arXiv:2603.11401v1 [math.RT] 12 Mar 2026

通过秩一对称空间的 Plancherel 公式研究例外 theta 对应

Jan Frahm 和 Quentin Labriet

2026年3月13日

摘要

我们研究域 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上一个简单分裂 Jordan 代数的共形群（的有限覆盖群）的极小表示，只要该表示存在。共形群包含一个自然的对偶对 $G \times G'$，其中 G 本质上是该约当代数的自同构群，而 G' 则是 PSL(2，$\mathbb{R}$)、PGL(2，$\mathbb{R}$) 或 PGL(2，$\mathbb{C}$)。由此得到的群 G 包括 F_4 型复例外群，以及它的紧实形式和分裂实形式。

我们明确确定了极小表示限制到 $G \times G'$ 的相应覆盖群后的直积分解。这给出了 G 的某些表示与 G' 的（有限覆盖群的）表示之间的一一对应。此对应中出现的 G 的表示，属于 G 上一个秩一对称空间的 Plancherel 测度的支撑集；证明用到了相应的 Plancherel 公式。

2020 年数学主题分类：主要分类 22E46；次要分类 43A85。
关键词：例外 theta 对应、极小表示、约当代数、共形群、自同构群。

引言

经典 theta 对应是两个群 G 和 G' 的某些表示之间的一一对应关系，这两个群在辛群中构成一个对偶对。它是通过将元辛群（辛群的一个二重覆盖）的元辛表示限制到 G 与 G' 的乘积（或者更确切地说，它们相应的覆盖群）上得到的。以这种方式出现的群 G和 G' 均为经典群。

为了也能获得例外群的对应，并扩展 theta 对应的一般框架，可以用另一单李群的极小表示替代元辛表示，并考察它在对偶对上的限制。近年来，这种方法受到了相当多的关注，许多例外 *theta* 对应已得到研究。文献中的大多数结果针对其中一个成员为紧群的对偶对（例如见 [7, 11, 19, 22, 23, 24, 31]），而对于两个成员均非紧的情形，结果则寥寥无几，且大多不完整（例如见 [5, 6, 20, 21, 25, 26]）。此外，

与经典 theta 对应不同，经典 theta 对应是适用于辛群内所有对偶对的一般性结论，而大多数例外 theta 对应都是逐个具体情形研究的，也就是说，针对特定单李群中的特定对偶对进行研究。

本文针对单 Jordan 代数的共形群中的一族对偶对，获得了新的例外 theta 对应。这些对偶对的第一成员 G 本质上是该 Jordan 代数的自同构群，且通常是非紧的。第二成员 G' 则为 PSL(2, $\mathbb{R}$)、PGL(2, $\mathbb{R}$) 或 PGL(2, $\mathbb{C}$)。通过使用共形群的极小表示的 L^2-模型，我们将 theta 对应与该自同构群所对应的秩一对称空间的 Plancherel 公式联系起来。我们的对应可视为 Savin [32]关于 p-进群的一些结果在阿基米德情形下的类比。

结果陈述。 设 V 是定义在 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$上的秩至少为二的分裂单 Jordan 代数。共形群 $\mathcal{G}$ 存在一个有限覆盖群 V，其具有极小表示 $\Pi_{\min}$（除非 $\mathcal{G} = \mathrm{SO}(p,q)$ 且 $p+q$ 为奇数）。以这种方式得到的群列于第5节。其中包括 E_7 型的复例外群，以及其厄米形式和分裂实形式 $E_{7(-25)}$ 与 $E_{7(7)}$。某些群 $\mathcal{G}$ 具有不止一个极小表示；我们聚焦于其中一个（关于这一选择，参见第1.2节）。

在 $\mathcal{G}$ 中存在一个自然的对偶对 $G \times G'$，其中 G 本质上是 V的自同构群。若 V为实且欧几里得的，则 G 为紧群，且 $G' \simeq$ 为PSL(2， $\mathbb{R}$)；若 V为实且非欧几里得的或为复的，则 G 为非紧群，且 $G' \simeq$ 为PGL(2， $\mathbb{R}$)或PGL(2， $\mathbb{C}$)。例如，对于 $\mathcal{G}$ 中 E_7类型的情形，群 G 为 F_4类型，可以是紧的、分裂的或复的。在所有情况下，极小表示 $\Pi_{\min}$ 到 $G \times G'$ 相应有限覆盖群的限制，都经由某个 G' 到 G'的有限覆盖群 $G \times G'$，分解为$\widetilde{}$。

我们的第一个主要空间的极小表示 $\Pi_{\min}$ 到 $G \times G'$ 相应有限覆盖群的限制，都经由某个 G' 到 G'的有限覆盖群 $G \times G'$，分解为$\widetilde{}$。

我们的第一个主要空间的Plancherel公式联系起来。更确切地说，令 $\mathcal{O}_G$ 表示 V中一个$\widetilde{\text{本}}$原幂等元的G-轨道。事实证明，这是 G 的一个分裂秩为一的对称空间；当 V 为欧几里得时它是紧的，否则为非紧的（见引理 2.5和引理 2.6）。

定理 A （见定理 3.6 和第4节）。 设

$$L^2(\mathcal{O}_G) \simeq \int_{\widehat{G}} \pi \, d\mu(\pi)$$

表示 G在 $L^2(\mathcal{O}_G)$上的左正则表示的直积分解为$\widetilde{}$ G的不可约酉表示，则 $\Pi_{\min}$ 在 $G \times G'$ 上的限制分解为

$$\Pi_{\min}|_{G \times \widetilde{G'}} \simeq \int_{\widehat{G}} \pi \boxtimes \theta(\pi) \, d\mu(\pi)$$

$\widetilde{}$其中 $\theta(\pi)$是 G'的一个不可约酉表示，且映射 $\pi \mapsto \theta(\pi)$ 是一一对应的（可能忽略一个零测集）。

通过明确写出 $\mathcal{O}_G$ 的Plancherel公式，我们得到了一个明确的例外 theta 对应。该陈述涉及 V 的两个结构常数 r 和 d，它们在第1.1节中介绍，并在第5节中列出了所有情形。 G 的表示$\widetilde{}$的记号在第4节中说明，而 G' 和 G' 的表示记号则在第3.1节中说明。

定理 B（见推论 4.1、4.6 和 4.9）。*(1)* 如果 V 是实的欧几里得，则

$$L^2(\mathcal{O}_G) \simeq \widehat{\bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}}} \pi_{k\beta},$$

其中 $\pi_{k\beta}$ 是 G 的最高权为 $k\beta$ 的不可约有限维表示（β和/或 2β 是某些限制根，参见命题 *2.8*）。此外，

$$\theta(\pi_{k\beta}) = \tau^{\mathrm{hds}}_{k+\frac{rd}{2}}$$

是 $G' = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的有限覆盖群的全纯离散系列表示，参数为 $k + \frac{rd}{2} > 1$。

—

（*2*）如果 V 是实的且非欧几里得的，那么

$$L^2(\mathcal{O}_G) \simeq \bigoplus_{\xi\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \int_{i\mathbb{R}_+}^{\oplus} \pi_{\xi,\lambda}\, d\lambda \oplus \widehat{\bigoplus_{k+\frac{rd}{2}\in 2\mathbb{Z}_{>0}}} A_{\mathfrak{q}}(k\beta),$$

其中 $\pi_{\xi,\lambda}$ 是 G 的某些（退化）主系列表示，而 $A_{\mathfrak{q}}(k\beta)$ 是 *Zucker* 对 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的某个抛物子代数 $\mathfrak{q}$所构造的导出函子模。此外，

$$\theta(\pi_{\xi,\lambda}) = \tau_{\xi,\lambda/2} \qquad and \qquad \theta(A_{\mathfrak{q}}(k\beta)) = \tau^{\mathrm{ds}}_{k+\frac{rd}{2}},$$

其中 $\tau_{\xi,\nu}$是 $G' = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ 的酉主系列表示，而 τ^{ds}_m是参数为 $m > 1$ 的离散系列表示（但 $\mathcal{G} = \mathrm{SO}(p+1, q+1)$且 $p - q \equiv 2 \pmod 4$ 的情形除外，此时 $\theta(\pi_{\xi,\lambda}) = \tau_{\xi+1,\lambda/2}$）。

(3) 若 V 是复数域，则

$$L^2(\mathcal{O}_G) \simeq \widehat{\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}}} \int_{i\mathbb{R}_+}^{\oplus} \pi_{m,\lambda}\, d\lambda,$$

其中 $\pi_{m,\ \lambda}$ 是 G的某些（退化）主系列表示。此外 ，

$$\theta(\pi_{m,\lambda}) = \tau_{m,\lambda/2}$$

是 $G' = \mathrm{PGL}(2,\ \mathbb{C})$的酉主系列表示。

证明方法。 我们使用由 Vergne–Rossi [34]为 V 欧几里得情形构造的 L^2-模型，以及由 Dvorsky–Sahi [1]和 Kobayashi–Ørsted [17] 为其他情形构造的模型。在此模型中，表示空间为 $L^2(\mathcal{O})$，其中 $\mathcal{O} \subseteq V$ 是秩一元素的子簇（若 V为欧几里得情形，还需满足一个附加的正性条件）。$\Pi_{\min}$ 在 G 上的限制是 G 在 $L^2(\mathcal{O})$上的左正则表示。我们证明，对于 V分别为实欧几里得、实非欧几里得和复数域的情形， $\mathcal{O}$ 包含一个形如$\mathbb{R}_+ \times \mathcal{O}_G$、 $\mathbb{R}^\times \times \mathcal{O}_G$或 $\mathbb{C}^\times \times \mathcal{O}_G$的开稠密子集（见命题 2.3）。这将 $\Pi_{\min}|_{G\times\widetilde{G'}}$ 的分解与$\mathcal{O}_G$的 Plancherel公式联系起来。为了也追踪 G' 的作用，我们采用了 [9]中研究过的李代数表示。关键计算见引理 3.5，其中确定了 G'在每个 G-同型分量上的底层李代数表示。这实质上证明了定理 A。

为证明定理 B，我们利用文献中的结果（例如见 [28, 33]），明确写出 $\mathcal{O}_G$ 的 Plancherel公式。当 V 为实非欧几里得情形时，还需要通过使用 K-型和交织算子进行一些额外论证，以得到 theta 对应（见注 3.7 和第4节.2）。

我们指出，若采用逐一情形计算而非约当代数框架，本文的部分内容可以大幅缩短。不过，这样一来，我们也能以相同思路处理例外群。

与其他工作的关系。 对于 V 欧几里得情形，我们的结果大多可归结为经典 theta 对应，且这一结果早已众所周知（例如见 [12]）。我们决定纳入这一情形，因为其证明在结构上与其他情形完全相同，主要区别在于 $\mathcal{O}_G$ 是紧的。除 $\mathcal{G}$ =SO($p+1, q+1$)情形下的离散谱外，其他所有对应似乎都是新的；该离散谱是 [16, 定理 C]的一个特例。

Savin [32]已对相同代数群在非阿基米德局部域上的情形取得类似结果。他没有分解酉表示 $\Pi_{\min}$，而是考察光滑向量 $\Pi_{\min}^{\infty}$的商表示，正如经典 theta 对应中所做的那样。研究这些问题在阿基米德情形下的情况也会很有意思。

我们的证明以第二作者提出的分层模型为基础，该模型曾应用于我们先前关于全纯离散级数的研究中 [4]。

1 共形群的极小表示

我们回顾 $\mathbb{R}$和 $\mathbb{C}$上的简单分裂 Jordan 代数之共形群的极小表示的 L^2-模型构造。为此，我们遵循 [9] 中的论述。

1.1 共形群及其李代数

设 V 表示 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$上的一个简单含幺 Jordan 代数。在 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$的情形下，我们常将 V视为实 Jordan 代数，并注意到它作为实 Jordan 代数也仍是简单的。若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，则其复化$V_{\mathbb{C}}$ 是一个简单复 Jordan 代数；若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，则 $V_{\mathbb{C}}$ 与 $V \oplus V$同构。下文的一些公式中，我们使用 $\delta = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F} \in \{1, 2\}$，以使表述统一。

我们用 $n = \dim_{\mathbb{F}} V$表示 V的维数，用 $r = \mathrm{rk}_{\mathbb{F}} V$表示其秩，并假设 $r \geq 2$。对于 $x \in V$，令 $L(x) : V \to V$ 表示由 x 给出的乘法。双线性形式

$$\tau_{\mathbb{F}} : V \times V \to \mathbb{F}, \quad (x, y) \mapsto \frac{r}{n} \operatorname{tr}(L(x)L(y))$$

是非退化的，并且经过归一化，使得 $\tau_{\mathbb{F}}(e, e) = r$，其中 $e \in V$ 是单位元。对于自同态 $T \in \mathrm{End}(V)$，我们将其关于 $\tau_{\mathbb{F}}$ 的伴随记作 $T^{\#}$。$\tau_{\mathbb{F}}$ 的实部，

$$\tau(x, y) = \operatorname{Re} \tau_{\mathbb{F}}(x, y),$$

是实向量空间 V 上的一个非退化双线性形式，当且仅当 V 是欧几里得约当代数时，它才是正定的。

Let

$$P : V \to \mathrm{End}(V), \quad P(x) = 2L(x)^2 - L(x^2)$$

记 V 和 P 的二次表示为 $x,y = L(x)L(y) + L(y)L(x) - L(xy)$，其双线性版本记为 V。 V 的结构群 Str($g \in$) 定义为所有满足 $V(P)\, gx(= gP)x$ 的 $g^{\#}$ GL($x \in V$) 所组成的群，其中上述条件对所有 $\mathfrak{str}$ 都成立。其李代数 $V(\ L)$ 是 $V(= \{L)\ x(\ x \in V\})$: $\mathfrak{aut}$ 与 $V(\ V)$ 的直和；后者是 $T \in \mathfrak{gl}$ 的导子李代数，即所有满足 $V(\ T)\ x \cdot y$ 的 $= Tx \cdot y + x \cdot Ty(\ x)$，其中条件对所有 $y \in V$, $[L$ 都成立。后者由形如 $x(\ L)y$ (] $\mathfrak{aut}$ 的元素张成。此外，$V(V)$ 是自同构群 Aut(V) 的李代数；该群由满足 $g \in (V)\, g$ 的 $x \cdot y$GL($= gx \cdot gy$) 组成，其中条件对所有 $x,y \in V$ 都成立。注意，根据 [2, 命题 II.4.2] 和 [9, (1.8) 与 (1.9)]，我们有

$$|\det(g)| = 1 \qquad \text{for all } g \in \mathrm{Aut}(V). \tag{1.1}$$

注意，对于 $x \in V$， $L(x)^{\#} = L(x)$，并且对于所有 $D \in \mathfrak{aut}(V)$， $D^{\#} = -D$ 。我们有以下关于 Aut(V) 和 $\mathfrak{aut}(V)$ 的刻画:

引理 1.1 （参见 [2, 命题 VIII.2.4 和 VIII.2.6]。对于 $g \in$ Str(V) ，以下等价关系成立:

$$g \in \mathrm{Aut}(V) \qquad \Leftrightarrow \qquad ge = e.$$

对于 $X \in \mathfrak{str}$（V），以下等价关系成立:

$$X \in \mathfrak{aut}(V) \qquad \Leftrightarrow \qquad Xe = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad X^{\#} = -X.$$

共形群 Co(V) 是由所有平移 n_a： $V \to V$， $x \mapsto x + a$ ($x \in V$)、结构群 Str(V) 和反演j： $V \to V$， $x \overline{\mapsto} -x^{-1}$ 生成的 V 上的有理变换群。这是一个具有平凡中心的简单实李群。其李代数 $\mathfrak{co}(V)$ 可分解为

$$\mathfrak{co}(V) = V \oplus \mathfrak{str}(V) \oplus V \tag{1.2}$$

李括号为

$$[\ (u_1, T_1, v_1)\ ,\ \ (u_2, T_2, v_2)\ ] = \ (T_1u_2 - T_2u_1, [T_1, T_2] + 2\ (u_1 \square v_2)\ - 2\ (u_2 \square v_1)\ \ - T_1^{\#}v_2 + T_{\#_2}\ v_1)\ , \tag{1.3}$$

