（sheimann@uni-bonn.de）

†算法与复杂性研究组，信息学学院，维也纳工业大学，奥地利，（phoang@ac.tuwien.ac.at）由奥地利科学基金会（FWF，项目 10.55776/Y1329 和 ESP1136425）资助

‡离散数学研究所与豪斯多夫数学中心，波恩大学，德国（hougardy@or.uni-bonn.de）由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）依据德国卓越战略资助——EXC-2047/1——390685813

第 6节）。继 Krentel 的论文之后，其他论文中也出现了相关说法 [JM03、Yan03]称，通过与 Krentel 的私人交流，对原始证明进行仔细分析可以将该数值降至 $k = 8$ ，甚至可能降至 $k = 6$。然而，尚无可获得的书面证明支持这些说法。事实上，截至目前，Krentel 于 1989年发表的论文 [Kre89] 仍是这一主题唯一的论文。因此，Monien、Dumrauf 和 Tscheuschner [MDT10]提出了关于 TSP/k-Opt 的复杂度的一个公开问题，针对 $k \ll 1000$。

在本文中，我们在第7 节给出了关于旅行商问题/k-Opt 的首个严格证明，证明其为 PLS 完全，并同时大幅降低了 k 相较于 Krentel 的 k $\gg$1000 [Kre89] 所达到的 $k \geq 15$。

定理 1。 旅行商问题/k-*Opt* 在 $k \geq 15$ 时是PLS 完全的。

我们对定理1的证明基于一种从有界度最大割问题到旅行商问题的新归约（见第3节）。为确保实现PLS归约，我们需要注意构造中各构件拼接的顺序。我们展示最大割实例的解与构造图的某些解（称为标准巡回）之间的对应关系（见第4节）。此外，我们在第5节证明，只要谨慎构造，就能保证构造图不存在其他解。随后，我们在第6节说明如何为非边（即仅为使图成为完全图而添加到构造图中的额外边）赋予特定权重，从而证明任何局部最优解都不可能包含这样的边。我们通过定义一种权重赋值来实现这一点，该赋值利用了由我们的PLS归约得到的旅行商问题实例的特殊结构。这是针对 k-Opt 算法的此类结果的首个严格证明，而且似乎没有通用方法能对任意旅行商问题实例证明这一点（例如 Krentel 构造的实例 [Kre89]）。

正如 Krentel 所指出的， [Kre89], 只需给所有边权重加上一个足够大的常数，就能将任意 TSP 实例转化为度量实例。这不会影响 k-Opt 算法的行为。因此，定理 1 对于度量旅行商问题同样成立；度量旅行商问题是指距离必须满足三角不等式的旅行商问题。

与会议初步版本的比较。我们在 ICALP 2024 [HHH24], 上公布了一组初步结果，其中包括 TSP/k-Opt 的 PLS 完全性，适用于 $k \geq 17$。在本文中，我们从两个方面强化了这一结果：将其推广到 $k \geq 15$ ，并提出了一个紧致的PLS归约（见下文定义 4 ），这是比原始 PLS归约更强的概念。会议版本还证明了 TSP/-*Opt* 的全指数性质，k适用于 $k \geq 5$（即，存在无穷多对实例和解，使得从这些解出发运行 k-Opt 算法总是需要指数时间）。不过，后来通过采用不同的归约，这一结果得到了改进，达到 $k \geq 3$ [HHH26]。因此，全指数性质将在另一篇论文中讨论。

2 预备知识

A uv-路径是以顶点 u和 v 为端点的路径。

2.1 局部搜索问题与 PLS 类

局部搜索问题 P 是一个优化问题，由一组实例 D_P、每个实例 $I \in D_P$对应的有限个（可行）解 $F_P(I)$、一个为每个实例 $I \in D_P$ 和解 $s \in F_P(I)$赋予整数值的目标函数 f_P，以及每个解 $s \in F_P(I)$对应的一个邻域$N_P(s, I) \subseteq F_P(I)$组成。每个解 $s \in F_P(I)$的大小都受 I大小的多项式所界定。目标是为给定实例I找到一个局部最优解；也就是说，找到一个解 $s \in F_P(I)$，使得不存在解 $s' \in N_P(s, I)$能够得到更优的目标

值（优于 $f_P(s, I)$）。形式上，这意味着，对于所有 $s' \in N_P(s, I)$，若 $f_P(s, I) \leq f_P(s', I)$ 是最小化问题，则 P是最大化问题；而若 $f_P(s, I) \geq f_P(s', I)$，则 P是最大化问题。

该实例的转移图 T_I 是 I 一个有向图，其顶点是 I的解s，s'当且仅当 s' 是 s 的邻居且目标值更优时，存在一条边 (s, s')。

现在，我们将形式化一些与复杂性类 PLS 相关的经典概念。

定义 2 (类 PLS [JPY88])。局部搜索问题 P 属于类 PLS，如果存在三个多项式时间算法 A_P、B_P、C_P，满足以下条件：

- 给定一个实例 $I \in D_P$，A_P 返回一个解 $s \in F_P(I)$；
- 给定一个实例 $I \in D_P$ 和一个解 $s \in F_P(I)$，B_P 计算目标值$f_P(s, I)$；以及
- 给定一个实例 $I \in D_P$ 和一个解 $s \in F_P(I)$，C_P 如果存在目标值严格更优的邻居，则返回 s；否则返回“局部最优”。

对于一个实例的标准局部搜索算法 [JPY88] I 问题 $P \in$ PLS 按如下方式执行。它从某个初始解开始 $s \in F_P(I)$（使用算法 A_P）。然后，它反复访问一个目标值更优的邻居（使用算法 C_P），直至达到局部最优解。如果一个解有多个更优邻居，算法必须按照某个预先指定的规则选择其中一个，这通常称为枢轴规则。

一个局部搜索问题 P 具有 *all-exp* 性质，当存在无穷多个实例 I D_P 及初始解 $s \in F_P(I)$，使得标准局部搜索算法对于所有可能的枢轴规则都始终需要指数级的迭代次数。

定义3 (PLS-归约 [JPY88])。一个 PLS-归约 从问题 $P \in$ PLS到问题$Q \in$PLS 是由两个多项式时间可计算函数组成的二元组 h 和 g，它们满足：

1. 给定一个实例 $I \in D_P$，h 计算出一个实例 $h(I) \in D_Q$；并且
2. 给定一个实例 $I \in D_P$ 和一个解 $s_q \in F_Q(h(I))$，g 返回一个解 $s_p \in F_P(I)$，使得如果 s_q 是 $h(I)$的局部最优解，那么 s_p 就是 I的局部最优解。

一个问题 $Q \in$PLS 是 PLS-完全的，如果对于每个问题 $P \in$ PLS，都存在一个 PLS 归约，从 P 到 Q。

定义4 (紧 PLS-归约 [SY91])。从问题 $P \in$ PLS到问题 $Q \in$ PLS 的紧 PLS-归约（h，g）是一个从 P到 Q 的PLS-归约，对于每个实例 $I \in D_P$，我们都可以选择 R 的一个子集 $F_Q(h(I))$，使其满足：

1. R 包含 $h(I)$的所有局部最优解；
2. 对于每个解 $s_p \in F_P(I)$，我们都可以在多项式时间内构造一个解 $s_q \in R$，使得 $g(I, s_q) = s_p$；3. 如果转移图 $T_{h(I)}$ 中存在一条从 $s_q \in R$ 到 $s'_q \in R$ 的路径，且该路径不包含 R 中的其他元素，那么要么转移图 T_I 中存在一条从解 $g(I, s_q)$到解 $g(I, s'_q)$的边，要么这两个解相同。

一个问题 $Q \in$ PLS 是 紧PLS-完全的 如果对于每一个问题 $P \in$PLS，存在一个紧PLS-归约，从 P 到 Q。

Sch¨affer 和 Yannakakis [SY91] 已证明，所有紧 PLS 完全问题都具有全指数性质。有关紧 PLS 完全问题的更多背景，请参阅 Michiels、Aarts 和 Korst 的著作 [MAK07]。

2.2 旅行商问题/k-Opt

一个 哈密顿回路 或一个 巡回 是无向图中包含该图所有顶点的圈。

旅行商问题实例是一个元组（G，c），其中 G 是一个完全无向图（V，E），而 c：$E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是一个函数，为 G 的每条边赋予一个非负权重。目标是找到 G 的一条巡回，使巡回中边的权重之和最小。PLS 类的定义要求我们有一个多项式时间算法来找到某个解。对于完全图，这样的算法肯定存在。如果图不是完全图，那么由于哈密顿回路问题是 NP完全的，我们并不知道是否存在这样的算法。

交换是一个元组（E_1, E_2），其中包含子集 $E_1, E_2 \subseteq E, |E_1| = |E_2|$。我们称它为边交换。如果对于某个 k，$|E_1| \leq k$，那么我们称它为 k-交换。从子图 G' 中执行针对 G 的交换（E_1, E_2），是指从 G' 中移除 E_1，并将 E_2 加入 G'。我们也称之为在 G' 中用 E_2 交换 E_1。给定一条巡回 τ，若在 τ 中用 E_2 交换 E_1 后，得到的巡回总边权重更低，则称交换（E_1, E_2）对 τ 是改进交换。

A （k-）交换序列是一个序列 $L = (S_1, \ldots\ldots, S_\ell)$，其中每个 S_i 都是一个（k-）交换。对于巡回 τ，我们用 τ^L 表示从 τ出发，按 L中的顺序执行 S_1、……、S_ℓ后得到的子图。若对于巡回 τ，L中的每个 S_i都是针对 $\tau^{(S_1, \ldots\ldots, S_{i-1})}$ 的改进型（k-）交换，则称 L对 τ是改进的。

局部搜索问题 TSP/k-Opt 对应于具有 k-Opt 邻域的 TSP（即，巡回 τ的邻居是指能够通过对 τ进行一次 k-交换而得到的那些巡回）。因此，k-Opt 算法就是该问题的标准局部搜索算法，而该算法的一次执行对应于一个改进型 k-交换序列。

2.3 Max-Cut/Flip

最大割实例是一个二元组（H, w），其中 H是一个无向图（V, E），而 w：$E \to \mathbb{Z}$是一个为 H的边分配权重的函数。H 的一个割（V_1, V_2）是将 H 的顶点划分为两个不相交集合 V_1 和 V_2，我们分别称其为该割的第一集合和第二集合。割（V_1, V_2）的割集是满足 $x \in V_1$ 和$y \in V_2$ 的边 $xy \in E$ 的集合。最大割的目标是找到一个割，使割的值最大，即使割集中的边的总权重最大。

给定一个最大割实例和一个初始割，顶点翻转是将该顶点从割的一个集合移到另一个集合。顶点翻转是改进的，如果它使割的值增加。对于割 σ，其翻转邻域是从 σ 通过一次改进翻转得到的所有割的集合。最大割/翻转问题是与带有翻转邻域的最大割问题相对应的局部搜索问题。我们将其标准局部搜索算法称为翻转算法。一个翻转序列是序列（v_1，……，v_ℓ），由 H的顶点组成。一个翻转序列是改进的，如果按序列中的顺序翻转这些顶点，会在每一步增加割的值。换言之，改进翻转序列对应于翻转算法的一次执行。

