arXiv:2603.11450v1 [cond-mat.stat-mech] 12 Mar 2026

非厄米 A 型模型场论中的时间不可逆性与熵产生

Matthias Carosi[1,2], **Ot Garc´es**[3,4], **Adri`a Garc´es**[3,4], **Demian Levis**[3,4]

[1]德国加兴市詹姆斯-弗兰克街，邮编 D-85748，慕尼黑工业大学物理系 T70[2]中国科学院大学亚太理论物理国际中心（ICTP-AP），中国北京 100190[3]巴塞罗那大学凝聚态物理系集体行动计算与理解实验室（CUCA），Mart´ı i Franqu`es 1，西班牙巴塞罗那 E08028[4]巴塞罗那大学复杂系统研究所（UBICS），Mart´ı i Franqu`es 1，西班牙巴塞罗那 E08028

电子邮件：matthias.carosi@tum.de

2026年3月13日

摘要。

我们建立了一个系统性框架，用于量化由一般非厄米项驱动动力学的标量 A 型模型场论中的不可逆性。借助随机路径积分形式，我们进行可控的小噪声展开，从而计算熵产生率（EPR）和涨落-耗散定理（FDT）违背。我们证明，局部熵产生率完全由线性化朗之万方程的反厄米部分决定。在稳态附近，非厄米分量会对涨落-耗散定理违背产生线性修正，并对熵产生率作出二次贡献。为展示该方法的适用性，我们分析了描述粗粒化尺度下非互易伊辛模型的最简非厄米扩展——金兹堡-朗道 ψ^4 理论，并得到了局部熵产生率的显式表达式，表明其在非均匀态中局域于界面。我们的结果为非厄米标量场论中的时间反演对称性破缺提供了一般性刻画。

目录

1 引言 2 2 非厄米模型A动力学 4 3 通过涨落-耗散定理违背量化不可逆性 5

3.1 响应场形式主义与生成泛函 .6 3.2 作为平衡对称性的时间反演对称性 .7 3.3 围绕定态解的小噪声展开 .7 3.4 关于熵产生的原田-佐佐关系 .11

4 《熵》 由朗之万方程得到的产生率 1 3

4.1 作为一般模态展开的局部熵产生率 .13 4.2 均匀态的局部熵产生率 .16 4.3 在非互易 Model A 中的应用 .16 4.4 穿过畴壁的局部熵产生率 .17

5 结论 21

1. 引言

时间反演对称性（TRS）是平衡态的定义性特征。与平衡态热浴耦合的系统，其随机动力学满足细致平衡：轨迹概率在时间反演下保持不变，从而最终同时约束稳态分布与动力学关联。然而，我们所观测到的大尺度现象通常发生在非平衡条件下，其自发演化明显呈现出时间不可逆性 [1]。

在种类繁多的非平衡系统中，例如活性物质系统，能量会在微观自由度层面局部注入 [2]。虽然在微观粒子层面，这类系统中的时间反演对称性破缺是显而易见的，但要在更大的集体尺度上识别其特征仍远非易事。事实上，不可逆的微观动力学可能产生涌现的宏观行为，表现得与平衡态现象学相似；具有破坏细致平衡的微观动力学的系统，在粗粒化尺度上可能完全看不出任何明确的“非平衡性”迹象 [3, 4]。在活性物质中，难以识别时间反演对称性破缺的大尺度特征，一个突出的例子就是运动诱导相分离（MIPS） [5, 6]。这种现象源于排除体积相互作用与持续运动（或持续噪声）之间的竞争，从而触发相分离，其过程很像吸引性被动粒子系统冷却至气液凝结温度以下 [7]。要最终区分活性相与被动相，就必须深入考察这些凝聚体的结构与动力学

分离 [8–12]。这揭示了一个更广泛的根本性问题：如何在宏观尺度上系统地量化不可逆性?

文献中已经发展出两种互补的方法或度量。其中一种依赖于在轨迹层面定义的（信息论）熵产生率（EPR） [13–18]。尽管近来已有许多研究尝试，系统地计算相互作用多体系统中的此类熵产生率，在计算、分析和实验方面仍面临技术挑战 [2, 19–26]。第二种方法则采用涨落耗散定理（FDT）的违背 [27]。事实证明，这种方法在缓慢弛豫系统的研究中非常有效[28, 29], ，而且可以通过实验实现 [30]。这两种度量——涨落耗散定理违背和熵产生率——可通过原田–佐佐关系 [31], 联系起来，从而为时间反演对称性破缺提供统一的表征。

一种在一般情形下量化多体系统不可逆性的实用（简化）方法，是分析粗粒化场描述 [32, 33]。尽管迄今已研究过多种非平衡动力学场论，我们在此将讨论重点放在标量场上 [34–43]。在这一背景下，Nardini 等人 [35] 将熵产生率的定义推广到场论，并通过场论的随机轨迹对其进行数值计算，首先旨在描述运动诱导相分离（即所谓的活性模型 B）。他们推导出一种 Harada-Sasa 类型的关系，并表明熵产生率可以在局部进行分解，重点关注运动诱导相分离所形成的界面。随后，Li 和 Cates [37] 提出了一种系统方法，在假设稳态附近的线性涨落算符具有厄米性的前提下，通过小噪声展开计算标量朗之万场论中的熵产生率。

近年来，非厄米动力学场论也出现在非互易相互作用的研究背景中 [44]。特别是，Suchanek、Kroy 和 Loos 扩展了 Li 和 Cates 的方法，并研究了非互易 Cahn–Hilliard 动力学（具有非对称耦合的 B 型模型 [45, 46]）中的熵产生率，凸显了宇称-时间对称性破缺和不可逆介观涨落的作用 [39, 40]。与此同时，Johnsrud 和 Golestanian [42, 43] 考虑了一大类模型（包括守恒和非守恒序参量动力学），并使用随机路径积分形式，通过对耦合进行微扰展开来计算熵产生率以及涨落耗散定理的违反程度。非厄米场论也在物理学的多个领域引起了广泛关注，其研究范围甚至超出了统计系统。它们自然地出现在耗散系统或开放量子系统的有效描述中，其中非厄米生成元出现在 Lindblad 动力学中 [47, 48], ；此外，作为传统厄米模型的扩展，它们也已在相对论量子场论和宇宙学中得到研究 [49, 50]。