其中 $u \square v = L(uv)\ + [L(u)\ \ L(v)] \in \mathfrak{str}(V)$。

为了讨论群 Co(V) 的一些结构理论，我们选取一种特定形式的嘉当对合。首先选取 V 的一个嘉当对合 ϑ，即 $\vartheta \in$ Aut(V) 是一个二阶自同构，使得 $\mathbb{R}$-双线性形式

$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (x|y) := \tau(x, \vartheta y)$$

是正定的。相对于此内积， $g \in$ Str(V) 的伴随 g^* 由 $g^* = \vartheta \circ g^{\#} \circ \vartheta$ 给出，因此 $g \mapsto \theta(g)\ = (\ g^*)^{-1}$ 在 Str(V) 上定义了一个嘉当对合。它可以通过 $\theta(g)\ = \vartheta \circ j \circ g \circ j \circ \vartheta$ 扩展为 Co(V) 上的一个嘉当对合。相应的李代数 $\mathfrak{co}(V)$ 上的对合由下式给出

$$\theta(u, T, v) = (-\vartheta(v), -T^*, -\vartheta(u)) \qquad (u, v \in V, T \in \mathfrak{str}(V)).$$

特别地，相应的 Cartan分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ 为

$$\mathfrak{k} = \{(u, T, -\vartheta(u)) : u \in V, T + T^* = 0\}, \tag{1.4}$$

$$\mathfrak{p} = \{(u, T, \vartheta(u)) : u \in V, T = T^*\}. \tag{1.5}$$

我们记

$$V = V^+ \oplus V^-$$

对于将 V 分解为 ϑ的 $+1$ 与 -1 特征子空间。由于 ϑ 是一个自同构，我们有 $V^\pm \cdot V^\pm \subseteq V^+$ 和 $V^\pm \cdot V^\mp \subseteq V^-$。特别地， V^+ 是一个欧几里得约当代数。设$c_1, \dots, c_r \in V$为 V^+中的一个约当标架，即一组完备的两两正交本原幂等元。若 $V(c_i, \lambda) \subseteq V$表示 $L(c_i)$对应于特征值$\lambda \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$的特征子空间，则我们有如下 V的皮尔斯分解：

$$V = \bigoplus_{1 \le i \le j \le r} V_{ij},$$

其中

$$V_{ii} = V(c_i, 1) \qquad \text{and} \qquad V_{ij} = V(c_i, \tfrac{1}{2}) \cap V(c_j, \tfrac{1}{2}) \qquad \text{for } i \neq j.$$

在下文中，我们假设约当代数 V 在 $\mathbb{F}$上是分裂的，即对所有$i = 1, \dots, r$有 $V_{ii} = \mathbb{F}c_i$ 。所有其他皮尔斯空间 $V_{ij}(i \neq j)$具有共同的维数 $d = \dim_{\mathbb{F}} V_{ij}$。

皮尔斯分解具有以下性质：

$$V_{ij} \cdot V_{jk} \subseteq V_{ik} \qquad \text{for } i, j, k \text{ distinct}, \tag{1.6}$$

$$V_{ij} \cdot V_{ij} \subseteq V_{ii} \oplus V_{jj} \qquad \text{for } i, j \text{ distinct}. \tag{1.7}$$

根据注释 $V_{ij}^\pm = V_{ij} \cap V^\pm$，我们甚至还得到关于乘法算子的如下结果：

引理 1.2. 设 i、j、k 互不相同，且 $x \in V_{jk}^\pm$ 非零。那么 $L(x) : V_{ij} \to V_{ik}$ 是一个同构。

证明。设 $x \in V_{jk}$ 和 $y \in V_{ij}$，则由 [2, 引理 IV.2.2]（其证明可直接推广到 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的分裂约当代数，只需将范数 $\|x\|^2$ 替换为 $\tau_{\mathbb{F}}(x, x)$）可得

$$L(x)^2 y = \frac{1}{8} \tau_{\mathbb{F}}(x, x) y. \tag{1.8}$$

若还满足 $x \in V_{jk}^\pm$，则 $\vartheta(x) = \pm x$，因此 $\tau_{\mathbb{F}}(x, x) = \tau(x, x) = \pm\tau(x, \vartheta(x)) = \pm\|x\|^2$。由此可知， $L(x) : V_{ij} \to V_{ik}$ 是一个同构，其逆为 $\pm 8\|x\|^{-2} L(x) : V_{ik} \to V_{ij}$。 □

根据 [29, 命题 1.4。6]，，相对于阿贝尔子代数 $\bigoplus_{j=1}^r \mathbb{R} L(c_j)$，我们有 $\mathfrak{l} = \mathfrak{str}(V)$ 的如下根空间分解：

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{l}_{ij},$$

其中

$$\mathfrak{l}_0 = \{L(x) + D : x \in \bigoplus_{i=1}^r V_{ii}, D \in \mathfrak{aut}(V), Dc_i = 0 \, \forall \, i\}$$

and

$$\mathfrak{l}_{ij} = \{\tfrac{1}{2} L(x) + [L(c_i), L(x)] : x \in V_{ij}\}.$$

对于 $x \in V_{ij}$，根据 [29, 引理1.4.4 (2)],，有 $[L(c_i)\ L(x)] = -[L(c_j)\ L(x)]$，因此李代数$\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V)$分解为

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \bigoplus_{i<j} \mathfrak{g}_{ij} \tag{1.9}$$

with

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{l}_0 \cap \mathfrak{g} = \{D \in \mathfrak{aut}(V) : Dc_i = 0 \,\forall\, i\} \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{g}_{ij} = (\mathfrak{l}_{ij} \oplus \mathfrak{l}_{ji}) \cap \mathfrak{g} = [L(c_i), L(V_{ij})].$$

注意以下包含关系，其中 $i,\ j,\ k,\ \ell$ 互不相同：

$$\begin{gathered}[\mathfrak{g}_{ij}, \mathfrak{g}_{ij}] \subseteq \mathfrak{g}_0, \qquad [\mathfrak{g}_{ij}, \mathfrak{g}_{jk}] \subseteq \mathfrak{g}_{ik}, \qquad [\mathfrak{g}_{ij}, \mathfrak{g}_{k\ell}] = \{0\}, \\ [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{ij}] \subseteq \mathfrak{g}_{ij}, \qquad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subseteq \mathfrak{g}_0.\end{gathered} \tag{1.10}$$

1.2 极小表示

我们回顾一下在 [9, 29] 中构造的极小表示的 L^2-模型。注意，我们通过在 [9, 方程 (2.4)] 中用嘉当对合扭曲该表示，对公式作了些微修改。该构造可概述如下。

设 c 为本原幂等元，$\mathcal{O} = \mathrm{Str}(V)_0 \cdot c$ 为 $\mathrm{Str}(V)_0$ 的单位元连通分支 $\mathrm{Str}(V)_0$ 的轨道。那么，当且仅当 V 不是欧几里得的，$\mathcal{O} = -\mathcal{O}$ 才成立。$\mathcal{O}$ 上存在唯一的（相差标量倍数意义下）等变测度 μ，满足 $d\mu(gx) = |\det_{\mathbb{R}}(g)|^{\frac{rd}{2n}}\, d\mu(x)$。特别地，它在伸缩 $z \in \mathbb{F}^\times$ 下的变换规律为 $d\mu(zx) = |z|^{\delta \cdot \frac{rd}{2}}\, d\mu(x)$。

除非 $\mathfrak{co}(V) \simeq \mathfrak{so}(p+1,\ q+1)$ 且 $p,\ q \geq 2$ 为奇数，否则存在唯一的不可约酉表示 $\Pi_{\min}$，它是 $\mathrm{Co}(V)_0$ 的一个有限覆盖群在 $L^2(\mathcal{O})$ 上的表示：$= L^2(\mathcal{O},\ d\mu)$，其对 $\mathrm{Str}(V)_0 N$ 的限制可分解为以下形式

$$\Pi_{\min}(\overline{n}_a) f(x) = e^{-i\tau(x,b)} f(x) \qquad (\overline{n}_b = \exp(0,0,b) \in \overline{N}), \tag{1.11}$$

$$\Pi_{\min}(l) f(x) = |\det_{\mathbb{R}}(l)|^{-\frac{rd}{4n}} f(l^{-1}x) \qquad (l \in \mathrm{Str}(V)_0). \tag{1.12}$$

$\mathfrak{g}$ 的相应李代数表示由正则微分算子给出，因此可扩展到 $C^\infty(\mathcal{O})$。其表达式为

$$\begin{aligned} d\Pi_{\min}(0,0,u) &= -i\tau(x,u) && (u \in V), \\ d\Pi_{\min}(0,T,0) &= -\partial_{Tx} - \frac{rd}{4n}\,\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(T) && (T \in \mathfrak{l}), \\ d\Pi_{\min}(v,0,0) &= -i\tau(\mathcal{B}, v) && (v \in V), \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{B}\colon C^\infty(\mathcal{O}) \to C^\infty(\mathcal{O}) \otimes V_{\mathbb{C}}$ 是贝塞尔算子，其表达式为

$$\mathcal{B} = \sum_{\alpha,\beta} P(\widehat{e}_\alpha, \widehat{e}_\beta) x \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \frac{\delta d}{2} \sum_\alpha \widehat{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

其中 $(e_\alpha)_\alpha \subseteq V$ 是 V（作为实向量空间）的一组基，$(\widehat{e}_\alpha)_\alpha \subseteq V$ 是其关于 τ和$x = \sum_\alpha x_\alpha e_\alpha$的对偶基。

注记1.3. 注意，对于 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$，这并不恰好是 $\Pi_{\min}$ 的、如 [9]中所构造的那个版本，因为双线性形式 τ 的规范化方式不同。我们的公式与 [9] 中公式之间的关系是自同构$(u,T,v) \mapsto (2u, T, \frac{1}{2}v)$。

若 V 为实且欧几里得或为复，则我们将 $\Pi_{\min}$ 视为一个不可约酉表示，即有限覆盖群 $\mathcal{G}$ 的表示，该有限覆盖群覆盖连通群 $\mathcal{G} = \mathrm{Co}(V)_0$。若 V 为实且非欧几里得，则我们将 $\Pi_{\min}$ 延拓为一个不可约酉表示，即有限覆盖群 $\mathcal{G}$ 的表示，该有限覆盖群覆盖（可能非连通的）群 $\mathcal{G} = \mathrm{Co}(V)_0 \cup (-\mathrm{id}_V)\,\mathrm{Co}(V)_0$，以确保 $\mathcal{G}$ 以非连通群 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ 为子群，而不仅仅是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$（见第2.1节）。

引理1.4. 若 V 为实且非欧几里得，则有限覆盖群 $\mathrm{Co}(V)_0$ 的表示 $\Pi_{\min}$ 可延拓至 $\mathcal{G} = \mathrm{Co}(V)_0 \cup (-\mathrm{id}_V)\,\mathrm{Co}(V)_0$ 的有限覆盖群，通过

$$\Pi_{\min}(-\mathrm{id}_V) f(x) = f(-x) \qquad (f \in L^2(\mathcal{O}), x \in \mathcal{O}).$$

证明. 容易验证，若按上述方式定义 $\Pi_{\min}(-\mathrm{id}_V)$，则对所有 $u, v \in V$ 与 $T \in \mathfrak{l}$，下列恒等式成立：

$$\Pi_{\min}(-\mathrm{id}_V) \circ d\Pi_{\min}(u, T, v) = d\Pi_{\min}(-u, T, -v) \circ \Pi_{\min}(-\mathrm{id}_V).$$

由于伴随作用 $(-\mathrm{id}_V)(u, T, v) = (-u, T, -v)$，由此即得该结论。 □

2 对偶对与轨道

我们在 $\mathcal{G}$ 中认定形如 $G \times G'$ 的对偶对，其中 $G = \mathcal{G} \cap \mathrm{Aut}(V)$，且 G' 具有李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$，并研究 G 在 $\mathcal{O}$ 中的轨道。

2.1 对偶对

我们首先在李代数层面确定对偶对。 $G = \mathcal{G} \cap \mathrm{Aut}(V)$ 的李代数是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{aut}(V)$。我们将由 $\mathbb{F}$ 上的以下元素张成的李代数记为 $\mathfrak{g}'$

$$E = (e, 0, 0), \qquad F = (0, 0, e), \qquad \text{and} \qquad H = (0, 2L(e), 0).$$

由 (1.3) 可知，这些元素满足标准对易关系

$$[H, E] = 2E, \qquad [H, F] = -2F, \qquad [E, F] = H,$$

因此 $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{F})$。

引理2.1。 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ 是 $\mathfrak{co}(V)$ 中的一个对偶对。

证明。 首先，设 $X = (u,\ T,\ v)$ 属于 $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{sl}(2,\ \mathbb{F})$ 的中心化子。由 (1.3) 可得 $(u,\ 0,\ -v) = [H, X] = 0$，因此 $u = v = 0$；进一步有 $(Te,\ 0,\ 0) = [X, E] = 0$，故 $Te = 0$，从而由引理 1.1 得 $T \in \mathfrak{aut}(V) = \mathfrak{g}$。

现在设 $X = (u,\ T,\ v)$ 属于 $\mathfrak{aut}(V)$ 的中心化子，则由 (1.3) 可得

$$(Su, [S, T], -S^{\#}v) = [(0, S, 0), X] = 0 \qquad \text{for all } S \in \mathfrak{aut}(V).$$

特别地，对于所有 $S \in \mathfrak{aut}$，$Su = Sv = 0$ $(V) = \mathfrak{aut}(V)^{\#}$。当 V 是复数域时，[2,引理 VIII.5.1] 推出 $u, v \in \mathbb{C}e$。若 V 是实数域，则 $V_{\mathbb{C}}$ 是简单的，且由 [2, 命题 VIII.1.1], , $\mathfrak{aut}(V_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{aut}(V)_{\mathbb{C}}$，因此由同样的论证可得 $u, v \in \mathbb{C}e \subseteq V_{\mathbb{C}}$。但 $V \cap \mathbb{C}e = \mathbb{R}e$，所以在这种情况下，$u, v \in \mathbb{R}e$。剩下只需证明 $T \in \mathbb{F}L(e)$。设 $T = L(x) + D$，其中 $x \in V$ 且 $D \in \mathfrak{aut}(V)$。那么对于所有 $S \in \mathfrak{aut}(V)$，都有 $[S, T] = L(Sx) + [S, D] = 0$，这意味着 $Sx = 0$ 且 $[S, D] = 0$ 对所有 S 均成立。由于 $\mathfrak{aut}(V)$ 是半单的，这意味着 $D = 0$；再次运用 [2,引理 VIII.5.1]，可得 $x \in \mathbb{F}e$。

现在令 G' 表示 $\mathcal{G}$ 的子群，该子群由以下形式的分式线性变换给出

$$z \mapsto (az+b)(cz+d)^{-1} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \begin{cases} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) & \text{if } V \text{ is Euclidean,} \\ \mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}) & \text{if } V \text{ is non-Euclidean or complex.} \end{cases}$$

由于对于 V 实域和非欧几里得情形， $-\mathrm{id}_V \in \mathcal{G}$ ，这个非连通群确实是$\mathcal{G}$的子群。显然，对于 V 欧几里得、非欧几里得和复情形，分别为 $G' \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$、$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$和$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$。 G' 的李代数是 $\mathfrak{g}'$。

为了证明(G,G')是 $\mathcal{G}$中的一个对偶对，我们首先考察$\mathrm{Co}(V)$中的一对$(\mathrm{Aut}(V),\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}))$，其中$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$的定义如上，对 V欧几里得情形也同样适用。对于 $r>2$，自同构群$\mathrm{Aut}(V)$具有平凡中心，而$(\mathrm{Aut}(V),\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}))$则构成$\mathrm{Co}(V)$中的一个对偶对。对于 $r=2$，$\mathrm{Aut}(V)$的中心 $Z(\mathrm{Aut}(V))$包含两个元素，其中非平凡元素是一个线性映射，它将 V的单位元 e 映射到自身，并在正交补$e^{\perp} \subseteq V$上按 -1作用。在这种情况下，$\mathrm{Aut}(V)$的中心化子是$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$与 $Z(\mathrm{Aut}(V))$的乘积。

引理 2.2. 设 V是域 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ 上的秩为 r 的简单分裂 *Jordan* 代数。