Sch¨affer 和 Yannakakis [SY91] 证明了 Max-Cut/Flip 是紧PLS-完全的。随后，Els¨asser 和 Tscheuschner [ET11] 证明了 Max-Cut/Flip 即使限制在最大度数为五的图上，仍然是PLS-完全的。不过，他们的归约并非紧PLS-归约，因此目前尚不清楚 Max-Cut/Flip 对于常数最大度是否紧PLS-完全。此外，值得注意的是，对于最大度至多为三的图，翻转算法总会在多项式次数的迭代后终止 [Pol95]。因此，Max-Cut/Flip 对于最大度为四的图是否PLS-完全也仍是一个开放问题；不过，已知在这种情况下全指数性质成立 [MT10，MS23]。

3 主要归约

定理1的证明基于一个从 Max-Cut/Flip 到旅行商问题/k-Opt 的新归约，我们将在本节中进行说明。我们的归约适用于所有 $k \geq 15$。

设 (H, w) 是一个最大度数为五的最大割实例。为避免与后文 TSP 实例中的顶点和边混淆，我们用 H-顶点 和 H-边 表示 H的顶点和边。我们分别用 n和 m 表示 H-顶点和 H-边的数量。

我们由 H 按如下方式构造相应的 TSP 实例。首先构造一个含有 3$(n+m)$ 条边的圈。将其中 $n+m$ 条边分别分配给每个 n H-顶点和每条 mH-边，使任意两条被分配的边在圈上的距离至少为二（见图 2）。

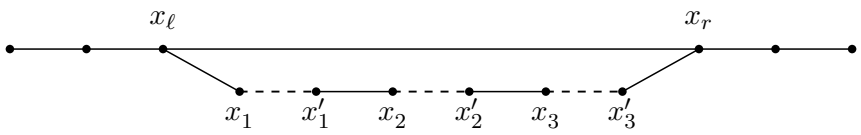


图 1：度数为三的 H-顶点 x 的第一集合边 $x_\ell x_r$ 和第二集合路径（x_ℓ， x_1， x'_1， x_2， x'_2， x_3， x'_3， x_r）。虚线边是网关。第二集合路径中的其他边是门。

接下来，在这个圈中，考虑一条分配给 H-顶点 x的边。（以下概念的示意图请参见图 1。）我们将这条边的两个相邻顶点标记为 x_ℓ 和x_r，分别表示该边左侧和右侧的顶点。令 d（x）表示 x 在 H中的度。我们添加一条长度为 $2d$（x）$+1$ 的新路径，以连接 x_ℓ 和 x_r。我们称这条新路径为 x的第二集合路径，而将原先分配给 x 的边称为 x的第一集合边。其思路是，巡回可以通过第一集合边或第二集合路径连接 x_ℓ 和 x_r 。这模拟了在最大割问题中， H-顶点 x 属于割的第一集合还是第二集合。令 x_ℓ、x_1、x'_1、……、$x_{d(x)}$、$x'_{d(x)}$、x_r 为第二集合路径上各顶点的标记。对于 $i \in \{1, \ldots, d$（x）$\}$，我们称边 $x_i x'_i$ 为 x的网关。第二集合路径上的其他边称为 x的门。换言之，第二集合路径上门与网关交替出现，且路径两端均为门。

对于每条 H边 xy，我们将长度为 3 的圈（$n+m$）中对应于 xy 这条xy边的边称为 x的一扇网关、 y 的一扇网关，以及 xy边。我们删除这三条边，并通过一个奇偶构件连接这三条被删除边的六个端点。

这个奇偶构件的目的是根据 x 和 y 是否属于同一集合，模拟边 xy 对最大割问题目标函数的权重贡献。我们将在第3.1节正式定义奇偶构件，并精确描述奇偶构件如何与图的其余部分连接。我们将这一构造步骤称为奇偶构件的赋值。

最后，对于每个 H顶点 x，我们将一个异或构件赋给 x的第一集合边以及与 x 相接的 x_r 门。异或构件的目的是确保我们能够在 H 中仅通过新图中的一次 k交换来模拟一次翻转。第3.2节将讨论异或构件及其赋值的正式定义。

关于如何分配奇偶构件和异或构件的细节将在第 3.3 节讨论。除奇偶构件中的某些边（我们稍后会具体说明）外，其他边的权重均为零，包括异或构件、初始环和门中的边。令 G 和 c 分别表示经过上述所有操作后得到的图和权重（示例见图 2 ）。

由于 TSP 实例要求是完全图，我们加入权重足够大且合适的剩余边，这些权重将在第 6节中指定，从而得到最终的 TSP 实例（G_∞， c_∞）。我们将这些额外的边称为非边。我们对非边权重的选择将确保

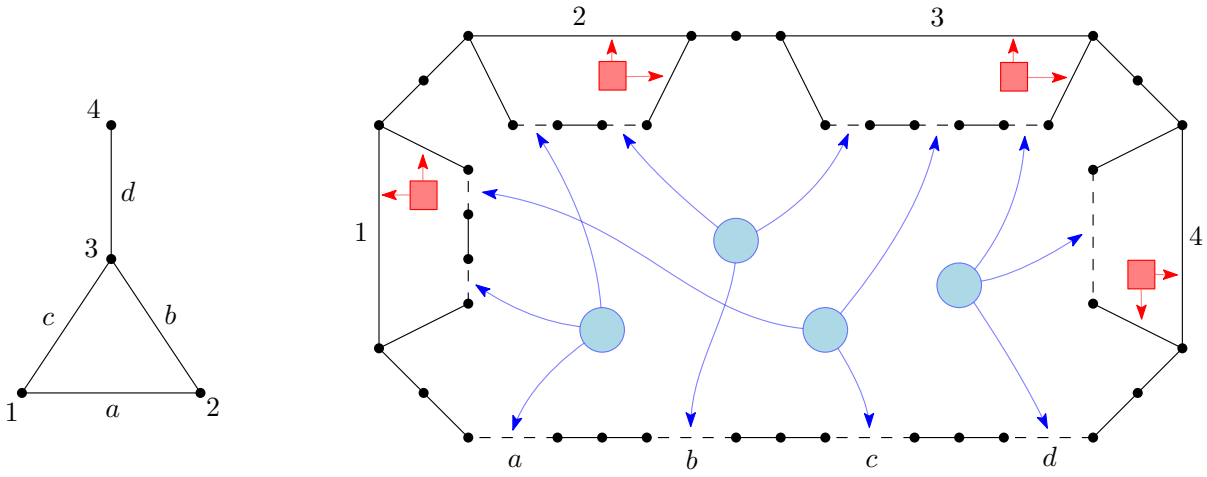


图 2：从最大割实例（左图）到 TSP 实例（右图）的归约示例。奇偶性构件用蓝色圆圈表示，每个圆圈连接三条边。异或构件用红色方框表示，每个方框连接两条边。

如果我们从一条所有边都属于 G的巡回开始，那么 k-Opt 算法永远不会返回包含非边的巡回。

3.1 奇偶性构件

现在我们定义奇偶构件，它有两种变体：严格构件和灵活构件，分别定义为图 3 和 4中的图。首先，我们介绍这些构件的一些性质和术语。

一个奇偶构件包含六个不同的顶点，标记为 X、X'、Y、Y'、Z、Z'。奇偶构件的一个子巡回是一个生成子图 T，满足

- T 是由长度至少为一的顶点不交路径组成的集合，
- Z 和 Z' 是上述某条路径的端点，并且
- 这些路径的另一个端点位于集合 $\{X, X', Y, Y'\}$ 中 .

图3 和4 展示了以下四种子回路的存在：

(1) 一条 A ZZ' 路径；(2) 一条 XX' 路径和一条 ZZ'路径；(3) 一条 YY' 路径和一条 ZZ' 路径；或 (4) 一条 XX' 路径、一条 YY' 路径和一条 ZZ' 路径。

我们分别称它们为子回路 *(1)*、子回路 *(2)*、子回路 *(3)*和子回路 *(4)*。它们是标准子回路，所有其他子回路均为非标准。

图3 和4 还展示了将边划分为三个子集： 同集边、异集边以及剩余边。同集边具有相同的权重，我们称之为同集权重。类似地，异集边具有相同的异集权重。剩余边的权重为零。

引理5。 首先，对于 $i \in \{1, 2, 3, 4\}$，每个奇偶构件都有唯一的子巡回 (i) 。其次，对于每个奇偶构件，子回路 *(1)* 和 *(4)* 的总权重为同集权重，而子回路 *(2)* 和 *(3)* 的总权重为异集权重。最后，如图 *4*所示，灵活构件恰好有三个非标准子回路，而严格构件没有任何非标准子回路。

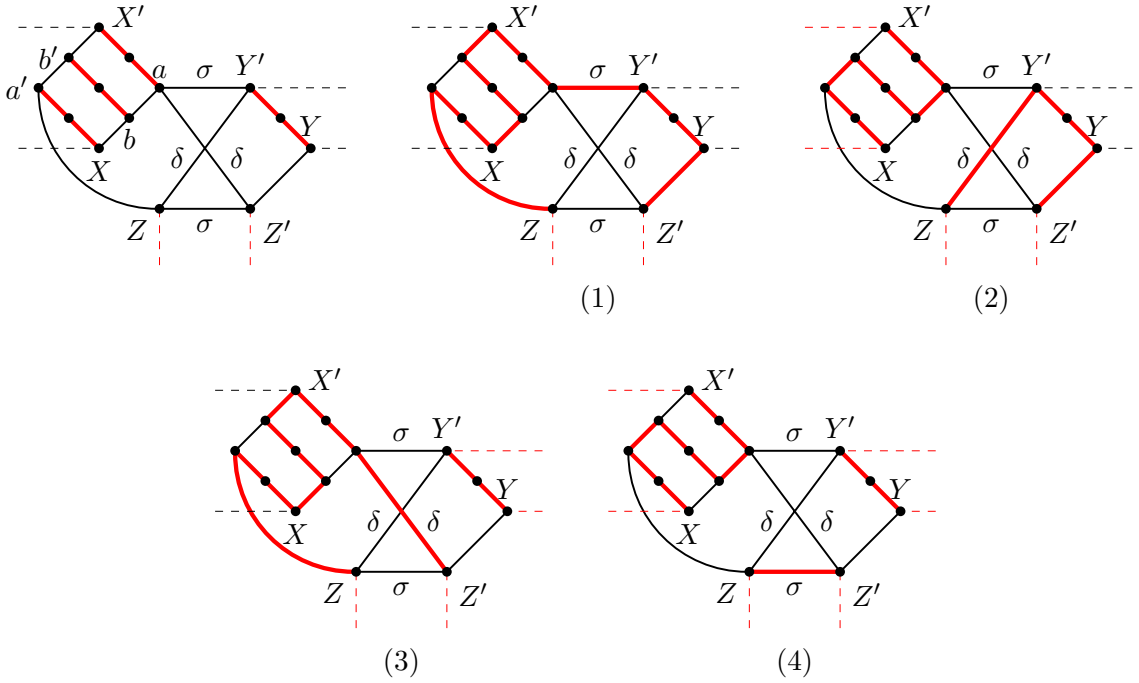


图3：严格构件（左上）和子回路（1）–（4）。左上图中的粗红色边是始终属于某个子回路的边；其他图中的边则展示了相应的子回路。虚线边是外部边（即在整体构造中与构件相接、但不属于构件本身的边）。边 $Y'a$ 和 ZZ' 是同集边，同集权重为σ；而 $Z'a$ 和 $Y'Z$ 是异集边，异集权重为 δ。

