arXiv:2603.11449v1 [math.CV] 12 Mar 2026

(α,β)-调和函数的积分平均估计

ZHI-GANG WANG*、BRINDHA VALSON E 与 R. VIJAYAKUMAR

Abstract. 我们建立了单位圆盘上(α,β)-调和函数的精确 L^p 积分平均估计。借助相应的泊松型核与超几何函数表示，得到了这些函数及其偏导数关于边界数据的显式界。作为应用，我们导出系数估计与 Hardy 空间型结果，将经典调和函数及 α-调和函数的著名不等式推广到(α,β)-调和函数的情形。

1. Introduction

设 $\mathbb{D}=\{z:\ |z|<1\}$ 为开单位圆盘，$\mathbb{T}=\{z:\ |z|=1\}$ 为单位圆。我们用 $C^m(\Omega)$ 表示 Ω 上全体复值 m 次连续可微函数所成的空间，其中 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 且 $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$。特别地，$C(\Omega):=C^0(\Omega)$ 表示 Ω 上全体连续函数所成的空间。设 $\mathbb{Z}^-$表示负整数集。

$\mathbb{D}$中的二阶偏微分算子定义为

$$\Delta_{\alpha,\beta}=\left(1-|z|^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}+\alpha z\frac{\partial}{\partial z}+\beta\overline{z}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}-\alpha\beta,$$

其中 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$，且

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

我们研究齐次方程

$$\Delta_{\alpha,\beta}\,w=0 \tag{1.1}$$

在 $\mathbb{D}$ 中。二次连续可微函数 w 属于 $\mathbb{D}$，若其满足方程 (1.1)，则称其为 (α,β)-调和函数。若 w 是 (α,β)-调和函数，则 w 是 (β,α)-调和函数。(α,β)-调和函数构成了一类自然且重要的退化椭圆方程解，它统一了经典调和函数、 α-调和函数以及

Date：2026年3月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 30A10、30H10、30C62、30C55。*Key words and phrases.* 调和函数、超几何函数、泊松积分核、积分平均、Hardy 空间。

*通讯作者。

其他若干典范函数类。它们在位势理论、调和分析和复分析中发挥着重要作用，并与泊松核、积分均值、Hardy 空间和超几何函数密切相关。

对于 $\alpha > -1$，$(0,\alpha)$-调和函数简称为 α-调和函数。当 $\alpha > -1$ 时，$(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2})$-调和函数与实核 α-调和函数重合。特别地，(0,0)-调和函数就是经典调和函数。这一单参数族已在[5, 10, 12, 13]中得到研究。

我们考虑满足方程 (1.1) 的函数 w所对应的狄利克雷边值问题，即，

$$\begin{cases} \Delta_{\alpha,\beta} w = 0 & \text{in } \mathbb{D}, \\ w = f & \text{on } \mathbb{T}, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中边界函数 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$，且 (1.2) 中的边界条件理解为：当 $r \to 1^-$ 时，在 $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ 中有 $w_r \to f$，其中 $w_r\left(e^{i\theta}\right) = w\left(re^{i\theta}\right)$ 适用于 $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$和 $r \in [0,1)$ 。

(α,β)-调和函数的一个重要例子是函数 $u_{\alpha,\beta}$，其参数为 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，定义如下：

$$u_{\alpha,\beta}(z) = \frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}} \quad (z \in \mathbb{D}). \tag{1.3}$$

该函数在(α,β)-调和函数理论中起着关键作用，参见例如 [3, 4, 7, 8, 15]。

本文将 [1] 中 M-调和函数的 H^p 理论推广至双参数(α,β)-调和函数的情形。通过对泊松型核进行精细估计，我们建立了更一般的锐积分不等式。此外，我们研究了单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上(α,β)-调和函数的积分平均估计。借助相应的泊松型核和超几何函数表示，我们得到了这类函数的锐 L^p 积分平均估计，以及以边界数据表示的函数及其偏导数的显式界。作为应用，我们推导出系数估计和 Hardy 空间型结果，将若干经典的不等式从调和函数和 α-调和函数推广至一般的(α,β)-调和框架。

2. Preliminaries

本节首先回顾与我们的研究相关的若干基本定义和结果。

2.1. 詹森不等式。 设 $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ 为凸函数，且函数 f、p 在 $[a,b]$ 上可积，其中 $c < d$ 且 $a < b$。若对于任意 $x \in [a,b]$，$f(x) \in [c,d]$，

$p(x) \geq 0$，且 $\int_a^b p(x)dx > 0$，则

$$\varphi\left(\frac{\int_a^b f(x)p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}\right) \leq \frac{\int_a^b \varphi(f(x))p(x)dx}{\int_a^b p(x)dx}.$$

2.2. Hardy 空间。对于 $p \in (0, \infty]$，定义在 $\mathbb{D}$上的可测复值函数 f的积分平均定义为

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right)^{1/p} \quad (0 < p < \infty)$$

and

$$M_\infty(r,f) = \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq\theta\leq 2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|.$$

广义 Hardy 空间 $H_G^p(\mathbb{D})$由所有从 $\mathbb{D}$到 $\mathbb{C}$的可测函数 f组成，这些函数满足：当 $r \to 1$时，$M_p(r, f)$ 有界。经典哈代空间$H^p(\mathbb{D})$（分别为 $h^p(\mathbb{D})$）是 $H_G^p(\mathbb{D})$ 中在 $\mathbb{D}$ 上解析（分别为调和）的所有元素的集合（见 [6, 17]）。

我们用 $h_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{D})$ 表示对应于（α，β）-调和函数的 Hardy 空间。关于$h_{\alpha,\beta}^p(\mathbb{D})$ 的全面研究可见 [1]。