- 若 $r>2$，则 $(\mathrm{Aut}(V),\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}))$ 是 $\mathrm{Co}(V)$ 中的一个对偶对，而 (G,G') 是 $\mathcal{G}$中的一个对偶对。
- 若 $r=2$，则 $(\mathrm{Aut}(V),\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})Z(\mathrm{Aut}(V)))$ 是 $\mathrm{Co}(V)$ 中的一个对偶对，而 $(G,G'Z(G))$ 是 $\mathcal{G}$中的一个对偶对。

证明。 由于 $\mathrm{Aut}(V)$ 中的元素是乘法的且固定单位元，因此 $\mathrm{Aut}(V)$ 与 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$ 中的所有分式线性变换显然可交换。还需证明 $\mathrm{Aut}(V)$ 与 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}) \times Z(\mathrm{Aut}(V))$ 互为中心化子。

令 $g \in Z_{\mathrm{Co}(V)}(\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})) \subseteq Z_{\mathrm{Co}(V)}(\mathfrak{g}')$，则 $\mathrm{Ad}(g)H = H$。由于 H定义了三分次 (1.2)，因此 g 包含于相应极大抛物子群的 Levi 子群中，即 $g \in \mathrm{Str}(V)$。此外，$\mathrm{Ad}(g)E = E$ 意味着 $ge = e$ ，从而由引理 1.1 可得 $g \in \mathrm{Aut}(V)$。

现在假设 $g \in Z_{\mathrm{Co}(V)}(\mathrm{Aut}(V))$。由于 $\mathrm{Aut}(V)$ 与 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$ 可交换，根据引理2.1，我们必有 $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}' \subseteq Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{aut}(V)) = \mathfrak{g}'$。因此 $\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'$，进而 $\mathrm{Ad}(g)|_{\mathfrak{g}'} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}') \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F})$。因此，我们可以选取 $g' \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}) \subseteq \mathrm{Co}(V)$，使得 $\mathrm{Ad}(g)$ 在 $\mathfrak{g}'$ 上与 $\mathrm{Ad}(g')$ 相同。由此可得 $g^{-1}g' \in Z_{\mathrm{Co}(V)}(\mathfrak{g}') = \mathrm{Aut}(V)$。但是，由于 $g^{-1}g'$ 也与 $\mathrm{Aut}(V)$ 中的每个元素可交换，它必定属于 $\mathrm{Aut}(V)$ 的中心。若 $r>2$，$\mathrm{Aut}(V)$ 的中心是平凡的，因此 $g = g' \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$。对于 $r=2$，$\mathrm{Aut}(V)$ 的中心还包含一个非平凡元素，它在单位元 e 的正交补 $e^{\perp} \subseteq V$ 上作用为 -1 。

同样的论证也适用于 $\mathcal{G}$ 中的 $(G,\ G')$，因为它们的李代数与 $(\mathrm{Aut}(V),\ \mathrm{PGL}(2,\ \mathbb{F}))$ 相同。

□

2.2 G在 $\mathcal{O}$中的轨道

现在我们研究 G 在 $\mathcal{O}$ 中的轨道。注意， G 的作用与按 $\mathbb{F}^\times$ 进行的伸缩可交换，并且$\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{F}^\times$-稳定的（若 V 是欧几里得的，则为 $\mathbb{R}_+$ ）。此外，映射 $\mathcal{O} \to \mathbb{F},\ z \mapsto \tau_{\mathbb{F}}(z,\ e)$ 在每个 G-轨道上为常数，且在 c 处的值为 1。这意味着 $\mathcal{O}_G = G \cdot c$ 及其按 $\mathbb{F}^\times$ （分别按 $\mathbb{R}_+$ ）进行的伸缩是 $\mathcal{O}$ 中互不相同的 G- 轨道。它们的并集是开稠密的。

命题 2.3。 （*1*）若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 和 V 是欧几里得的，则 $\mathbb{R}_+\mathcal{O}_G$ 在 $\mathcal{O}$ 中开且稠密。

(2) 若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 和 V 是非欧几里得的，则 $\mathbb{R}^{\times}\mathcal{O}_G$ 在 $\mathcal{O}$ 中开且稠密。

(3) 如果 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，那么 $\mathbb{C}^{\times}\mathcal{O}_G$ 在 $\mathcal{O}$ 中是开且稠密的。

证明。将 $L=$ 写作 $\mathrm{Str}(V)\cap\mathcal{G}$，并将 $K_L=L^{\theta}$ 记为其极大紧子群。根据 [29, 命题 1.5.5]，子群 $Q_1=\{g\in L:\ gV(c,1)\subseteq V(c,1)\}$ 是 L 中的抛物子群，其 Langlands 分解为 $Q_1=M_1N_1$，其中 $M_1=\{g\in L: gL(c)=L(c)g\}$，且 N_1 固定 c。此外，L 中 c 的稳定子 L_c 由 $L_c=(M_1\cap L_c)N_1\subseteq Q_1$ 和 $M_1=(M_1\cap K_L)A_1(M_1\cap L_c)\ \text{with}A_1=\exp(\mathbb{R}L(c)+\mathbb{R}L(e-c))$ 给出。因此

$$Q_1\cdot c=(M_1\cap K_L)A_1(M_1\cap L_c)N_1\cdot c=(M_1\cap K_L)A_1\cdot c=(M_1\cap K_L)\cdot\mathbb{R}_+c.$$

由于 $M_1\cap K_L$ 是紧的，且保持 $V(c,1)=\mathbb{F}c$ 不变，它经过 c 的轨道在 V 为实且欧几里得时是 $\{c\}$，在 V 为实且非欧几里得时是 $\{\pm c\}$，而在 V 为复时是 $\{e^{i\theta}c:\ \theta\in\mathbb{R}\}$。这意味着 $Q_1\cdot c=\mathbb{F}^{\times}c$，因此 $L/Q_1=\mathcal{O}/\mathbb{F}^{\times}$。因此，要证明该命题的结论，只需证明 G 经过 L/Q_1 基点的轨道是开且稠密的。

这等价于证明，半单对称空间 L/G 中经过基点的 Q_1-轨道是开稠密的。子群 $G\subseteq L$ 在与嘉当对合 $g\mapsto\theta(g)=g^{-*}=\vartheta\circ g^{-\#}\circ\vartheta$ 相交换的对合 $g\mapsto g^{-\#}$ 的不动点集内是开集。$\mathfrak{l}$ 中这两个 (-1) 特征子空间的交为 $L(V^+)$，其中 $\sum_{i=1}^{r}\mathbb{R}L(c_i)$ 是一个极大阿贝尔子空间，而 c_1、……、c_r 是 V^+ 中的一个约当标架（见引理 1.4.5]）。注意，这个子空间在欧几里得 Jordan 子代数 V^+ 的结构代数 $\mathfrak{str}(V^+)$ 中也是极大阿贝尔的。相应的根系均为 A_{r-1} 型（见 [29, 命题1.4.6]），因此它们具有相同的 Weyl 群。结合命题 8.1]，可知 Q_1 在 L/G 中有唯一的开（因而稠密）轨道。

□

在下一节中，我们将证明 $\mathcal{O}_G$ 是一个半单对称空间，因此它具有一个唯一的（相差标量倍数）G 不变测度 $d\mu_G$。我们将测度 $d\mu$ 在$\mathcal{O}$ 上的限制与开子集 $\mathbb{F}^{\times}\mathcal{O}_G\simeq\mathbb{F}^{\times}\times\mathcal{O}_G$ 上的测度 $d\mu_G$联系起来。

引理 2.4. 对测度 $d\mu$ 和 $d\mu_G$进行适当归一化后，以下积分公式对所有 $f\in C_c(\mathbb{F}^{\times}\mathcal{O}_G)$成立：

$$\int_{\mathcal{O}}f(x)\,d\mu(x)=\int_{\mathbb{F}^{\times}}\int_{\mathcal{O}_G}f(ty)\,d\mu_G(y)\,|t|^{\delta\frac{rd}{2}}\,d^{\times}t,$$

其中 $d^{\times}t$ 是 $\mathbb{F}^{\times}$上的乘法不变测度。特别地，

$$L^2(\mathcal{O})\simeq L^2(\mathcal{O}_G)\,\widehat{\otimes}\,L^2(\mathbb{F}^{\times},|t|^{\delta\frac{rd}{2}}\,d^{\times}t).$$

证明。测度 $d\mu$ 变换所依据的特征标是行列式绝对值的幂，因此由 (1.1) 可知，它在 G 上是平凡的，且测度 $d\mu$ 是 G-不变的。因此，对某个定义在 $\mathbb{F}^{\times}$ 上的函数 χ，有 $d\mu=\chi(t)\,d^{\times}t\,d\mu_G$。此外，$d\mu(zx)=|z|^{\delta\frac{rd}{2}}\,d\mu(x)$，结论得证。

□

2.3 $\mathcal{O}_G$的结构

记 G_c 为 c 在 G 中的稳定子，因此 $\mathcal{O}_G \simeq G/G_c$。对 $(G,\ G_c)$ 是一个对称对，因此 $\mathcal{O}_G$ 是一个半单对称空间。

引理 2.5。令 $w = \exp(\pi(c,\ 0,\ -c))$，则 $w \in G$ 在 $V(c,\ 1) \oplus V(c,\ 0)$ 上为恒等变换，在 $V(c,\ 1_2)$上为负恒等变换。此外，$\sigma:\ G \to G,\ h \mapsto whw^{-1}$ 在 G 上定义了一个对合，而 G 的不动点子群 G^σ 与 G_c一致；但在 $r = 2$ 的情况下例外，此时 G_c 是 G^σ 的一个指数为二的子群。特别地，$\mathcal{O}_G \simeq G/G_c$ 是一个半单对称空间；当 V 为欧几里得时是紧的，当 V 为非欧几里得时是非紧的。

证明。由 $\mathfrak{co}(V)$的李括号公式 (1.3) 可得

$$\exp(t\,\mathrm{ad}(c,0,-c))(0,\mathrm{id},0) = (-\tfrac{1}{2}\sin(2t)c, \mathrm{id} + (\cos(2t)-1)L(c), -\tfrac{1}{2}\sin(2t)c),$$

因此 $\mathrm{Ad}(w)(0,\ \mathrm{id},\ 0) = (0,\ \mathrm{id},\ 0)$。但是，由于 $(0,\ \mathrm{id},\ 0) \in \mathfrak{co}(V)$ 诱导了分次 (1.2)，这意味着 $w \in \mathcal{G} \cap \mathrm{Str}(V)$。此外，类似的计算表明，$w$ 在 $V(c,\ 1) \oplus V(c,\ 0)$ 上通过 $+1$ 作用，在 $V(c,\ 1_2)$ 上通过 -1作用，因此它是一个自同构。 –

显然，σ 在 G上定义了一个对合。现在我们证明，对于 $r > 2$，$G_c = G^\sigma$ 成立，并且 $G_c \subseteq G^\sigma$ 在 $r = 2$中的指数为二。先假设 $h \in G^\sigma$，则 h 保持 $V(c, 1) \oplus V(c, 0)$不变。若 $r > 2$，则 $V(c, 1)$和 $V(c, 0)$都是简单且不同构的，因此自同构 h 必定将 $V(c, 1)$映到其自身。最后，hc 必定是 $V(c, 1) = \mathbb{F}c$中的一个幂等元，而 c 是 $\mathbb{F}c$中唯一的幂等元。因此 $hc = c$，故 $h \in G_c$。对于 $r = 2$，很容易在 G^σ 中构造一个元素 h_0，使其将 c映到 $e - c$，反之亦然。与上述相同的论证表明，h 要么包含于 G_c，要么包含于 hG_c。反过来，若 $h \in G_c$，则 $hL(c)h^{-1} = L(hc) = L(c)$。这意味着 h 保持 $L(c)$的特征子空间不变，因此它必定与w可交换，从而 $h \in G^\sigma$。 □

滥用记号，我们也用 σ 表示 G的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的对合。为了更详细地研究对称空间 $\mathcal{O}_G = G/G_c$，我们用 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\sigma \oplus \mathfrak{g}^{-\sigma}$ 表示按 σ的特征子空间作出的分解。$\mathfrak{str}(V)$上的嘉当对合 θ 限制到 $\mathfrak{g}$ 上后仍是一个嘉当对合，并且与 σ 交换，因为 $\vartheta(c) = c$。注意，如果 V 是欧几里得的，那么 θ 在 $\mathfrak{g}$ 上是平凡的，因为此时 G是紧的。

引理 2.6。我们有

$$\mathfrak{g}^{-\sigma} = [L(c), L(V(c, \tfrac{1}{2}))] \qquad and \qquad \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{\pm\theta} = [L(c), L(V(c, \tfrac{1}{2})^{\pm})].$$

此外，$\mathcal{O}_G$ 是一个分裂秩为 1 且秩为 $\delta = \text{维数}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{F} \in \{1, 2\}$的对称空间。

证明。我们将 $c_1 = c$补全为一个 Jordan 标架 $c_1, \ldots\ldots, c_r$，并回顾 V的相应分解 (1.9)。由于 w 在 V_{ij} 上的作用为 $+1$，条件是 $i = j = 1$ 或 $i,\ j > 1$；而当$i = 1$ 且 $j \neq 1$时，其作用为 -1，因此对合 σ 显然在 $\mathfrak{g}_{1j} = [L(c_1)\ L(V_{1j})]$ 上的作用为 -1（当 $j > 1$ 时），并在 $\mathfrak{g}_{ij} = [L(c_i)\ L(V_{ij})]$ 上的作用为 $+1$（当 $i,\ j > 1$时）。此外，每个 $D \in \mathfrak{g}_0$ 都保持子空间 V_{ij} 不变，因此均被对合 σ固定。这表明

$$\mathfrak{g}^{-\sigma} = \bigoplus_{j=2}^{r} \mathfrak{g}_{1j} = [L(c_1), L(V(c_1, \tfrac{1}{2}))].$$

嘉当对合 ϑ 固定 c_1，因此 $\mathfrak{l}$ 的相应嘉当对合 θ 将 $[L(c_1)\ L(x)]$映到 $[L(c_1)\ L(\vartheta x)]$。这便得到了 $\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{\pm\theta}$的公式。

为证明其余断言，令 $x\in V_{12}^{\pm}, x\neq 0$，并证明 $\mathbb{R}[L(c_1)\ L(x)]$ 在 $\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{\pm\theta}$ 中是极大交换的。因此，设 $y\in V(c_1,\ _12)$ 满足

$$\big[[L(c_1),L(x)],[L(c_1),L(y)]\big]=0.$$

写作 $y=\sum_{i=2}^{r}y_{1i}$，其中 $y_{1i}\in V_{1i}$。我们先考虑 $i\neq 2$，接着考虑 $[L(c_1)\ L(x)]c_i=0$ 和 $[L(c_1)\ L(y)]c_i=\frac{1}{4}y_{1i}$，于是

$$0=\big[[L(c_1),L(x)],[L(c_1),L(y)]\big]c_i=\frac{1}{4}[L(c_1),L(x)]y_{1i}=\frac{1}{4}(c_1(xy_{1i})-\tfrac{1}{2}xy_{1i})=-\frac{1}{8}xy_{1i}$$

由 (1.6) 可知。根据引理 1.2，$L(x):V_{1i}\to V_{2i}$ 是一个同构，因此对所有 $i>2$，$y_{1i}=0$ 均成立，从而 $y=y_{12}\in V_{12}$。接下来，我们将 $\big[[L(c_1)\ L(x)],\ [L(c_1)\ L(y)]\big]$ 应用于 x。根据 (1.7)，$xy\in V_{11}\oplus V_{22}=\mathbb{F}c_1\oplus\mathbb{F}c_2$ 可写为 $xy=\lambda c_1+\mu c_2$。此外，$\lambda=\tau(xy,c_1)=\tau(x,yc_1)=\frac{1}{2}\tau(x,y)=\tau(x,yc_2)=\tau(xy,c_2)=\mu$，因此 $xy=\frac{1}{2}\tau(x,y)(c_1+c_2)$。利用这一点，我们得到

$$\begin{aligned}0=\big[[L(c_1),L(x)],[L(c_1),L(y)]\big]x&=\frac{1}{4}\tau(x,y)[L(c_1),L(x)](c_1-c_2)-\frac{1}{4}\tau(x,x)[L(c_1),L(y)](c_1-c_2)\\&=-\frac{1}{8}\tau(x,y)x+\frac{1}{8}\tau(x,x)y.\end{aligned}$$