证明。 我们从图 3所示的严格构件开始。注意，严格构件中与度为2的顶点相 incident 的八条边必须包含在严格构件的每个子回路中。

首先，假设 X 是严格构件的子回路 ζ 中某条路径的一个端点。那么 Xb不在 ζ中，因此 ab 在 ζ中。这意味着 $a'b'$ 在 ζ中，否则我们就会在 ζ中得到一个圈。由此可知，边 Za'、$Z'a$和 aY' 不在该子回路中的路径上。根据子回路的定义，顶点 Z 和 Z' 必定是该子回路中某些路径的端点。如果 ZZ' 是路径覆盖中的一条边，那么我们就得到子回路（4）。如果 ZZ' 不是一条边，那么ZY' 和 $Z'Y$ 必定是该子回路中的边。因此，我们得到子回路（2）。

其次，假设 X 不是 ζ 中某条路径的端点。通过与上述类似的论证，我们得出 Xb 和 $X'b'$ 属于 ζ，而 $a'b'$ 和 ab 不属于 ζ。这意味着 Za' 位于该子巡回中。如果 $Z'a$ 是路径覆盖中的一条边，则得到子巡回 (3)。否则，我们得到子巡回 (1)。

前两段表明，严格构件不存在非标准子回路，且其四个标准子回路是唯一的，如图 3 所示。容易验证，子回路 (1) 和 (4) 的权重为同集权重，而子回路 (2) 和 (3) 的权重为异集权重。

最后，对于灵活构件，我们可以通过与上述类似的分类讨论，并注意到 Z 和 Z' 必须是该子巡回中某些路径的端点，从而轻松验证引理的陈述。

□

从子巡回 T_1 转变为子巡回 T_2，是指从 T_1 中移除 $E(T_1)\setminus E(T_2)$，然后再添加 $E(T_2)\setminus E(T_1)$。我们称这种变更涉及 $|E(T_1)\setminus E(T_2)|+|E(T_2)\setminus E(T_1)|$ 条边。引理5中标准子回路的唯一性促使我们给出以下定义。

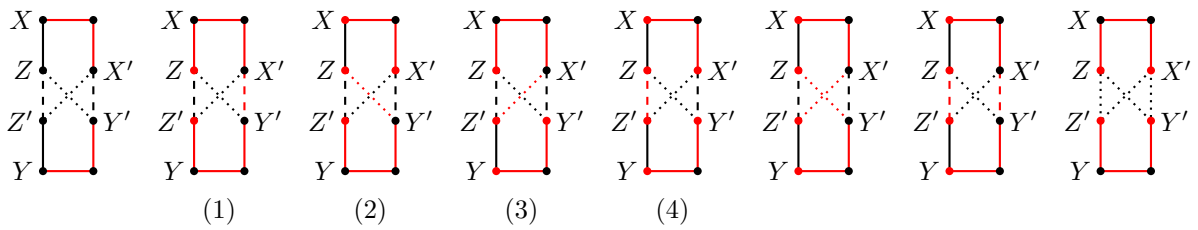


图4：灵活构件（左图）。左图中的红色边表示每个子回路都必须包含的四条边。接下来的四幅图展示了子巡回 (1) 至子巡回 (4) 覆盖灵活构件顶点的四种方式，即通过不相交路径（红色边和红色端点）覆盖。最后三幅图是三个非标准子回路。虚线边是同集边，点线边是异集边，实线边是剩余边。

定义6。 奇偶构件是一个 (r_x, r_y)-奇偶构件，如果

- 子巡回 (1) 与子巡回 (2) 之间，或子巡回 (3) 与子巡回 (4) 之间的变化涉及 $2r_x - 1$ 条边；
- 子巡回 (1) 与子巡回 (3) 之间，或子巡回 (2) 与子巡回 (4) 之间的变化涉及 $2r_y - 1$ 条边；
- 子巡回 (1) 与子巡回 (4) 之间，或子巡回 (2) 与子巡回 (3) 之间的变化涉及超过 $2\max\{r_x, r_y\} - 1$ 条边。

我们将上述定义中前两个条件的变换称为标准子回路变换。

根据引理5 以及图 3 和 4，我们得到以下观察。

观察7。 严格构件是一个 *(4,2)*-奇偶构件，而灵活构件是一个 *(2,2)*-奇偶构件。

现在我们定义，在图 G中，对于一条 H-边 xy，将严格/灵活构件分配给点对 (x, y) 的含义：移除 x 的一个网关 $x_i x'_i$ 、 y 的一个网关 $y_j y'_j$ 以及 xy-边 ZZ'。然后添加一个严格/灵活构件的副本，并将该副本的顶点 X, X', Y, Y', Z, Z' 分别与顶点 $x_i, x'_i, y_j, y'_j, Z, Z'$合并。回忆一下， $w(xy)$ 是 H-边 xy的权重。如果 $w(xy) \geq 0$，则将该奇偶构件的同集权重设为 $w(xy)$，并将其异集权重设为零。否则，将该奇偶构件的同集权重设为零，并将其异集权重设为 $-w(xy)$。

注意，指定的奇偶构件通过与以下顶点相关联的边连接到其余部分： G ，即连接到 X、 X'、 Y、 Y'、 Z以及 Z'。我们称这些关联边为奇偶构件的外部边。我们将奇偶构件内部的边称为内部边。此外，我们称该奇偶构件与相关于 H顶点 x 和 y。

根据构造，被删除的边 ZZ' 原本属于一条长度为五的路径，例如 $(Z_1, Z_2, Z, Z', Z_3, Z_4)$。由于 Z_2和 Z_3在 G中的度为二， G 的任意巡回都必须包含 Z_2Z 和 $Z'Z_3$。因此，巡回只能恰好包含一条与 Z关联的内部边，以及一条与 Z' 关联的内部边（两者可能相同）。这就是我们将子巡回定义为以 Z 和 Z' 为端点的原因。

根据引理5，与顶点 H 相关的奇偶构件内巡回边的总权重 x 和 y 在 x和 y 属于割的同一集合时，等于同集权重；当它们属于不同集合时，则等于异集权重。

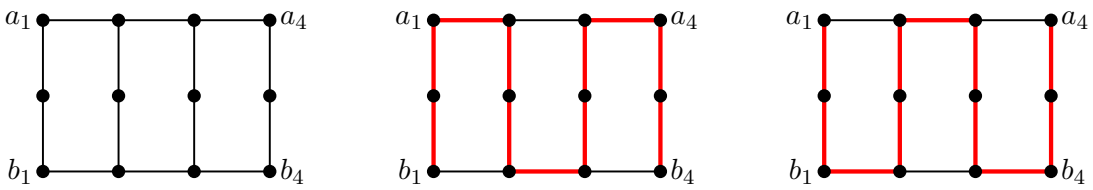


图 5：四阶异或构件 (a) 及其两个子回路 (b) 和 (c)。

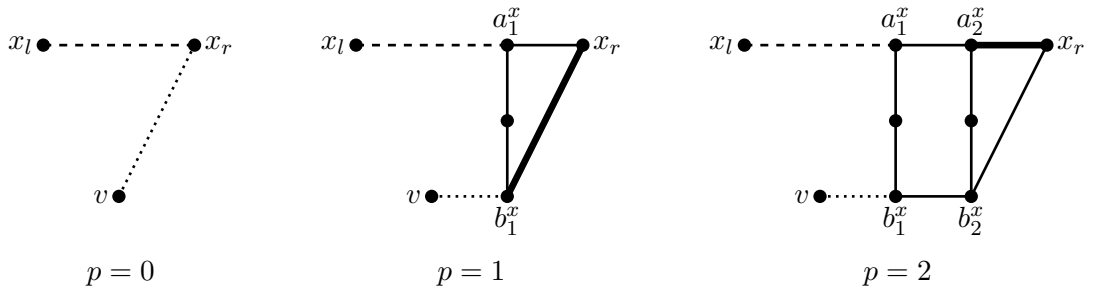


图 6：将阶数为 0、1 和 2 的异或构件分配给一个 H-顶点 x 的示例。虚线边、点线边和粗边分别表示左侧第一集合边、距离 x_r 最近的门和右第一集合边。

3.2 异或构件

现在我们来定义归约中使用的异或构件。我们将这些构件推广自 [Pap78]的异或构件。图5（a）–（c）展示了下文定义的示意图。

定义 8 (异或构件)。 设 p 为一个非负整数。阶数为 p的异或构件是一个包含两条路径的图 $(a_1, \ldots, a_p)$ 和 $(b_1, \ldots, b_p)$，它们称为异或构件的轨道。此外，当 $i \in \{1, \ldots, p\}$ 时，异或构件还包含长度为二的顶点不交路径，其端点为 a_i 和 b_i 。异或构件的子回路是一个生成路径，其两个端点都属于集合 $\{a_1, a_p, b_1, b_p\}$。为方便起见，当 $p = 0$时，阶数为零的异或构件及其唯一子回路均定义为空图。

容易看出，一个异或构件恰好有两个子回路，除非当 $p \leq 1$时，此时它只有一个子巡回。此外，对于 $p \geq 2$，从一个子巡回切换到另一个需要交换 $p - 1$ 条边。

我们将某个顺序为 p 的异或构件指派给一个 H顶点的 x 定义如下。（见图6的示意。）回顾一下， $x_\ell x_r$ 是 x的第一集合边，并令 vx_r 为 x到 x_r的关联门。我们将这两条边细分为长度为 $p+1$的路径，即$(x_\ell, a_1^x, \ldots, a_p^x, x_r)$和$(v, b_1^x, \ldots, b_p^x, x_r)$。然后对于 $i \in \{1, \ldots, p\}$，我们用一条长度为二的路径连接 a_i^x和 b_i^x。注意，当 $p = 0$时，我们不做任何操作。进一步注意，当我们在上述构造中移除与 x_ℓ、 x_r和 v 关联的边时，便得到定义 8中所定义的顺序为 p 的异或构件。

