arXiv:2603.11359v1 [math.CO] 11 Mar 2026

# 正则树的 ζ函数、特殊值与函数方程

Dylan Müller

2026年3月11日

**摘要**

我们确定了正则树上组合拉普拉斯算子所对应的谱 ζ 函数在正整数处的特殊值。这些值可以用某些多项式表示为显式公式；我们证明了这些多项式是回文的，并且具有非负整数系数和组合解释。在此过程中，我们发现了 ζ函数在负整数与正整数处的值之间出人意料的对称性，这种对称性体现在它们的生成函数层面。利用这些对称性，我们最终为 ζ函数的一个自然完备化建立了形如 $s \longleftrightarrow 1-s$ 的函数方程。

## 1 引言

1735年，欧拉著名地求出了这个级数的精确值

$$\zeta(2k) \coloneqq \sum_{n\geq 1} n^{-2k} = \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}(-1)^{k+1}B_{2k}, \tag{1}$$

其中 $B_{2k}$ 表示伯努利数。后来，他计算了在负奇整数处的取值

$$\zeta(1-2k) = -\frac{B_{2k}}{2k},$$

并强调了正、负特殊值之间显著的对称性。这一现象最终引出了黎曼 ζ 函数的函数方程；黎曼后来在其具有开创性的 1859 年回忆录中确立了这一方程，并在其中将 ζ 函数定义在复平面上，证明了它的基本解析性质。

对称性通过特殊值体现出来这一普遍理念，启发了本研究。我们考察与 $T_{q+1}$ 度数为 $q+1$ 的正则树相关联的谱 ζ 函数在整数处的取值；该树是每个 $(q+1)$- 正则图的万有覆盖。我们发现，这些特殊值具有出人意料的丰富代数与组合结构，并且还呈现出两种非凡的对称性，最终导出树的 ζ 函数的一个函数方程。

### 树的谱 ζ 函数

一般而言，配备拉普拉斯算子的空间 $X$ 的谱 ζ 函数定义为热核迹的梅林变换

$$\zeta_X(s) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \operatorname{Tr}(K_X(t))\, t^s\, \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

当拉普拉斯算子的点谱中包含 0 特征值时，将其舍去。例如，对于圆 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，其谱为 $\lambda = 4\pi^2 n^2$，其中 $n \in \mathbb{Z}$，可得

$$\zeta_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}(s) = \sum_{\lambda\neq 0} \lambda^{-s} = 2(2\pi)^{-2s}\zeta(2s).$$

另一个基本例子是离散直线 $\mathbb{Z}$的谱 ζ 函数：

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-2t} I_0(2t)\, t^s \, \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2^{2s}\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(1/2-s)}{\Gamma(1-s)} = \binom{-2s}{-s} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-s/k)^2}{(1-2s/k)}.$$

它在负整数处的特殊值是中心二项式系数，并且与卡特兰数直接相关。相当引人注目的是，它满足如下类型的函数方程 $s \leftrightarrow 1-s$，这与连续情形中的其他 ζ 函数完全类似，并且还具有许多相同的性质；参见 [FK17、KP23]。

作为一种更一般的图，度数为 $q+1$ 的正则树 $T_{q+1}$ 是正则图中的基本对象。通过谱测度，其谱 ζ 函数可表示为

$$\zeta_q(s) = \frac{q+1}{2\pi} \int_{-2\sqrt{q}}^{2\sqrt{q}} (q+1-\lambda)^{-s} \frac{\sqrt{4q-\lambda^2}}{(q+1)^2-\lambda^2}\, \mathrm{d}\lambda. \tag{2}$$

它是超几何函数的一个特例；参见 [FK17，定理 1。4]。当 $q>1$ 时，

$$\zeta_q(s) = \frac{q(q+1)}{(q-1)^2(\sqrt{q}-1)^{2s}} F_1(3/2, s+1, 1, 3; u, v), \tag{3}$$

其中 $u = -4\sqrt{q}/(\sqrt{q}-1)^2$、 $v = 4\sqrt{q}/(\sqrt{q}+1)^2$,，且 $F_1$ 是阿佩尔超几何函数之一。

## 主要结果

我们的主要结果之一是通过一个具有显著代数性质和组合性质的多项式族，确定 $\zeta_q$在正整数处的特殊值。

**定理 1.1**。 对于所有整数 $n \geq 1$ 和 $q \geq 2$，我们有

$$\zeta_q(n) = \frac{q}{(q-1)^{2n-1}(q+1)^n} P_n(q), \tag{4}$$

其中， $P_n$ 是一个次数为 $2n-2$ 、具有整数系数的回文首一多项式。此外， $P_n$ 的系数统计了带权的2色戴克字，因此均为非负数。

前几个多项式可以手工计算得到：

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P_n$ | 1 | $q^2+1$ | $q^4+q^3+4q^2+q+1$ | $q^6+3q^5+11q^4+10q^3+11q^2+3q+1$ |

推论 4.2中给出了多项式 $P_n$ 的递归关系。上面展示的前几个 $P_n$ 在有理数域上均不可约，但我们没有发现任何证据表明这一点对一般情形也成立。不过， $P_n$ 没有有理根。关于 $P_n$ 的组合性质将在第 6 节单独讨论，并可用于证明，除 $P_2$之外， $P_n$的所有系数均为正。

在特例 $q=1$ 中，谱 ζ 函数 $\zeta_{\mathbb{Z}}$ 在正整数处有零点，这一点例如可由上面的无穷乘积得出。

关于 $\zeta_q$在负整数处的特殊值，它们在 [CJKS25的定理 3]中被计算；对于 $q \geq 1$ 和 $m \geq 0$,

$$\zeta_q(-m) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}^2 q^{m-k} \;-\; (q-1) \sum_{j=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{m-2j} \binom{m}{k} \binom{m}{2j+k} q^{m-2j-k}. \tag{5}$$