由于 $x\in V_{12}^{\pm}$，由此可得 $\tau(x,x)=\pm(x|x)\neq 0$，因此 x 与 y 线性相关。 □

若 V 是欧几里得的，则 $\mathcal{O}_G$ 是紧对称空间，否则它是非紧伪黎曼对称空间，我们现在借助 $\mathfrak{g}^{-\sigma}$中的一个极大紧和一个极大分裂环面更详细地研究它。为此，回顾将 $\mathfrak{g}$ 分解为$\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathfrak{g}_{ij}$ ($i<j$)的分解(1.9)，以及对易子包含关系(1.10)。设 $x\in V_{12}^{\pm}\setminus\{0\}$，并令$D_0=[L(c_1)\ L(x)]\in\mathfrak{g}_{12}$。我们首先汇集 $D_0\in\mathfrak{g}_{12}$ 与上述分解中诸元素之间的一些对易子公式。

引理 2.7. *(1)* 对于满足 $\tau_{\mathbb{F}}(x,y)=0$ 的 $y\in V_{12}$，我们有

$$[D_0,[L(c_1),L(y)]]=-\frac{1}{4}[L(x),L(y)]\quad and\quad [D_0,[L(x),L(y)]]=\frac{1}{2}\tau(x,x)[L(c_1),L(y)].$$

(*2*) 对于 $y\in V_{1j}$、$z\in V_{2j}$ 和 $j>2$，有

$$[D_0,[L(c_1),L(y)]]=-\frac{1}{2}[L(c_2),L(xy)]\quad and\quad [D_0,[L(c_2),L(z)]]=\frac{1}{2}[L(c_1),L(xz)].$$

(*3*) $[D_0,\mathfrak{g}_{ij}]=\{0\}$ 对于 i、$j>2$。

证明。(3) 由对易子包含关系 (1.10) 显然成立。我们来证明 (1)。由于 $D_0c_1=-\frac{1}{4}x$ 与 $D_0y\in V_{11}\oplus V_{22}$ 由 (1.7)，我们有

$$[D_0,[L(c_1),L(y)]]=[L(D_0c_1),L(y)]+[L(c_1),L(D_0y)]=-\frac{1}{4}[L(x),L(y)]+0,$$

因为 $[L(c_1)\ L(V_{11})] = [L(c_1)\ L(V_{22})] = \{0\}$（利用 [2, 命题 II.1.1] 与 $y = c_1$）。此外，由对易子包含关系 (1.10)，我们有

$$[D_0, [L(x), L(y)]] = [L(c_1), L(z)]$$

对于某个 $z \in V_{12}$。为确定 z，我们将等式两边作用于 c_1。右边得到 $-\frac{1}{4}z$，而左边等于

$$D_0[L(x), L(y)]c_1 - [L(x), L(y)]D_0c_1 = 0 + \frac{1}{4}[L(x), L(y)]x = \frac{1}{4}(L(x)^2 - L(x^2))y.$$

由于根据 (1.7)，$x^2 = \frac{1}{2}\tau(x,\ x)(c_1+c_2)$ 和 $xy = \frac{1}{2}\tau_{\mathbb{F}}(x,\ y)(c_1+c_2) = 0$，因此可得 $z = \frac{1}{2}\tau(x,\ x)y$。对于 (2)，我们采用与上文类似的论证。我们知道 $[D_0, \mathfrak{g}_{1j}] \subseteq \mathfrak{g}_{2j}$ 和 $[D_0, \mathfrak{g}_{2j}] \subseteq \mathfrak{g}_{1j}$，然后将 $[L(c_1)\ L(y)]$ 和 $[L(c_1)\ L(z)]$ 应用于 c_j，以证明所声称的公式。 □

命题 2.8。*(1)* 设 $h_0 \in V_{12}^-$ 满足 $\tau(h_0, h_0) = -32$，并令 $H_0 = [L(c_1)\ L(h_0)]$ 且 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0$。则 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ 的根系具有 $\{\pm\alpha\}$、$\{\pm 2\alpha\}$ 或 $\{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ 的形式，其中 $\alpha(H_0) = 1$，其根空间为

$$\mathfrak{g}^0 = \{D \in \mathfrak{g}_0 : Dh_0 = 0\} \oplus \mathbb{F}H_0 \oplus \bigoplus_{3 \le i < j \le r} \mathfrak{g}_{ij},$$

$$\mathfrak{g}^{\pm\alpha} = \left\{ [L(c_1), L(y)] \mp \frac{1}{2}[L(c_2), L(h_0 y)] : y \in \bigoplus_{j=3}^{r} V_{1j} \right\},$$

$$\mathfrak{g}^{\pm 2\alpha} = \{[L(c_1), L(y)] \mp \frac{1}{8}[L(h_0), L(y)] : y \in V_{12}, \tau_{\mathbb{F}}(h_0, y) = 0\}.$$

特别地，维数$_{\mathbb{F}}\, \mathfrak{g}^{\pm\alpha} = (r-2)d$ 和维数$_{\mathbb{F}}\, \mathfrak{g}^{\pm 2\alpha} = d - 1$，因此

$$\rho_{\mathfrak{a}} = \frac{1}{2}\left((\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^{\alpha})\alpha + (\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^{2\alpha})2\alpha\right) = \delta\left(\frac{rd}{2} - 1\right)\alpha.$$

(2) 假设 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$。令 $t_0 \in V_{12}^+$ 满足 $\tau(t_0, t_0) = 32$，并令 $T_0 = [L(c_1)\ L(t_0)]$ 和 $\mathfrak{t} = \mathbb{R}T_0$。那么，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ 的根系具有 $\{\pm\beta\}$、$\{\pm 2\beta\}$ 或 $\{\pm\beta, \pm 2\beta\}$ 的形式，其中 $\beta(iT_0) = 1$，其根空间为

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0 = \{D \in \mathfrak{g}_{0,\mathbb{C}} : Dt_0 = 0\} \oplus \mathbb{C}T_0 \oplus \bigoplus_{3 \le i < j \le r} (\mathfrak{g}_{ij})_{\mathbb{C}},$$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\pm\beta} = \left\{ [L(c_1), L(y)] \mp \frac{1}{2}i[L(c_2), L(t_0 y)] : y \in \bigoplus_{j=3}^{r} (V_{1j})_{\mathbb{C}} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\pm 2\beta} = \{[L(c_1), L(y)] \mp \frac{1}{8}i[L(t_0), L(y)] : y \in (V_{12})_{\mathbb{C}}, \tau(t_0, y) = 0\}.$$

特别地，维数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\pm\beta} = (r-2)d$ 且维数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\pm 2\beta} = d - 1$，因此

$$\rho_{\mathfrak{t}} = \frac{1}{2}\left((\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta})\beta + (\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{2\beta})2\beta\right) = \left(\frac{rd}{2} - 1\right)\beta.$$

证明。 使用引理 2.7 和 (1.8)。 □

最后，在命题 2.8 (2) 的设定下，我们还确定环面 $\exp(\mathfrak{t})$ 与稳定子 G_c的交。

引理 2.9。 假设 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$，令 $t_0 \in V_{12}^{+}$满足 $\tau(t_0, t_0) = 32$，并设 $T_0 = [L(c_1)\ L(t_0)]$。那么$\exp(tT_0) \in G_c$ 当且仅当 $t \in \pi\mathbb{Z}$。

证明。 利用 $-\frac{1}{2}t_0 \quad T_0 t_0 = 8\ c_1 - c_2$ $t_0^2 = \frac{1}{2}\tau\ t_0\ t_0\ \ c_1+c_2\ = 16\ c_1+c_2$ $T_0\ c_1-c_2\ =(,)(\ )\ (\ )$，经过简单计算可得 ( ) 和 ( )，因此

$$\exp(sT_0)(c_1 - c_2) = \cos(2s)(c_1 - c_2) - \frac{1}{4}\sin(2s)t_0.$$

由于对所有 $s \in \mathbb{R}$，$\exp(sT_0)(c_1 + c_2) = c_1 + c_2$，这就证明了该结论。 □

3 theta 对应与 Plancherel公式

本节将 $\Pi_{\min}$ 分解为 $G \times G'$ 的不可约表示与 $L^2(\mathcal{O}_G)$ 的 Plancherel公式联系起来。为此，我们先回顾 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$ 的表示论，然后研究 $G \times G'$ 与 $\Pi_{\min}|_{G\times G'}$ 的表示之间的交织算子。

3.1 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F})$ 与$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$的表示

我们回顾 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$ 的表示论，以确定记号（详情参见例如 [13, 第 2 章，第 §4] 节）。对于 $m \in \mathbb{Z}$ 和 $\nu \in \mathbb{C}$，我们考虑由特征标诱导的 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$ 的主系列表示 $\sigma_{m,\nu}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto |a|_m^{\nu} := |a|^{\nu} \left(\frac{a}{|a|}\right)^m.$$

注意，对于 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$，该表示仅取决于模 2 意义下的 m，因此在这种情况下，我们将 m 视为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 中的一个元素。

Fact 3.1. $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$ 的无限维不可约酉表示为 :

- 当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 时，酉主系列 $\sigma_{m,\nu}$ 满足 $\nu \in i\mathbb{R}$ 且 $m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；当 $m \in \mathbb{Z}$ 时，满足 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$。它们之间唯一的等价关系为 $\sigma_{m,\nu} \simeq \sigma_{-m,-\nu}$。
- 互补系列 $\sigma_{m,\ \nu}$其中 $\nu \in (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}) \setminus \{0\}$ 以及 $m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$对于 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$和$m=0$ 对于 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$，其中 $\delta =$维数$_{\mathbb{R}}\mathbb{F} \in \{1,2\}$。它们之间唯一的等价关系是$\sigma_{m,\ \nu} \simeq \sigma_{-m,\ -\nu}$。
- 对于 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 参数为偶数 $k \geq 2$ 的离散系列，它是对任意 $m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，当$\nu = \frac{1-k}{2}$ 时 $\sigma_{m,\ \nu}$ 对标准交织算子 $A_{m,\ \nu}$的核取商所得。

所有不可约酉表示限制到抛物子群后仍然不可约。

为了在 theta 对应中展示这些表示，我们采用显式实现。通过限制到相反幺幂根基，表示 $\sigma_{m,\ \nu}$ 可以实现在 $\mathbb{F}$ 上的一个光滑函数空间上，其作用为

$$\sigma_{m,\nu}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} f(z) = \left|\frac{(a+bz)^2}{ad-bc}\right|_{-m}^{-\nu-\frac{\delta}{2}} f\left(\frac{c+dz}{a+bz}\right),$$

其中 $\delta = \text{维数}_{\mathbb{R}}\mathbb{F}$，即 $\delta = 1$ 对于 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$，而 $\delta = 2$ 对于 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$。特别地，我们发现

$$d\sigma_{m,\nu}\begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \partial_{uz^2} + (2\nu+\delta)\operatorname{Re}(uz) + 2mi\operatorname{Im}(uz).$$

在这种图像下，酉主系列的希尔伯特空间就是 $L^2(\mathbb{F})$，其上取关于 $\mathbb{F}$上的勒贝格测度 dz 的内积。对于互补系列和离散系列上的不变内积，我们需要标准交织算子 $A_{m,\ \nu}\colon \sigma_{m,\ \nu} \to \sigma_{-m,\ -\nu}$ 在这种图像下，它由下式给出

$$A_{m,\nu}f(w) = \int_{\mathbb{F}} |z|_{2m}^{2\nu-\delta} f(w+z)\,dz.$$

互补系列和离散系列上的不变内积由下式导出

$$(f_1, f_2) \mapsto \int_{\mathbb{F}} (A_{m,\nu}f_1)(z)\overline{f_2(z)}\,dz.$$

我们用 $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbb{F}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{F})$ 表示由下式给出的欧几里得傅里叶变换

$$\mathcal{F}u(\zeta) = \int_{\mathbb{F}} e^{-i\operatorname{Re}(z\zeta)} f(z)\,dz,$$

其中记 $\zeta = \xi + i\eta \neq 0$。那么 $\widehat{\sigma}_{m,\ \nu}(g) = \mathcal{F} \circ \sigma_{m,\ \nu}(g) \circ \mathcal{F}^{-1}$ 在 $\mathcal{S}'(\mathbb{F})$ 的一个子空间上定义了一个等价表示。若 $\widehat{\sigma}_{m,\ \nu}$ 具有有限维子表示，则该子表示由支撑在 $\{0\}$ 处的分布组成（即多项式的傅里叶变换）。若将 $\widehat{\sigma}_{m,\ \nu}$ 替换为其关于该有限维子表示的商表示，我们便可将表示空间视为 $\mathcal{S}'(\mathbb{F}^\times)$ 的一个子空间。标准交织算子 $\widehat{A}_{m,\ \nu} = \mathcal{F} \circ A_{m,\ \nu} \circ \mathcal{F}^{-1}\colon \widehat{\sigma}_{m,\ \nu} \to \widehat{\sigma}_{-m,\ -\nu}$ 除相差标量倍数外，由下式给出

$$\widehat{A}_{m,\nu}f(\zeta) = |\zeta|_{-2m}^{-2\nu} f(\zeta),$$

因此，互补系列表示 $\widehat{\sigma}_{m,\nu}(\nu \in (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}))$ 和离散系列表示 $\widehat{\sigma}_{m,\nu}$ $(\nu = \frac{1-k}{2},\ k \geq 2$ even$)$ 的希尔伯特空间由 $L^2(\mathbb{F}^\times, |\zeta|^{-2\nu}\,d\zeta)$ 给出。 ——

很容易看出抛物子群的作用

$$P' = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} : ad \neq 0\right\} \subseteq \mathrm{PGL}(2,\mathbb{F})$$

在这幅图中：

$$\widehat{\sigma}_{m,\nu}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} f(\zeta) = e^{-i\operatorname{Re}(v\zeta)} f(\zeta), \qquad \widehat{\sigma}_{m,\nu}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} f(\zeta) = \left|\frac{a}{d}\right|_m^{\nu-\frac{\delta}{2}} f\left(\frac{d}{a}\zeta\right).$$

为了计算幺幂根基的作用，我们注意到

$$\mathcal{F}\circ\frac{d}{dx}=i\xi\circ\mathcal{F},\qquad\qquad \mathcal{F}\circ x=i\frac{d}{d\xi}\circ\mathcal{F},$$
$$\mathcal{F}\circ\frac{d}{dy}=-i\eta\circ\mathcal{F},\qquad\qquad \mathcal{F}\circ y=-i\frac{d}{d\eta}\circ\mathcal{F}.$$

于是，简短的计算表明

$$i\,d\widehat{\sigma}_{m,\nu}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\xi(\partial_\xi^2-\partial_\eta^2)+2\eta\partial_\xi\partial_\eta-(2\nu-\delta)\partial_\xi+2mi\partial_\eta,$$
$$i\,d\widehat{\sigma}_{m,\nu}\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}=2\xi\partial_\xi\partial_\eta-\eta(\partial_\xi^2-\partial_\eta^2)-(2\nu-\delta)\partial_\eta-2mi\partial_\xi,$$

其中，在 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$的情形下，我们将 $\eta=0$ 和 $\partial_\eta=0$ 解释为。

考虑到约当代数 V 的结构常数 r 和 d ，我们用线性同构对表示$\widehat{\sigma}_{m,\ \nu}$ 进行共轭

$$\Phi_{m,\nu}:L^2(\mathbb{F}^\times,|\zeta|^{-2\nu}\,d\zeta)\to L^2(\mathbb{F}^\times,|\zeta|^{\delta\frac{rd}{2}-\delta}\,d\zeta),\quad \Phi_{m,\nu}f(\zeta)=|\zeta|_{-m}^{-(\nu+\delta\frac{rd}{4}-\frac{\delta}{2})}f(\zeta)$$

从而得到$\tau_{m,\ \nu}(g)=\Phi_{m,\ \nu}\circ\widehat{\sigma}_{m,\ \nu}(g)\circ\Phi_{m,\ \nu}^{-1}$。抛物子群 $P'\subseteq\mathrm{PGL}(2,\ \mathbb{R})$的作用为

$$\tau_{m,\nu}\begin{pmatrix}1&0\\v&1\end{pmatrix}f(\zeta)=e^{-i\,\mathrm{Re}(v\zeta)}f(\zeta),\qquad\qquad \tau_{m,\nu}\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}f(\zeta)=\left|\frac{a}{d}\right|^{-\delta\frac{rd}{4}}f\left(\frac{d}{a}\zeta\right).\tag{3.1}$$