我们将这些与 x_ℓ、 x_r 和 v 相连的边称为异或构件的外部边，并将构造中的其他边称为异或构件的内部边。为方便起见，我们仍将与 v 相连的外部边（即，对于 $p \geq 1$ ，是 vb_1^x；对于 $p = 0$，是 vx_r ）称为 x 的一扇门。此外，我们称其为离 x_r 最近的门。我们将与 x_ℓ 相连的外部边（即，对于 $p \geq 1$ ，是 $x_\ell a_1^x$；对于 $p = 0$，是 $x_\ell x_r$ ）称为 x 的左侧第一集合边。我们将 x 的右第一集合边定义为：若 $p = 0$，则为 $x_r x_\ell$ ；若 p 为正偶数，则为 $x_r a_p^x$ ；若 p 为奇数，则为 $x_r b_p^x$ 。最后，我们将与 x_r 相连的另一条外部边称为 x 的右侧第二集合边。上述概念的示例见图 6。

我们将异或构件中非空子回路的一条关联边定义为与该子回路某个端点相连的一条外部边。空子回路的关联边（即，当$p = 0$时）定义为异或构件的一条外部边。

根据上述定义，很容易验证以下结论。

观察9。 对于分配给 H-顶点 x 的异或构件，其中一个子回路与 x 的左、右第一集合边相接，另一个子回路与离 x_r 最近的门以及 x 的右侧第二集合边相接。当该构件的顺序至多为一时，这两个子回路相同；否则，它们彼此不同。

3.3 分配构件

在我们的归约中，我们在不同位置使用不同的奇偶构件，并使用不同顺序的异或构件。现在，我们明确指定将哪个奇偶构件分配给哪个 H-边，以及将哪个顺序的异或构件分配给哪个 H-顶点。为此，我们将用到以下关于部分边定向的引理。注意，根据假设，图 H 的最大度为五。

引理10。 设 $F = (V, E)$ 是一个最大度为 *5* 的图。那么，我们可以在多项式时间内计算出 E 的一个划分，将其分为两个不相交集合 E_1 和 E_2，并对 E_2 中的边进行定向 $\overrightarrow{E_2}$，使得 (V, E_1) 是星的互不相交并，且 $(V, \overrightarrow{E_2})$ 中的每个顶点的出度至多为二。

证明。 令 M 为 F的一个最大基数匹配，它可以在多项式时间内计算出来。我们初始化 E_1，使其包含 M的边。然后，对于 F 中每个未被 M匹配的五度顶点 v，我们向 E_1中加入 v 的一条任意关联边。我们声称 E_1 满足引理条件。事实上， E_1 中但不属于 M 的每条边 e 都必须与 M中的一个已匹配顶点关联，否则我们就可以将 e 加入 M，形成一个更大的匹配。此外，对于 M的每条边 uv，若 u和 v分别与 F中未匹配的顶点 u'和 v'相邻，那么从 M 中移除 uv 并加入 uu' 和 vv'，就能得到一个比 M更大的匹配。因此， u 和 v 中至少有一个仅与 F中的已匹配顶点关联。这意味着 (V, E_1) 中的所有路径长度至多为二。换言之，它是星的互不相交并。

设 $E_2 := E \setminus E_1$。图 (V, E_2) 的最大度为四，因为 F 的最大度为五，而 F 中每个度为五的顶点在 E_1 中至少有一条关联边。现在按如下方式对 E_2 中的边进行定向：将 (V, E_2) 划分为极大（可能闭合的）游走，并沿每条游走对边定向。游走的极大性保证每个顶点相对于此定向的出度（和入度）至多为二。 □

我们将引理10 应用于图 H，并将 $\overrightarrow{H}$ 记为所得图。注意， $\overrightarrow{H}$包含无向边和有向边。

然后，我们根据 $\overrightarrow{H}$ 中边的定向来指定奇偶构件。设 ψ 是 H 边的任意顺序，使有向边排在无向边之前。我们按此顺序处理 H 边。设 xy 是当前的 H 边。若它在 $\overrightarrow{H}$ 中是有向边，不失一般性，假设它在 $\overrightarrow{H}$ 中从 x 指向 y。然后，我们将严格构件指定给 (x, y)。若它在 $\overrightarrow{H}$ 中是无向边，则将灵活构件指定给 (x, y)。无论采用哪种指定方式，我们都会移除距离 x_ℓ 和 y_ℓ 最近的可用网关。

由于每个奇偶构件都被分配给某条 H边， ψ 上的排序 H便意味着所分配奇偶构件之间存在相应的排序。稍微滥用一下记号，我们也用 ψ 表示所分配奇偶构件的这一顺序。我们将在第 ψ节6中用到这一排序。注意，我们的分配方式确保，对于每个 H顶点 x，沿着第二集合路径从 x_ℓ 到 x_r时，遇到的构件按照递增的 ψ顺序排列。

最后，我们为异或构件分配。回想一下， $d(x) \leq 5$ 表示一个 H-顶点x的度。令 $d^+(x)$ 表示顶点 x 在 $\overrightarrow{H}$中的出度。（注意，无向关联边不会计入此出度。）根据引理10，每个 H-顶点 x 都有 $d^+(x) \leq 2$ 。现在，

对于每个 H-顶点 x，我们分配顺序为 $k - 2d(x) - 2d^+(x) - 1$ 的异或构件。由于 $k \geq 15, d(x) \leq 5$，且 $d^+(x) \leq 2$，注意这是一个有效的分配。

见图 7中的示例。

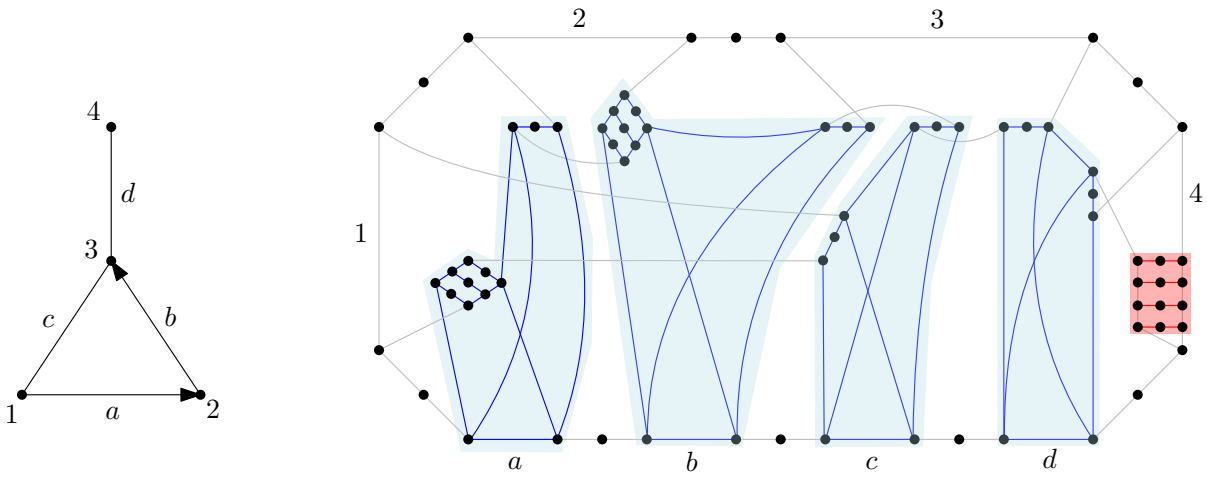


图 7：沿用图 2中的示例，假设 $\overrightarrow{H}$ 如左图所示。那么对于 $k = 7$，我们得到右图所示的构造，其中蓝色和红色子图分别对应奇偶构件和异或构件。请注意，顶点 1–3 被分配了阶数为零的异或构件。

4 标准巡回

设 τ 是 G的一个子图。对于构件 α，α 中的 τ 在 α 中的子巡回是 α 的一个子图，它包含 α与 τ的所有公共边，即，它是图 $(V(\alpha)\ E(\alpha) \cap E(\tau))$。我们称 τ是标准的，若在每个构件中，τ 的子巡回都是对应构件的标准子巡回。

我们首先通过以下引理指出，当 τ 是 G的一个巡回时，τ 在构件中的子巡回定义，与上一节中定义的构件子巡回一致。

引理 11. 设 τ 是 G 的一个巡回，α 是 G中的一个构件。那么，α 中 τ 的子巡回也是 α的子巡回。

证明。如果 α 是一个奇偶构件，那么根据构造，α 通过 α的顶点 X、X'、Y、Y'、Z、Z' 与 G 的其余部分相连。此外，Z和 Z' 与构件外的度为二的顶点相连。由此不难看出，α 中 τ 的子巡回必然满足 α的子巡回的定义。当 α 是顺序不为二的异或构件时，也可以用类似的论证。

剩下的情况是 α 为顺序为二的异或构件；也就是说，它是一个形如（a_1、a_2、u_2、b_2、b_1、u_1）的六边形环。α中 τ的子巡回若不是 α的子巡回，唯一可能的情况是由两条路径（a_1、u_1、b_1）和（a_2、u_2、b_2）组成的子图。然而，根据构造，a_2 和 b_2 也与顶点 x_r 相邻，其中 x 是某个 H-顶点；并且它们在 G 中除 α外没有其他邻居。由于 a_2 和 b_2 在一个巡回中的度必须为二，因此 τ 必须包含边 a_2x_r和 b_2x_r。这意味着 τ中存在一个四边形环（a_2、u_2、b_2、x_r），这与 τ 是 G的一个巡回相矛盾。因此，这种情况不可能发生。引理得证。 □

现在，我们从 Max-Cut/Flip 到 TSP/k-Opt 的紧致 PLS-归约的思路是，将图 G 的所有标准巡回构成的集合用作定义中所要求的集合4。本节将阐述这些标准巡回的一些有用性质。证明我们的 PLS-归约具有紧致性时，需要用到这些性质。

我们先介绍一个简单引理，讨论任意巡回中与一个 H-顶点相连的门。

引理12。 对于 G 的任意巡回以及任意 H-顶点 x，该巡回要么同时包含与 x_ℓ 相连的门和距离 x_r 最近的门，要么两者都不包含。此外，当且仅当 x 的左右第一集合边不在巡回中时，这两扇门才在巡回中。

证明。 根据构造， x_ℓ 在 中与三条边相连：左侧第一集合边、一扇门，以及一条与二度顶点相连的边。由于最后一条边必须在巡回中，该巡回要么使用左侧第一集合边，要么使用与 x相连的门。类似地，该巡回要么使用右侧第一集合边，要么使用 的右侧第二集合边。最后，如果异或构件的顺序非零，该巡回在分配给 的异或构件中有一个子巡回。结合观察9，以上内容共同推出该引理。 □

假设有一个与 H-顶点 x 相关的奇偶构件。我们假设奇偶构件的顶点 X和 X' 与 x 的门相连（即，它们位于x的第二集合路径上）；对于顶点 Y 和 Y' 与 x 的门相连的情况，可以用类似的方法论证。设 τ 是 G 的一个（不一定是标准的）巡回。如果在奇偶构件中， τ 的子巡回里 X 和 X' 的度均为一，我们就称奇偶构件在 τ 中的 x 处处于启用状态。如果这些度均为二，则称奇偶构件在 τ 中的 x 处于停用状态。在这两种情况下，我们都称奇偶构件在 τ 中的 x 处于严格状态。我们很快会看到，严格构件始终处于严格状态，这也解释了它的名称。注意，当奇偶构件在 τ 中的 x 处于非严格状态时，这意味着子巡回中 X 和 X' 的度不相同。根据引理5以及图 3 和图 4，我们可以准确刻画这种情况何时发生。