2.3. 勒贝格可测空间与次调和函数。对于 $p \in [1, \infty]$，用$L^p(\mathbb{T})$表示所有满足以下条件的可测函数 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 组成的空间

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| & (p = \infty). \end{cases}$$

此外，设 G 是 $\mathbb{C}$的开连通子集，且 $f : G \to \mathbb{R}$ 连续。若对每个闭圆盘 $B(a, r) \subset G$，f 都是次调和函数，

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

回顾一下，若 $\Delta f \geq 0$ 属于 G，则 f 在 G 中是次调和函数。

2.4. 高斯超几何函数。高斯超几何函数由下列级数定义

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}$$

对于 $a, b, c \in \mathbb{C}$，使得 $c \neq -1, -2, \ldots,$其中 $(a)_0 = 1$ 并且

$$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

是波赫哈默记号或上升阶乘记号。标准的伽马函数定义为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$$

当 Re(z) >0 时。众所周知， Γ 可延拓为 $\mathbb{C}$中的亚纯函数，其在点 $z=0,-1,-2,..$ 处有简单极点。

现在我们回顾关于高斯超几何函数的著名结果 [2, 第 2] 章:

$$\lim_{x\to 1} F(a,b;c;x)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (\mathrm{Re}(c-a-b)>0) \tag{2.1}$$

and

$$\frac{dF(a,b;c;x)}{dx}=\frac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;x). \tag{2.2}$$

引理1. (见 [8]) 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$，使得实部$(\alpha+\beta)>-1$. 设 $f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$。那么，$\mathbb{D}$ 中的函数 w 满足(1.2) 当且仅当它具有泊松型积分的形式

$$w(z)=K_{\alpha,\beta}[f](z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_{\alpha,\beta}\left(ze^{-it}\right) f\left(e^{it}\right)dt, \tag{2.3}$$

其中

$$K_{\alpha,\beta}(z)=c_{\alpha,\beta}\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}$$

是 $\mathbb{D}$中的(α,β)-调和泊松核，并且

$$c_{\alpha,\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \tag{2.4}$$

引理2. (参见 [2]) 设 $c>0, a\le c, b\le c$ 和 $ab\le 0$ （或 $ab\ge 0$）。则函数 $F(a,b;c;x)$ 在$(0,1)$上递减（或递增）。

引理3. (参见 [7]) 设 $u_{\alpha,\beta}(z)$ 为在(1.3)中定义的(α,β)-调和函数。则

$$\begin{aligned}\partial_z u_{\alpha,\beta}(z)=&\left(\frac{(\alpha+1)(1-\overline{z})}{(1-z)\left(1-|z|^2\right)}-\frac{\beta\overline{z}}{1-|z|^2}\right)u_{\alpha,\beta}(z)\\ =&\frac{(\alpha+1)\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+2}(1-\overline{z})^{\beta}}-\frac{\beta\overline{z}\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}} u_{\alpha,\beta}(z)=&\left(\frac{(\beta+1)(1-z)}{(1-\overline{z})(1-|z|^2)}-\frac{\alpha z}{1-|z|^2}\right)u_{\alpha,\beta}(z)\\ =&\frac{(\beta+1)\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha}(1-\overline{z})^{\beta+2}}-\frac{\alpha z\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}.\end{aligned}$$

引理4. (参见 [2]) 有

$$\int_0^{\pi}\frac{dt}{(1+r^2-2r\cos t)^v}=\pi F\left(v,v;1;r^2\right),$$

其中 $F(a,b;\ c;\ x)$ 是高斯超几何函数。

引理 5。(参见 [3]) 令 $u_{\alpha,\beta}$ 如式 (1.3) 所示，其中 α、$\beta \in \mathbb{C}$ 以及 k、l 均为非负整数。则

$$\left|\partial^k \bar{\partial}^l u_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq C_{\alpha,\beta,k,l} \frac{|u_{\alpha,\beta}(z)|}{(1-|z|^2)^{k+l}},$$

其中，$C_{\alpha,\beta,k,l}$ 是一个依赖于 α、β、k 和 l. 的常数

引理 6. (见 [14, 18]) 设 r_n 和 $s_n\,(n=0、1、2、.....)$ 为实数，并设幂级数

$$R(x)=\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n \quad and \quad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

在 $|x|<r(r>0)$ 上收敛，且对所有 n，均有 $s_n>0$ 。如果非常数序列 $\{r_n/s_n\}$ 对所有 n 都递增（递减），那么函数 $x \mapsto R(x)/S(x)$ 在$(0,\ r)$上严格递增（分别为严格递减）。

3. Integral means of (α,β)-harmonic functions

我们的第一个主要定理给出了满足狄利克雷问题(1.2)的(α，β)-调和函数的锐积分平均界，这是本节后续所有结果的基础估计。

定理 1. 假设 $\alpha,\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ 和 实部$(\alpha+\beta)>-1$。令 $w(z)=K_{\alpha,\beta}[f](z)$ 为定义在 $\mathbb{D}$ 上的一个(α,β)-调和函数，并满足条件(1.2)，其中 $f\in L^p(\mathbb{T})$ $1\leq p<\infty$。那么对于 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$，以下锐不等式成立:

$$\begin{aligned} M_p(r,w) \leq & |c_{\alpha,\beta}| \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) \\ & \times F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 $c_{\alpha,\beta}$ 由 (2.4)给出。此外，

$$M_p(r,w)\leq \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)B(\alpha,\beta)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

其中

$$B(\alpha,\beta):=\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1)}{\Gamma^2\left(\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2}+1\right)}.$$