此外，利用

$$\Phi_{m,\nu}\circ\xi=\xi\circ\Phi_{m,\nu},\qquad\qquad \Phi_{m,\nu}\circ\partial_\xi=\left(\partial_\xi+\frac{(\nu+\delta\frac{rd}{4}-\frac{\delta}{2})\xi-im\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)\circ\Phi_{m,\nu},$$
$$\Phi_{m,\nu}\circ\eta=\eta\circ\Phi_{m,\nu},\qquad\qquad \Phi_{m,\nu}\circ\partial_\eta=\left(\partial_\eta+\frac{(\nu+\delta\frac{rd}{4}-\frac{\delta}{2})\eta+im\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)\circ\Phi_{m,\nu}.$$

我们得到 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$的:

$$i\,d\tau_{m,\nu}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\xi\partial_\xi^2+\frac{rd}{2}\partial_\xi+\frac{\left(\left(\frac{rd-2}{4}\right)^2-\nu^2\right)}{\xi},\tag{3.2}$$

以及对于 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$:

$$i\,d\tau_{m,\nu}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\xi(\partial_\xi^2-\partial_\eta^2)+2\eta\partial_\xi\partial_\eta+rd\partial_\xi+\frac{\left(\left(\frac{rd-2}{2}\right)^2-\nu^2-m^2\right)\xi+2im\nu\eta}{\xi^2+\eta^2},\tag{3.3}$$
$$i\,d\tau_{m,\nu}\begin{pmatrix}0&i\\0&0\end{pmatrix}=2\xi\partial_\xi\partial_\eta-\eta(\partial_\xi^2-\partial_\eta^2)+rd\partial_\eta+\frac{\left(\left(\frac{rd-2}{2}\right)^2-\nu^2-m^2\right)\eta-2im\nu\xi}{\xi^2+\eta^2}.\tag{3.4}$$

定理　第 3.2 节。 $\mathrm{PGL}(2,\ \mathbb{F})$ 的无限维不可约酉表示为 :

- 酉主系列 $\tau_{m,\,\nu}$ 其中 $\nu \in i\mathbb{R}$ 且对于 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 有 $m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，对于$\mathbb{F}=\mathbb{C}$有 $m \in \mathbb{Z}$。它们之间唯一的等价关系是 $\tau_{m,\,\nu} \simeq \tau_{-m,\,-\nu}$。
- 互补系列 $\tau_{m,\,\nu}$其中 $\nu \in (-\frac{\delta}{2},\ \frac{\delta}{2}) \setminus \{0\}$且 $m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$时，以及 $m=0$当 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$时。
- 对于 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 参数为 $k \geq 2$ 的离散系列 $\tau_{\mathrm{ds}k}$，其中 $k \geq 2$ 为偶数，即 $\tau_{m,\,\nu}$ 且 $\nu = \frac{1-k}{2}$，而 $m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$任意。

所有这些表示在 $L^2(\mathbb{F}^\times,\ |\zeta|^{\delta(\frac{rd}{2}-1)}d\zeta)$ 上都是酉的，并且限制到抛物子群 P'后不可约。

注 3.3。 </style}对于，离散系列 (偶数) 限制到 PSL(2, $\mathbb{R}$) 后分解为两个不可约酉表示的直和：定义在 $L^2(\mathbb{R}_+,\ |\xi|^{\frac{rd}{2}-1}d\xi)$ 上的全纯离散系列 $\tau_{\mathrm{hds}k}$，以及定义在 $L^2(\mathbb{R}_-,\ |\xi|^{\frac{rd}{2}-1}d\xi)$ 上的反全纯离散系列 $\tau_{\mathrm{ahds}k}$。此外，万有覆盖群 PSL(2，$\mathbb{R}$) 允许任意实数 $k>1$对应的全纯和反全纯离散系列 $\tau_{\mathrm{hds}k}$和 τ_k^{ahds}，它们在相同的希尔伯特空间上实现，其作用 P' 与李代数 $\mathfrak{sl}$(2，$\mathbb{R}$) 的作用公式相同（例如参见 [18]）。

3.2 交织算子

我们定义一个映射

$$T : C^\infty(\mathcal{O}_G) \otimes C^\infty(\mathbb{F}^\times) \to C^\infty(\mathbb{F}^\times \mathcal{O}_G), \quad T(f_1 \otimes f_2)(tg \cdot c) = f_1(g \cdot c) f_2(t),$$

其中，当 V 为欧几里得时，我们用 $\mathbb{R}_+$ 代替 $\mathbb{R}^\times$。由引理 2.4，可得到一个等距同构

$$T : L^2(\mathcal{O}_G) \widehat{\otimes} L^2(\mathbb{F}^\times, |\zeta|^{\delta\frac{rd}{2}}\, d^\times\zeta) \to L^2(\mathcal{O}), \tag{3.5}$$

同样，当 V 为欧几里得时，将 $\mathbb{R}^\times$ 替换为 $\mathbb{R}_+$。

映射 T 显然将 G 在 $C^\infty(\mathcal{O}_G)$上的左正则表示 ℓ 与由 (1.12) 和 (1.1) 给出的限制 $\Pi_{\min}|_G$ 交织起来。也容易证明，它将抛物子群 $P' \subseteq G'$的作用交织起来：

引理 3.4。 对于任意 $m \in \mathbb{Z}$、$\nu \in \mathbb{C}$，映射 T将 $G \times P'$的表示$\ell \boxtimes \tau_{m,\nu}|_{P'}$和 $\Pi_{\min}|_{G\times P'}$交织起来。

证明。 我们首先验证 exp($\mathbb{F}F$) 的交织性质：

$$\begin{aligned}\Pi_{\min}(\exp(sF)) \circ T(f_1 \otimes f_2)(tg \cdot c) &= e^{-i\tau(tg\cdot c, se)} T(f_1 \otimes f_2)(tg \cdot c) = f_1(g \cdot c) \cdot e^{-i\,\mathrm{Re}(st)} f_2(t) \\ &= T(f_1 \otimes \tau_{m,\nu}(\exp(sF)) f_2)(tg \cdot c).\end{aligned}$$

现在我们考虑 exp($\mathbb{F}H$) 的作用：

$$\begin{aligned}\Pi_{\min}(\exp(sH)) \circ T(f_1 \otimes f_2)(tg \cdot c) &= e^{-\delta\frac{rd}{2}s} T(f_1 \otimes f_2)(e^{-2s}tg \cdot c) = e^{-\delta\frac{rd}{2}s} f_1(g \cdot c) f_2(e^{-2s}t) \\ &= f_1(g \cdot c) \cdot \tau_{m,\nu}(\exp(sH)) f_2(t) \\ &= T(f_1 \otimes \tau_{m,\nu}(\exp(sH)) f_2)(tg \cdot c).\end{aligned}$$

当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 和 V 是非欧几里得情形时，我们还需要检验 $P'\subseteq G'\simeq \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ 的非单位连通分支中某个元素的交织性质。我们对 $-\mathrm{id}_V\in G'$ 进行检验：

$$\begin{aligned}\Pi_{\min}(-\mathrm{id}_V)\circ T(f_1\otimes f_2)(tg\cdot c) &= T(f_1\otimes f_2)(-tg\cdot c) = f_1(g\cdot c)f_2(-t)\\ &= f_1(g\cdot c)\cdot \tau_{m,\nu}(-\mathrm{id}_V)f_2(t) = T(f_1\otimes \tau_{m,\nu}(-\mathrm{id}_V)f_2)(tg\cdot c).\square\end{aligned}$$

剩下的工作是研究 $\exp(\mathbb{F}E)$ 的作用。这将通过 $\mathbb{F}E$ 的李代数作用来完成。为表述该陈述，记 $C\in U(\mathfrak{g})$ 为关于基灵型 B 归一化的 $\mathfrak{g}$ 的卡西米尔元，其中

$$B([L(c_i),L(v)],[L(c_i),L(w)]) = \tau(v,w)\qquad (v,w\in V_{ij}). \tag{3.6}$$

更确切地说，若 (X_α) 是（实）李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基，而 (X'_α) 是关于 B 的对偶基，则

$$C=\sum_\alpha X_\alpha X'_\alpha.$$

在 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情形下，我们通过两个复线性嵌入 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\simeq \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}\hookrightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\{X+IY : X,Y\in\mathfrak{g}\},\quad X\mapsto \frac{1}{2}(X\pm IiX),$$

因此，在 $U(\mathfrak{g})$ 中有两个二阶线性无关不变量，即 C 以及

$$D=\sum_\alpha X_\alpha\cdot(iX'_\alpha)=\sum_\alpha (iX_\alpha)\cdot X'_\alpha,$$

这里，(X_α) 再次是实李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基，而 (X'_α) 是关于 B 的对偶基。

引理 3.5（关键引理）。（1）对于 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$:

$$i\,d\Pi_{\min}(e,0,0)\circ T(f_1\otimes f_2) = T(f_1\otimes(\xi f_2''+\tfrac{rd}{2}f_2')) + 8T(d\ell(C)f_1\otimes \xi^{-1}f_2).$$

（2）对于 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}i\,d\Pi_{\min}(e,0,0)\circ T(f_1\otimes f_2) &= T\Big(f_1\otimes\big[\xi(\partial_\xi^2-\partial_\eta^2)f_2+2\eta\partial_\xi\partial_\eta f_2+rd\partial_\xi f_2\big]\Big)\\ &\quad + 8T\Big(d\ell(C)f_1\otimes\tfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}f_2 - d\ell(D)f_1\otimes\tfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}f_2\Big),\\ i\,d\Pi_{\min}(ie,0,0)\circ T(f_1\otimes f_2) &= T\Big(f_1\otimes\big[2\xi\partial_\xi\partial_\eta f_2-\eta(\partial_\xi^2-\partial_\eta^2)f_2+rd\partial_\eta f_2\big]\Big)\\ &\quad + 8T\Big(d\ell(C)f_1\otimes\tfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2}f_2 + d\ell(D)f_1\otimes\tfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2}f_2\Big).\end{aligned}$$

证明。我们声称，只需证明这些恒等式在 $x=c$ 处的取值。下面以 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 为例说明，$\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情形类似。对于 $s\in\mathbb{R}$ 和 $g\in G$，我们可以写成

$$i\,d\Pi_{\min}(e,0,0)\circ T(f_1\otimes f_2)(e^{2s}g\cdot c) = ie^{\frac{rd}{2}s}\Pi_{\min}(\exp(-tH)g^{-1})\circ d\Pi_{\min}(e,0,0)\circ T(f_1\otimes f_2)(c).$$

利用 $\Pi_{\min}(x)\circ d\Pi_{\min}(Y) = d\Pi_{\min}(\text{伴随作用}(x)Y)\circ\Pi_{\min}(x)$，对于 $x=\exp(-tH)g^{-1}$ 和 $Y=(e,0,0)$，可得

$$= ie^{\frac{rd}{2}s}d\Pi_{\min}(e^{-2t}e,0,0)\circ\Pi_{\min}(\exp(-tH)g^{-1})\circ T(f_1\otimes f_2)(c).$$

根据引理 3.4，利用 T 对 $G\times P'$ 的交织性，可将其改写为

$$= ie^{\frac{rd}{2}s}e^{-2t}d\Pi_{\min}(e,0,0)\circ T\Big(\ell(g^{-1})f_1\otimes\tau_{m,\nu}(\exp(-tH))f_2\Big)(c).$$

现在假设在 $x=c$处所声称的公式成立，并写作 $\xi f_2''+\frac{rd}{2}f_2'=d\tau_{m,\nu}(E)f_2$，其中 $\nu=\frac{rd-2}{4}$且 $m\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$任意，则

$$= e^{\frac{rd}{2}s}e^{-2t}T\Big(\ell(g^{-1})f_1\otimes\big(d\tau_{m,\nu}(E)\circ\tau_{m,\nu}(\exp(-tH))f_2\big)\Big)(c)$$
$$+ 8e^{\frac{rd}{2}s}e^{-2t}T\Big(\big(d\ell(C)\circ\ell(g^{-1})f_1\big)\otimes\xi^{-1}\tau_{m,\nu}(\exp(-tH))f_2\Big)(c).$$

再次利用第一项中群表示与李代数表示之间的相容性，以及第二项中的 (3.1)，我们得到

$$= e^{\frac{rd}{2}s}T\Big(\ell(g^{-1})f_1\otimes\big(\tau_{m,\nu}(\exp(-tH))\circ d\tau_{m,\nu}(E)f_2\big)\Big)(c)$$
$$+ 8e^{\frac{rd}{2}s}T\Big(\big(\ell(g^{-1})\circ d\ell(C)f_1\big)\otimes\tau_{m,\nu}(\exp(-tH))\xi^{-1}f_2\Big)(c)$$

再次应用引理 3.4，最终得到

$$= e^{\frac{rd}{2}s}\Pi_{\min}(\exp(-tH)g^{-1})\circ\Big(T\big(f_1\otimes d\tau_{m,\nu}(E)f_2\big)(c)+8T\big(d\ell(C)f_1\otimes\xi^{-1}f_2\big)(c)\Big)$$
$$= T\big(f_1\otimes d\tau_{m,\nu}(E)f_2\big)(e^{2t}g\cdot c)+8T\big(d\ell(C)f_1\otimes\xi^{-1}f_2\big)(e^{2t}g\cdot c).$$

这表明，如果所声称的恒等式在 $x=c$处成立，那么它就在 $\mathbb{R}_+\mathcal{O}_G$上成立。在非欧几里得情形下，利用 $-\mathrm{i}\,\mathrm{d}_V\in G'$进行类似计算（使用 $\tau_{m,\nu}(-\mathrm{id}_V)\circ d\tau_{m,\nu}(E)=-d\tau_{m,\nu}(E)\circ\tau_{m,\nu}(-\mathrm{id}_V)$），可将其扩展到 $\mathbb{R}^\times\mathcal{O}_G$；根据命题 2.3，$\mathbb{R}^\times\mathcal{O}_G$在 $\mathcal{O}$中是开稠密的。

为证明在 $x=c$处取值的所声称的恒等式，我们注意到，根据引理 2.6，在 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$的情形下，可以写成 $d\ell(C)f_1(c)=d\ell(C')f_1(c)$，以及 $d\ell(D)f_1(c)=d\ell(D')f_1(c)$，其中

$$C'=\sum_\alpha\varepsilon_\alpha[L(c),L(f_\alpha)]^2\in U(\mathfrak{g})\qquad\text{and}\qquad D'=\sum_\alpha\varepsilon_\alpha[L(c),L(f_\alpha)]\cdot[L(c),L(if_\alpha)]$$

其中 (f_α) 是 $V(c,12)=V(c,12)^+\oplus V(c,12)^-$ 的一组基，使得 $\tau(f_\alpha,f_\beta)=\varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta}$ 且 $\varepsilon_\alpha\in\{\pm1\}$，即对于 $f_\alpha\in V(c,12)^\pm$，有 $\varepsilon_\alpha=\pm1$。我们先计算 $x=c$ 的以下表达式：

$$i\,d\Pi_{\min}(e,0,0)=\sum_{\alpha,\beta}\tau(P(\widehat{e}_\alpha,\widehat{e}_\beta)x,e)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\frac{\delta d}{2}\sum_\alpha\tau(\widehat{e}_\alpha,e)\frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$
$$i\,d\Pi_{\min}(ie,0,0)=\sum_{\alpha,\beta}\tau(P(\widehat{e}_\alpha,\widehat{e}_\beta)x,ie)\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}+\frac{\delta d}{2}\sum_\alpha\tau(\widehat{e}_\alpha,ie)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

在第一项中，我们可以改写为

$$\tau(P(\widehat{e}_\alpha,\widehat{e}_\beta)x,e)=\tau(x,P(\widehat{e}_\alpha,\widehat{e}_\beta)e)=\tau(x,\widehat{e}_\alpha\cdot\widehat{e}_\beta)$$