在本研究中，我们建立了一个系统性框架，用于量化标量场论中具有非守恒动力学（模型A）时，一般非厄米项对时间反演对称性破缺的影响。借助路径积分形式，我们在生成泛函层面进行了可控的小噪声展开，从而提供了

对确定性稳态附近涨落的完整统计描述。在这一方法中，可以在线性化理论中精确计算涨落耗散定理违背，并通过广义原田–佐佐关系将其与熵产生率联系起来。我们将 Li 和 Cates 的方法 [4]推广至非厄米算子，证明局部熵产生率仅由线性化朗之万方程的反厄米分量决定。特别是，我们表明，在稳态确定性解附近，反厄米部分会产生涨落耗散定理违背的线性修正，同时对熵产生率作出二次贡献。为阐释这些结果，我们考察了金兹堡–朗道理论的一个最简非厄米扩展 ψ^4 ，其灵感来自对单组分非互易自旋系统的粗粒化描述 [51]。对于这一模型，我们得到了均匀态和非均匀态下局部熵产生率的解析表达式。计算表明，熵产生在对称相中消失，而在非均匀态中局域于界面，这与此前关于活性场理论的数值观察一致 [35, 41]。

本文的组织结构如下。在第2节中，我们介绍一种具有模型A动力学和非厄米力的通用标量场论。在第3 节中，我们建立场动力学的路径积分形式，以求得关联函数与响应函数。随后，我们围绕场方程的稳态均匀解进行小噪声展开，并表明只要存在非厄米力，就会出现涨落耗散定理违背。我们用涨落耗散差来量化涨落耗散定理违背，并通过 Harada-Sasa 关系将其与熵产生率联系起来。接着，在第4节中，我们直接从模型的朗之万运动方程推导局部熵产生率的一般表达式。我们将这一形式应用于自推进非厄米力的情形，例如具有视锥相互作用的自旋模型，并分别推导均匀相和非均匀相中局部熵产生率的显式表达式。后者的计算表明，局部熵产生率集中在有序区域之间的边界处。最后，在第5 节中，我们总结研究结果，全面讨论其影响，并展望未来的研究方向。

2. 非厄米 Model A 动力学

我们考虑一个由单个实标量场 ψ 描述的系统，该系统在 [32] 个空间维度 d 中遵循模型A（非守恒序参量）动力学。该场满足过阻尼朗之万方程

$$\dot{\psi}(\mathbf{x},t) = \Gamma F[\psi](\mathbf{x},t) + \sqrt{2\gamma}\xi(\mathbf{x},t)\,, \tag{1}$$

其中，点表示对时间求导， Γ是一个常数弛豫率或迁移率，$F[\psi]$ 是确定性力， γ 表征噪声强度， ξ 是均值为0、噪声核为 K的高斯噪声，即

$$\langle \xi(\mathbf{x},t)\rangle = 0, \quad \langle \xi(\mathbf{x},t)\xi(\mathbf{x}',t')\rangle = K(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t'). \tag{2}$$

我们还假设弛豫率 Γ 与噪声振幅 γ 遵循通常的爱因斯坦关系 $\Gamma = \beta\gamma$。我们主要关注高斯白噪声。不过，以下分析将针对一般的噪声核展开，白噪声假设仅在后续阶段才会引入。

本研究旨在量化力中的非厄米贡献 $F[\psi]$ 如何驱使系统偏离热平衡。例如，对包含非互易相互作用的微观理论进行粗粒化时，可能会产生非厄米项；参考文献 [51] 研究的非互易伊辛模型便是如此。在该模型中，伊辛自旋之间存在依赖视锥的相互作用，这种相互作用在连续介质中会导致自平流项，并在确定性力中贡献如下形式的项 $\Gamma F[\psi] \supset \lambda\psi(\mathbf{v} \cdot \nabla)\psi$。其中，$\mathbf{v}$ 是由微观模型确定的视觉锥向量。经过厄米共轭后，梯度变号，这意味着自平流项是反厄米的。多组分模型中也可能出现非厄米性，例如非互易卡恩-希利亚德模型 [39,43,45,46]。不失一般性，力可拆分为保守分量和非保守分量，即

$$F[\psi](\mathbf{x},t) = -\frac{\delta H[\psi]}{\delta\psi(\mathbf{x},t)} + \mathscr{F}[\psi](\mathbf{x},t). \tag{3}$$

保守力项由一个金兹堡–朗道型泛函 $H[\psi]$ 的泛函导数给出。非保守力项 $\mathscr{F}[\psi]$ 汇集了所有无法写成自由能泛函泛函导数的其余项。正如文献 [35, 39, 40, 43] 中所述，正是这些驱动力无法写成任何“自由能”函数的泛函导数这一事实，导致了打破时间反演对称性（TRS）的稳态。在本文中，我们将研究非厄米非保守力项 $\mathscr{F}$ 对系统非平衡动力学的影响。

3. 通过涨落耗散定理违背量化不可逆性

我们量化时间反演对称性破缺的首种方法，是考察涨落耗散定理的违背。为此，我们采用 Martin-Siggia-Rose-Janssen-De Dominicis（MSRJD）形式主义（又称响应场形式主义），利用路径积分构造关联函数与响应函数的生成泛函。[52,53], 这种形式主义尤其适用于计算响应函数。随后，我们围绕均匀定常场构型进行小噪声 [54,55] 或半经典展开；这些构型对应于方程（1）的零噪声稳态解。正如我们将看到的，这使我们能够解析地确定非厄米力如何破坏平衡态涨落耗散定理。

3.1. 响应场形式主义与生成泛函

采用标准场论方法，[33], 在 MSRDJ 形式主义中，与朗之万方程（1）相对应的生成泛函为

$$Z[J,\widetilde{J}] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}[\psi,\widetilde{\psi}]\,\exp\left[-\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}] + \int_{\mathbf{x},t}\Big(\widetilde{J}(\mathbf{x},t)\psi(\mathbf{x},t) + J(\mathbf{x},t)i\widetilde{\psi}(\mathbf{x},t)\Big)\right], \quad (4)$$