观察13。 设 α 是 G 中的一个奇偶构件， τ 是 G 的一个巡回，且 x 是 α 的一个相关 H 顶点。当且仅当 τ 在 α 中的子回路是标准子回路时， α 在 τ 中的 x 处是严格的。

请注意，这正是“严格构件”和“灵活构件”这两个名称的由来：一方面，严格构件在每个巡回中，始终在相关 H 顶点处严格，因为它没有任何非标准子回路。另一方面，灵活构件存在非标准子回路，因此可能存在一个巡回 τ，使得该构件在相关 H 顶点处并不严格。

接下来，我们给出关于 G 的标准巡回中边的以下引理。

引理 14. 对于 G 的任意标准巡回以及任意 H 顶点 x，以下情形恰有一种成立 *s:*

- 第一集合情形：该巡回使用 x 的左右第一集合边，且不使用任何门或 x 的右侧第二集合边。它还使用分配给 x 的异或构件中的子回路，该子回路与左右第一集合边相接。此外，与 x 相关的所有奇偶构件在 x 处均处于未接合状态。

- 第二集合情形：巡回使用了所有门以及 x 的右侧第二集合边，但没有使用 x的左右第一集合边。它还使用了分配给 x 的异或构件中的子巡回，该构件与 x的右侧第二集合边和离 x_r 最近的门相接。此外，所有与 x 相关的奇偶构件都在 x 处处于激活状态。

证明。 回想一下， x 的第二集合路径为（x_ℓ， x_1， x'_1， ……， $x_{d(x)}$， $x'_{d(x)}$， x_r），其中 $d(x)$ 表示 x 在 H中的度。为方便论证，我们定义 $x'_0 := x_\ell$；并将 $x_{d(x)+1}$ 定义为离 x_r 最近且不同于 $x'_{d(x)}$ 的门的端点（即， $x'_{d(x)}x_{d(x)+1}$ 是分配给 x的异或构件的一条外部边）。

我们首先证明， x的所有门都在巡回中，或者 x 的所有门都不在巡回中。反证法：假设这一结论不成立。这意味着存在两条边 $x'_{i-1}x_i$ 和 x'_ix_{i+1} ，其中一条在巡回中，另一条不在巡回中。这意味着包含 x_i 和 x'_i 的奇偶构件在巡回中的 x 处并不严格。根据观察13，该巡回在这个奇偶构件中的子巡回不是标准的，这与巡回为标准巡回的假设矛盾。

根据 engaged 和 disengaged 的定义，很容易看出，当所有门都在巡回中时，与 x 相关的所有奇偶构件在 x处都处于 engaged 状态。否则，这些构件在 x处都处于 disengaged 状态。

由前面两个段落、观察 9、引理 12以及巡回必须使用分配给 x 的异或构件中的一个子巡回这一事实，即可推出该引理。 □

对于一个 H-顶点 x，我们将标准巡回中的 x-变换 定义为这样一种交换：通过它可以从引理 14 的第一集合情形变为第二集合情形，反之亦然。下面的引理表明，这样的交换总是存在，并具体给出了进行 x-变换时需要交换的边数。

引理15. 对于一个 H-顶点 x，一次 x-变换至少需要交换 k 条边。此外，当且仅当该 x-变换仅涉及标准子回路变换时，恰好需要交换 k 条边。

证明。 我们考虑从引理 x14 的第一集合情形到第二集合情形的变换14。反方向的情形只需交换这次交换中涉及的两个集合，因此涉及的边数相同。回顾一下， $d(x)$ 是 x 在 H（以及在 $\overrightarrow{H}$）中的度，而 $d^+(x)$ 是 x 在 $\overrightarrow{H}$中的出度。我们将以下面三部分来统计这次 x-变换中涉及的边。

首先，我们需要移除左侧第一集合边，并添加 $d(x)$ 个 $+1$ 门。因此，这部分涉及的边总数为 $d(x)+2$。

其次，如果分配给 x 的异或构件的顺序 p 非零，我们需要移除右第一集合边并添加右侧第二集合边。此外，我们需要通过移除和添加 $p-1$ 条边来改变异或构件中的子巡回。无论如何，涉及的边数都是 $2p$。

最后，我们需要改变与 x相关的所有奇偶构件；换言之，这些构件在 x时从未激活状态变为激活状态。如果只使用标准子回路变换，那么根据构造和观察7，总共恰好涉及 $d^+(x)(2\cdot 4-1)+\big(d(x)-d^+(x)\big)(2\cdot 2-1)=3d(x)+4d^+(x)$。否则，根据定义6中的最后一个条件，被移除和添加的内部边数将超过 $3d(x)+4d^+(x)$。

将以上各项相加，并注意到 $p=k-2d(x)-2d^+(x)-1$，我们得到：如果只使用标准子回路变换，涉及的边总数恰好为 $d(x)+2+2p+3d(x)+4d^+(x)=2k$ 条边，因此此情形下恰好交换 k 条边。如果存在某个非标准子巡回变换，那么涉及的边总数将大于 $2k$，因此不可能恰好交换 k 条边。引理得证。 □

我们定义 ϕ 为一个函数，它将一个 τ 的标准巡回 G映射为一个 γ 的割 H，使得对于每个 H-顶点 x，x 属于第一集合，当且仅当引理14 的第一集合情形对G和 x成立。

引理 16。 函数 ϕ 是 G 中的标准巡回与 H中的割之间的双射。此外，对于 H的任意割 γ，$\phi^{-1}(\gamma)$ 都可以在多项式时间内构造出来。

证明。引理 14 意味着 ϕ 是单射。现在我们证明它是满射。令 γ 为 H 的任意一个割。我们按如下方式构造 G 中的一个标准巡回 τ。将巡回初始化为空图后，把 G 中所有二度顶点的关联边加入巡回。然后，对每个 H-顶点 x，若 x 在该割的第一集合中，则将 x 的左右第一集合边，以及分配给 x 且与这些边关联的异或构件中的子巡回加入巡回。否则，将 x 的所有门和右侧第二集合边加入巡回，并将分配给 x 、与 x 的右侧第二集合边及 x_r 的最近的门关联的异或构件中的子巡回加入巡回。最后，对于每条 H-边 xy，我们在对应构件中加入以下子巡回：若 x 和 y 在第一集合中，则使用子巡回 (1)；若 x 在第二集合中且 y 在第一集合中，则使用子巡回 (2)；若 x 在第一集合中且 y 在第二集合中，则使用子巡回 (3)；若 x 和 y 在第二集合中，则使用子巡回 (4)。根据构造，容易看出 τ 是 G 的标准巡回，且 $\phi(\tau)=\gamma$。引理得证。 □

现在我们通过以下两个引理证明 H 中的翻转序列与 G 中的 k-交换序列之间的对应关系。

引理17。 设 τ_1 是 G的一个标准巡回，且 $\gamma_1 := \phi(\tau_1)$。那么，对于通过一次改进翻转从 γ_1 得到的任意割 γ_2，都可以通过对 τ_1 进行一次改进的 k-交换，得到巡回 $\phi^{-1}(\gamma_2)$ 。

证明。 设割 γ_1 与 γ_2 相差一个 H-顶点 x。设 τ_2 是对 τ_1 进行一次 x-变换（仅使用标准子回路变换）后得到的巡回。根据 x-变换的定义，容易看出 $\tau_2 = \phi^{-1}(\gamma_2)$。此外，根据引理15，我们可以通过一次 k-交换，将 τ_1 变换为 τ_2。

因此，剩下要证明的是 x-变换是改进的。设 P 和 Q 是 γ_1的两个集合，满足 $x \in P$。（我们不预先假设 P 和 Q 中的哪一个是第一集合。）那么，从 γ_1 变换到 γ_2时，最大割实例的值变化为

$$-\sum_{xy\in E(H):y\in Q} w(xy) + \sum_{xy\in E(H):y\in P} w(xy) := \Delta.$$

由于 γ_2 是从 γ_1进行改进翻转所得的结果，我们有 $\Delta > 0$。

由引理5，对于每个奇偶构件，子回路（1）和（4）的总权重均为该构件的同集权重，而子回路（2）和（3）的总权重均为异集权重。此外，请注意，对于与 x相关的每个奇偶构件，根据 x-变换的定义，恰好在 τ_1 与 τ_2 之一中，该构件内的子巡回为子巡回（1）或（4），而另一巡回中的相应子巡回为子巡回（2）或（3）。由于 $\gamma_1 = \phi(\tau_1)$与 $\gamma_2 = \phi(\tau_2)$，根据前述两句以及对各构件所赋的同集权重与异集权重，巡回的总边权重从 τ_1 到 τ_2 的变化为

$$\begin{aligned}
&-\Big(\sum_{\substack{xy\in E(H):\\ y\in P, w(xy)\geq 0}} w(xy) - \sum_{\substack{xy\in E(H):\\ y\in Q, w(xy)<0}} w(xy)\Big) + \Big(\sum_{\substack{xy\in E(H):\\ y\in Q, w(xy)\geq 0}} w(xy) - \sum_{\substack{xy\in E(H):\\ y\in P, w(xy)<0}} w(xy)\Big) \\
&= \sum_{\substack{xy\in E(H):\\ y\in Q}} w(xy) - \sum_{\substack{xy\in E(H):\\ y\in P}} w(xy) = -\Delta < 0.
\end{aligned}$$

该引理由此得证。 □

下一引理表明反向对应关系。

引理18。 令 τ_1 为 G的标准巡回，且令 $\gamma_1 = \phi(\tau_1)$。那么，对于由 τ_1 通过执行一次改进的 k-交换而得到的任意标准巡回τ_2，割 $\phi(\tau_2)$ 都可以通过一次改进翻转从 γ_1得到。

证明。 如果 τ_2 是通过对 τ_1 执行一次 x-变换得到的，其中 H是一个顶点 x，那么我们可以将 γ_2 定义为通过翻转 x而从 γ_1 得到的割。采用引理17证明中的类似论证，我们可以看出，$\gamma_2 = \phi(\tau_2)$和 γ_2 都可以通过一次改进翻转从 γ_1 得到。因此，尚需证明，从 k到另一个标准巡回的任意 τ_1 -交换，都必须是一次x-变换，其中 x。

根据引理14，如果我们移除一个 H-顶点 x的第一集合边、 x的一扇门，或 x的第二集合边，那么为了保持标准巡回，我们必须进行一次 x-变换。由于 x-变换已经涉及至少 k 条边的交换，我们就不能再交换任何其他边。如果我们不改变任何第一集合边或第二集合路径上的边，那么根据奇偶构件的设计，我们无法改变任何构件中的子巡回。因此，巡回保持不变。引理得证。