对于 $\tau(P(\widehat{e}_\alpha,\widehat{e}_\beta)x,ie)$，类似地。我们将 $c_1=c$补全为 V^+ 的一个约当标架 $c_1,c_2,\ldots\ldots,c_r$，并选取基 (e_α)，使得每个 e_α 都包含在某个 $V_{ij}^\pm$ 中。于是 $\widehat{e}_\alpha$ 也满足同样的性质。回顾一下，对于 $i,\ j,\ k,\ \ell$ 两两不同的情形，$V_{ij}\cdot V_{k\ell}=\{0\}$；对于 $i\neq k$，$V_{ij}\cdot V_{jk}\subseteq V_{ik}$；并且$V_{ij}\cdot V_{ij}\subseteq V_{ii}+V_{jj}=\mathbb{F}c_i+\mathbb{F}c_j$（见 (1.6) 和 (1.7)）。此外，$V^\pm\cdot V^\pm\subseteq V^+$ 且 $V^\pm\cdot V^\mp\subseteq V^-$。因此，对于 $x=c=c_1$，表达式 $\tau(x,\widehat{e}_\alpha\cdot\widehat{e}_\beta)$ 仅在以下情形下可能非零：

• $\widehat{e}_\alpha,\ \widehat{e}_\beta \in V_{11}^{\pm}$。在 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ 的情形下，我们可以选择 $e_\alpha = e_\beta = c_1$，于是 $\widehat{e}_\alpha = \widehat{e}_\beta = c_1$，相应的求和项因此变为 $\partial_{c_1}^2$。在 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情形下，我们还会得到 $e_\alpha = e_\beta = ic_1$ 和 $\widehat{e}_\alpha = \widehat{e}_\beta = -ic_1$ 对应的贡献，因此该项为 $-\partial_{ic_1}^2$。

• $\widehat{e}_\alpha,\ \widehat{e}_\beta \in V_{1j}^{\pm}$。我们可以选择 $e_\alpha = f_\alpha$，然后选择 $\widehat{e}_\alpha = \varepsilon_\alpha f_\alpha$，使得 $\tau(c_1,\ \widehat{e}_\alpha \cdot \widehat{e}_\beta) = \varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\tau(c_1 \cdot f_\alpha,\ f_\beta) = \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha\delta_{\alpha,\,\beta}$。因此，对这类 α 求和可得 $\frac{1}{2}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\partial_{f_\alpha}^2$。

在第二项中，我们只得到来自 $\widehat{e}_\alpha = c_j$ 的贡献，因此总计可得

$$i\,d\Pi_{\min}(e,0,0) = \partial_{c_1}^2 - \partial_{ic_1}^2 + \frac{1}{2}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\partial_{f_\alpha}^2 + \frac{\delta d}{2}\sum_{j=1}^{r}\partial_{c_j}. \tag{3.7}$$

类似地，在 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情形下，我们得到：

$$i\,d\Pi_{\min}(ie,0,0) = 2\partial_{c_1}\partial_{ic_1} + \frac{1}{2}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\partial_{f_\alpha}\partial_{if_\alpha} + \frac{\delta d}{2}\sum_{j=1}^{r}\partial_{ic_j} \tag{3.8}$$

现在我们计算 $d\Pi_{\min}(C')f(c_1)$，并且在 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 的情形下计算 $d\Pi_{\min}(D')f(c_1)$。我们有$[L(c_1) L(f_\alpha)]c_1 = -\frac{1}{4}f_\alpha$，因此可得

$$d\Pi_{\min}(C')f(c_1) = -\frac{1}{4}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\partial_{f_\alpha}\left(\partial_{[L(c_1),L(f_\alpha)]x}f(x)\right)\big|_{x=c_1}.$$

根据乘积法则，这等于

$$-\frac{1}{4}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\Big(\partial_{[L(c_1),L(f_\alpha)]x}\partial_{f_\alpha}f(x) + \partial_{[L(c_1),L(f_\alpha)]f_\alpha}f(x)\Big)\Big|_{x=c_1}$$
$$= -\frac{1}{4}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\Big(-\frac{1}{4}\partial_{f_\alpha}^2 f(c_1) + \partial_{[L(c_1),L(f_\alpha)]f_\alpha}f(c_1)\Big).$$

由于 $f_\alpha^2 = \frac{1}{2}\tau(f_\alpha,\ f_\alpha)(c_1+c_j) = \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha(c_1+c_j)$，我们得到

$$[L(c_1),L(f_\alpha)]f_\alpha = c_1 f_\alpha^2 - \frac{1}{2}f_\alpha^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_\alpha(c_1-c_j)$$

而 $d\Pi_{\min}(C)$ 在 $x=c_1$ 处的作用变为

$$d\Pi_{\min}(C')f(c_1) = \frac{1}{16}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\partial_{f_\alpha}^2 f(c_1) - \frac{\delta d}{16}\sum_{j=2}^{r}\partial_{c_1-c_j}f(c_1). \tag{3.9}$$

结合（3.7）和（3.9），我们得出

$$i\,d\Pi_{\min}(e,0,0)f(c_1) = \partial_{c_1}^2 f(c_1) - \partial_{ic_1}^2 f(c_1) + \delta\frac{rd}{2}\partial_{c_1}f(c_1) + 8d\Pi_{\min}(C)f(c_1).$$

根据引理 3.4，我们还可以将 $\partial_{c_1}T(f_1\otimes f_2) = T(f_1\otimes\partial_\xi f_2)$ 和 $\partial_{ic_1}T(f_1\otimes f_2) = T(f_1\otimes\partial_\eta f_2)$ 以及 $d\Pi_{\min}(C)T(f_1\otimes f_2) = T(d\ell(C)f_1\otimes f_2)$ 重写，因此这就是 $x=c_1$ 处所声称的公式。类似地，我们得到

$$d\Pi_{\min}(D')f(c_1) = \frac{1}{16}\sum_\alpha \varepsilon_\alpha\partial_{f_\alpha}\partial_{if_\alpha}f(c_1) - \frac{\delta d}{16}\sum_{j=2}^{r}\partial_{i(c_1-c_j)}f(c_1),$$

结合 (3.8)，可得

$$i\,d\Pi_{\min}(ie,0,0)f(c_1) = 2\partial_{c_1}\partial_{ic_1}f(c_1) + \delta\frac{rd}{2}\partial_{ic_1}f(c_1) + 8d\Pi_{\min}(D')f(c_1),$$

这就是 $x = c_1$ 处所需的公式。 □

定理 3.6。若

$$L^2(\mathcal{O}_G) \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \pi\, d\mu(\pi)$$

是 ℓ 在 $L^2(\mathcal{O}_G)$ 上的 G 的左正则表示分解，则 $\curvearrowright\Pi_{\min}$ 对 $G \times G'$ 的限制为

$$\Pi_{\min}|_{G\times\widetilde{G'}} \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \pi \boxtimes \theta(\pi)\, d\mu(\pi),$$

其中 $\theta(\pi)$ 是 G'（$\widetilde{G'}$ 的有限覆盖群）在 $L^2(\mathbb{R}_+, \xi^{\frac{rd}{2}}\, d^\times\xi)$（当 V 为欧几里得时）或 $L^2(\mathbb{F}^\times, |\zeta|^{\delta\frac{rd}{2}}\, d^\times\zeta)$（当 V 为非欧几里得或复时）上的不可约酉表示；它在 P' 上与 $\tau_{m,\nu}$ 一致，且其 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ 的导出表示在子空间 $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ 或 $C_c^\infty(\mathbb{F}^\times)$ 上与 $d\tau_{m,\nu}$ 一致，其中 m 和 ν 与特征值 $d\pi(C)$ 以及在 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 的情况下还与 $d\pi(D)$ 之间满足以下关系：

- 若 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 则 $d\pi(C) = -\frac{1}{32}(4\nu^2 - (\frac{rd}{2} = 1)^2)$。
- 若 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 则 $d\pi(C) = -\frac{1}{8}(\nu^2 + m^2 - (\frac{rd}{2} - 1)^2)$ </style}并且 $(D) = -\frac{1}{4}im\nu$。

证明。 由同构 (3.5) 和引理 3.4 可知， $\Pi_{\min}|_{G\times\widetilde{G'}}$ 分解为$\pi \boxtimes \theta(\pi)$，其中 $\theta(\pi)$ 是 $\widetilde{G'}$在 $L^2(\mathbb{R}_+, |\xi|^{\frac{rd}{2}}\, d^\times\xi)$ 上的一个表示，分别地， $L^2(\mathbb{F}^\times, |\zeta|^{\delta\frac{rd}{2}}\, d^\times\zeta)$ 上的一个表示，且P'通过$\tau_{m,\nu}|_{P'}$作用。其余部分可通过将引理 3.5 中的公式与 (3.2)、(3.3) 和 (3.4) 进行比较得出。

□

注 3.7。 如果 V是欧几里得域或复域，事实证明，定理 3.6 中的性质唯一刻画了 $\theta(\pi)$，下一节将对此作出明确说明。遗憾的是，对于 V非欧几里得域，$\tau_{m,\nu}$ $(m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \nu \in i\mathbb{R})$的两个不等价表示都属于 $G' = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$，它们对 P' 的限制相同，并且在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^\times)$上的无穷小作用也相同，因此定理 3.6 中的信息不足以确定所有表示 π的θ提升。在下一节中，我们将考察一些小的 K-型表示来解决这一问题。

4 $\mathcal{O}_G$的 Plancherel公式

本节利用文献中的结果，在所有情形下将 $\mathcal{O}_G$ 的 Plancherel公式写成显式形式。因此，定理 3.6 中的 theta 对应变得完全显式，并且证明其为一一对应。

4.1 V欧几里得

若 V 是欧几里得的， G 是紧的，那么 $L^2(\mathcal{O}_G) = L^2(G/G_c)$ 的分解是离散的，并由 Cartan–Helgason 定理给出。为此，回顾引理 2.6， $\mathfrak{t} = \mathbb{R}T_0$ 是 $\mathfrak{g}^{-\sigma}$中的一个极大环面。Cartan–Helgason 定理 [8, 第 V 章，定理 4.1]断言，$L^2(\mathcal{O}_G)$ 分解为 G的所有最高权为 $\lambda \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 的不可约表示的无重数直和，其中

- $\frac{\langle \lambda, \langle \mu \rangle^{\mu} \rangle}{\langle \mu, \mu \rangle} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对所有 $\mu \in \Sigma^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$，
- e^{λ} 在 $\exp(\mathfrak{t}) \cap G_c$上是平凡的。

鉴于命题 2.8 (2)，第一个条件导出 $\lambda = k\beta$，使得当 $d = 1$ 时 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，而当 $d > 1$时$k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$。但 $e^{tT_0} \in G_c$ 当且仅当 $t \in \pi\mathbb{Z}$ （见引理 2.9），因此第二个条件在所有情况下都迫使 $k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$。这意味着

$$L^2(\mathcal{O}_G) \simeq \widehat{\bigoplus_{k \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}}} \pi_{k\beta},$$

其中 $\pi_{k\beta}$ 是 G 的不可约表示，最高权为 $k\beta$。

由于 $\rho_{\mathfrak{t}} = (\frac{rd}{2} - 1)\beta$（见命题 2.8 (2)），卡西米尔元$C$ 在$\pi_{k\beta}$ 上的特征值 $d\pi_{k\beta}(C)$由下式给出

$$d\pi_{k\beta}(C) = B(k\beta + 2\rho_{\mathfrak{t}}, k\beta) = -\frac{1}{32}k(k + rd - 2),$$

其中我们利用了：在通过基灵型 B 对 $\mathfrak{t} \simeq \mathfrak{t}^*$ 的刻画下，有 $B(\beta, \beta) = -\frac{1}{32}$。

定理 3.6 蕴含， $\theta(\pi_{k\beta})$ 是 $G' = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 的有限覆盖群在 $L^2(\mathbb{R}_+, |\xi|^{\frac{rd}{2}} d^{\times}\xi)$ 上的不可约酉表示；它在 P' 上与 $\tau_{\mathrm{hds}}{}^{k+\frac{rd}{2}}$ 一致，并且其导出表示在 $C_c^{\infty}(\mathbb{R}_+)$ 上与 $d\tau_{\mathrm{hds}}{}^{k+\frac{rd}{2}}$ 一致。根据定理 3.2，这意味着：

推论 4.1。 $\theta(\pi_{k\beta}) = \tau_{\mathrm{hds}}{}^{k+\frac{rd}{2}}$是 $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2, \mathbb{R})$ 的全纯离散系列表示，其参数为 $k + \frac{rd}{2}$。

4.2 V非欧几里得

假设 V 是实的且为非欧几里得，并且 $V \not\simeq \mathbb{R}^{p,q}$，其中 $p + q$ 为奇数。在这种情况下，根据引理 2.6， $\mathcal{O}_G = G/G_c$ 是一个非黎曼半单对称空间，且其秩为 $\mathrm{rank}(G/G_c) = 1$，因此其 Plancherel公式已知，例如见 [28, 33]。它由连续部分和离散部分组成，我们将分别对其进行处理。

对于连续部分，根据引理 2.6，回顾极大环面 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0 \subseteq \mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\theta}$，其根系为 $\Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$，形式为 $\{\pm\alpha\}$、$\{\pm 2\alpha\}$ 或 $\{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$。于是， $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{2\alpha}$ 是抛物的，我们用 $P = N_G(\mathfrak{p}) = MAN$ 表示 G 中相应的抛物子群。交集 $M \cap G_c$ 等于 M 中 c 的稳定子 M_c。回顾一下，我们将 $c_1 = c$ 扩展为一个约当标架 $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_r$。

引理 4.2。 $M/M_c = \{1, m_0\}$，其中 $m_0 \in M$ 是一个满足 $m_0c_1 = c_2$、 $m_0c_2 = c_1$ 和 $m_0h_0 = -h_0$ 的元素。

证明。 我们断言 $M \cdot (c_1 - c_2) = \{\pm(c_1 - c_2)\}$，并且 $M_c = M_{c_1}$ 是 M中 $c_1 - c_2$的稳定子。这将推出 $M/M_c \simeq M \cdot (c_1 - c_2) = \{\pm(c_1 - c_2)\}$。
为此，我们首先注意到 $M \cdot (c_1 - c_2)$ 必定是有限的。事实上，由命题 2.8 (1) 可知

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_{0,h_0} \oplus \bigoplus_{3 \le i < j \le r} \mathfrak{g}_{ij},$$

其中 $\mathfrak{g}_{0,\ h_0}$表示 $\mathfrak{g}_0$中 h_0的稳定子，且 $\mathfrak{g}_{ij} = [L(c_i)\ L(V_{ij})]$。这意味着 $\mathfrak{m} \cdot (c_1 - c_2) = \{0\}$。由于 M只有有限个连通分支，因此 $M \cdot (c_1 - c_2)$ 是有限的。接下来我们证明 $M \cdot (c_1 - c_2) \subseteq \{\pm(c_1 - c_2)\}$。为此，我们首先观察到（与引理 2.9 类似）单参数群 $A = e^{\mathbb{R}H_0}$ 通过以下方式作用于 V

$$\begin{aligned}
e^{tH_0}(c_1 - c_2) &= \cosh(2t)(c_1 - c_2) - \frac{1}{4}\sinh(2t)h_0, \\
e^{tH_0}(c_1 + c_2) &= c_1 + c_2, \\
e^{tH_0}h_0 &= \cosh(2t)h_0 - 4\sinh(2t)(c_1 - c_2), \\
e^{tH_0}x &= x && (x \in V_{12}, \tau(x, h_0) = 0), \\
e^{tH_0}y &= \cosh(t)y + \sinh(t)z && (y \in V_{1j}, z = -\frac{1}{2}L(h_0)y \in V_{2j}), \\
e^{tH_0}z &= \cosh(t)z + \sinh(t)y && (z \in V_{2j}, y = \frac{1}{2}L(h_0)z \in V_{1j}), \\
e^{tH_0}w &= w && (w \in \bigoplus_{3 \le i \le j \le r} V_{ij}).
\end{aligned}$$