证明。 设 $w(z)=K_{\alpha,\beta}[f](z)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的 (α,β)-调和函数。对于$z=re^{i\theta}$, 由引理1中的 (2.3) 可得

$$|w(z)|\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|c_{\alpha,\beta}|\left|\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta+1}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}}\right|\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt. \tag{3.2}$$

由 [8, 定理 6.4], 可得

$$\left|\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}\right| \leq \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-z|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}. \tag{3.3}$$

设

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|c_{\alpha,\beta}|\frac{(1-r^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}d\theta.$$

根据 [9, 定理 2。1], 可得

$$I=|c_{\alpha,\beta}|F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right).$$

此外，根据引理2和（2.1），有

$$\begin{aligned}
&|c_{\alpha,\beta}|F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)\\
&\leq \lim_{r\to 1}|c_{\alpha,\beta}|F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)\\
&=|c_{\alpha,\beta}|\frac{\Gamma\left(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2}+1\right)}.
\end{aligned}$$

对于 $1\leq p<\infty$，由詹森不等式可得

$$\begin{aligned}
&|w(z)|^p\\
&\leq\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\right)^p\left(\frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|c_{\alpha,\beta}|\frac{(1-r^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}}{I}|f(e^{it})|dt\right)^p\\
&\leq\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\right)^p\frac{I^{p-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}|c_{\alpha,\beta}|\frac{(1-r^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}|f(e^{it})|^p dt.
\end{aligned}$$

对上述不等式两边积分，并利用富比尼定理，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|w(e^{i\theta})|^p d\theta\\
&\leq\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\right)^p\\
&\quad\times\frac{I^{p-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|c_{\alpha,\beta}|\frac{(1-r^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}|f(e^{it})|^p dt\right)d\theta\\
&\leq\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\right)^p I^p\|f\|^p_{L^p(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}M_p(r,w) \leq & \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) I\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\\ = & \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)|c_{\alpha,\beta}|\\ & \times F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\\ \leq & \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) B(\alpha,\beta)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.\end{aligned}$$

为证明其锐性，假设 $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ 满足 $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>-1$且 $\mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Im}(\beta)$，$f:\ \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ 由 $f(e^{it})\equiv 1$定义。则

$$w_0(z)=c_{\alpha,\beta}F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right),$$

这表明 $w_0(z)$ 是 $(\alpha,\ \beta)$-调和的。观察到

$$\begin{aligned}&M_p(r,w_0)\\ =&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|w_0(z)|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\ =&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(|c_{\alpha,\beta}|F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\\ =&|c_{\alpha,\beta}|F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

由此可得 (3.1) 是锐的。 □

作为定理 1 的直接推论，我们得到实核 α-调和函数的积分平均，这是 Long [11, 定理 1.1] 的结果。

推论 1. 设 $w(z)$ 为实核 α-调和函数，其边界函数为 $f\in L^p(\mathbb{T})\ 1\leq p<\infty$，且 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$。则锐不等式

$$M_p(r,w)\leq c_\alpha F\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\alpha}{2};1;r^2\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

成立。

现在，我们用边界函数 f 的 L^p-范数来估计 (α,β)-调和函数 $w(z)$ 的一阶偏导数的模。

定理 2. 设 $w(z)=K_{\alpha,\beta}[f](z)$ 是一个(α,β)-调和函数，且$\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>-1$ 定义在 $\mathbb{D}$ 上，其中 $f\in L^p(\mathbb{T})\ 1\leq p<\infty$ 且 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$。那么

(i) 存在一个函数$C_{\alpha,\beta,p}(r)$ 和一个常数 $C_{\alpha,\beta,p}$ ，使得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial z}w(z)\right| &\leq \frac{C_{\alpha,\beta,p}(r)}{(1-r^2)^{1+1/p}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\\ &\leq \frac{C_{\alpha,\beta,p}}{(1-r^2)^{1+1/p}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

其中

$$C_{\alpha,\beta,p}(r)=|c_{\alpha,\beta}|(|\alpha+1|+|\beta|r)F_1$$

with

$$F_1=\left(F\left(1-\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2},1-\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2};1;r^2\right)\right)^{1/q},$$

and

$$C_{\alpha,\beta,p}=|c_{\alpha,\beta}|(|\alpha+1|+|\beta|)\left(\frac{\Gamma((\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q-1)}{\Gamma^2\left(\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}\right)}\right)^{1/q}.$$

当 α、$\beta\to 0$ 时，常数 $C_{\alpha,\beta,p}$ 是渐近最优的。

(ii) 存在一个函数 $D_{\alpha,\beta,p}(r)$ 和一个常数 $D_{\alpha,\beta,p}$ ，使得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial \overline{z}}w(z)\right| &\leq \frac{D_{\alpha,\beta,p}(r)}{(1-r^2)^{1+1/p}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\\ &\leq \frac{D_{\alpha,\beta,p}}{(1-r^2)^{1+1/p}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

其中

$$D_{\alpha,\beta,p}(r)=|c_{\alpha,\beta}|(|\beta+1|+|\alpha|r)F_1$$

and

$$D_{\alpha,\beta,p}=|c_{\alpha,\beta}|(|\beta+1|+|\alpha|)\left(\frac{\Gamma((\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q-1)}{\Gamma^2\left(\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}\right)}\right)^{1/q}.$$

当 $D_{\alpha,\beta,p}$ 时，该常数是渐近最优的。

证明。设 w 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的 (α,β)-调和函数，且 $f\in L^p(\mathbb{T})$ $1\leq p<\infty$。对 (2.3) 两边关于 z 求导，得到

$$\frac{\partial}{\partial z}w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}K_{\alpha,\beta}\left(ze^{-it}\right)f\left(e^{it}\right)dt.$$