若将其视为 $q$的函数，则它们是次数为 $m$的首一多项式，具有非负整数系数，但并非回文的。

乍看之下，上述公式并未表明正整数与负整数处的值之间存在任何直接关系。事实上，定理 1.1 将作为正整数与负整数处特殊值之间一种出人意料的对称性的推论出现，这种对称性完全体现在它们各自的生成函数层面上。更确切地说，定义正、负特殊值的生成函数为

$$G_+(z) = \sum_{n\geq 1} \zeta_q(n) z^n, \qquad G_-(z) = \sum_{n\geq 0} \zeta_q(-n) z^n. \tag{6}$$

令 $\Omega_q^+ := [(\sqrt{q}-1)^2, (\sqrt{q}+1)^2]$ 为组合拉普拉斯算子的谱，并令 $\Omega_q^-$ 为 $\Omega_q^+$ 在反演 $z \mapsto 1/z$ 下的像。将 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 记作黎曼球面，我们得到：

**定理 1.2**。对于 $q > 1$，函数 $G_\pm$ 分别可解析延拓至 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \Omega_q^\pm$。此外，对于在 $\Omega_q^+$ 之外的 $z$，下列恒等式成立：

$$G_+(z) + G_-\left(\frac{1}{z}\right) = 0. \tag{7}$$

利用这一对称性，我们可以从 $G_+$ 推导出 $G_-$，即特殊值的生成函数（5）。反过来，$G_-$ 本身又可由 $n$ 步后在 $T_{q+1}$上的返回概率生成函数推导得到；这一生成函数已见于 [Kes59]。因此，我们得到了 $G_+$ 的闭式公式，定理1.1随即得证。

Karlsson 在 [K20第 9], 页提出了一个更具结构性的问题：$\zeta_q$ 是否满足如下形式的函数方程：$s \leftrightarrow 1-s$? FK17]中也提出了这个问题。我们对此给出了肯定的回答。

**定理 1.3**。对于 $q > 1$，定义整函数

$$\xi_q(s) := (q-1)^s (2(q+1)\zeta_q(s) - \zeta_q(s-1)).$$

那么，对于所有 $s \in \mathbb{C}$,

$$\xi_q(1-s) = \xi_q(s).$$

正如我们将看到的，这一结果源于生成函数层面的第二种对称性，即命题5.1。这也解释了定理 $\zeta_q$ 1.3中出现的这一略显出人意料的归一化。

从更概念性的角度来看，这一结果表明，特殊值生成函数层面的不对称性可以传递到 ζ 函数本身。

## 与萨托–泰特的联系以及 $q \to \infty$

记号 $T_{q+1}$ 的使用源于它与数论的联系，例如与$q$-adic 群的联系；参见 [Ser02]。邻接算子 $\mu_q$ 在$T_{q+1}$ 上的对角谱测度称为 ***Kesten–McKay*** 定律 [Kes59, McK81], 并且相对于勒贝格测度绝对连续：

$$\mathrm{d}\mu_q(x) = \frac{q+1}{2\pi} \frac{\sqrt{4q-x^2}}{(q+1)^2 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

通过调和分析研究 $\mu_q$ 可以追溯到 [Ca72]。它涉及“垂直”萨托–泰特问题。固定一个素数 $q$； $q$-Hecke 算子保持给定级和权的尖点形式空间不变。经过适当重标度后，当级/权趋于无穷时，其特征值渐近地按照 $\mu_q$ 分布；参见 [Ser97]。

当 $q \to \infty$ 时，测度 $\mu_q$ 在重标度 $x = \sqrt{q}\,u$ 下弱收敛至萨托-泰特测度

$$\mu_\infty := \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

萨托–泰特猜想——如今已在极广泛的情形下得到证明 [BGLHT11] ——指出，对于素数 $q \le N$，固定新形式的海克特征值在适当缩放后 $\mu_\infty$ 渐近地按照 $N \to \infty$ 分布。

在统计物理的语境中，萨托–泰特测度被称为维格纳半圆定律。半圆定律和 Kesten–McKay 定律在随机正则图模型中都起着基础性作用，而精确确定 $\mu_q$ 如何（局部地）收敛到 $\mu_\infty$ 在这一语境中特别重要；参见 [BKY17]。

从这个角度来看，在我们的设定中也令 $q \to \infty$ 是很自然的。Karlsson 曾指出，萨托–泰特测度的 ζ函数（对应于 $q = \infty$）满足形如 $s \leftrightarrow 1-s$ 的函数方程。更准确地说，通过定义

$$\zeta_\infty(s) := \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}(2-u)^{-s}\sqrt{4-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