因此，若 $g \in M$，则 g 中心化 H_0，故 $g(c_1 - c_2)$ 必须满足

$$e^{tH_0}g(c_1 - c_2) = ge^{tH_0}(c_1 - c_2) = \cosh(2t)g(c_1 - c_2) - \frac{1}{4}\sinh(2t)gh_0.$$

gh_0也有类似的表达式，因此我们得出， $u = g(c_1 - c_2)$ 和 $v = gh_0$ 是该方程组的解

$$e^{tH_0}u = \cosh(2t)u - \frac{1}{4}\sinh(2t)v, \tag{4.1}$$

$$e^{tH_0}v = -4\sinh(2t)u + \cosh(2t)v. \tag{4.2}$$

鉴于上文确定的 $A = \exp(\mathbb{R}H_0)$ 在 V 上的作用，这表明 $u,\ v \in \mathbb{R}(c_1 - c_2) + \mathbb{R}h_0$；更确切地说，对于某个 $a,\ b \in \mathbb{R}$，有 $u = a(c_1 - c_2) + bh_0$ 且 $v = 16b(c_1 - c_2) + ah_0$。特别地， $g(c_1 - c_2) = a(c_1 - c_2) + bh_0$。此外， g 保持迹型 τ 不变，该迹型在$\mathbb{R}(c_1 - c_2) + \mathbb{R}h_0$上由下式给出

$$\tau(a_1(c_1 - c_2) + b_1h_0, a_2(c_1 - c_2) + b_2h_0) = 2a_1a_2 - 32b_1b_2,$$

因此我们知道 $a^2 - 16b^2 = 1$。将 $(a,\ b) = \pm(\cosh(2s),\ 1\,4\sinh(2s))$ 写成某个 $s \in \mathbb{R}$，得到 $g(c_1 - c_2) = \pm e^{sH_0}(c_1 - c_2)$，从而

$$g^n(c_1 - c_2) = (-1)^n e^{snH_0}(c_1 - c_2) = (-1)^n \left(\cosh(2ns)(c_1 - c_2) - \frac{1}{4}\sinh(2ns)h_0\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

对于 $\{g^n(c_1-c_2)$：若要使 $n\in\mathbb{Z}\}$ 有限，显然需要 $s=0$，因此 $g(c_1-c_2)=\pm(c_1-c_2)$。现在，这也意味着，如果 $g\in M$ 稳定 c_1，那么它也稳定 c_1-c_2。反过来，如果$g\in M$稳定 c_1-c_2，那么根据上面的同一论证， $gh_0=h_0$。如引理 2.7 的证明所示，我们有 $h_0^2=-16($ $c_1+c_2)$，因此 $g(c_1+c_2)=-\frac{1}{16}g(h_0^2)=-\frac{1}{16}(gh_0)^2=-\frac{1}{16}h_0^2=c_1+c_2$，从而 g 也稳定 c_1+c_2，于是 c_1。这表明 M_c 是M中 c_1-c_2 的稳定子。

剩下的工作是构造满足 $m_0c_1=c_2$、 $m_0c_2=c_1$ 和 $m_0h_0=-h_0$的 $m_0\in M$。注意，任何具有这些性质的$m_0\in G$ 都自动包含于 M中。我们将 m_0 定义为元素 $\exp(\pi(c_1,\ 0,\ -c_1))$ 和 $\exp(\frac{\pi}{2}(0,\ H_0,\ 0))$ 的乘积（顺序任意）。后一个元素属于 G，因为 $H_0\in\mathfrak{g}$，且它将 $c_1\mapsto c_2$映射为 $c_2\mapsto c_1$，将 $h_0\mapsto h_0$映射为 $h_0\mapsto h_0$。前一个元素属于 G，并根据引理 2.5，通过 $+1$作用于 $V(c_1,\ 1)\oplus V(c_1,\ 0)$，通过 -1作用于 $V(c_1,\ _{1\,2})$。因此它将 $c_1\mapsto c_1$映射为 $c_2\mapsto c_2$，将 $h_0\mapsto -h_0$映射为 $h_0\mapsto -h_0$，结论得证。

□

将 $M/M_c\simeq\xi\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 识别后，我们对 $\xi\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 和 $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$ 定义酉主系列表示 $\pi_{\xi,\lambda}$（通过归一化抛物诱导）

$$\pi_{\xi,\lambda}=\mathrm{Ind}_P^G(\xi\otimes e^{\lambda}\otimes 1).$$

对于所有满足 $\mu\in i\mathbb{R}_+$ 的 $\lambda=\mu\alpha$，我们记作 $i\mathfrak{a}_+^*$。

为了描述 Plancherel公式的离散部分，回顾引理 2.6 中的极大环面 $\mathfrak{t}=\mathbb{R}T_0\subseteq\mathfrak{g}^{-\sigma}\cap\mathfrak{g}^{\theta}$，以及相应的根系 Σ（$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$），它用 $\beta\in\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 表示。 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的子代数 $\mathfrak{q}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^0\oplus\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta}\oplus\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{2\beta}$ 是抛物的且在 θ 下稳定。对于 $\lambda\in\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$，我们令 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ 表示 Zuckerman 的导出函子模。

$\mathcal{O}_G$ 的 Plancherel公式现在可以写为（例如参见 [28, 方程 (9.3)] 或 [33,定理 10.21]）

$$L^2(\mathcal{O}_G)\simeq\bigoplus_{\xi\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}\int_{i\mathfrak{a}_+^*}^{\oplus}\pi_{\xi,\lambda}\,d\lambda\oplus\widehat{\bigoplus_{\lambda}}A_{\mathfrak{q}}(\lambda).$$

直和取遍所有离散系列参数 λ，我们现在将其明确写出：

引理4.3. G/G_c 的离散系列参数为 $\lambda=k\beta$，其中$k+\frac{rd}{2}\in 2\mathbb{Z}_{>0}$。

证明. 由 [27, 30] 可知，离散系列参数是所有满足下列条件的 $\lambda\in\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$

- （公平范围）$\langle\lambda+\rho_{\mathfrak{t}},\gamma\rangle>0$ 对所有正根 γ，
- $\frac{\langle\mu,\gamma\rangle}{\langle\gamma,\gamma\rangle}\in\mathbb{Z}$ 对所有正根 γ成立，其中$\mu=\lambda+2\rho_{\mathfrak{t}}-2\rho_{\mathfrak{t},\mathrm{cpt}}$，其中$2\rho_{\mathfrak{t},\mathrm{cpt}}$ 是（$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$）的所有正根之和，
- e^{μ} 在$\exp(\mathfrak{t})\cap G_c$上是平凡的。

由于根据命题 2.8 (2) 有 $\rho_{\mathfrak{t}}=(\frac{rd}{2}-1)\beta$，第一个条件变为 $k+\frac{rd}{2}>1$。（此处形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 被规范化，使得 $\langle\beta,\beta\rangle>0$。）第二个条件足以保证 $\gamma=2\beta$，而它始终是一个根（与 β 本身不同）。由于 $\rho_{\mathfrak{t}}=(\frac{rd}{2}-1)\beta$ 以及 $\rho_{\mathfrak{t},\mathrm{cpt}}=(\frac{rd_+}{2}-1)\beta$，且 $d_+=\dim V_{ij}^+(i<j)$，该条件变为$k+r(d-d_+)\in 2\mathbb{Z}$。对于 $r=2$，我们得到 $k\in 2\mathbb{Z}$，由于 $d=p+q-2$ 为偶数，这等价于 $k+\frac{rd}{2}\in 2\mathbb{Z}$。对于 $r>2$，我们总有 $d=2d_+$，因此该条件为 $k+\frac{rd}{2}\in 2\mathbb{Z}$。在这些假设下，由引理 2.9，第三个条件始终成立。

□

我们首先计算出现在 $\mathcal{O}_G$的Plancherel公式中的表示 π里卡西米尔元 $C \in U(\mathfrak{g})$的特征值。

引理 4.4。 令 $C \in U(\mathfrak{g})$ 为关于不变双线性形式 B（见 (3.6)）的卡西米尔元。

(1) 对于 $\pi = \pi_{\xi,\lambda}$，满足 $\xi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 且 $\mu = \lambda(H_0) \in \mathbb{C} \simeq \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$，卡西米尔特征值为

$$d\pi(C) = -\frac{1}{32}\left(\mu + \frac{rd}{2} - 1\right)\left(\mu - \frac{rd}{2} + 1\right).$$

(2) 对于 $\pi = A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$，满足 $\lambda = k\beta$，卡西米尔特征值为

$$d\pi(C) = -\frac{1}{32}k(k + rd - 2).$$

证明。 我们通过形式 B 将 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 与 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 等同，并利用这些等同在 $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ 和 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}^*$ 上定义不变双线性形式，记作 B。由 (3.6)，这些形式满足 $B($ α α $=$ B β β $= -\frac{1}{32}$ 2 8 $\rho_{\mathfrak{a}} = \frac{rd}{2} - 1$ α $\rho_{\mathfrak{t}} = \frac{rd}{2} - 1$ β 1 ,) (,) 。

由引理 . 可得 ( ) 和 ( ) 。于是，( ) 由 [13, 命题 8.22] 得出，而 (2) 则由 [14, 推论 5.25]，得出，并利用了卡西米尔元在具有无穷小特征 λ 的不可约表示上的作用为 $B(\lambda + \rho, \lambda - \rho)$ 这一事实。 □

遗憾的是，$\pi_{\xi,\lambda}$ 对应两个不同 $\xi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的卡西米尔特征值相等，因此这些信息不足以确定 $\theta(\pi_{\xi,\lambda})$。因此，我们考察一些小 K-型的限制。为此，令 $K = G^{\theta}$ 表示 G 中与嘉当对合 θ对应的极大紧子群，并令 $K' =$ 表示 $= /\{\pm I\} \subseteq G' =$ PGL(2, $\mathbb{R}$)中的PO(2)或O(2)。

引理 4.5。 $\Pi_{\min}$ 在 $K \times K'$ 上的限制包含形如 $W_0 \boxtimes \mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ 和$W_1 \boxtimes \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$的表示，其中 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ 和 $\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ 分别表示 $K' = \mathrm{PO}(2)$的平凡特征和非平凡特征； W_{ξ} 是π_{ξ}的一个 K-型,λ ，而不是$\pi_{\xi+1,\lambda}$ ($\xi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)的 $V \simeq \mathbb{R}^{p,q}$ 型；但当$p - q \equiv 2 \pmod 4$ 时例外，此时 W_{ξ} 是$\pi_{\xi+1,\lambda}$ 的一个 K-型，而不是$\pi_{\xi,\lambda}$ ($\xi \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)。

证明。 我们首先证明 $r = 2$ 的情形，即 $\mathcal{G} =$ SO($p+1, q+1$) 与 $G =$ SO($p-1, q$)，以及 $G' \simeq$ SO(2,1) 与 $p + q$ 为偶数的情形。于是 $K =$ S(O($p-1$) $\times$ O(q)) 和 $K' \simeq$ S(O(2) $\times$ O(1)) $\simeq$ O(2)。设 $p \geq q$，则 $\Pi_{\min}$ 的 K-型由 $V_k = \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{p+1}) \boxtimes \mathcal{H}^{k+\frac{p-q}{2}}(\mathbb{R}^{q+1})$ 给出，其中 $k \in \overline{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$；这里我们用 $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)$ 表示 O(n) 或 SO(n) 在 $\mathbb{R}^n$ 上次数为 k 的调和齐次多项式空间上的不可约表示。它们满足以下经典分支律，该分支律可由 [15, 附录 7.5] 以及盖根鲍尔多项式的经典结果推出：

$$\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^n)|_{\mathrm{O}(n-1)\times\mathrm{O}(1)} \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{k} \mathcal{H}^{\ell}(\mathbb{R}^{n-1}) \boxtimes \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}^{k-\ell},$$

这里，如果 m 为偶数，则用记号 $\mathbb{C}^m_{\mathrm{sgn}}$ 表示 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$；如果 m 为奇数，则用记号 $\mathbb{C}^m_{\mathrm{sgn}}$ 表示 $\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$。将 $k=0$ 和 $k=1$ 的 K-型限制到 $K\times K'$，得到

$$V_0|_{K\times K'} \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{\frac{p-q}{2}} \left(\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes \mathcal{H}^\ell(\mathbb{R}^q)\right)\boxtimes \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}^{\frac{p-q}{2}-\ell},$$

$$V_1|_{K\times K'} \simeq \bigoplus_{\ell=0}^{\frac{p-q}{2}+1} \left[\left(\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes \mathcal{H}^\ell(\mathbb{R}^q)\right)\boxtimes \mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}^{\frac{p-q}{2}+1-\ell}\right] \oplus \left[\left(\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes \mathcal{H}^\ell(\mathbb{R}^q)\right)\boxtimes \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)\right].$$

众所周知（参见 [10, 引理 2.2 及其后的讨论]），$\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes\mathcal{H}^\ell(\mathbb{R}^q)$包含于$\pi_{\xi,\lambda}$当且仅当 $k+\ell\equiv\xi$ (模 2)。因此，我们可以选取 $W_0=\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes\mathcal{H}^{\frac{p-q}{2}}(\mathbb{R}^q)$以及 $W_1=\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes\mathcal{H}^{\frac{p-q}{2}}(\mathbb{R}^q)$。关于 $p<q$ 的论证类似，在这种情况下，我们可以选取$W_0=\mathcal{H}^{\frac{q-p}{2}}(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^q)$以及 $W_1=\mathcal{H}^{\frac{q-p}{2}+1}(\mathbb{R}^{p-1})\boxtimes\mathcal{H}^0(\mathbb{R}^q)$。 —

现在假设 $r>2$，那么 K型 $\Pi_{\min}$ 的最高权为 $k\beta$ ($k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$)，其中 β 是 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 的最高权（例如参见 [9, 定理 3.8]）。特别地，平凡表示 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ 和表示 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 都是 $\Pi_{\min}$的 K型。

将平凡表示限制到 $K\times K'$ 显然得到 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}\boxtimes\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$，而平凡表示只会出现在其 M 的诱导数据为平凡的抛物诱导表示中，也就是说，它出现在 $\pi_{0,\lambda}$ 中，而不会出现在 $\pi_{1,\lambda}$中。因此我们可以选择 $W_0=\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$。

现在我们将 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ 限制到 $K\times K'$。回顾 (1.5),

$$\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}=\{(u,T,\vartheta(u)) : u\in V_{\mathbb{C}}, T=T^*\}.$$

于是 $K'=$ PO(2) 在子空间 $\{(u,\ 0,\ -u):\ u\in V^-\}$ 上通过符号特征作用，而 $K\subseteq G\subseteq$ Aut(V) 则通过其在 V^- 上的限制作用。因此 $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}|_{K\times K'}$ 包含 $V^-_{\mathbb{C}}\boxtimes\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$。接下来要证明 $W_1=V^-_{\mathbb{C}}$ 是 $\pi_{1,\lambda}$的一个 K-型，但不是 $\pi_{0,\lambda}$的一个 K-型。根据弗罗贝尼乌斯互反律，这等价于断言 $M\cap K$ 在 $V^-_{\mathbb{C}}$ 上的表示包含 $M\cap K$ 的非平凡特征，但不包含平凡表示。显然它包含非平凡特征，因为 $\mathbb{C}h_0$，所以我们必须证明它不包含平凡表示。

注意，对于每个 $1\leq j\leq r$，元素 $m_j=\exp(\pi(c_j,\ 0,\ -c_j))$ 都包含在 G 中，并通过 $+1$作用于 $V(c_j,\ 1)\oplus V(c_j,\ 0)$，通过 -1作用于 $V(c_j,\ 1_2)$（见引理 2.5）。对于 $j\geq 3$，它与 H_0 对易，因此包含在 M 中。由于对每个 $i\neq j$，都有 $\overline{V}_{ij}\subseteq V(c_j,\ 1_2)$，可知 $V^-=\bigoplus_{1\leq i<j\leq r}V^-_{ij}$ 中任意一个平凡表示的副本都必须包含在 V^-_{12} 中。然而，在引理 4.2 的证明中构造的元素 $m_0\in M\cap K$ 通过 -1作用于 V^-_{12}。因此，V^- 不包含 $M\cap K$ 的平凡表示副本。 □

推论 4.6。*(a)* 对于 $\xi\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$和 $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$，我们有 $\theta(\pi_{\xi,\lambda})=\tau_{\xi,\nu}$，其中 $\nu=\frac{1}{2^r}\lambda(H_0)\in i\mathbb{R}$，但 $V\simeq\mathbb{R}^{p,q}$且 $p-q\equiv 2$（模 4）的情况除外，此时 $\theta(\pi_{\xi,\lambda})=\tau_{\xi+1,\nu}$。

(b) For $\lambda=k\beta$, $k\in\mathbb{Z}$, $k>-(\frac{rd}{2}-1)$, we have $\theta(A_{\mathfrak{q}}(\lambda))=\tau^{\mathrm{ds}}_{k+\frac{rd}{2}}$.