其中使用了简写记号 $\int_{\mathbf{x}\,t} = \int d^d\mathbf{x}\,dt$ 表示对整个空间和时间的积分。两个外部源 J 和 $\widetilde{J}$ 分别与场 ψ 和响应场 $\widetilde{\psi}$ 耦合。归一化因子 $\mathcal{N}$ 的选取满足 $Z[0,0]=1$。动力学作用量为

$$\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}] = \int_{\mathbf{x},t} i\widetilde{\psi}(\mathbf{x},t)\Big(\dot{\psi}(\mathbf{x},t) - \Gamma F[\psi](\mathbf{x},t)\Big) + \int_{\mathbf{x},t}\int_{\mathbf{x}',t'} \gamma\widetilde{\psi}(\mathbf{x},t)\,K(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t')\,\widetilde{\psi}(\mathbf{x}',t')\,. \quad (5)$$

从现在起，我们采用向量分析中的简洁简写记号 $v_1^T v_2 = \int_{\mathbf{x}\,t} v_1(\mathbf{x}\ t)v_2(\mathbf{x}\ t)$ 和 $v_1^T\,A\,v_2 = \int_{\mathbf{x}\,t}\int_{\mathbf{x}',t'} v_1(\mathbf{x}\ t)\,A(\mathbf{x},\mathbf{x}';\,t,t')\ v_2(\mathbf{x}',t')$，其中空间—时间积分均隐含不写。二次型的转置相应地定义为交换空间—时间自变量 $Q^T(\mathbf{x},\mathbf{x}';\,t,t') = Q(\mathbf{x}',\mathbf{x};\,t',t)$。

任意可观测量的期望值 $\langle\mathcal{O}[\psi]\rangle$ 可通过对缓冲区内的整个 ψ 进行平均得到，即

$$\langle\mathcal{O}[\psi,\widetilde{\psi}]\rangle = \mathcal{N}\int \mathcal{D}[\psi,\widetilde{\psi}]\,\mathcal{O}[\psi,\widetilde{\psi}]\,e^{-\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}]}\,. \quad (6)$$

因此，由 $C(\mathbf{x},\mathbf{x}';\,t,t') = \langle\psi(\mathbf{x}\ t)\psi(\mathbf{x}',t')\rangle$ 和 $G(\mathbf{x},\mathbf{x}';\,t,t') = \langle\psi(\mathbf{x}\ t)i\widetilde{\psi}(\mathbf{x}',t')\rangle$ 定义的两点关联函数与响应函数可直接从生成泛函计算得到：

$$C(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') = \left.\frac{\delta^2 Z[J,\widetilde{J}]}{\delta\widetilde{J}(\mathbf{x},t)\delta\widetilde{J}(\mathbf{x}',t')}\right|_{\substack{J=0\\ \widetilde{J}=0}}, \quad (7a)$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') = \left.\frac{\delta^2 Z[J,\widetilde{J}]}{\delta\widetilde{J}(\mathbf{x},t)\delta J(\mathbf{x}',t')}\right|_{\substack{J=0\\ \widetilde{J}=0}}. \quad (7b)$$

对响应场进行积分消去 ψ 由式（4）可得到 Onsager-Machlup路径积分 [56]。本文选择采用MSRDJ形式主义，因为它能更直接地获取响应函数。此外，在这一框架下，我们无需引入噪声核 K的逆，从而可以更直接地推广到非平凡噪声关联的情形。

3.2. 时间反演对称性作为一种平衡对称性

平衡动力学可通过动力学作用量 $\mathscr{A}$ 在时间反演 [57], 下的不变性来理解；时间反演对场和响应场的作用定义如下：

$$\psi(\mathbf{x},t) \xrightarrow{\mathcal{T}} \psi(\mathbf{x},-t)\,, \tag{8a}$$

$$i\widetilde{\psi}(\mathbf{x},t) \xrightarrow{\mathcal{T}} i\widetilde{\psi}(\mathbf{x},-t) - \gamma^{-1}\dot{\psi}(\mathbf{x},-t)\,. \tag{8b}$$

~在 $\mathcal{T}$下，作用量 $\mathscr{A}[\psi,\psi]$ 因此变换为

$$\mathscr{A}[\mathcal{T}\psi,\mathcal{T}\widetilde{\psi}] = \mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}] + \beta\int_{\mathbf{x},t}\dot{\psi}(\mathbf{x},t)\left(-\frac{\delta H[\psi]}{\delta\psi(\mathbf{x},t)} + \mathscr{F}[\psi](\mathbf{x},t)\right). \tag{9}$$

由式（9）可知，在时间反演操作 $\mathcal{T}$下，作用量的变化由两部分构成：一部分与保守力 $-\delta_\psi H[\psi]$ 有关，另一部分与非保守驱动 $\mathscr{F}[\psi]$有关。当不存在非保守力时，即 $\mathscr{F}[\psi]=0$，作用量的变化仅为一个边界项 $\int_{\mathbf{x}\,t}\dot{\psi}\,\delta_\psi H = \int_t dH/dt$。在稳态条件下，这一项恒为零，作用量 $\mathscr{A}$ 具有 $\mathcal{T}$-~不变性。对于任意可观测量 $\mathcal{O}[\psi,\psi]$，这种对称性意味着沃德-高桥恒等式

$$\left\langle \mathcal{O}[\mathcal{T}\psi,\mathcal{T}\widetilde{\psi}]\right\rangle = \left\langle \mathcal{O}[\psi,\widetilde{\psi}]\right\rangle. \tag{10}$$

沃德-高桥恒等式涵盖了~~关联函数与响应函数 [57]之间全部的平衡关系。例如，取 $\mathcal{O}[\psi,\psi] = \psi(\mathbf{x}\ t)i\psi(\mathbf{x}',t')$，重新标记 $t\leftrightarrow t'$ 并利用时间平移不变性后，可得著名的涨落耗散定理

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t') - G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t'-t) + \gamma^{-1}\partial_t C(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t') = 0. \tag{11}$$