他观察到，它满足所需形式的函数方程。

**命题 1.4** ([K25])。 对于 实部 $s < 1/2$，令

$$\xi_\infty(s) := (2-s)\cdot 2^s\cos(\pi s/2)\zeta_\infty(1+s/2). \tag{8}$$

那么， $\xi_\infty$ 可以解析延拓为一个整函数，并且对所有 $s \in \mathbb{C}$，以下恒等式都成立：

$$\xi_\infty(1-s) = \xi_\infty(s).$$

萨托–泰特测度的矩是卡特兰数；事实上，ζ函数$\zeta_\infty$ 可以看作卡特兰数的解析延拓。考虑公式

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \binom{-2s}{-s},$$

由此可知， $\zeta_{\mathbb{Z}}$ 与 $\zeta_\infty$ 通过恒等式相关联，这并不令人意外：

$$\zeta_\infty(1+s) = \frac{1}{1-s}\zeta_{\mathbb{Z}}(s).$$

这也从另一个角度说明， $\zeta_\infty$ 满足函数方程。

因此， $q = 1$ 和 $q = \infty$ 都满足函数方程，与黎曼情形完全类似。我们的定理 1.3 补全了所有中间 $1 < q < \infty$。

### 进一步的视角

本研究提出的方法为研究传递非 amenable 图上的谱 ζ 函数提供了一个更广泛的框架。定理 1.2 中生成函数层面的基本对称性仅依赖于谱隙的存在，因此在任何传递非 amenable 图上都成立。此外，定理 1.3中的函数方程是生成函数层面的代数关系的结果。看来，这些代数关系是树所特有的，与之相伴的还有特殊值的闭式公式和组合结构。已知几乎自由群的格林函数是代数的，这是 Muller-Schupp 定理 [MS83]的推论。例如，在这一背景下，研究特殊值生成函数之间的代数关系（从而研究 ζ 函数的函数方程），以及计算这些特殊值，都将很有趣。

**致谢**

本研究得到瑞士国家科学基金会资助，资助项目编号为 200020-200400 和 200021-212864。作者衷心感谢 Karlsson教授提出的许多宝贵意见并所作的修订；若无这些帮助，本文将无法达到最终的完成稿。

## 2 热核与 $T_{q+1}$上的谱 ζ 函数

设 $q \geq 1$ 为整数。正则树 $T_{q+1}$ 上的组合拉普拉斯算子定义为$\Delta_q = (q+1) - A$，其中 $A$ 为邻接算子。它作用于函数 $f\colon T_{q+1} \to \mathbb{C}$，定义为

$$(\Delta_q f)(x) \coloneqq \sum_{y \sim x} (f(x) - f(y)).$$

它是 $\ell^2(T_{q+1})$上的有界自伴算子，其谱为 $\Omega_q^+ = [(\sqrt{q}-1)^2, (\sqrt{q}+1)^2]$。热核定义为以下一参数算子族

$$K_q(t) \coloneqq \exp(-t\Delta_q).$$

它通过卷积作用于 $\ell^2(T_{q+1})$，卷积所用的函数为

$$K_q(t, x, y) = \langle K_q(t)\delta_x \mid \delta_y \rangle.$$

具体而言，对于 $f \in \ell^2(T_{q+1})$，有

$$(K_q(t)f)(x) = \sum_{y \in T_{q+1}} K_q(t, x, y) f(y),$$

函数 $K_q(t,\ x,\ y)$ 通常也称为热核。

对于 $T_{q+1}$ 这类无限图，算子 $K_q(t)$ 不是迹类。为了解决这一问题，我们首先注意到，对于传递图 $\Gamma$，函数 $t \mapsto K_\Gamma(t,\ x,\ x)$ 与顶点 $x \in \Gamma$ 无关；其次，如果 $\Gamma$ 有限，那么

$$\operatorname{Tr} K_\Gamma(t) = K_\Gamma(t, x, x) \cdot |\Gamma|.$$

因此，对于 $T_{q+1}$ 这类无限传递图，通常用映射 $t \mapsto K_\Gamma(t,\ x,\ x)$ 取代迹，该映射与顶点 $x \in T_{q+1}$ 的选择无关。固定一个顶点 $\mathbf{0} \in T_{q+1}$。在 $\mathbf{0}$ 处的（局部）谱 ζ 函数定义为对该局部化迹取梅林变换，即

$$\zeta_q(s) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} K_q(t, \mathbf{0}, \mathbf{0})\, t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

关于 $T_{q+1}$ 的热核已在许多文献中计算过；例如， [CY99]给出了一种无需预备知识的直接计算。利用对角谱测度$\mu_q$，我们有

$$K_q(t) \coloneqq K_q(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \int e^{-t(q+1-x)}\, \mathrm{d}\mu_q(x).$$

当 $q = 1$ 时，树 $T_{q+1}$ 是离散直线 $\mathbb{Z}$，热核由下式给出

$$K_{\mathbb{Z}}(t) = e^{-2t} I_0(2t),$$

其中 $I_n$ 是第 $n$ 阶第一类修正贝塞尔函数；关于 [CJKS25] 的最新综述，参见 $K_{\mathbb{Z}}$。

当 $q > 1$ 时， $\Delta_q$ 的谱不包含 0。因此，对于每个 $s \in \mathbb{C}$，映射$x \mapsto x^{-s}$ 在 $\sigma(\Delta_q) = \Omega_q^+$上连续，这意味着根据谱定理，算子 $\Delta_q^{-s}$定义良好且有界。从这一视角来看，$\mathbf{0}$ 处的局部谱 ζ 函数是整函数

$$\zeta_q(s) = \int (q+1-\lambda)^{-s}\, \mathrm{d}\mu_q(\lambda) = \langle \Delta_q^{-s}\delta_{\mathbf{0}} \mid \delta_{\mathbf{0}} \rangle.$$

## 3 基本对称性及显式公式（针对 $G$）

本节旨在证明定理 1.2 中所述的对称性。证明思路是，热核的拉普拉斯变换在 $z=0$ 和$z=\infty$ 附近的展开，直接与生成函数 $G_+$ 和 $G_-$ （6）中定义的生成函数相关。从直观上说，定理 1.2 可以概括为以下形式恒等式

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \zeta_q(n) z^n = 0.$$

随后，我们回顾 Kesten 对$n$ 步后返回概率的生成函数的计算，并据此推导出 $G_{\pm}$的闭式公式。

### 定理 3.1 的证明1.2

热核的拉普拉斯变换定义为

$$\mathcal{L}[K_q](s) := \int_0^\infty K_q(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时，它是解析的，并且在该区域内

$$\mathcal{L}[K_q](s) = \int \frac{1}{q+1-\lambda+s}\,\mathrm{d}\mu_q(\lambda),$$