□

引理16，17和18 立即推出以下结论。

推论 19. 最大割实例 (H, w) 的转移图，同构于旅行商问题/k-*Opt* 实例 (G_∞, c_∞) 的转移图中由 G 的标准巡回所诱导的子图。

5 非标准巡回

在第 4 节中，我们展示了 G 的标准巡回与 H 的割之间存在保持局部邻域的一一对应。现在我们论证，我们的构造确保 G 不存在任何非标准巡回。关键思路是以下两条确保严格性的强制规则。

观察20。 在 G的一个巡回中，如果一个奇偶构件在一个相关的 H-顶点处是严格的，那么它在另一个相关的 H-顶点处也是严格的。

引理21。 假设 x 是一个度为 $d(x)$的 H-顶点。如果与 x相关的 $d(x)-1$ 个奇偶性构件在 G的一个巡回中于 x 处是严格的，那么与 x相关的剩余奇偶构件在 x处也是严格的。

证明。 根据引理12，与 x_ℓ 相关联的门以及 x_r 的最近的门必须在巡回中同时存在或同时不存在。结合其他 $d(x)-1$ 个构件的严格性，可得要么 x 的所有门都在巡回中，要么 x的所有门都不在巡回中。这意味着剩余构件在 x 处的严格性。

□

根据上述强制规则，我们得到关于严格构件与灵活构件指派的一个充分条件，以确保所有奇偶性构件始终是严格的。

引理22。 如果与灵活构件对应的 H-边在 H 中构成一片森林，那么在 G 的任意巡回中，所有奇偶构件在其相关的 H-顶点处都是严格的。

证明。 注意，严格构件只有标准子回路，因此我们只需考虑灵活构件。该引理可通过对森林的叶节点进行简单的递归论证得出，如下所示。考虑 H 的子图，其中包含所有 H-边，这些边对应的灵活构件尚未被证明满足引理中的性质。于是该子图是一片森林。对森林中的一个叶节点应用引理21 ，可得与该叶节点相连的边所对应的灵活构件在叶节点 H-顶点处具有严格性。结合观察结果 20，该灵活构件在其两个相关的 H-顶点处都是严格的。

□

现在我们证明，我们的构造满足引理22 中的条件，因此 G不可能存在非标准巡回。

推论23。 G 的所有巡回都是标准巡回。

证明。 根据构造和引理10， H-边对应的灵活构件构成若干棵互不相交的树。因此，根据引理 22，在 G 的任何巡回中，所有奇偶构件在其相关的 H-顶点处都是严格的。结合观察 13，即可得出该推论。

□

6 不含非边的局部最优解

回顾一下，非边是不属于 G的边，并且仅为构成完全图而添加G_∞。在本节中，我们将描述非边的权重赋值，从而完成该完全图的权重函数 c_∞ 。此外，我们将证明，没有局部最优的巡回包含非边（见下文引理26 ）。请注意，这正是 Krentel 的证明 [Kre89]中存在重大缺漏的地方。特别是，他未经证明便假设非边不可能出现在局部最优解中。PLSPLS完全性的定义（见定义 3）要求函数 g 将局部最优解映射为局部最优解。因此，必须证明局部最优解不能包含非边，或者说明如何将该函数的定义 g 扩展到包含非边的局部最优解。Krentel 的论文中 [Kre89], 两者都没有做到，而且没有明显的方法可以填补这一缺漏。我们不知道对于任意旅行商问题实例，是否存在证明此类结果的通用方法，例如 Krentel 所构造的那些实例 [Kre89]。为了证明

Lin-Kernighan 启发式的 PLS 完全性，Papadimitriou [Pap92] 证明了非边不可能成为局部最优解的一部分。然而，他的论证仅适用于其证明中所使用的特殊构造。

我们从以下观察开始，该观察基于 G的构造。

观察24. 对于图 G，以下成立：

(a) G 的每个顶点的度为二、三或四。

(b) G 中的每个顶点要么是二度顶点，要么与一个二度顶点相邻。

(c) G 中的每个四度顶点都位于一个奇偶构件中。G 中的每个严格构件都有四个四度顶点（即 Z、Z'、a和 Y'）。G 中的每个灵活构件也有四个四度顶点（即 Z、Z'、X'和 Y'）。

设 V_2、V_3和 V_4 分别为 G中度为二、三和四的顶点。进一步，记 $N_2 := |V_2|$、$N_3 := |V_3|$、$N_4 := |V_4|$和 $N = N_2+N_3+N_4$。根据观察24(a)，(V_2, V_3, V_4)是 G的顶点集的一个划分，且 N 是 G中顶点的总数。在本节中，当我们说二度、三度、四度顶点时，所指的度是 G中的度。

非边的权重赋值。我们首先按照从 N到 1 的递减顺序，为 G中的每个顶点 v 赋予一个优先级 $\lambda(v)$，具体如下。首先，以任意顺序将 $\{N, \ldots, N_3 + N_4 + 1\}$ 中的值赋给 V_2 中的顶点。其次，以任意顺序将 $\{N_3 + N_4, \ldots, N_3 + N_4 - n + 1\}$ 中的值赋给形如 x_ℓ 的顶点。（回想一下，x_ℓ 和 x_r 是某个 H-顶点 x中原始第一集合边的两个端点。）第三，对于每个H-顶点 x（按任意顺序），按照 $(a_1, \ldots, a_p, x_r, b_p, \ldots, b_1)$ 的顺序，将下一个可用的优先级值赋给 x_r 以及分配给 x 的异或构件中的顶点，其中 $(a_1, \ldots, a_p)$ 和 $(b_1, \ldots, b_p)$ 是分配给 x的异或构件的两条轨道，而 a_1 和 b_p分别与 x_ℓ 和 x_r关联。最后，对于按照第 3.3 节定义的顺序 ψ 排列的每个奇偶构件 α，按以下顺序将下一个可用的优先级值赋给 α 中的所有顶点：如果 α是严格构件，则顺序为 $(Y, X, b, X', b', a', Z, Z', a, Y')$；如果 α是灵活构件，则顺序为 (Y, X, Z, Z', X', Y')。请注意，我们先为 α中的三度顶点赋予优先级，再为四度顶点赋予优先级。接下来，令 M 为 G 中出现的所有边权重之和。对于一条非边 vv'，我们将 $M \cdot 4^{\max\{\lambda(v),\lambda(v')\}}$ 赋为 vv'的权重。至此，旅行商问题实例 (G_∞, c_∞) 的定义完成。根据此定义，我们立即得到：

观察25。 设(E_1, E_2) 是(G_∞, c_∞) 中的一个*3*-交换，且 E_1 包含一条非边 e_1，其中 $c_\infty(e_1) >$ 最大$_{e\in E_2}\, c_\infty(e)$。假设对巡回 τ 中的(G_∞, c_∞) 执行交换(E_1, E_2) 后得到另一个巡回。那么这个交换是改进性的。

下面的引理基本上说明，包含非边的巡回不可能是局部最优的。

引理26。 设 τ 是(G_∞, c_∞) 的一个巡回，且包含一条非边。那么存在一个能改进 τ的3-交换。

证明。 我们称的一条边为 *G-边*。为方便起见，我们仍用“边”一词泛指非边或 G-边。

我们如下定义 H 的割 γ^*。对于每个 H-顶点 x，若 x 的左侧第一集合边属于 τ，则 x属于 γ^*的第一集合；否则，它属于第二集合。令 $\tau^* := \phi^{-1}(\gamma^*)$。

如果顶点 G_∞ 在 τ 中的关联边与其在 τ^* 中的关联边相同，我们就称 G_∞ 是 τ^*-一致的。令 i 为满足以下条件的最小整数：对于 G_∞ 中任意满足 $\lambda(v) > i$ 的顶点 v，v 都是 τ^*- 一致的。由于 τ 有一条非边，$i \geq 1$。令 v 为满足 $\lambda(v) = i$ 的顶点。根据 i 的定义，v 是 τ^*-不一致的。

我们从以下断言开始。

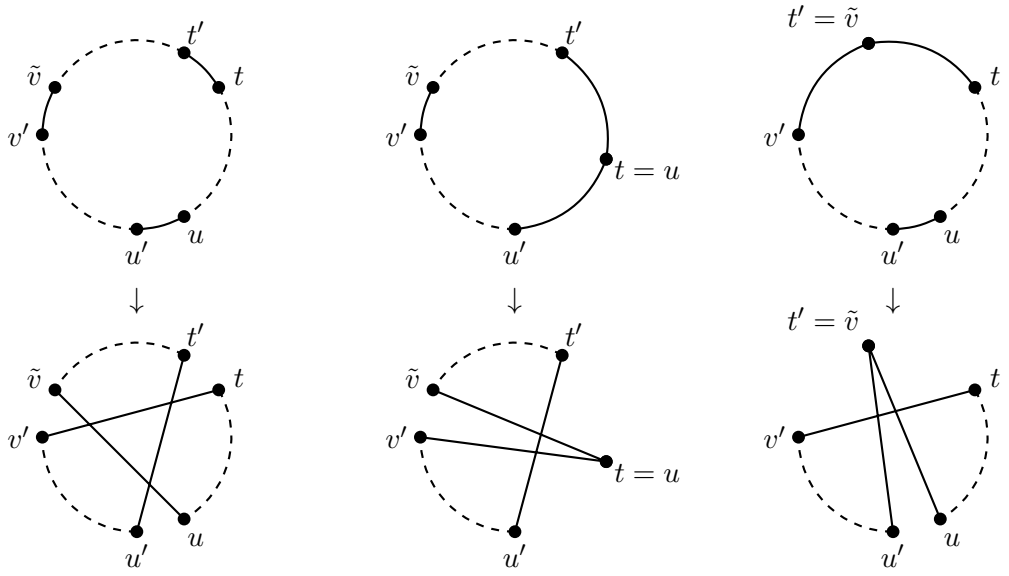


图8：断言27的证明中各情形的示意图。注意， $u\tilde{v}$ 根据假设是一条G-边。

断言27。 假设存在一条非边 $\tilde{v}v'$，属于 τ；以及一条边 $u\tilde{v}$，属于 τ^*，但不属于 τ。进一步假设，对于任意顶点 $v'' \neq u$、 $\tilde{v}$，若 v'' 不满足 τ^*-一致性，则 $\lambda(v'') < \lambda(\tilde{v})$。那么存在一次改进3-交换，可以移除 $\tilde{v}v'$。

断言的证明。固定 τ的一个定向。设 u'是一个顶点，使得 uu'在 τ中但不在 τ^*中。这意味着 u'不是 τ^*-一致的，因此 $\lambda(u') < \lambda(\tilde{v})$。类似地， $\lambda(v') < \lambda(\tilde{v})$。如果$(\tilde{v}, v')$与$(u, u')$在 τ中具有相同的定向，那么由于 $u\tilde{v}$是一条 G-边，并且由于 $\lambda(u')$和 $\lambda(v')$都小于 $\lambda(\tilde{v})$，根据观察25，用 $u\tilde{v}$ 和 $u'v'$ 替换 $\tilde{v}v'$ 和 uu' 会得到一个更好的巡回。否则，考虑 τ 中位于 u与 $\tilde{v}$ 之间且不包含 u' 和v'的路径。如果该路径只含 τ^*中的边，则该路径与 $u\tilde{v}$一起在 τ^* 中形成一个圈，且该圈不是 τ^* 本身（因为 u' 和 v'不在该路径上），这与 τ^*是一个巡回相矛盾。因此，该路径包含一条不在 τ^*中的边 tt'，并且当我们沿该路径从 u 走到 $\tilde{v}$时，会先遇到 t 再遇到 t'。这意味着 t 和 t' 不是 τ^*-一致的。