当存在非保守力 $\mathscr{F}[\psi]$ 时，即使在长时间极限下，作用量也不再具有 $\mathcal{T}$ 不变性。因此，稳态下动力学作用量的不变性破缺促使我们定义两点函数 $\Delta(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t')$，即涨落耗散（FD）差，用以量化对涨落耗散定理的违反，具体为

$$\Delta(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') \equiv G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t') - G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t'-t) + \gamma^{-1}\partial_t C(\mathbf{x},\mathbf{x}';t-t')\,. \tag{12}$$

偏离平衡态的一个标志是 $\Delta\neq 0$。

3.3. 围绕定态解的小噪声展开

可以通过小噪声展开，以完整而细致的方式对涨落耗散定理的违背进行解析量化。这是可行的，因为小噪声展开实际上将理论线性化，从而能够直接求得关联传播子和响应传播子

即围绕零噪声解的涨落的最低阶结果，并由此推导出涨落耗散差 Δ 的显式表达式。

为了将动力学作用量 $\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}]$ 化为正则形式，我们对响应场 $i\widetilde{\psi}\mapsto i\widetilde{\psi}/\gamma$ 进行重新缩放。这有助于对方程（4）中的生成泛函进行恰当的鞍点计算。我们还对外部源 $J\to\gamma J$进行重新缩放，使噪声振幅 γ 仅作为作用量的前因子出现。请注意，这要求更新响应函数 G 关于生成泛函导数的定义（7b）。重新缩放后，生成泛函 $Z[J,\widetilde{J}]$ 写为

$$Z[J,\widetilde{J}] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}[\psi,\widetilde{\psi}]\,\exp\left(-\frac{1}{\gamma}\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}] + \widetilde{J}^T\psi + J^T i\widetilde{\psi}\right), \tag{13}$$

我们将重新缩放的雅可比吸收到无关紧要的归一化常数中$\mathcal{N}$。在小噪声极限下，当外部源为零时，泛函积分（13）$\sim J=J=0$ 由作用量的鞍点主导，即

$$\frac{\delta\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}]}{\delta i\widetilde{\psi}^T} = \dot{\psi} - \Gamma F[\psi] - \underline{K}\, i\widetilde{\psi} = 0\,, \tag{14a}$$

$$\frac{\delta\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}]}{\delta\psi} = -i\dot{\widetilde{\psi}}^T - i\widetilde{\psi}^T\underline{A} = 0\,, \tag{14b}$$

其中引入了涨落算符

$$A(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') = \Gamma\frac{\delta F[\psi](\mathbf{x},t)}{\delta\psi(\mathbf{x}',t')}\,. \tag{15}$$

鞍点方程 $\{\psi_0, i\widetilde{\psi}_0\}$ 的解为 $i\widetilde{\psi}_0 = 0$ 和$\dot{\psi}_0 = \Gamma F[\psi_0]$, 它们构成了动力学的确定性 解。为了求得鞍点附近涨落的最低阶修正，我们将场和响应场分解为背景与涨落

$$\psi = \psi_0 + \sqrt{\gamma}\psi_1\,, \tag{16a}$$

$$\widetilde{\psi} = \sqrt{\gamma}\widetilde{\psi}_1\,. \tag{16b}$$

我们还对外部源进行重新缩放J， $J\mapsto J/\sqrt{\gamma}$， $J/\sqrt{\gamma}$ 以保持一致[58,59],，同时牢记 C和 G 关于 $Z[J,J]$ 的导数表达式必须相应更新。作用量 $\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}]$ 从式（5）展开至涨落修正的二次阶后为

$$\frac{1}{\gamma}\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}] = \frac{1}{\gamma}\mathscr{A}[\psi_0,0] - i\widetilde{\psi}_1^T\,\underline{K}\,i\widetilde{\psi}_1 + i\widetilde{\psi}_1^T\,\underline{L}\,\psi_1 + \mathcal{O}(\gamma)\,, \tag{17}$$

其中我们引入了算符 L，它实现了线性化朗之方方程，即

$$L(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') \equiv \left.\frac{\delta^2\mathscr{A}[\psi,\widetilde{\psi}]}{\delta i\widetilde{\psi}(\mathbf{x},t)\delta\psi(\mathbf{x}',t')}\right|_{\substack{\psi=\psi_0\\ \widetilde{\psi}=\widetilde{\psi}_0}} = \delta(t-t')\delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\partial_t - A_0(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t')\,. \tag{18}$$

我们利用式（ ψ_0 中的定义，将背景中的涨落算符表示为15），

$$A_0(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') \equiv A(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t')\Big|_{\psi=\psi_0} . \tag{19}$$

实际上，该步骤计算的是运动方程的确定性解的微扰修正，见 Eq.（1）。事实上，可以验证， $\mathcal{O}$（1）项在~对 $\gamma^{-1}\mathscr{A}[\psi,\psi]$ 的展开中给出了先前文献 [37]所采用的朗之万方法中最低阶涨落修正的动力学描述。

鞍点展开中的生成泛函为

$$Z[J,\widetilde{J}] = \mathcal{N}e^{\widetilde{J}^T\psi_0/\sqrt{\gamma}}\int \mathcal{D}[\psi_1,\widetilde{\psi}_1]\exp\Big(-i\widetilde{\psi}_1^T\,\underline{L}\,\psi_1 + i\widetilde{\psi}_1^T\,\underline{K}\,i\widetilde{\psi}_1 + \widetilde{J}^T\psi_1 + J^T i\widetilde{\psi}_1\Big)\Big[1+\mathcal{O}(\gamma)\Big], \tag{20}$$

在将展开截断至涨落的二次阶之后。由此得到的~生成泛函可通过高斯积分直接求值，先对 ψ_1 积分，再对 ψ_1积分。我们得到

$$Z[J,\widetilde{J}] = \exp\Big\{\widetilde{J}^T\psi_0/\sqrt{\gamma} + \widetilde{J}^T\underline{L}^{-1}J + \widetilde{J}^T\underline{L}^{-1}\underline{K}(\underline{L}^{-1})^T\widetilde{J}\Big\}\Big[1+\mathcal{O}(\gamma)\Big]. \tag{21}$$