由此可得

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}w(z)\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial}{\partial z}K_{\alpha,\beta}\left(ze^{-it}\right)\right|\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt. \tag{3.4}$$

由引理3和链式法则，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial z}K_{\alpha,\beta}\left(ze^{-it}\right)\right| \\
=&|c_{\alpha,\beta}|\left|\frac{(\alpha+1)(1-\overline{z}e^{it})}{(1-ze^{-it})(1-|z|^2)}-\frac{\beta\overline{z}e^{it}}{1-|z|^2}\right||u_{\alpha,\beta}| \\
\leq&|c_{\alpha,\beta}|\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\frac{|\alpha+1|+|\beta||\overline{z}|}{1-|z|^2}\frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}} \\
=&|c_{\alpha,\beta}|\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)(|\alpha+1|+|\beta||\overline{z}|)\frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}.
\end{aligned}$$

由 (3.4) 可知

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial}{\partial z}w(z)\right| \\
\leq&\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\int_0^{2\pi}|c_{\alpha,\beta}|(|\alpha+1|+|\beta||\overline{z}|)\frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}}{|1-ze^{-it}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt \\
=&\frac{|c_{\alpha,\beta}|}{2\pi}(|\alpha+1|+|\beta||\overline{z}|)\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\int_0^{2\pi}\frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}}{|1-ze^{-it}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt \\
\leq&|c_{\alpha,\beta}|(|\alpha+1|+|\beta||\overline{z}|)\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-|z|^2)^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta))q}}{|1-ze^{-it}|^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}}dt\right)^{1/q} \\
&\times\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

最后一个不等式由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 和 $1<p\leq\infty$ 的 H¨older 不等式得出。对于 $z=re^{i\theta}$，我们记

$$I_1:=\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta))q}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}}dt. \tag{3.5}$$

通过以下变量替换

$$e^{i(t-\theta)}=\frac{r-e^{is}}{1-re^{is}},$$

$$\left|1-re^{i(\theta-t)}\right|=\frac{1-r^2}{|1-re^{-is}|}$$

and

$$dt=\frac{1-r^2}{|1-re^{is}|^2}ds,$$

结合(2.1)与引理2和4，由(3.5)可得

$$\begin{aligned}
I_1 =& \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta))q}}{\left(\frac{1-r^2}{|1-re^{-is}|}\right)^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}} \frac{1-r^2}{|1-re^{is}|^2} ds \\
=& \int_0^{2\pi} (1-r^2)^{1-2q} |1-re^{is}|^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q-2} ds \\
=& (1-r^2)^{1-2q} \int_0^{2\pi} \left(|1-re^{is}|^2\right)^{\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}-1} ds \\
=& (1-r^2)^{1-2q} \int_0^{2\pi} (1+r^2-2r\cos s)^{\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}-1} ds \\
=& 2(1-r^2)^{1-2q} \int_0^{\pi} (1+r^2-2r\cos s)^{\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}-1} ds \\
=& 2\pi(1-r^2)^{1-2q} F\left(1-\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}, 1-\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}; 1; r^2\right) \\
\leq& 2\pi(1-r^2)^{1-2q} \frac{\Gamma((\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q-1)}{\Gamma^2\left(\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Let

$$C_{\alpha,\beta,p}(r) = |c_{\alpha,\beta}|(|\alpha+1|+|\beta|r)F_1.$$

Then

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial z} w(z)\right| \leq& |c_{\alpha,\beta}|(|\alpha+1|+|\beta|r) \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) I_1^{1/q} \left(\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|^p dt\right)^{1/p} \\
\leq& \frac{C_{\alpha,\beta,p}(r)}{(1-r^2)^{1+1/p}} \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

此外，我们有

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} w(z)\right| \leq \frac{C_{\alpha,\beta,p}}{(1-r^2)^{1+1/p}} \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

其中

$$C_{\alpha,\beta,p} = |c_{\alpha,\beta}|(|\alpha+1|+|\beta|) \left(\frac{\Gamma((\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q-1)}{\Gamma^2\left(\frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}\right)}\right)^{1/q}.$$

若 $\alpha=\beta=0$，则

$$C_{\alpha,\beta,p}(r) = \left(F\left(1-q, 1-q; 1; r^2\right)\right)^{1/q}$$

and

$$C_{0,0,p} = \left(\frac{\Gamma(2q-1)}{\Gamma^2(q)}\right)^{1/q}.$$

现在我们将证明常数 $C_{0,\ 0,\ p}$ 是最优的。对于 $0 < \rho < 1$，考虑函数

$$f_\rho\left(e^{is}\right) = \left(1-\rho^2\right)^{\frac{2}{1-p}} (1+\cos s)^{\frac{1}{p-1}} e^{is}.$$

Take

$$w(z) = K_{\alpha,\beta}[f_\rho](z).$$

采用与 [11], 中类似的方法，我们发现

$$\lim_{r=\rho\to 1} \frac{(1-r^2)^{1+1/p}|w_z|}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}} = C_{0,0,p}.$$

这意味着常数$C_{0,\ 0,\ p}$ 是最佳的。

类似地，我们有

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}} w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\overline{z}} K_{\alpha,\beta}\left(ze^{-it}\right) f\left(e^{it}\right) dt,$$

由此可得

$$\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}} w(z)\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}} K_{\alpha,\beta}\left(ze^{-it}\right)\right| \left|f\left(e^{it}\right)\right| dt.$$

此外，根据引理3和链式法则，我们得到

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\partial}{\partial\overline{z}} K_{\alpha,\beta}\left(ze^{-it}\right)\right| \\ \le& |c_{\alpha,\beta}|(|\beta+1|+|\alpha||z|)\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}}{|1-ze^{-it}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}.\end{aligned}$$