这实际上表明，它在 $-\Omega_q^+$ 之外解析。在 $s=0$ 附近，更确切地说，当 $|s| < (\sqrt{q}-1)^2$, 时，我们有

$$s\,\mathcal{L}[K_q](-s) = G_+(s), \tag{9}$$

这表明，热核的拉普拉斯变换给出了 $G_+$到 $\mathbb{C}\setminus\Omega_q^+$的解析延拓。此外，在 $s=\infty$附近，更确切地说，当 $|s| > (\sqrt{q}+1)^2$, 时，我们有

$$-\mathcal{L}[K_q](-s) = \frac{1}{s} G_-\left(\frac{1}{s}\right). \tag{10}$$

总而言之，我们已经证明，通过热核的拉普拉斯变换，函数$G_{\pm}$ 分别可以在谱割线 $\Omega_q^{\pm}$之外解析延拓。映射 $z\mapsto 1/z$交换它们的定义域。此外，结合式（9）和（10），我们得到所需的关系：在 $\Omega_q^+$之外，

$$G_+(z) = z\,\mathcal{L}[K_q](-z) = -G_-\left(\frac{1}{z}\right),$$

如所述。 □

**注 3.1**。 上述证明仅依赖于 $\Delta_q$ 是正定且有界的这一事实。事实上，众所周知，热核的拉普拉斯变换本质上就是相应算子的预解式。同样的论证也适用于任何此类算子的预解式。

因此，对于任何具有谱隙的有限度传递图，这种对称性都成立。

### 3.2 Kesten 的生成函数及 $G_-$ 的一个公式

Kesten–McKay 定律 $\mu_q$，即邻接算子 $A$ 在根处的谱测度，是 Kesten 通过研究 [Kes59] 步后的返回概率 $n$ 计算得出的，或者等价地，通过研究以下数量

$$c_q(n) := \langle A^n \delta_{\mathbf{0}} \mid \delta_{\mathbf{0}} \rangle$$

从根出发、长度为 $n$ 的闭合游走数量。这些就是 $\mu_q$ 的矩：

$$c_q(n) = \int \lambda^n \, \mathrm{d}\mu_q(\lambda).$$

Kesten 计算了它们的生成函数

$$F(z) := \sum_{n\geq 0} c_q(n) z^n = \frac{1}{2} \frac{(q+1)\sqrt{1-4qz^2} - (q-1)}{1-(q+1)^2 z^2},$$

其中分支的选取满足 $F(0) = 1$。由于 $\Delta_q = (q+1) - A$，函数 $F$ 和 $G_-$ 满足以下关系

$$G_-(z) = \frac{1}{1-(q+1)z} F\left(\frac{z}{(q+1)z-1}\right),$$

在系数层面上，

$$\zeta_q(-m) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (-1)^j c_q(j) (q+1)^{m-j}.$$

$F$ 的公式表明，$c_q(n)$ 是关于 $q$ 的整数系数多项式，进而可知，对于负整数 $-m \leq 0$，特殊值 $\zeta_q(-m)$ 是关于 $q$ 的整数系数多项式。利用 $G_-$ 和 $F$ 之间的关系，我们得到

$$G_-(z) = \frac{1}{2} \frac{(q+1)\sqrt{1-2(q+1)z+(q-1)^2z^2} + z(q^2-1) - (q-1)}{1-2(q+1)z}. \tag{11}$$

从这个表达式中提取负整数处特殊值的闭式公式颇为繁琐。然而，利用 $\zeta_q$ 的超几何性质，并采用一种完全不同的方法，这样的闭式公式已在 [CJKS25]中得到；参见引言中的（5）。

### 3.3 $G_+$的公式

结合（11）和定理 1.2，我们得到 $G_+$的一个初等表达式；它是 $\zeta_q$ 的正特殊值的生成函数。

**引理 3.2**。对于 $q > 1$，以下等价命题成立：

*(i)* 对于 $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_q^+$，有

$$G_+(z) = \frac{1}{2} \frac{(q+1)\sqrt{(q-1)^2 - 2z(q+1) + z^2} + z(q-1) - (q^2-1)}{z - 2(q+1)}. \tag{12}$$

*(ii)* 生成函数 $G_+$ 满足二次方程

$$(2(q+1) - z)G_+^2 + (q-1)(z-(q+1))G_+ + zq = 0. \tag{13}$$

*(iii)* 由 $a_n := \zeta_q(n)$ 定义的实数序列满足：对于 $n \geq 2$，

$$(q^2-1)a_n = 2(q+1)\sum_{j=1}^{n-1} a_j a_{n-j} - \sum_{j=1}^{n-2} a_j a_{n-1-j} + (q-1)a_{n-1}, \tag{14}$$

其中 $a_0 = 1$ 且 $a_1 = \frac{q}{q^2-1}$。

证明。第一个结论可通过直接代入得到。唯一需要谨慎处理的是平方根的分支选择，但条件 $G_+(0) = 0$ 唯一确定了该分支。其余结论是（12）的等价表述，可直接推出。

□

# 4 定理1.1 的证明以及关于 $P_n$的递归关系

本节利用 $G_+$ 在引理 3.2中得到的显式表达式，证明定理 1.1的第一部分，并将组合解释留到最后一节。随后，我们将递归关系（14）转化为关于 $P_n$的递归关系。

## 4.1 定理1.1 的证明

由（12），可写为

$$G_+(z(q+1)) = \frac{q-1}{2} + \frac{q-1}{2(z-2)}\left[1+\sqrt{1+k^2z(z-2)}\right],$$