令 $E_1 = \{uu', \tilde{v}v', tt'\}$ 且 $E_2 = \{u\tilde{v}, t'u', tv'\}$。我们现在通过分析以下几种情况来证明交换 (E_1, E_2) 是改进的，参见图8 示例说明。

情形 A： $t \neq u$ **和** $t' \neq \tilde{v}$。这意味着 $\lambda(t)$ 和 $\lambda(t')$ 均小于 $\lambda(\tilde{v})$。根据观察25，用 E_1 替换 E_2 可得到一条更短回路。

情形 B： $t = u$。注意，如果顶点 v (即 τ^*-不一致顶点中在 τ里优先级最高的顶点)的度至少为三，那么根据优先级分配，所有二度顶点都是 τ^*-一致的。结合观察24(b)，这意味着在 τ中，每个顶点都关联一条也出现在 τ^*中的边。因此 $t \neq u$ 和 $t' \neq \tilde{v}$，这与本情形的假设矛盾。

因此， v 是一个二度顶点。注意，根据该断言的假设， $\tilde{v}$ 和 u中有一个是 v。对于这个顶点，任何未出现在 τ^* 中的关联边都必定是非边，其权重为 $M \cdot 4^i$，即 τ中所有边的最大权重。如果 $\tilde{v} = v$，那么边 $\tilde{v}v'$的权重就大于 E_2中每条边的权重。根据观察25，此时交换(E_1, E_2)会带来改进。否则，我们有 $u = v$。那么 uu' 和 tt' 的权重均为 $M \cdot 4^i$。由于$c_\infty(tv') \leq M \cdot 4^i$ 且 $c_\infty(u\tilde{v})$ $c_\infty(t'u') \leq M \cdot 4^{i-1}$，用 E_1 替换 E_2 可得到一条更短回路。

情况 C： $t' = \tilde{v}$。采用与情况 B 类似的论证，我们也可以得出结论： v 的度为二。如果 $\tilde{v} = v$，那么 $\tilde{v}v'$ 和 tt' 的权重均为 $M \cdot 4^i$。由于 $c_\infty(t'u') \leq M \cdot 4^i$ 且

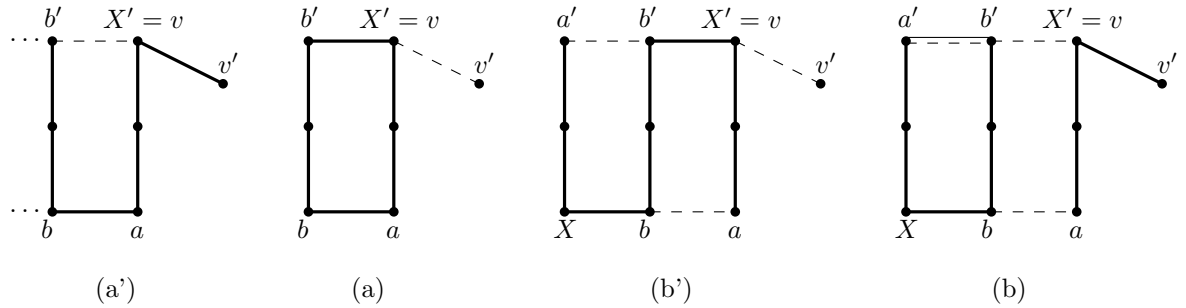


图9：引理证明中子情况4a和4b的示意图26。粗边是α 在特定巡回中出现的边，而虚线边则不出现。图(a')和(b')分别对应子情况4a和4b中的巡回 τ^*。由于 X、b和 a是 τ^*-一致的，这些图示出了图(a)和(b)中巡回 τ 的情形。图(b)中的边 $a'b'$ 表明，这条边可能属于 τ （这会形成一个6-环），也可能不属于 τ （这意味着 b' 与一条非边关联）。

$c_\infty(u\tilde{v})\ c_\infty(tv') \leq M \cdot 4^{i-1}$，将 E_1 替换为 E_2 可得到更短的巡回。否则，我们有$u = v$。那么，边 uu' 的权重大于 E_2中每条边的权重，因此交换 (E_1, E_2) 根据观察结论 25 得到改进。 ■

根据推论27，如果在 τ 中，顶点 v 与一条非边关联，那么我们就能为 τ找到一个改进3-交换。因此，在 τ 中， v 顶点仅与 G-边关联。我们考虑以下五种情况。

情形1： $v \in V_2$。 在这种情况下， v 只有两条关联的 G边，而且它们必须同时属于τ^*和 τ。因此， v是 τ^*一致的，这就产生了矛盾。

情形2： v <style id='4}的度为 $d \in \{3, 4\}$ **在** G **中，并且在** $d-1$ **中至少有** G **个优先级高于** i**的邻居**。 根据 i的选择，优先级高于 i 的邻居是 τ^*一致的。因此，与 v 及这些邻居之一关联的边，要么同时属于 τ和 τ^*，要么同时不属于 τ和 τ^*。因此，如果 v在 τ^*中的两条关联边分别连接到这两个邻居，那么 v 就是 τ^*一致的，这就产生了矛盾。否则， v 在 τ和 τ^*中都恰好与其中一个邻居相邻。这意味着边 vv'同时属于 τ和 τ^*，其中 v' 是 v 在 G中的另一个邻居。然而，这也意味着 v 是 τ^*一致的，这就产生了矛盾。

情形3： $v = x_\ell^j$**对于某个** H**-顶点** x **和** $j \in \{1, \ldots, n\}$。注意， v与 x的左侧第一集合边、x的门 vv' 以及边 uv关联，其中 $u \in V_2$。根据 i的选择，u是 τ^*-一致的，因此 uv同时属于 τ和 τ^*。根据 τ^*的构造，若 x的左侧第一集合边属于 τ，那么它也属于 τ^*。否则， vv'属于 τ^*；根据假设， v只与 G-边关联，因此 vv'也属于 τ。于是， v是 τ^*-一致的，这就产生了矛盾。

情形4： v 属于 V_3 ，且不属于情形2和情形3涵盖的情况。根据观察24，度为三的顶点包括 x_ℓ、$x \in V(H)$对应的x_r ，以及构件中的一些顶点。注意，情形3涵盖了 x_ℓ ；而根据 λ的构造和定义，x_r 以及异或构件中度为三的顶点均属于情形2涵盖的情况。灵活构件中度为三的顶点是该构件的顶点X 和 Y ，根据采用顺序 ψ进行的优先级分配，它们属于情形2涵盖的情况。严格构件中度为三的顶点 Y、 X、 b、 b'、 a' 也同样如此。因此，v 只能是某个严格构件 α的顶点 X' 。

在这种情况下， v 在 α 中度大于 2 的两个邻居分别是顶点 b'（属于 α ）和一个位于构件 v' 之外的顶点 α。我们考虑两种子情况。（参见图9 示意图。）

子情形 *4a:* vv'属于 τ^*且 vb'属于 τ。 在这种情况下，根据异或构件的设计， ab必须属于 τ^*。根据优先级分配， b 的优先级高于 v，因此， b 是 τ^*-一致的。这意味着 ab 也属于 τ。然而，这样我们就得到了 τ的一个子图，它是 the

包含 a，b，b' 和 v 的 6-环，这与 τ 是一个巡回相矛盾。

子情形4b： vv' 在 τ中，且 vb' 在 τ*中。根据异或构件的设计，在这种情况下， Xb必须在 τ*中。通过与前面类似的论证，这条边也在 τ中，因此 $a'b'$不能在 τ中，否则就会形成一个 6-环。由于 b' 在τ中与 v 和 a' 均不相邻，因此它必须关联一条非边 $b'u'$。注意， $\lambda(b') = \lambda(v) - 1 = i - 1$。接着将断言27应用于边 $b'u'$ 和 $b'v$，可得到一个改进3-交换，将 $b'u'$移除。

情形5： v 在 V_4 中，且不属于情形2。根据观察24(c)， v 位于某个奇偶构件 α 中（该构件可以是严格构件，也可以是灵活构件）。根据观察24(b)，在 τ*中，v 与一个顶点 $u \in V_2$相邻。用与情形4类似的论证，我们可以推知 uv 也在 τ中，并且 v在 τ*中有一个邻居 v'，使得 vv'不在 τ中。令 t为满足以下条件的顶点：vt 是 τ 中的一条边，但不在 τ*中。那么必有以下结论。

(*) v' 和 t 的优先级低于 i；并且

(**) τ^* 中与 t 相邻的顶点，其优先级低于 i。

事实上，(*) 可由 v' 和 t 是 τ*-不相容的这一事实推出。为证明(**)，注意到若此结论不成立，那么 τ^*中与 t关联的所有边也都在 τ中，这与 t并非 τ*-相容相矛盾。注意，由于 τ^*是标准巡回， α 中 τ*的子回路 T属于 α的子回路(1)–(4)。综合上述观察，我们现在考虑两个子情况。

子情况5a： α 是严格构件。回顾一下，严格构件及其标准子回路如图3所示。由于 v 不属于情形2，因此 v 必定是 α的顶点 Z 。如果T 是子回路(1)或(3)，那么 v'别无选择，因为 T 中 v 的所有邻居的优先级都高于 i，这与(*)相矛盾。如果 T 是子回路(2)，则 t 必定是 Z'；但此时T 中 t 的邻居的优先级都高于 i，这与(**)相矛盾。因此， T 是子回路(4)。这意味着v' 是 Z'，且 t 是 Y'。注意，在这个子回路中， a 的邻居的优先级都高于v。因此， τ 中与 a 关联的边和 τ^* 相同。相应地，边 $Z'a$ 不能属于 τ。由于边 ZZ' 也不属于 τ ，并且 α 中除 Z 和 a 之外的 Z' 的其他邻居的优先级都高于 i，我们得出结论：在τ中，只有一条 G-边与 Z' 关联。这意味着 Z'在 τ中与一条非边 $Z't'$关联。由于 $\lambda(Z') = \lambda(Z) - 1 = i - 1$，且$t'$ 不能是 τ*-相容的，因此边 $Z't'$ 和 $Z'Z$ 满足断言27的条件。因此，存在一种3-交换，可以移除 $Z't'$。

子情形5b： α 是一个灵活构件。回想一下，灵活构件及其标准子回路如图4所示。由于 v 不属于情形2， v 因此必定是 Z 或 X' 中的顶点 α。我们先给出以下观察，它由按照顺序 ψ进行的构件分配、优先级分配，以及由无向边诱导的 $\overrightarrow{H}$ 子图中的路径长度至多为二这一事实推出（由引理10）。