由此，我们可以直接求得关联和响应，所用公式为 Eqs.（7a）和（7b）：

$$\underline{C} = \gamma\frac{\delta^2 Z[J,\widetilde{J}]}{\delta\widetilde{J}(\mathbf{x},t)\delta\widetilde{J}(\mathbf{x}',t')}\Big|_{\substack{J=0\\ \widetilde{J}=0}} = \psi_0\psi_0^T + 2\gamma\,\underline{L}^{-1}\underline{K}(\underline{L}^{-1})^T, \tag{22a}$$

$$\underline{G} = \frac{\delta^2 Z[J,\widetilde{J}]}{\delta\widetilde{J}(\mathbf{x},t)\delta J(\mathbf{x}',t')}\Big|_{\substack{J=0\\ \widetilde{J}=0}} = \underline{L}^{-1}. \tag{22b}$$

注意，方程（7a）和（7b）已根据外部源的重新标度进行了修改。项$\psi_0\psi_0^T$是关联中的非连通贡献，并且当 ψ_0 依赖于时间时，它给出涨落耗散差的最低阶贡献。由于我们关注的是从系统的非平衡演化中分离出随机贡献，因此从现在起我们始终假设 ψ_0 是确定性运动方程（运动方程）的定态解，即 $F[\psi_0]=0$。这样， C 的非连通部分在涨落耗散定理层面不起作用，因为关联的时间导数 C 才会出现在方程（12）中涨落耗散差的定义里。因此，在下文中我们将略去这一部分，并假设已重新定义关联函数 C ，使其成为两点函数 $\langle\psi\psi\rangle$的连通分量。我们回顾一下，连通关联函数由施温格泛函生成

$$W[J,\widetilde{J}] = \log Z[J,\widetilde{J}] = \widetilde{J}^T\psi_0/\sqrt{\gamma} + \widetilde{J}^T\underline{L}^{-1}J + \widetilde{J}^T\underline{L}^{-1}\underline{K}(\underline{L}^{-1})^T\widetilde{J} + \mathcal{O}(\gamma), \tag{23}$$

通过对其施加泛函导数，我们可以从中恢复两点函数的连通分量

$$\underline{C} = \gamma \frac{\delta^2 W[J,\widetilde{J}]}{\delta\widetilde{J}(\mathbf{x},t)\delta\widetilde{J}(\mathbf{x}',t')}\bigg|_{\substack{J=0\\ \widetilde{J}=0}} = 2\gamma\, \underline{L}^{-1}\underline{K}(\underline{L}^{-1})^T\,, \tag{24a}$$

$$\underline{G} = \frac{\delta^2 W[J,\widetilde{J}]}{\delta\widetilde{J}(\mathbf{x},t)\delta J(\mathbf{x}',t')}\bigg|_{\substack{J=0\\ \widetilde{J}=0}} = \underline{L}^{-1}\,. \tag{24b}$$

在噪声振幅 γ 的高阶处理中，直接使用 $\widetilde{W}[J,J]$ 会更加方便，从而避免手动减去非连通贡献。不过，这与我们的讨论无关。

接下来，我们考虑高斯白噪声这一特例，此时噪声核等于单位矩阵 $K = \mathbb{1}$。此外，我们现在聚焦于均匀背景，即ψ_0 既不依赖于时间，也不依赖于空间坐标。在本文后面，我们还将提取更一般的非均匀定常背景下的结果。由于 ψ_0是常数，时间平移不变性和空间平移不变性均得以保持，因此在频率空间和动量空间中处理更为方便。我们定义

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') = \int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}e^{-i\omega(t-t')-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\widehat{G}(\omega,\mathbf{q})\,, \tag{25}$$

其中，$\widehat{G}$ 是 G （在空间和时间上）的傅里叶变换；对于关联 C 和涨落耗散差 Δ，也类似地定义。傅里叶空间中的线性化朗之万算子是对角的，其形式为

$$\widehat{L}(\omega,\mathbf{q}) = -i\omega + \lambda_{\mathbf{q}}\,, \tag{26}$$

其中，$\lambda_{\mathbf{q}}$ 是动量空间中涨落算符 A_0 的特征值。需要特别指出的是，我们允许存在复数特征值，因为我们旨在考虑底层朗之万方程为非厄米的可能性。鉴于位置空间中的算子 A_0 是实数且为偶函数，其特征值满足以下性质

$$\lambda_{-\mathbf{q}} = \lambda_{\mathbf{q}}^*\,,\ \mathrm{Re}\,\lambda_{-\mathbf{q}} = \mathrm{Re}\,\lambda_{\mathbf{q}}\,,\ \mathrm{Im}\,\lambda_{-\mathbf{q}} = -\mathrm{Im}\,\lambda_{\mathbf{q}}\,. \tag{27}$$

在这一基底下，响应和关联函数呈现出简洁的形式

$$\widehat{G}(\omega,\mathbf{q}) = \frac{1}{-i\omega+\lambda_{\mathbf{q}}}\,, \tag{28a}$$

$$\widehat{C}(\omega,\mathbf{q}) = 2\gamma\,\left|\widehat{G}(\omega,\mathbf{q})\right|^2\,, \tag{28b}$$

而涨落耗散差可以改写为

$$\widehat{\Delta}(\omega,\mathbf{q}) = \widehat{G}(\omega,\mathbf{q}) - \widehat{G}(-\omega,\mathbf{q}) - \gamma^{-1}i\omega\,\widehat{C}(\omega,\mathbf{q}) = \frac{4\omega}{\omega^2+\lambda_{\mathbf{q}}^2}\frac{\mathrm{Im}\,\lambda_{\mathbf{q}}}{i\omega+\lambda_{\mathbf{q}}^*}\,. \tag{29}$$

由此立即可知，当且仅当特征值 $\lambda_{\mathbf{q}}$ 具有非零虚部时，涨落耗散定理才会被违反；等价地，涨落算符 A_0 是非厄米的。这表现为响应 $G(\omega, \mathbf{q})$ 不具有宇称偶性，即

$$\Delta \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\,\lambda_{\mathbf{q}} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{G}(\omega, \mathbf{q}) \neq \widehat{G}(\omega, -\mathbf{q})\,. \tag{30}$$