证明。我们首先证明 (b)。由定理 3.6 和引理 4.4，G' 的酉表示 $\theta(A_{\mathfrak{q}}(\lambda))$ 在 P' 上的限制不可约且无限维，并且其在 $C^\infty_c(\mathbb{R}^\times)$ 上的李代数作用与离散系列表示 $\tau^{\mathrm{ds}}{}^{k+\frac{rd}{2}}$ 的李代数作用相同。这意味着不可约酉表示 $\theta(A_{\mathfrak{q}}(\lambda))$ 和 $\tau^{\mathrm{ds}}{}^{k+\frac{rd}{2}}$ 具有相同的无穷小特征，因此由 PGL(2,$\mathbb{R}$) 的酉对偶分类可知，二者等价。 —

为证明 (a)，我们首先注意到，按照上述相同的论证， $\theta(\pi_{\xi,\lambda})$ 与 $\tau_{\eta,\nu}$ 同构，其中 $\eta \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是某个对象。我们断言 $\eta = \xi$（在 $V \simeq \mathbb{R}^{p,q}$ 且 $p-q \equiv 2$（模 4）的情形下则为 $\eta = \xi+1$）。注意，由引理 4.5， $\Pi_{\min}|_{K\times K'}$ 中存在一个 $(K \times K')$-表示 W，它是 $\pi_{\xi,\lambda} \boxtimes \tau_{\eta,\nu}$ 的一个 $(K \times K')$-型，其中取 $\eta = \xi$ （分别为 $\eta \neq \xi$），但不适用于 $\eta \neq \xi$ （分别为 $\eta = \xi$）。由于这一 K-型不会出现在离散谱中（ $G' = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ 的离散系列从不包含 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ 或 $\mathbb{C}_{\mathrm{sgn}}$ 作为 K'-型），它必定出现在连续谱的某个部分中。因此，对于 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ 的一个正测度子集，必有 $\eta = \xi$ （分别为 $\eta = \xi+1$）。为了证明这意味着对几乎所有 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ 都有 $\eta = \xi$ （分别为 $\eta = \xi+1$），我们使用解析性论证。

由 [3], ，到直积分中各表示的投影由一族交织算子给出

$$L^2(\mathcal{O})^\infty \to \pi_{\xi,\lambda} \boxtimes L^2(\mathbb{R}^\times, |\zeta|^{\frac{rd}{2}-1}\, d^\times\zeta),$$

并且由 [28] 这些交织算子可以写成（在可能对其重新归一化之后 ）

$$f \mapsto \left[(h,\xi) \mapsto \int_{\mathcal{O}_G} u_{\xi,\lambda}(x) f(\xi h^{-1}x)\, d\mu_G(x)\right], \tag{4.3}$$

其中$u_{\xi,\lambda}$ 是 $\mathcal{O}_G$ 上的一族球面分布，全纯依赖于 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$。现在设 $W \subseteq L^2(\mathcal{O})^\infty$ 为上文中的$(K \times K')$-型，并嵌入 $L^2(\mathcal{O})$。由上述论证， W 在(4.3)下的像对某个具有正测度的 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ 集合非零。这意味着上述一族交织算子不能恒等于零。但由于它全纯依赖于 λ， W 的像对几乎所有 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$都是非平凡的。这表明，对几乎所有 λ，平凡表示（相应地，符号特征）是$\tau_{\eta,\nu}$ $(\nu = \frac{1}{2}\lambda(H_0))$中的一个 K'-型。但这只有当 $\eta = \xi$ （相应地， $\eta = \xi+1$）时才可能成立。 –

□

4.3 V复

现在假设 V 是复数域，那么 $\mathcal{O}_G = G/G_c$ 是一个复对称空间，其 Plancherel公式纯粹连续。

回顾 $\mathfrak{g}^{-\sigma} \cap \mathfrak{g}^{-\theta}$ 的极大分裂环面 $\mathfrak{a} = \mathbb{R}H_0$，其中 $H_0 = [L(c_1)\ L(h_0)]$, ，并构造李代数为 $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{2\alpha}$ 的抛物子群 P。记相应的 Langlands 分解为 $P = MAN$，其中 $A = \exp\mathfrak{a}$。那么 $\mathfrak{m}$ 以一维紧环面 $\mathbb{R}(iH_0)$ 为理想。更准确地说：

引理 4.7。映射

$$M/M_c \to \{\cos(t)(c_1-c_2) + \tfrac{1}{4}\sin(t)h_0 : t \in \mathbb{R}\}, \quad mM_c \mapsto m\cdot(c_1-c_2),$$

是一个微分同胚。特别地，我们有李群的一个同构

$$\mathrm{U}(1) \to M/M_c, \quad e^{2it} \mapsto e^{itH_0}(M_c).$$

证明。证明与引理 4.2 的证明类似，因此略去。 □

对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们考虑特征标

$$\chi_k : M \to \mathbb{C}^\times, \quad \chi_k(e^{itH_0}m) = e^{2ikt} \qquad (t \in \mathbb{R}, m \in M_c).$$

对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$，我们构造主系列表示$\pi_{k,\lambda}$（归一化抛物诱导）

$$\pi_{k,\lambda} = \mathrm{Ind}_P^G(\chi_k \otimes e^\lambda \otimes 1).$$

于是，$\mathcal{O}_G$ 的 Plancherel公式为（例如参见 [33, 定理 10.21]）

$$L^2(\mathcal{O}_G) \simeq \widehat{\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}}} \int_{i\mathfrak{a}_+^*}^{\oplus} \pi_{k,\lambda}\, d\lambda,$$

其中，我们记 $i\mathfrak{a}_+^*$ 为所有满足 $\mu \in i\mathbb{R}_+$的 $\lambda = \mu\alpha$。

与引理 4.4 中一样，可以证明：

引理4.8。 *Casimir*元 $C, D \in U(\mathfrak{g})$ 在 $\pi_{k,\lambda}$ 上的作用分别为标量

$$-\frac{1}{32}(\mu^2 - \rho^2) - \frac{1}{8}k^2, \qquad and \qquad -\frac{1}{8}i\mu k,$$

其中，$\mu = \lambda(H_0)$ 和 $\rho = \rho_{\mathfrak{a}}(H_0) = rd - 2$。

根据定理 3.2，可得到如下显式的 θ 对应。

推论4.9. 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$，我们有 $\theta(\pi_{k,\lambda}) = \tau_{k,\nu}$ 其中 $\nu = \frac{1}{2}\lambda(H_0) \in i\mathbb{R}$.

证明. 将引理4.8中 C 和 D 的特征值代入定理 3.6，即可得出所述结论。

□

5 示例

我们列出Jordan 代数，以及一些相关群的李代数，还有 theta 对应中出现的结构常数 r 和 d。

5.1 V欧几里得

除 $\mathfrak{g}^\sigma$ 外，表中的所有条目都可以在 [2, 第五章3]的表中找到。关于 $\mathfrak{g}^\sigma$ 的信息，在经典情形下很容易计算出来；而在例外情形下，$\mathfrak{f}_4$ 只有两个对称子代数，且只有其中一个的维数符合要求。

V	$\mathfrak{co}(V)$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^\sigma$	r	d
$\mathrm{Sym}(r,\ \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(r,\ \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(r)$	$\mathfrak{so}(r-1)$	r	1
$\mathrm{Herm}(r,\ \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}(r,\ r)$	$\mathfrak{su}(r)$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) + \mathfrak{u}(r-1))$	r	2
$\mathrm{Herm}(r,\ \mathbb{H})$	$\mathfrak{so}^*(4r)$	$\mathfrak{sp}(r)$	$\mathfrak{sp}(1) + \mathfrak{sp}(r-1)$	r	4
$\mathbb{R}^{1,\ n-1}$	$\mathfrak{so}(2,\ n)$	$\mathfrak{so}(n-1)$	$\mathfrak{so}(n-2)$	2	$n-2$
$\mathrm{Herm}(3,\ \mathbb{O})$	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{so}(9)$	3	8

5.2 V非欧几里得

在经典情形下，这仍然是一个简单的计算。在例外情形下， $\mathfrak{f}_{4(4)}$只有一个秩一对称空间。

V	$\mathfrak{co}(V)$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^\sigma$	r	d
$M(r,\ \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(2r,\ \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(r,\ \mathbb{R})$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(1,\mathbb{R})\ +\mathfrak{gl}(r-1,\mathbb{R}))$	r	2
Skew$(2r,\ \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(2r,\ 2r)$	$\mathfrak{sp}(r,\ \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(1,\ \mathbb{R})\ +\mathfrak{sp}(r-1,\ \mathbb{R})$	r	4
$\mathbb{R}^{p,q}$	$\mathfrak{so}(p+1,\ q+1)$	$\mathfrak{so}(p-1,\ q)$	$\mathfrak{so}(p-1,\ q-1)$	2	$p+q-2$
Herm$(3,\ \mathbb{O}_s)$	$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{f}_{4(4)}$	$\mathfrak{so}(4,\ 5)$	3	8

注意，对于 $V=\mathbb{R}^{p,\ q}$ 我们假设 $p+q$ 为偶数，否则不存在李代数为$\mathfrak{co}(V)\ =\mathfrak{so}(p+1,\ q+1)$且具有极小表示的群（至少对于 $p,\ q>2$而言）。

5.3 V复

V、 $\mathfrak{co}(V)$、 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}^\sigma$ 都是相应欧几里得 V对象的复化。

V	$\mathfrak{co}(V)$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^\sigma$	r	d
对称$(r,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(r,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(r,\ \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(r-1,\ \mathbb{C})$	r	1
$M(r,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(2r,\ \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(r,\mathbb{C})$	$\mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(1,\mathbb{C})\ +\mathfrak{gl}(r-1,\mathbb{C}))$	r	2
斜$(2r,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(4r,\ \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(r,\ \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(1,\ \mathbb{C})\ +\mathfrak{sp}(r-1,\ \mathbb{C})$	r	4
$\mathbb{C}^n$	$\mathfrak{so}(n+2,\ \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(n-1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(n-2,\ \mathbb{C})$	2	$n-2$
Herm$(3,\mathbb{O})_{\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_7(\mathbb{C})$	$\mathfrak{f}_4(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(9,\mathbb{C})$	3	8

参考文献

[1] AlexanderDvorsky 与 Siddhartha Sahi，某些幂单表示的显式希尔伯特空间. *II*，Invent. Math.**138** （1999），第1期，203–224。

[2] Jacques Faraut 与 Adam Kor´anyi，对称锥上的分析，牛津数学专著丛书，TheClarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1994，牛津科学出版物。

[3] JanFrahm，实约化群分支定律中的直积分解，J. Lie Theory **32** （2022），第1期，191–196。

[4] Jan Frahm 和 Quentin Labriet，将全纯离散系列表示限制到紧对偶对，《几何与分析中的对称性》第 2 卷：《纪念小林俊行文集》，Progr.Math.，第 358 卷，Birkh¨auser/Springer，新加坡，2025 年，第 95–113 页。

[5] Wee Teck Gan、Hung Yean Loke、Annegret Paul 和 Gordan Savin，一族 *s pin(eight)* 对偶对：实群情形，载于《几何与分析中的对称性》第1卷：《纪念小林俊行文集》，Progr. Math.，第357卷，Birkh¨auser/Springer，新加坡，2025年，第269–301页。

[6] Wee Teck Gan 和 Gordan Savin，从 PGL_3 到 G_2的实提升与整体提升，Int. Math. Res. Not.（2003），第50期，2699–2724页。[7] Benedict H. Gross 和 Gordan Savin，伽罗瓦群为 G_2型的动机：一个例外的θ对应，Compositio Math. 114（1998），第2期，153–217页。[8] Sigurdur Helgason，《群与几何分析》，纯粹与应用数学，第113卷，Academic Press, Inc.，佛罗里达州奥兰多，1984年；积分几何、不变微分算子与球函数。[9] Joachim Hilgert、Toshiyuki Kobayashi 和 Jan M¨ollers，通过贝塞尔算子研究极小表示，日本数学会杂志 66（2014），第2期，349–414页。[10] Roger E. Howe 和 Eng-Chye Tan，光锥上的齐次函数：某些退化主系列表示的无穷小结构，美国数学会通报（新系列）28（1993），第1期，1–74页。[11] Jing-Song Huang、Pavle Pandˇzi´c 和 Gordan Savin，新的对偶对对应，杜克数学杂志 82（1996），第2期，447–471页。[12] Masaki Kashiwara 和 Mich`ele Vergne，关于 Segal-Shale-Weil表示与调和多项式，Invent. Math. 44（1978），第1期，1–47页。[13] Anthony W. Knapp，《半单群表示论》，普林斯顿数学丛书，第36卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1986年；基于实例的概述。[14] Anthony W. Knapp 和 David A. Vogan, Jr.，《上同调诱导与酉表示》，普林斯顿数学丛书，第45卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1995年。[15] Toshiyuki Kobayashi 和 Gen Mano，《不定正交群 $O(p,q)$ 极小表示的薛定谔模型》，美国数学会回忆录，第1000卷，罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2011年。[16] Toshiyuki Kobayashi 和 Bent Ørsted，O(p,q) 极小表示的分析。II. 分支定律，Adv. Math. 180（2003），第2期，513–550页。[17] , O(p,q) 极小表示的分析。III. $\mathbb{R}^{p-1,q-1}$上的超双曲方程，Adv. Math. 180（2003），第2期，551–595页。[18] Bertram Kostant，关于拉盖尔多项式、贝塞尔函数、汉克尔变换以及 sl(2, R) 单连通覆盖群酉对偶中的一个级数，Represent. Theory 4（2000），181–224页。[19] Jian-Shu Li，E型群中的两个约化对偶对，Manuscripta Math. 91（1996），第2期，163–177页。[20] , 关于(G_2, PGSp$_6$)的离散谱，Invent. Math. 130（1997），第1期，189–207页。

[21] ———, (SL(2) $E_{7(-25)}$)离散谱的一个描述，Asian J. Math. 3（1999），第2期，359–372。[22] Hung Yean Loke，E_8,4与E_7,4的对偶对对应，Israel J. Math. 113（1999），125–162。[23] ，四元数表示的限制，J. Funct. Anal. 172（2000），第2期，377–403。[24] ，例外李群的四元数表示，Pacific J. Math. 211（2003），第2期，341–367。[25] Hung Yean Loke与Gordan Savin，从 $G_2(\mathbb{R})$到Sp$_6(\mathbb{R})$及 $F_4(\mathbb{R})$的局部提升，Israel J. Math. 159（2007），349–371。[26] ，例外theta对应中球表示的对偶，Trans. Amer. Math. Soc. 371（2019），第9期，6359–6375。[27] 松木敏彦，半单对称空间离散系列的一个描述II，李群的表示，京都、广岛，1986，Adv. Stud. Pure Math.，第14卷，Academic Press，马萨诸塞州波士顿，1988，第531–540页。[28] Vladimir F. Molchanov，秩一半单对称空间上的调和分析，李群与李代数的表示论（富士河口湖，1990），World Sci. Publ.，新泽西州River Edge，1992，第185–207页。[29] Jan M¨ollers，共形群的极小表示与广义拉盖尔函数，博士论文，帕德博恩大学，德国，2010，可于arXiv:1009.4549获取。[30] 大岛利雄与松木敏彦，半单对称空间离散系列的一个描述，群表示与微分方程组（东京，1982），Adv. Stud. Pure Math.，第4卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1984，第331–390页。[31] Stephen Rallis与G´erard Schiffmann，某些对偶对的轨道与 θ 对应，J. Math. Kyoto Univ. 35（1995），第3期，423–493。[32] Gordan Savin，对偶对 $G_{\mathcal{J}} \times$PGL$_2$，其中 $G_{\mathcal{J}}$ 是约当代数 $\mathcal{J}$的自同构群，Invent. Math. 118（1994），第1期，141–160。[33] Erik P. van den Ban，约化对称空间的Plancherel定理，李理论，Progr. Math.，第230卷，Birkh¨auser波士顿，马萨诸塞州波士顿，2005，第1–97页。[34] Mich`ele Vergne与Hugo Rossi，半单李群全纯离散序列的解析延拓，Acta Math. 136（1976），第1-2期，1–59。
Department of Mathematics, Aarhus University, Ny Munkegade 118, 8000 Aarh

US,

Denmark电子邮件地址：frahm@math.au.dk

Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, P.O. Box 6128, Centre-ville Station, Montréal (Québec), Canada电子邮件地址: labriet.quentin@gmail.com