常数$D_{0,\ 0,\ p}$ 的最佳性可通过取

$$g_\rho\left(e^{is}\right) := \left(1-\rho^2\right)^{\frac{2}{1-p}} (1+\cos s)^{\frac{1}{p-1}} e^{-is}.$$

□

下面，我们将定理1和定理2的结果推广到所有高阶偏导数 $\partial^k\bar\partial^l w(z)$，其中 k为非负整数l。

定理 3。 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$，且实部$(\alpha+\beta) > -1$。令 $w(z)=K_{\alpha,\ \beta}[f](z)$为定义在 $\mathbb{D}$ 上的(α,β)-调和函数，满足(1.2)，其中 $f\in L^p(\mathbb{T})$ $1\le p<\infty$，则对于 $z=re^{i\theta}\in\mathbb{D}$，以下不等式成立：

$$\begin{aligned}&M_p\left(r,\partial^k\bar\partial^l w(z)\right)\\ \le&\frac{|c_{\alpha,\beta}|C_{\alpha,\beta,k,l}}{(1-|z|^2)^{k+l}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},\end{aligned}$$

其中 $C_{\alpha,\beta,k,l}$ 的定义同引理 5。

证明。设 $w(z)=K_{\alpha,\beta}[f](z)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的 (α,β)-调和函数。由引理 5 和 (2.3) 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\partial^k\bar{\partial}^l w(z)\right| \\
=&\left|\frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\partial^k\bar{\partial}^l u_{\alpha,\beta}(ze^{-it})\,f\left(e^{it}\right)dt\right| \\
\leq&\frac{|c_{\alpha,\beta}|}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\partial^k\bar{\partial}^l u_{\alpha,\beta}(ze^{-it})\right|\left|f\left(e^{it}\right)\right|dt \\
\leq&\frac{|c_{\alpha,\beta}|}{2\pi}\int_0^{2\pi}C_{\alpha,\beta,k,l}\,\frac{|u_{\alpha,\beta}(ze^{-it})|}{(1-|z|^2)^{k+l}}dt \\
\leq&\frac{|c_{\alpha,\beta}|}{2\pi}\frac{C_{\alpha,\beta,k,l}}{(1-|z|^2)^{k+l}}\int_0^{2\pi}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-z|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}dt.
\end{aligned}$$

Let

$$I_2:=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}d\theta.$$

由定理 1，我们得到

$$I_2=F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right).$$

对于 $1\leq p<\infty$，根据詹森不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\left|\partial^k\bar{\partial}^l w(z)\right|^p\leq&\left(\frac{|c_{\alpha,\beta}|C_{\alpha,\beta,k,l}}{2\pi}\right)^p\frac{\exp\left(\frac{p\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)I_2^{p-1}}{(1-|z|^2)^{p(k+l)}} \\
&\times\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+1}}{|1-re^{i(\theta-t)}|^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}|f(e^{it})|^p dt.
\end{aligned}$$

对上述不等式两边积分，并利用富比尼定理，我们得到

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\partial^k\bar{\partial}^l w(z)\right|^p d\theta\leq\left(\frac{|c_{\alpha,\beta}|C_{\alpha,\beta,k,l}}{(1-|z|^2)^{k+l}}\right)^p\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\right)^p I_2^p\|f\|^p_{L^p(\mathbb{T})}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&M_p\left(r,\partial^k\bar{\partial}^l w(z)\right) \\
\leq&\frac{|c_{\alpha,\beta}|C_{\alpha,\beta,k,l}}{(1-|z|^2)^{k+l}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)I_2\cdot\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
=&\frac{|c_{\alpha,\beta}|C_{\alpha,\beta,k,l}}{(1-|z|^2)^{k+l}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) \\
&\times F\left(-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2},-\frac{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}{2};1;r^2\right)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \\
\leq&\frac{|c_{\alpha,\beta}|C_{\alpha,\beta,k,l}}{(1-|z|^2)^{k+l}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)B(\alpha,\beta)\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

定理 3 的证明至此完成。 □

注 1. 引理 5 给出了典范（α，β）-调和函数 $u_{\alpha,\,\beta}(z)$ 的高阶偏导数的逐点模界，其常数仅依赖于 α，β，k，l；而定理 3 进一步推导出此类（α，β）-调和函数的这些导数的全局 L^p积分平均估计。

4. Properties of (α,β)-harmonic functions

本节中，我们将第 3 节建立的积分平均估计和导数估计应用于推导（α，β）-调和函数的其他重要性质。我们首先回顾 Klintberg 和 Olofsson [8], 给出的（α，β）-调和函数的级数展开，然后利用该展开证明一个自然的微分算子保持（α，β）-调和函数类不变。接着，我们证明当实参数 α，β 为正时，（α，β）-调和函数具有次调和性。

定理 A. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$。那么， u 是一个(α,β)-调和函数，当且仅当它具有如下形式

$$\begin{aligned} u(z) = &\sum_{m=0}^{\infty} c_m\, F(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2)\, z^m \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\, F(-\beta, m-\alpha; m+1; |z|^2)\, \bar{z}^{\,m} \end{aligned} \tag{4.1}$$

对于某个复数序列 $\{c_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$，满足

$$\limsup_{|m|\to\infty} |c_m|^{1/|m|} \le 1. \tag{4.2}$$

这里， F 表示超几何函数。此外，只要(4.2) 成立，(4.1) 中的级数在空间 $C^\infty(\mathbb{D})$ 中绝对收敛。

作用于调和函数的线性算子 $\mathcal{D}$ 定义为

$$\mathcal{D} := z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

该算子在 $\mathbb{D}$中的全星形映射和凸映射理论中发挥着重要作用。现在，我们给出与算子 $\mathcal{D}$相关的（α,β）-调和函数的一些刻画。