(***) 对于分配到 G 中的每个灵活构件， X' 或 Y' 至少有一个与不属于任何奇偶构件的顶点相邻（即异或构件中的顶点，或形如 x_r 的顶点）。

现在考虑 T 的不同情况。首先，如果 T 是子巡回 (1)，那么 v 不可能是 Z，否则就不存在满足 (*) 的有效 v' 选择。换言之， v 是 X'。于是我们有 v' 是 Y'。由于 t 是 X' 的一个邻居，且其优先级低于 i，因此 t 必定是另一个奇偶构件的顶点。根据 (***)，在 G中，v' （即 α的顶点 Y' ）与一个不属于任何奇偶构件的顶点 v'' 相邻。根据优先级分配，并且由于 v 位于一个奇偶构件中，这意味着 v'' 的优先级高于 i。因此，由于边 $v'v''$ 不在 τ*中，它也不在 τ中。出于类似原因， Zv'不可能位于 τ中。由于 vv'也不在 τ中，我们得出 v' 与 τ中的一条非边 $v't'$ 关联。注意， $\lambda(v') = \lambda(v) - 1 = i - 1$，而且 t'必定是 τ*-不一致的，且优先级低于 i。因此， vv' 和 $v't'$ 满足断言27的条件，所以存在一个改进3-交换。

其次，如果 T 是子巡回 (2)，那么 v 必定是 Z 或 X'。如果 v 是 Z，那么 t 是 Z'；而如果 v 是 X'，那么 t 是 Y'。在这两种情况下，t 在 T 中的所有邻居的优先级都高于 v的优先级，这与 (**) 矛盾。

第三，如果 T 是子巡回（3）。无论 v 是 Z 还是 X'，我们都无法为 v'找到有效选择。

最后，假设 T 是子巡回（4）。那么根据（***），X' 和 Y' 中至少有一个与顶点 v'' 相邻，而 v'' 不属于任何奇偶构件，因此 v'' 的优先级高于 i。如果 v'' 是 X'的邻居，那么 v 必定是 Z，因为当 v 是 X'时，v' 没有有效选择。此外，X' 在 τ^* 中的邻居的优先级都高于 i，因此 X' 在τ 和 τ^* 中的关联边相同。采用与前面类似的论证，我们可以得出结论：在 τ中，Z' 不可能与 X'、Z或 Y 相邻，因此它必定与一条非边 $Z't'$关联。接着，我们可以对 ZZ' 和 $Z't'$ 应用断言27，找到一个改进3-交换。

现在假设 v'' 是 Y'的邻居。无论 v 是 Z 还是 X'，t 都是 Y'。然而，由于T 是子巡回 (4)，τ^* 中 t 的两个邻居的优先级都高于 i，这与 (**) 矛盾。

引理的证明至此完成。 □

7 $k \geq 15$时的 PLS 完全性

现在我们可以证明从 Max-Cut/Flip 到 TSP/k-Opt 的紧 PLS 归约。

定理28。 对于任意 $k \geq 15$，都存在一个从最大度数为五的 *Max-Cut/Flip* 到 *TSP/k-Opt* 的紧 PLS 归约。

证明。 为了证明这是一个紧 PLS 归约，我们需要指定一个 PLS 归约 (h, g)，其定义见定义 3，以及一个集合 R，其定义见定义4。

对于函数 h，我们使用从最大割实例（H，w）到旅行商问题实例（G_∞，c_∞）的归约，如第3 节所述，其中非边的权重赋值如第6节所述。对于函数 g，我们描述将巡回 τ（属于 G_∞）映射到割 γ（属于 H）。如果 τ 是 G的标准巡回，则将其映射到 ϕ（τ）。否则，将其映射到 H 的任意割（例如，所有顶点都在第一集合中的割）。

我们证明（h，g）确实是一个 PLS归约。容易看出，它们可以在多项式时间内计算。此外，根据推论 23，如果 G_∞ 的巡回不是 G的标准巡回，则它必须包含一条非边，并且根据引理 26，它不可能是局部最优解。否则，推论19表明，如果 τ 是 G的局部最优标准巡回，则 ϕ（τ）是H的局部最优割。以上全部表明（h，g）是一个 PLS归约。

为证明紧性，我们定义集合 R 为 G的所有标准巡回组成的集合。现在我们证明R 满足定义 4中的三个条件。如上所述，(G_∞, c_∞) 的局部最优解是 G的标准巡回；因此，第一个条件成立。第二个条件由引理16得出。最后，注意，不属于 R 的解是含有一条非边的巡回。由于该非边的权重大于任意标准巡回的总权重，改进型 k-交换只能将一个标准巡回变为另一个标准巡回。结合推论 19，第三个条件随即成立。至此，紧的 PLS-归约的证明完成。

□

本文的主要结果随即得出。

定理 1。 *TSP/k-Opt* 是 PLS-完全的，其中 $k \geq 15$。

证明。 该定理由定理 28 以及以下事实直接得出：即使将实例限制为最大度数为五的实例，Max-Cut/Flip 仍然是 PLS-完全的 [ET11]。 □

8 结语

在本文中，我们通过从最大度数为五的 Max-Cut/Flip 进行紧致的 PLS 归约，证明了 TSP/k-Opt 对于 $k \geq 15$ 是 PLS 完全的。还有两个自然的开放问题有待解决。

- TSP/k-Opt PLS完全吗？ $k < 15$可以证明，不存在更小的“严格构件”；也就是说，不存在这样一种构件：它具有唯一的子巡回 (1)–(4)，没有其他子巡回，并且根据定义，是一个 (3，2)-、(2，3)-或 (2，2)-奇偶构件。因此，要证明较低 值下的 PLS完全性，可能需要一种截然不同的思路。

- 旅行商问题/k-Opt 对某个常数是否为紧致 PLS完全的 k？由于我们的归约是紧致PLS归约，如果有界度 Max-Cut/Flip 将来被证明是紧致 PLS完全的，那么对我们的归约做直接改写（特别是对图 $\overrightarrow{H}$ 在第 3.3节中的构造稍作修改）就能对上述第二个开放问题给出肯定回答。

致谢。 本工作始于2021年德国波恩大学豪斯多夫数学研究所的“离散优化”学期项目。我们感谢组织者提供了优良的工作条件和富有启发性的氛围。

参考文献

[DS10] Dominic Dumrauf 和 Tim S¨uß。加权标准集合问题的局部搜索复杂性。载于 Fernando Ferreira、Benedikt L¨owe、Elvira Mayordomo 和 Lu´ıs Mendes Gomes 编，《程序、证明与过程。第*6*届欧洲可计算性会议（*CiE 2010*）》，《计算机科学讲义》第6158卷，第132–140页。施普林格·柏林·海德堡，2010年。[ET11] Robert Els¨asser 和 Tobias Tscheuschner。（几乎）完全确定局部最大割的复杂性。载于 Luca Aceto、Monika Henzinger 和 Ji˘r´ı Sgall 编，《自-动机、语言与编程。第*38*届国际研讨会（*ICALP 2011*）。第一部分》，《计算机科学讲义》第6755卷，第171–182页。施普林格-出版社柏林海德堡，2011年。[HH23] Hung P. Hoang 和 Stefan Hougardy。旅行商问题的 k-Opt 局部搜索的 PLS 完全性。技术报告第231275号，离散数学研究所，波恩大学，2023年。[HHH24] Sophia Heimann、Hung P. Hoang 和 Stefan Hougardy。旅行商问题的 k-Opt 算法对于 $k \geq 5$具有指数运行时间。载于 Karl Bringmann、Martin Grohe、Gabriele Puppis 和 Ola Svensson 编，《自动机、语言与编程第*51*届国际研讨会（*ICALP 2024*）》，《*LIPIcs*。莱布尼茨国际信息学会议录》第297卷，第84:1–84:18页，2024年。[HHH26] Sophia Heimann、Hung P. Hoang 和 Stefan Hougardy。旅行商问题中 k-opt 指数时间复杂性的近乎完整解决。载于 Kasper Green Larsen 和 Barna Saha 编，《第三十七届*ACM-SIAM*离散算法研讨会论文集（*SODA 2026*）》，第5861–5885页，2026年。[JM03] David S. Johnson 和 Lyle A. McGeoch。旅行商问题：一个案例研究。载于 Emile Aarts 和 Jan Karel Lenstra 编，《组合优-化中的局部搜索》，第215–310页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿和牛津，第二版，2003年。[JPY88] David S. Johnson、Christos H. Papadimitriou 和 Mihalis Yannakakis。局部搜索有多容易？《计算机与系统科学杂志》，37(1):79–100，1988年。

[Kre89] Mark W Krentel。局部最优解的结构。载于《第*30*届计算机科学基础年会》，第216–221页。IEEE计算机学会，1989年。[Kre90] Mark W. Krentel。局部最优解的寻找与验证。《*SIAM*计算杂志》，19(4):742–749，1990年。[MAK07]Wil Michiels、Emile Aarts 和 Jan Korst。《局部搜索的理论方面》。施普林格出版社柏林海德堡，2007年。[MDT10] Burkhard Monien、Dominic Dumrauf 和 Tobias Tscheuschner。局部搜索：简单、成功，但有时缓慢。载于 Samson Abramsky、Cyril Gavoille、Claude Kircher、Friedhelm Meyer auf der Heide 和 Paul G. Spirakis 编，《自动机、语言与编程。第*37*届国际研讨会（*ICALP 2010*）。第一部分》，《计算机科学讲义》第6198卷，第1–17页。施普林格，柏林，2010年。[MS23] Lukas Michel 和 Alex Scott。局部最大割中 3-FLIP 的超多项式平滑复杂度。《*arXiv:2310*。》*19594 [cs.DS]*, 2023。[MT10] Burkhard Monien 和 Tobias Tscheuschner。局部最大割问题中度为四的节点的作用。载于 Tiziana Calamoneri 和 Josep Diaz 编，《算法与复杂性。第*7*届国际会议（*CIAC 2010*）》，《计算机科学讲义》第6078卷，第264–275页。施普林格·柏林·海德堡，2010年。[Pap78] Christos H. Papadimitriou。旅行商多面体上的邻接关系是 NP完全的。《数学规划》，14(1):312–324，1978年。[Pap92] Christos H. Papadimitriou。旅行商问题中 Lin–Kernighan启发式算法的复杂性。《*SIAM*计算杂志》，21(3):450–465，1992年。[Pol95] Svatopluk Poljak。整数线性规划与最大割的局部搜索。《*SIAM*计算杂志》，24(4):822–839，1995年。[SY91] Alejandro A. Sch¨affer 和 Mihalis Yannakakis。难以求解的简单局部搜索问题。《*SIAM*计算杂志》，20(1):56–87，1991年。[Yan03] Mihalis Yannakakis。计算复杂性。载于 Emile Aarts 和 Jan Karel Lenstra 编，《组合优化中的局部搜索》，第19–55页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿和牛津，第二版，2003年。