我们可以将 $\epsilon_{\mathbf{q}}$ 和 $\zeta_{\mathbf{q}}$ 定义为特征值 $\lambda_{\mathbf{q}}$ 的实部与虚部，并对小 $\zeta_{\mathbf{q}}$ 进行展开，以求得小非厄米性下的最低阶行为。我们发现

$$\widehat{\Delta}(\omega, \mathbf{q}) = \frac{4\omega}{\omega^2 + \epsilon_{\mathbf{q}}^2}\left[\frac{\zeta_{\mathbf{q}}}{i\omega + \epsilon_{\mathbf{q}}} - \frac{i\zeta_{\mathbf{q}}^2}{\omega^2 + \epsilon_{\mathbf{q}}^2} + \mathcal{O}(\zeta_{\mathbf{q}}^3)\right]. \tag{31}$$

综上所述，我们发现朗之万方程中、因而涨落算符 A_0中的非厄米项会导致非平衡动力学，并违反涨落耗散定理。对于均匀定态，这一点可用式（29）加以量化，且涨落耗散差与非厄米性 $\zeta_{\mathbf{q}}$ 在最低阶呈线性关系，如式（31）。

涨落耗散定理的违反是非平衡的标志，可通过直接测量关联函数和响应函数从模拟与实验中加以提取。另一方面，熵产生是衡量系统非平衡动力学的一种便利的热力学与信息论度量。下文中，我们借助Harada-Sasa关系，用涨落耗散差来表示熵产生，并利用式（29）在小非厄米性极限下对其进行计算。在围绕动力学确定性部分的均匀解所作的这一小噪声展开中，只有具有复特征值的算子（力）对涨落耗散差有贡献；具有实谱的非保守力在这一层级并不违反涨落耗散定理。

3.4. 熵产生的 *Harada-Sasa* 关系

熵产生是随机动力学 [35,37]时间不可逆性的信息论度量。它定义为轨迹在正向和反向时间演化下的概率之比。在 MSRDJ路径积分形式中，场空间 $\{\psi, \widetilde{\psi}\}$ 中一条轨迹的概率为

$$\mathcal{P}[\psi, \widetilde{\psi}] \propto\ e^{-\mathscr{A}[\psi, \widetilde{\psi}]}\,, \tag{32}$$

在归一化意义下。熵产生随后自然地得到

$$\begin{aligned} S[\psi] \equiv\ \log \frac{\mathcal{P}[\psi, \widetilde{\psi}]}{\mathcal{P}[\mathcal{T}\psi, \mathcal{T}\widetilde{\psi}]} &= \mathscr{A}[\mathcal{T}\psi, \mathcal{T}\widetilde{\psi}] - \mathscr{A}[\psi, \widetilde{\psi}] \\ &= \beta \int_{\mathbf{x},t} \dot{\psi}(\mathbf{x}, t)\, F[\psi](\mathbf{x}, t)\,, \end{aligned} \tag{33}$$

直接由式（9）得出。或者，也可以使用式（$\mathscr{A}[\psi, \psi]$ 13）中的正则形式，并相应地通过调整 $S[\psi]$ 运算的定义来定义 $\mathcal{T}$。由此得到的 $S[\psi]$ 表达式相同。

~正如我们所预料的，熵产生不依赖于响应场 ψ，因此可以将其积分消去。这意味着，在定义良好的所有情况下，我们都可以等价地使用昂萨格–马赫卢普泛函 [60]。与其研究全局熵产生，不如研究平均局域熵产生率（LEPR） σ_ψ，这对于非均匀背景尤其有用。它由以下关系定义：

$$\langle S[\psi]\rangle = \int_{\mathbf{x},t} \sigma_\psi(\mathbf{x},t)\,, \tag{34}$$

并利用公式（33），

$$\sigma_\psi(\mathbf{x},t) = \beta\big\langle \dot\psi(\mathbf{x},t)\, F[\psi](\mathbf{x},t)\big\rangle\,. \tag{35}$$

我们的目标是得到一种 Harada-Sasa 类型的关系，即一个用涨落耗散差 Δ [31] 表示平均局域熵产生率 σ_ψ，进而表示积分熵产生 $\langle S[\psi]\rangle$ 的方程。为此，考虑恒等式 [61]

$$0 = \int \mathcal{D}[\psi,\widetilde\psi]\frac{\delta}{\delta i\widetilde\psi(\mathbf{x}',t')}\Big(\mathcal{O}[\psi,\widetilde\psi]e^{-\mathscr{A}[\psi,\widetilde\psi]}\Big) = \left\langle \frac{\delta\mathcal{O}[\psi,\widetilde\psi]}{\delta i\widetilde\psi(\mathbf{x}',t')}\right\rangle - \left\langle \mathcal{O}[\psi,\widetilde\psi]\frac{\delta\mathscr{A}[\psi,\widetilde\psi]}{\delta i\widetilde\psi(\mathbf{x}',t')}\right\rangle, \tag{36}$$

对于任意可观测量 $\mathcal{O}[\psi,\widetilde\psi]$，该式成立是因为概率密度 $e^{-\mathscr{A}[\psi,\widetilde\psi]}$~ 衰减得足够快，不会产生边界项。接着，取 $\mathcal{O}[\psi,\psi] = \psi(\mathbf{x}\ t)$ 并结合 $K = \mathbb{1}$，可得

$$\begin{aligned} 0 &= \Big\langle \psi(\mathbf{x},t)\Big(\dot\psi(\mathbf{x}',t') - \Gamma F[\psi](\mathbf{x}',t') - 2\gamma i\widetilde\psi(\mathbf{x}',t')\Big)\Big\rangle \\ &= \partial_{t'}C(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') - 2\gamma\, G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') - \big\langle\psi(\mathbf{x},t)\Gamma F[\psi](\mathbf{x}',t')\big\rangle\,. \end{aligned} \tag{37}$$

注意，我们使用的是作用量 $\mathscr{A}$，其定义见公式（5），此时尚未对~响应场 ψ进行重标度。现在，将其除以 2γ 并通过$t\leftrightarrow t'$对右侧进行反对称化，可得以下恒等式

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') - \frac{1}{2}\gamma^{-1}\partial_{t'}C(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') = -\frac{1}{2}\,\beta\,\big\langle\psi(\mathbf{x},t)F[\psi](\mathbf{x}',t')\big\rangle, \tag{38a}$$

$$G(\mathbf{x},\mathbf{x}';t',t) - \frac{1}{2}\gamma^{-1}\partial_{t}C(\mathbf{x},\mathbf{x}';t',t) = -\frac{1}{2}\,\beta\big\langle\psi(\mathbf{x},t')F[\psi](\mathbf{x}',t)\big\rangle. \tag{38b}$$