命题 1. 算子 $\mathcal{D}$ 保持(α,β)-调和函数。

证明。 设 u 是一个具有级数展开的（α，β）-调和函数。那么

$$\begin{aligned} u_z = &\sum_{m=0}^{\infty} c_m \left[F'(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2)\bar{z}z^m + F(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2) m z^{m-1}\right] \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\, F'(-\beta, m-\alpha; m+1; |z|^2)\bar{z}^{m+1} \end{aligned}$$

and

$$u_{\overline{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m F'\left(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2\right) z^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m}\left[F'\left(-\beta, m-\alpha; m+1; |z|^2\right) z\overline{z}^m + F\left(-\beta, m-\alpha; m+1; |z|^2\right) m\overline{z}^{m-1}\right].$$

通过直接计算，我们得到

$$\mathcal{D}u = zu_z - \overline{z}u_{\overline{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m F(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2) m z^m - \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} F(-\beta, m-\alpha; m+1; |z|^2) m\overline{z}^m.$$

此外，对于序列$\{c_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$，若 (4.2) 成立，则

$$\limsup_{|m|\to\infty} |mc_m|^{\frac{1}{|m|}} \leq 1$$

and

$$\limsup_{|m|\to\infty} |-mc_{-m}|^{\frac{1}{|m|}} \leq 1.$$

Th因此，由定理 A，我们推出 $\mathcal{D}u$ 是一个 (α, β)-调和函数。 □

命题 2. 对于 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$，(α, β)-调和函数在 $\mathbb{D}$ 上是次调和的。

证明。 由定理 A，我们知道 $F := F\left(-\alpha, -\beta; 1; |z|^2\right)$ 是一个 (α, β)-调和函数。注意

$$\Delta_{\alpha,\beta} F = 0.$$

由此可得

$$\frac{1}{4}\left(1-|z|^2\right)\Delta F = \alpha\beta F - \alpha z\frac{\partial F}{\partial z} - \beta\overline{z}\frac{\partial F}{\partial \overline{z}}. \tag{4.3}$$

设 $u = |z|^2$。则 $F_z = zF_u$ 且 $F_{\overline{z}} = \overline{z}F_u$. 现在，我们有

$$\alpha\beta F - \alpha z\frac{\partial F}{\partial z} - \beta\overline{z}\frac{\partial F}{\partial \overline{z}} = \alpha\beta F - \alpha|z|^2 F_u - \beta|z|^2 F_u = \alpha\beta F \cdot \left(1 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\frac{uF_u}{F}\right). \tag{4.4}$$

If

$$F = F(-\alpha, -\beta; 1; u) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n,$$

then

$$F_u = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^{n-1}$$

and

$$uF_u = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n u^n := \sum_{n=1}^{\infty} b_n u^n.$$

由引理 6可知，$b_n/a_n = n$是递增的，这意味着 $\frac{uF_u}{F}$在 (0,1) 上严格递增。由引理2、(2.1) 和 (2.2) 可得

$$\frac{uF_u}{F} < \lim_{u\to 1}\frac{uF_u}{F} = \frac{\alpha\beta F(-\alpha+1,-\beta+1;2;1)}{F(-\alpha,-\beta;1;1)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

注意，$F\left(-\alpha,\ -\beta;1;|z|^2\right) > 0$, $\alpha > 0$和 $\beta > 0$。由 (4.3) 和 (4.4)，我们得到

$$\frac{1}{4}\left(1-|z|^2\right)\Delta F \geq 0.$$

这表明 $F\left(-\alpha,\ -\beta;1;|z|^2\right)$在 $\mathbb{D}$ 上是次调和的。

□

定理4. 设 $w(z) = K_{\alpha,\ \beta}[f](z)$ 是一个 (α,β)-调和函数，且 实部$(\alpha+\beta)\ > -1$ 定义在 $\mathbb{D}$ 上，其中 $f \in L^p(\mathbb{T})\ 1 \leq p \leq \infty$。若 $w(z)$ 具有形式 (4.1)，则

(i) $|c_k| \leq |c_{\alpha,\beta}|\frac{(\alpha+1)_k}{k!}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},\quad |c_{-k}| \leq |c_{\alpha,\beta}|\frac{(\beta+1)_k}{k!}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$

(ii) $\frac{k!}{(\beta+1)_k}|c_k| + \frac{k!}{(\alpha+1)_k}|c_{-k}| \leq 2|c_{\alpha,\beta}|C_q\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$

特别地，当 $p=\infty$、$C_q = \frac{2}{\pi}$ 和 $\alpha = \beta = 0$ 时，我们有

$$|c_k| + |c_{-k}| \leq \frac{4}{\pi}\|f\|_\infty.$$

证明。设 $w(z)$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 上的 $(\alpha,\ \beta)$-调和函数。由（2.3），我们有　　e

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{\alpha,\beta}\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\alpha+\beta+1}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}} f\left(e^{it}\right)dt. \tag{4.5}$$

现在，通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}
w_z(0) &= \frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\alpha+1)\,e^{it}f(e^{it})\,dt,\\
w_z^{(2)}(0) &= \frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\alpha+2)(\alpha+1)\,e^{2it}f(e^{it})\,dt,\\
&\vdots\\
w_z^{(k)}(0) &= \frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\alpha+1)_k\,e^{ikt}f(e^{it})\,dt.
\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$w_{\overline{z}}^{(k)}(0) = \frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\beta+1)_k\,e^{ikt}f(e^{it})\,dt.$$