其中 $k = \frac{q+1}{q-1}$。注意到 $k^2$ 在反演 $q \leftrightarrow 1/q$下保持不变。在 $z=0$附近展开平方根，可得对于 $n \geq 1$,

$$(q+1)^n\zeta_q(n) = (q-1)R_n(k^2),$$

其中 $R_n$ 是一个次数为 $n$ 、满足 $R_n(1)=0$ 的有理数系数多项式。用 $q$ 表示回去，可写为

$$R_n(k^2) = \frac{1}{(q-1)^{2n}}\, qP_n(q),$$

其中 $P_n(q)$ 是一个满足 $q^{2n-2}P_n(1/q) = P_n(q)$ 的有理系数多项式。

现在回顾， $A$ 的谱半径为 $2\sqrt{q}$，这意味着对于固定的 $s \in \mathbb{C}$，算子范数意义下的收敛

$$\|(q+1)^s\Delta_q^{-s} - I_q\| \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

成立，其中 $I_q$ 是 $\ell^2(T_{q+1})$上的恒等算子。因此

$$(q+1)^s\zeta_q(s) \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

对每个 $s \in \mathbb{C}$都成立。由此可知， $P_n$ 是次数为 $2n-2$的首一多项式。综上所述，我们已经证明，对于 $n \geq 1$,

$$\zeta_q(n) = \frac{q}{(q-1)^{2n-1}(q+1)^n}P_n(q), \tag{15}$$

其中 $P_n$ 是次数为 $2n-2$的回文首一多项式。

为完成证明，尚需证明 $P_n$ 的系数是整数。鉴于（15），这等价于证明：对所有 $n \geq 0$, $\zeta_q$（$n$）属于环 $\mathbb{Z}[[q]]$。这可由递归关系（14）经归纳法得出。□

**注 4.1.** 多项式 $P_n$ 在定理1.1 中的回文性质所展现的对称性，已经出现在谱测度 $\mu_q$这一级上。事实上，作变量替换 $\lambda = (q+1)\ x$（见（2））， 即考虑归一化拉普拉斯算子而非组合拉普拉斯算子，则函数 $\zeta_q$ 可以写成

$$(q+1)^{s-1}\zeta_q(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\rho}^{\rho}(1-x)^{-s}\frac{\sqrt{\rho^2-x^2}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x, \tag{16}$$

其中， $\rho$ 是 $T_{q+1}$上随机游走的转移算子的谱半径 ，

$$\rho^{-1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{q}+\frac{1}{\sqrt{q}}\right).$$

然而，令人好奇的是，尽管（16）的右端在 $q \leftrightarrow 1/q$ 下不变，但左端在该反演下并非严格不变。例如，特殊值

在负整数（5）处不具有任何回文结构。即使在正整数处，特殊值在 $q \leftrightarrow 1/q$ 下也会变号。这种对称性的破缺源于如下事实：对于固定的 $s \in \mathbb{C}$，（16）的右端——当视作 $q$ 的函数时——在 $q = 1$ 处并非解析的。值 $q = 1$ 是使得 0 属于 $\Delta_q$ 的谱的唯一值。

我们还注意到，定理1.1 中特殊值的代数结构最终依赖于 $G_+$的代数性质。我们结合特殊值生成函数之间的基本对称性以及 Kesten 先前的工作，推导出这一结论。也可以通过谱角表示来独立推导 $\zeta_q$:

$$\zeta_q(s) = \frac{2}{\pi} q(q+1) \int_0^\pi (q+1-2\sqrt{q}\cos\theta)^{-s} \frac{\sin^2\theta}{(q+1)^2 - 4q\cos^2\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

通过直接计算生成函数及其所得积分，可以用另一种方法证明引理3.2。

然而，我们认为我们的方法在概念上更清晰，技术上也更简便。定理1.2 中的对称性揭示了其结构机制，解释了为何生成函数 $G_+$ 具有代数闭式，进而说明了为何多项式 $P_n$ 具有回文性和整性。相比之下，角参数化的推导过程更长、技术性更强，也使代数表达式的概念来源不那么清晰。

## 4.2 $P_n$的递归关系

$P_n$ 的前几个值可以手算得到:

$$\begin{aligned}
P_1(q) &= 1,\\
P_2(q) &= q^2 + 1,\\
P_3(q) &= q^4 + q^3 + 4q^2 + q + 1,\\
P_4(q) &= q^6 + 3q^5 + 11q^4 + 10q^3 + 11q^2 + 3q + 1,\\
P_5(q) &= q^8 + 6q^7 + 26q^6 + 46q^5 + 66q^4 + 46q^3 + 26q^2 + 6q + 1.
\end{aligned}$$

值得注意的是，上面出现的所有系数都是非负的。事实上，这一现象对每一个多项式 $P_n$都成立，这将在下一节中证明，我们在那里给出这些系数的组合解释。在此之前，我们将引理3.2 加以转化，以得到 $P_n$的递归关系及其生成函数的二次方程。

**推论 4.2** （引理3.2）。 设 $T$ 为多项式族$P_n$的生成函数，即

$$T(z) := \sum_{n\geq 1} P_n(q) z^{n-1}.$$

它满足二次方程

$$qz(2 - z(q-1)^2)T^2 + (z(q-1)^2 - 1)T + 1 = 0,$$

从而多项式族 $P_n$ 满足递归关系，对 $n \geq 1$,

$$P_{n+1} = 2q \sum_{j=1}^{n} P_j P_{n+1-j} - q(q-1)^2 \sum_{j=1}^{n-1} P_j P_{n-j} + (q-1)^2 P_n, \tag{17}$$

其中 $P_0 = 1$。

Obser 明，通过直接运用递归关系，也可以推导出定理 1 .1.