取这些恒等式的空间对角部分并将它们相减，我们得到

$$\Delta(\mathbf{x},\mathbf{x};t,t') = \frac{\beta}{2}\big\langle\psi(\mathbf{x},t')F[\psi](\mathbf{x},t) - \psi(\mathbf{x},t)F[\psi](\mathbf{x},t')\big\rangle. \tag{39}$$

现在，我们对这个方程的两边关于 t求导。此时，我们回顾到，在任何稳态背景中，二点函数具有时间平移不变性，并且只依赖于 $t-t'$。因此，作用 ∂_t 等价于作用 $-\partial_{t'}$，从而

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2}\partial_t\big\langle\psi(\mathbf{x},t')F[\psi](\mathbf{x},t) - \psi(\mathbf{x},t)F[\psi](\mathbf{x},t')\big\rangle &= -\frac{\beta}{2}\big\langle\dot\psi(\mathbf{x},t')F[\psi](\mathbf{x},t) + \dot\psi(\mathbf{x},t)F[\psi](\mathbf{x},t')\big\rangle \\ &\xrightarrow{t'\to t} -\beta\big\langle\dot\psi(\mathbf{x},t)F[\psi](\mathbf{x},t)\big\rangle \\ &\overset{(35)}{=} -\sigma_\psi(\mathbf{x},t)\,. \end{aligned} \tag{40}$$

最终，我们得到如下原田-佐佐关系，它用涨落耗散差表示平均局域熵产生率，

$$\sigma_\psi(\mathbf{x},t) = -\operatorname{diag}_{\mathbf{x},t}\,\partial_t\Delta(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t')\,, \tag{41}$$

二次型的对角线为 $\operatorname{diag}_{\mathbf{x},t}Q(\mathbf{x},\mathbf{x}';\,t,t') = Q(\mathbf{x},\mathbf{x};\,t,t)$。然后通过对空间和时间坐标积分，并利用式（34），即可得到总熵产生：

$$\langle S[\psi]\rangle = -\mathrm{tr}\,\partial_t\Delta(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t'). \tag{42}$$

在动量空间中，将式（29）代入式（41），即可快速计算平均局域熵产生率，结果为

$$\sigma_\psi = \int_{\omega,\mathbf{q}} i\omega\widehat{\Delta}(\omega,\mathbf{q}) = \int_{\omega,\mathbf{q}} \frac{4\omega^2\zeta_{\mathbf{q}}^2}{|\omega^2+\lambda_{\mathbf{q}}^2|^2} = \int_{\mathbf{q}} \frac{\zeta_{\mathbf{q}}^2}{\epsilon_{\mathbf{q}}} + \mathcal{O}(\gamma), \tag{43}$$

其中，在第二步中我们利用了被积函数在$\omega \to -\omega$ 和$\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$ 下只有偶函数部分会保留下来这一点。我们发现，平均局域熵产生率关于 $\zeta_{\mathbf{q}}$ 呈二次关系，与之相反，涨落耗散差 Δ 在一阶时便非零。因此，当镜像翻转参考系，使$\mathbf{q} \to -\mathbf{q}$时，涨落耗散差会改变符号，而平均局域熵产生率仍保持为正。这符合我们的直觉：无论参考系如何，平均熵都必须始终增加。需要强调的是，这并不妨碍个别实现沿着熵递减的轨迹演化。最后要指出，我们的结果是小噪声展开的最低阶近似，因此只有在噪声振幅 γ 很小、且满足白噪声和稳态背景假设的极限下才可信。在这一框架下，朗之万方程中的非保守但厄米力项在 γ 的这一阶不会对熵产生作出贡献。

4. 由朗之万方程得到的熵产生率

本节中，我们沿用 Li 和 Cates 在参考文献 [37] 中提出的方法，直接从系统的朗之万描述中提取 LEPR。这种方法的优点是，我们可以得到一个适用于任意稳态（包括非均匀稳态）的 LEPR 通用公式。我们通过围绕由非厄米相互作用项导致的相边界解析计算 LEPR，展示了该公式的强大之处。

4.1. 将局部熵产生率表示为一般模态展开

我们从朗之万方程（1）出发，将场 ψ 分解为稳态背景 ψ_0 和小涨落 ψ_1，如方程（16a）所示。我们得到涨落的线性化朗之万方程，其形式为

$$\dot{\psi}_1 = \underline{A}_0\psi_1 + \sqrt{2}\xi\,, \tag{44}$$

其中，稳态背景中的涨落算符 A_0 已在方程（19）中定义。等价地，我们也可以写成 $L\psi_1 = \sqrt{2}\xi$，其中线性化朗之万算子 L 定义于方程（18）中。在稳态背景下，涨落算符的时间依赖是平凡的。为了便于处理，我们通过定义算符 $\mathcal{A}_0$，利用以下关系将其时间依赖因子提取出来

$$A_0(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') = \delta(t-t')\mathcal{A}_0(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,. \tag{45}$$

接下来，我们引入协方差矩阵 $\mathcal{C}$，它是涨落关联函数的等时极限，即

$$\gamma\,\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{x}') \equiv \gamma\langle\psi_1(\mathbf{x},t)\psi_1(\mathbf{x}',t)\rangle = C(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t)\,, \tag{46}$$

这里我们提取出一个因子 γ，使得 $\mathcal{C}$ 的阶为 $\mathcal{O}(1)$。我们进一步假设噪声在时间上是 δ关联的，因此可以写成

$$K(\mathbf{x},\mathbf{x}';t,t') = \delta(t-t')\mathcal{K}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\,, \tag{47}$$

其中 $\mathcal{K}$ 是噪声核的空间分量。对于这些依赖空间的量，我们可以使用与上一节相同的矩阵表示法，并从乘积中去掉时间积分。

根据文献 [37]，，平均局域熵产生率完全可以用涨落算符、协方差矩阵和噪声核表示，具体为

$$\sigma_\psi(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}_{\mathbf{x}}\left[\kappa^{-1}\underline{\mathcal{F}}_a\,\underline{\mathcal{C}}\,\underline{\mathcal{F}}_a^\dagger(\kappa^{-1})^\dagger\right]\,, \tag{48}$$