因此，对于 $k=1$，2，.....，我们知道

$$c_k = \frac{w_z^{(k)}(0)}{k!} = \frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\alpha+1)_k}{k!}\,e^{ikt}f\left(e^{it}\right)dt.$$

此外，我们发现

$$c_{-k} = \frac{w_{\overline{z}}^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(\beta+1)_k}{k!}\, e^{ikt} f\left(e^{it}\right)\, dt.$$

应用H¨older不等式，我们得到

$$|c_k| \le |c_{\alpha,\beta}|\frac{(\alpha+1)_k}{k!}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \quad \text{and} \quad |c_{-k}| \le |c_{\alpha,\beta}|\frac{(\beta+1)_k}{k!}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

设 $c_k = |c_k|e^{i\alpha_k}$、 $c_{-k} = |c_{-k}|e^{-i\beta_k}$ 和 $\theta_k = \dfrac{\alpha_k+\beta_k}{2}$。则

$$|c_k| = \frac{(\alpha+1)_k}{k!}\frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-ikt}e^{-i\alpha_k}dt$$

and

$$|c_{-k}| = \frac{(\beta+1)_k}{k!}\frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right) e^{ikt}e^{i\beta_k}dt.$$

因此，我们推出

$$\begin{aligned}
&\frac{k!}{(\alpha+1)_k}\,|c_k| + \frac{k!}{(\beta+1)_k}\,|c_{-k}| \\
=&\left|\frac{c_{\alpha,\beta}}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f\left(e^{it}\right)\left(e^{-ikt}e^{-i\alpha_k} + e^{ikt}e^{i\beta_k}\right)dt\right| \\
\le&\frac{|c_{\alpha,\beta}|}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|\,\left|e^{-ikt}e^{-i\alpha_k} + e^{ikt}e^{i\beta_k}\right|dt \\
=&\frac{|c_{\alpha,\beta}|}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|f\left(e^{it}\right)\right|\,\left|\cos k(t+\theta_k)\right|dt \\
\le&2|c_{\alpha,\beta}|\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(e^{it}\right)\right|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos k(t+\theta_k)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=&2|c_{\alpha,\beta}|C_q\,\|f\|_{L^p(\mathbb{T})},
\end{aligned}$$

其中

$$C_q = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\cos(kt)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

且 q 是 p的共轭指数，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。 □

在定理4中令 $\alpha=\beta=0$，可得到以下由 Shi、Li 和 Lian [16,定理 2.1]给出的结果。

推论2。设 $F \in L^p(\mathbb{T})$ 对于 $1 \le p \le \infty$，且 $f = \mathcal{P}[F]$ 是 $\mathbb{D}$中的调和映射。如果

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_n}\,\overline{z}^n$$

对于任意正整数 n，则

(i) $|a_n|$, $|b_n| \le \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$. 这些等式分别对函数 $F\left(e^{it}\right) = e^{int}$和 $F\left(e^{it}\right) = e^{-int}$成立。(ii)$|a_n| + |b_n| \le 2C_q\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$, 其中

$$C_q = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos(nt)|^q\, dt\right)^{1/q} \le 1 \quad and \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

特别是，当 $p = \infty$, $C_q = \frac{2}{\pi}$ 时，我们有

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{4}{\pi}\|F\|_\infty.$$

定理5. 设 $w(z) = K_{\alpha,\ \beta}[f](z)$ 是一个(α, β)-调和函数，其实部$(\alpha + \beta) > -1$ 定义在 $\mathbb{D}$ 上，且 $f \in L^p(\mathbb{T})$ $1 \le p \le \infty$。那么对所有 $z = re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(|\alpha+1| + |\beta||z|)}|w_z| + \frac{1}{(|\beta+1| + |\alpha||z|)}|w_{\overline{z}}| \\
&\quad \le \begin{cases} 2|c_{\alpha,\beta}| \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) \dfrac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}}{(1-|z|)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} & (p=1), \\ \dfrac{2|c_{\alpha,\beta}|\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{(1-|z|^2)^{1+1/p}} \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) F_2 & (1 < p \le \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

其中

$$F_2 = F\left(1 - \frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}, 1 - \frac{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}{2}; 1; r^2\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.6}$$

证明。 由引理3可得

$$\begin{aligned}
&w_z(z) \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{\alpha,\beta}\left(\frac{(\alpha+1)(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+2}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta}} - \frac{\beta z(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}}\right) f\left(e^{it}\right) dt
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&w_{\overline{z}}(z) \\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_{\alpha,\beta}\left(\frac{(\beta+1)(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-ze^{-it})^{\alpha}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+2}} - \frac{\alpha z(1-|z|^2)^{\alpha+\beta}}{(1-ze^{-it})^{\alpha+1}(1-\overline{z}e^{it})^{\beta+1}}\right) f\left(e^{it}\right) dt.
\end{aligned}$$

由 (3.3)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|\alpha+1| + |\beta||z|}|w_z| + \frac{1}{|\beta+1| + |\alpha||z|}|w_{\overline{z}}| \\
&\quad \le \frac{2|c_{\alpha,\beta}|}{\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right) \frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}}{(|1-ze^{-it}|)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}} \left|f\left(e^{it}\right)\right| dt.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

对于 $p=1$，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\alpha+1|+|\beta||z|}|w_z|+\frac{1}{|\beta+1|+|\alpha||z|}|w_{\bar{z}}|\\&\quad\leq 2|c_{\alpha,\beta}|\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\frac{(1-|z|^2)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)}}{(1-|z|)^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2}}\|f\|_{L^1(\mathbb{T})}.\end{aligned}\tag{4.8}$$