## 5 函数方程

本节我们证明定理 1.3。

得到这一结果的第一步，是利用生成函数的代数表达式，得出生成函数$G_{\pm}$（在引言中定义）之间的又一个关系。

**命题 5.1.** 令 $q>1$, $k:=\frac{q+1}{q-1}$，并定义

$$\mathcal{E}(z):=G_{-}\left(\frac{z}{q-1}\right)\cdot(1-2kz)+G_{+}((q-1)z)\cdot(2k-z).$$

那么，$E$ 可解析延拓为一个整函数，并满足

$$\mathcal{E}(z)=z+1. \tag{18}$$

证明。由（11）和（12），在 $z=0$ 附近有

$$G_{+}((q-1)z)=\frac{1}{2}\frac{(q+1)\sqrt{1-2zk+z^2}+z(q-1)-(q+1)}{z-2k},$$

and

$$G_{-}\left(\frac{z}{q-1}\right)=\frac{1}{2}\frac{(q+1)\sqrt{1-2kz+z^2}+(q+1)z-(q-1)}{1-2kz},$$

这表明，当 $z$ 足够小时，

$$\mathcal{E}(z)=z+1.$$

□

因此，通过比较生成级数中的系数，我们得到以下递归关系。

**推论 5.2.** 设 $q>1$ 和 $a_n:=\zeta_q(n)$ 对于 $n\in\mathbb{Z}$。那么，对于任意 $n\in\mathbb{Z}$，我们有如下二步递归关系

$$a_{-n}-2(q+1)a_{1-n}=(q-1)^{2n-1}\left[a_{n-1}-2(q+1)a_n\right]. \tag{19}$$

从直观上看，生成函数层面的对称性（18）应当在 ζ 函数层面诱导出相应的对称性。这与一般原理一致：生成函数、热核和谱 ζ 函数通过拉普拉斯变换和梅林变换相互关联。

因此，我们会考虑（18）的梅林变换，旨在得到（19）的解析延拓，进而得到所需的函数方程。主要困难在于，谱割线位于自然积分路径上。我们可以使用汉克尔围道绕过割线；但在存在谱隙的情况下，可以选择一个方便得多的围道。

回顾一下，对于谱为 $\sigma(B)$的自伴算子 $B$， $B$ 的预解式定义为全纯映射

$$\sigma(B)\not\ni z\longmapsto R_B(z):=\frac{1}{z-B}.$$

**引理 5.3。** 设 $B$ 为一个有界自伴算子，其谱为 $\sigma(B)$。设 $U\subset\mathbb{C}$ 为包含 $\sigma(B)$的开集，且 $\gamma$ 为位于 $U$ 内的一条分段光滑正向约当曲线，其内部包含 $\sigma(B)$。那么，对于任意全纯函数 $h:U\to\mathbb{C}$ 以及任意 $n\in\mathbb{Z}$，都有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}h(z)R_B(z)^n\,\mathrm{d}z=\begin{cases}h(B) & \text{if } n=1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明。 这是谱定理及其函数演算的直接应用。事实上，设 $\mathbb{P}_B$ 为谱定理给出的 $B$ 的投影值测度。于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)R_B(z)^n\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\int_{\sigma(B)}\frac{h(z)}{(z-\lambda)^n}\,\mathrm{d}\mathbb{P}_B(\lambda)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{\sigma(B)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{h(z)}{(z-\lambda)^n}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\mathbb{P}_B(\lambda).\end{aligned}$$

根据柯西积分公式，当 $n\neq 1$ 时，内层积分为 0；否则为 $h(\lambda)$。因此，对于$n=1$，我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)R_B(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\sigma(B)}h(\lambda)\,\mathrm{d}\mathbb{P}_B(\lambda) = h(B). \qquad \square$$

定理 *1.3* 的证明。 考虑算子

$$B \coloneqq \frac{\Delta_q}{q-1},$$

并注意到其谱为 $\sigma(B)=[\beta,\beta^{-1}]$，其中

$$\beta \coloneqq \frac{\sqrt{q}-1}{\sqrt{q}+1} > 0.$$

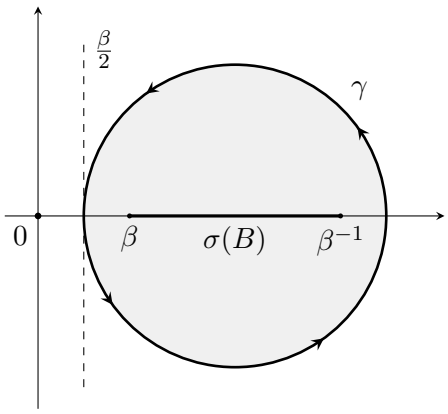
特别地， $B$ 具有谱隙，其逆算子 $B^{-1}$ 的谱与 $B$相同。还要回顾的是

$$\xi_q(s) \coloneqq (q-1)^s(2(q+1)\zeta_q(s)-\zeta_q(s-1)) = (q-1)\langle(2kB^{-s}-B^{1-s})\delta_{\mathbf{0}}\mid\delta_{\mathbf{0}}\rangle,$$

其中 $k=\frac{q+1}{q-1}$。根据 $G_\pm$的定义，我们有

$$\begin{aligned}G_+((q-1)z) &= \langle -zR_B(z)\delta_{\mathbf{0}}\mid\delta_{\mathbf{0}}\rangle,\\ G_-\left(\frac{z}{q-1}\right) &= \langle(1-zR_{B^{-1}}(z))\delta_{\mathbf{0}}\mid\delta_{\mathbf{0}}\rangle.\end{aligned}$$

取 $\gamma$ 为圆的正向参数化：




现在，对于 $s\in\mathbb{C}$，在对数的标准分支下，映射 $z\mapsto z^{-s}$ 在开集 $U:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>0\}$ 上全纯。结合引理 5.3 和命题 5.1，鉴于 $\mathcal{E}$ 是整函数，我们得到：