对于 $1<p\leq\infty$，结合 H¨older 不等式、(4.7) 和定理 2，我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\alpha+1|+|\beta||z|}|w_z|+\frac{1}{|\beta+1|+|\alpha||z|}|w_{\bar{z}}|\\\leq&2|c_{\alpha,\beta}|\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\\&\times\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)\right)^q\left(1-|z|^2\right)^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta))q}}{(|1-ze^{-it}|)^{(\mathrm{Re}(\alpha+\beta)+2)q}}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\=&\frac{2|c_{\alpha,\beta}|\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{(1-|z|^2)^{1+1/p}}\exp\left(\frac{\pi}{2}|\mathrm{Im}(\alpha-\beta)|\right)F_2,\end{aligned}$$

其中， F_2 由 (4.6) 给出。至此，定理5的证明完成。 □

注 2. 在定理5中令 $p=\infty$ 和 $\alpha=\beta=0$，即可得到有界调和映射的经典 Schwarz-Pick引理。

致谢。 Z.-G. Wang 获得了中华人民共和国湖南省教育厅重点项目（资助编号: 25A0668）和湖南省教育厅重点项目 下长沙市自然科学基金 （资助编号: kq2502003）的部分资助。Brindha Valson E 和 R. Vijayakumar 感谢印度科学技术部（DST）和印度政府支持卡利卡特 NIT Calicut 数学系的 FIST计划，该计划使本研究得以开展。作者感谢史庆田博士在本文撰写期间提出的宝贵意见和建议。

作者贡献。 所有作者对本工作的贡献相同。

利益冲突。 作者声明不存在利益冲突 .

数据可用性。 数据共享不适用于本文，因为在本研究过程中未生成或分析任何数据集。

References

[1] P. Ahern、J. Bruna 和 C. Cascante，单位球中广义 M-调和函数的 H^p 理论，*Indiana Univ. Math. J.* **45**(1996)，103–135。[2] G. Andrews、R. Ashkey 和 R. Roy，《特殊函数》。数学及其应用百科全书，第 71 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1999。[3] M. Arsenovi´c 和 J. Gaji´c，单位圆盘中（α，β）-调和函数的 Schwarz-Pick引理，*J. Math. Anal. Appl.* **539** (2024)，论文编号 128489，共 12 页。

[4] M. Arsenovi´c、J. Gaji´c 和 M. Mateljevi´c，单位多圆盘中分别（α,β）-调和函数的 H^p 空间， *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **89** (2025)，3–31。[5] S. Chen 和 X. Wang，满足双调和方程的单位圆盘拟共形自映射的双利普希茨特征， *Indiana Univ. Math. J.* **70** (2021)，1055–1086。[6] P. L. Duren，《 H^p 空间理论》， *Pure and Applied Mathematics*，第 38 卷，学术出版社，纽约，1970。[7] A. Khalfallah 和 M. Mhadi，单位圆盘上（α,β）-调和函数一阶偏导数的估计， *J. Inequal. Appl.* 2025，论文编号 109，共 18 页。[8] M. Klintberg 和 A. Olofsson，广义调和函数的级数展开，

Anal. ( ),

Math. Phys. **11** 2021 122, 28
论文编号 页。[9] P. Li、Q. Luo 和 S. Ponnusamy，关于（p,q）-调和函数解的性质，
J. Math. Anal. Appl. **549** (2025)，论文编号 129437，共 17 页。[10] P. Li、A. Rasila 和 Z.-G. Wang，关于 α-调和方程解的性质，*Complex Var. Elliptic Equ.* **65** (2020)，1981–1997。[11] B.-Y. Long，利用边界函数估计的 α-调和函数的一些最优不等式， *Potential Anal.* **63** (2025)，1569–1591。[12] A. Olofsson，单位圆盘中一族泊松型核的微分算子，

J. ( )， –

Anal. Math. **123** 2014 227 249,
[13] A. Olofsson 和 J. Wittsten，标准加权拉普拉斯算子的泊松积分， *J. Math. Soc. Japan* **65** (2013)，447–486。[14] S. Ponnusamy 和 M. Vuorinen，高斯超几何函数的单叶性与凸性，
Rocky Mountain J. Math. **31** (2001)，327–353。[15] J. Qiao、J. Chang 和 A. Rasila，关于（ α β 2512 04379, , ）-
2025
调和函数的性质，arXiv: . .[16] Q. Shi、X. Li 和 X. Lian，具有给定勒贝格空间边界函数的调和映射的施瓦茨引理与朗道定理估计，

Comput. Methods ( ),

Funct. Theory 2026 10 1007 40315 025 00600 8
https://doi.org/ . /s - - - .[17] Z.-G. Wang、X.-Y. Wang、A. Rasila 和 J.-L. Qiu，关于 Pavlovi´c 涉及调和拟共形映射的一个问题，arXiv:2405.19852，2024。[18] Z.-H. Yang、Y.-M. Chu 和 M.-K. Wang，幂级数之比的单调性判据及其应用， *J. Math. Anal. Appl.* **428** (2015)，587–604。

Zhi-Gang Wang

School of Mathematics and Statistics Hunan First Normal University Chang- , , , , sha 410205 Hunan P. R. China.
Email address: sjyzhigangwang@hnfnu.edu.cnBrindha Valson E

Department of Mathematics National Institute of Technology Calicut Calicut- , , , 673 601 India.
Email address: brindhavalson@gmail.comR. Vijayakumar

Department of Mathematics National Institute of Technology Calicut Calicut- , , , 673 601 India.
Email address: mathesvijay8@gmail.com