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathcal{E}(z)z^{-s}\frac{\mathrm{d}z}{z}\\ &= \left\langle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left[(1-2kz)(1-zR_{B^{-1}}(z))+(z-2k)zR_B(z)\right]z^{-s}\frac{\mathrm{d}z}{z}\,\delta_{\mathbf{0}}\mid\delta_{\mathbf{0}}\right\rangle\\ &= \langle(-B^s+2kB^{s-1}+B^{1-s}-2kB^{-s})\delta_{\mathbf{0}}\mid\delta_{\mathbf{0}}\rangle\\ &= \frac{1}{q-1}(\xi_q(1-s)-\xi_q(s)).\end{aligned} \qquad \square$$

## 6 $P_n$的组合解释

本节我们将说明， $P_n$ 的系数可以用 2色长度为 $2n-2$ 的 Dyck 字作组合解释。对此，一个初步线索是：将 $q=1$ 代入推论 中的生成函数 $T$ 所满足的二次方程（推论4.2），可得

$$\sum_{n\geq 1} P_n(1)z^n = \frac{1-\sqrt{1-8z}}{4z},$$

数列的生成函数 $2^nC_n$，其中 $C_n$ 是第 $n$个卡特兰数。众所周知， $C_n$ 计数的是长度为 戴克路径 的 $2n$。戴克路径是一条从 $(0,0) \in \mathbb{Z}^2$ 出发并终止于水平轴上，且始终保持在水平轴上方的路径；允许的步长集合为 $\{(1,1),(1,-1)\}$；见下方图 1 。

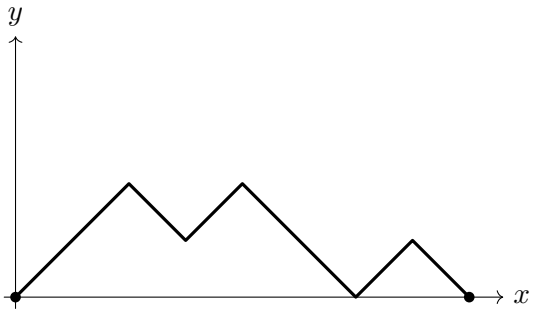



图 1：长度为 8 的戴克路径示例。

一个 2-双色戴克路径 是指向下的步长 $(1,-1)$ 被染成两种颜色之一的戴克路径；见下方图 2。

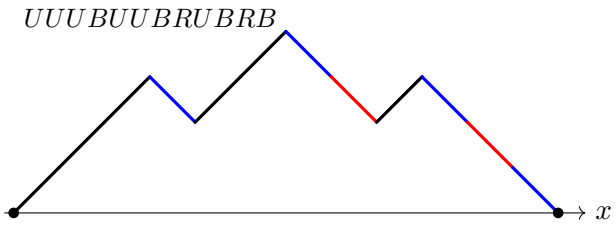



图 2：长度为 12 的双色戴克路径示例。

恒等式 $P_n(1) = 2^{n-1}C_{n-1}$ 强烈暗示， $P_n$ 的系数计数了不同类型的双色戴克路径。

**定义 6.1**。 令 $\Sigma_3^*$为由集合 $\{U,B,R\}$生成的自由幺半群。对于每个字 $w \in \Sigma_3^*$，我们从左向右读取，并将其对应到一条着色路径，其中 $U$ 对应向上移动 (1,1)，而 $R$ 和 $B$ 分别对应红色和蓝色的向下移动。2-双色戴克字 是由那些元素 $w$ 构成的子集 $\mathbb{D} \subset \Sigma_3^*$ ，其对应的着色路径为双色戴克路径。长度为 $2n$的双色戴克字的数量为 $2^nC_n$。

令 $w \in \Sigma_3^*$。 $w$ 中的颜色块 $\beta \in \{U,B,R\}$ 是 $w$ 的一个极大且非空的子字，其中仅含字母 $\beta$。用 $r_\beta(w)$ 表示 $w$ 中颜色为 $\beta$ 的块数。

我们通过计算 $U$ 的数量，加上蓝色区块的数量，再减去红色区块的数量，为双色戴克字定义一个权函数。具体来说，对于长度为 $2n$ 的 $w \in \mathbb{D}$ ，令

$$h(w) := n + r_B(w) - r_R(w).$$

接下来，我们定义与 $h$ 相关联的多项式：对于 $n \geq 0$,

$$Q_n(t) = \sum_{w \in \mathbb{D}_n} t^{h(w)} = \sum_{k=0}^{2n} \#\{w \in \mathbb{D}_n \mid h(w) = k\} t^k,$$

其中， $\mathbb{D}_n$ 是长度为 $2n$的 $w \in \mathbb{D}$ 集合。显然， $Q_n$ 是首一的、回文的，且具有非负整数系数。 $Q_n$ 的前几项可以手算得出：

$$\begin{aligned}
&Q_0(t) = 1,\\
&Q_1(t) = t^2 + 1,\\
&Q_2(t) = t^4 + t^3 + 4t^2 + t + 1,\\
&Q_3(t) = t^6 + 3t^5 + 11t^4 + 10t^3 + 11t^2 + 3t + 1,\\
&Q_4(t) = t^8 + 6t^7 + 26t^6 + 46t^5 + 66t^4 + 46t^3 + 26t^2 + 6t + 1.
\end{aligned}$$

值得注意的是，对于所有 $n = 0$、.....、4，都有 $Q_n = P_{n+1}$；事实上，我们将证明这一结论始终成立。

**定理 6.2**。 对于每个 $n \geq 0$，都有 $Q_n = P_{n+1}$。

证明基于这样一个事实：权 $h$ 具有良好的递归性质。它导出一个关于 $Q_n$的生成函数的二次方程，该方程与推论 $T$ 中 $P_n$的生成函数所满足的方程相同，如4.2中所述。

证明。 生成函数 $H(t, z) := \sum_{n \geq 0} Q_n(t) z^n$ 可写为

$$H = \sum_{w \in \mathbb{D}} t^{h(w)} z^{l(w)},$$

其中， $l(w)$是 $w$长度的一半。我们定义辅助生成函数 s

$$E_B := \sum_{w \in \mathbb{D}(B)} t^{h(w)} z^{l(w)}, \quad \text{and} \quad E_R := \sum_{w \in \mathbb{D}(R)} t^{h(w)} z^{l(w)},$$

其中， $\mathbb{D}(\beta)$ 表示以 $\beta$ 结尾的 $\mathbb{D}$ 中的字集合。显然，

$$H = 1 + E_B + E_R. \tag{20}$$

让我们研究 $h$ 的递归行为。首先注意到，每个非空的 $w \in \mathbb{D}$ 都可以唯一地写成

$$w_1 U w_2 \beta,$$

其中 $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$（可以为空），且 $\beta \in \{B, R\}$。于是

$$h(w_1 U w_2 \beta) = h(w_1) + 1 + h(w_2) + \varepsilon(w_2 \beta),$$

其中

$$\varepsilon(w_2\beta) = \begin{cases} 0 & \text{if } w_2 \text{ ends with the letter } \beta, \\ \operatorname{sign}(\beta) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并且其中 $\operatorname{sign}(B) = 1$，且 $\operatorname{sign}(R) = -1$。现在我们来计算

$$\begin{aligned}
E_B &= \sum_{w_1 U w_2 B} t^{h(w_1)+1+h(w_2)+\varepsilon(w_2 B)} z^{l(w_1)+l(w_2)+1} \\
&= tz \cdot H \cdot \sum_{w_2 \in \mathbb{D}} t^{h(w_2)+\varepsilon(w_2 B)} z^{l(w_2)} \\
&= tz \cdot H \cdot (E_B + t(1 + E_R)).
\end{aligned}$$

同理，我们得到

$$E_R = H \cdot tz \cdot (E_R + t^{-1}(1 + E_B)).$$

通过在每个方程中分别将 $E_B$ 和 $E_R$ 单独移到一边，并令

$$u := \frac{H \cdot tz}{1 - H \cdot tz},$$

我们得到

$$E_B = \frac{u(u+t)}{1-u^2}, \quad \text{and} \quad E_R = \frac{u(u+t^{-1})}{1-u^2}.$$

最后，代入（20），可写成

$$\begin{aligned} H &= 1 + E_B + E_R \\ &= \frac{(u+t)(u+t^{-1})}{1-u^2} \\ &= \frac{-tz^2(t-1)^2H^2 + z(t-1)^2H + 1}{1 - 2tzH}. \end{aligned}$$

因此， $H$ 满足二次方程

$$tz\big(2 - z(t-1)^2\big)H^2 + \big(z(t-1)^2 - 1\big)H + 1 = 0. \tag{21}$$

这与 $T$ 满足的二次方程相同；参见推论 4.2。由于二者都满足 $T(0) = 1 = H(0)$，我们推得 $H = T$，结论由此得证。 □

直接可得， $P_n$ 的系数均为非负数。事实上，定理 1.1 是定理 6.2 的推论。利用这一组合解释可以证明，除了 $P_2$ 以外， $P_n$ 的所有系数均为正。

## 参考文献

[BGLHT11] T. Barnet-Lamb、D. Geraghty、M. Harris 和 R. Taylor，《一族卡拉比–丘簇与潜在自守性 II》，数学科学研究所出版物 47 (2011)，第 1 期，29–98。[BKY17] R. Bauerschmidt、A. Knowles 和 H.-T. Yau，《随机正则图的局部半圆律》，纯粹与应用数学通讯 70 (2017)，1898–1960。[Ca72] P. Cartier，《树上的调和分析》，纯粹数学专题讨论会论文集 9 (1972)，419–424。[CJKS25] G. Chinta、J. Jorgenson、A. Karlsson 和 L. Smajlović，《高斯的离散类比》，物理学杂志 A 58 (2025)，035203。[CY99] F. Chung 和 S.-T. Yau，《覆盖、热核与生成树》，电子组合学杂志 6 (1999)，研究论文 12，共 21 页。[FK17] F. Friedli 和 A. Karlsson，《图的谱 ζ 函数与临界带中的黎曼 ζ 函数》，东北数学杂志 (2) 69 (2017)，585–610。[K20] A. Karlsson，《谱 ζ 函数》，载于《网络理论中的离散与连续模型》，《算子理论：进展与应用》第 281 卷，Birkhäuser，Cham，2020。doi:10.1007/978-3-030-44097-8_10.[K25] A. Karlsson，未发表的笔记，日内瓦大学，2025。[KP23] A. Karlsson 和 M. Pallich，《 $\mathbb{Z}$与 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的球体积及 ζ 函数的特殊值》，算术学报 208 (2023)，161–170。

[Kes59] H. Kesten, 《群上的对称随机游走》，美国数学会汇刊*92* (1959)，336–354。[McK81] B. D. McKay, 《大型正则图的预期特征值分布》，线性代数及其应用**40** (1981)，203–216。[MS83] D. E. Muller 和 P. E. Schupp。《群、端理论与上下文无关语言》。载于：计算机与系统科学杂志 26.3 (1983)，第 295–310 页。[Ser97] J.-P. Serre, 《Hecke 算子的特征值的渐近分布》 $T_p$，美国数学会杂志**10** (1997)，第 1 期。[Ser02] J.-P. Serre, 《树》，Springer，柏林，2002。D.M. 数学系，日内瓦大学，rue du Conseil-Général 7-9, 1205 日内瓦，瑞士，dylan.mueller@unige.ch