其中 † 表示厄米共轭。因子 κ 是空间噪声核的“平方根”，即 $\kappa\kappa^\dagger = \mathcal{K}$，有时也称为乔列斯基因子。我们引入了动力学的“反对称”部分

$$\underline{\mathcal{F}}_a = \underline{\mathcal{A}}_0 - \underline{\mathcal{K}}\,\underline{\mathcal{C}}^{-1}\,. \tag{49}$$

方程（48）最初由 Li 和 Cates 在参考文献 [37], 中推导得出，感兴趣的读者可在那里找到详细推导。他们依赖以下一系列假设。首先，他们研究的是满足方程（1）中朗之万动力学的单一实标量场。其次，噪声如方程（47）所示，在时间上呈 δ 相关。最后，他们研究的是稳态构型附近的小噪声展开中的动力学，如方程（16a）所定义。于是，熵产生可写成两部分之和：一部分是由 外力所致的外部贡献，该外力包含于 $\mathcal{A}_0$ 中；另一部分是内部贡献，它与场轨迹上构型的概率密度随时间的变化有关，在此用 $\mathcal{K}\mathcal{C}^{-1}$ 表示。

应用他们的公式，Li 和 Cates 得出结论：当噪声核 $\mathcal{K}$ 与涨落算符 $\mathcal{A}_0$ 对易时，平均局域熵产生率在 γ 的最低阶上为零。特别是，这要求噪声核是非平凡的。正如我们将要看到的，只有当涨落算符为厄米算符时，情况才是如此。接下来，我们将通过推导一个

在存在小的非厄米项时平均局域熵产生率的闭式表达式来证明这一点。

根据方程（48）计算平均 LEPR，需要协方差矩阵 $\mathcal{C}$，该矩阵可通过求解李雅普诺夫方程 [54,55]

$$\underline{\mathcal{A}}_0\,\underline{\mathcal{C}} + \underline{\mathcal{C}}\,\underline{\mathcal{A}}_0^{\dagger} = 2\underline{\mathcal{K}}\,, \tag{50}$$

我们将涨落算符拆分为厄米部分和反厄米部分

$$\underline{\mathcal{A}}_0 = \underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{H}} + \underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{AH}}\,, \tag{51}$$

其中 $(\underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{H}})^{\dagger} = \underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{H}}$ 以及 $(\underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{AH}})^{\dagger} = -\underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{AH}}$。请注意，这里我们不再采用 Li 和 Cates 的工作假设；他们假定涨落算符是厄米的，且其特征值为实数。在这些假设下，只有当 γ 与 $\mathcal{A}_0$ 和 $\mathcal{K}$ 不对易时，他们才能在 γ 的最低阶得到非零的平均 LEPR。为单独考察非厄米部分的贡献，我们反而假设 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{A}_0^{\mathrm{H}}$ 对易。于是，在反厄米部分较小的极限下，取其最低阶 $\mathcal{A}_0^{\mathrm{AH}}$，方程（50）的解为

$$\underline{\mathcal{C}} = \left(\underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\underline{\mathcal{K}}\,. \tag{52}$$

将其代入方程（50）并忽略反厄米部分，即可验证这是一个合适的解。可得 $\mathcal{A}_0^{\mathrm{H}}\mathcal{C} + \mathcal{C}\,\mathcal{A}_0^{\mathrm{H}} = 2\mathcal{K} + (\mathcal{A}_0^{\mathrm{H}})^{-1}[\mathcal{K}, \mathcal{A}_0^{\mathrm{H}}]$。现在可以看出，当 $\mathcal{K}$ 与 $\mathcal{A}_0^{\mathrm{H}}$ 对易时，试探解（52）确实是一个合适的解，也就是说，若 $[\mathcal{K}, \mathcal{A}_0^{\mathrm{H}}] = \mathcal{K}\mathcal{A}_0^{\mathrm{H}} - \mathcal{A}_0^{\mathrm{H}}\mathcal{K} = 0$。

我们可能会想要为完整李雅普诺夫方程的解采用类似的试探解，即写作 $\mathcal{C} = \mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{K}$。严格来说，尽管这确实满足方程（50），但所得的协方差矩阵并非厄米矩阵，除非 $\mathcal{A}_0$ 是厄米矩阵。然而，根据定义（46），协方差矩阵必须是厄米矩阵，这意味着上述试探解不具备所需的性质。

此时，我们可以计算平均局域熵产生率。我们取方程（52）中得到的协方差矩阵，并将其代入方程（48）。此时，动力学的反对称部分可写成一种更直观的形式

$$\mathcal{F}_a = \underline{\mathcal{A}}_0 - \underline{\mathcal{K}}\,\underline{\mathcal{C}}^{-1} = \underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{AH}}\,, \tag{53}$$

平均局域熵产生率为

$$\sigma_{\psi}(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}_{\mathbf{x}}\left[\kappa^{-1}\underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{AH}}\underline{\mathcal{C}}\left(\underline{\mathcal{A}}_0^{\mathrm{AH}}\right)^{\dagger}(\kappa^{-1})^{\dagger}\right]. \tag{54}$$

因此，我们验证了上一节的结果，并发现平均局域熵产生率与朗之万方程的非厄米性呈二次关系。此外，方程（54）将 Li 和 Cates 在文献 [37] 中的先前结果推广到了非厄米系统。特别是，我们证明，即便噪声核和涨落算符可以同时对角化，平均局域熵产生率也不一定为零。

在本节其余部分，我们将公式（54）应用于非互易 Model A 中均匀定态和非均匀定态这两种情况。为简单起见，我们采用高斯白噪声，即 $\mathcal{K} = \mathbb{1}$，并且函数 κ 可以取为函数空间中的单位向量。

4.2. 均匀态的局部熵产生率

在第3.4节中，我们推导了均匀态下的平均局域熵产生率。我们从涨落耗散差 Δ 出发，并利用原田-佐佐关系（41），得到了公式（43）。这里，我们从局部熵产生率公式（54）出发，说明在相同假设下可以得到同样的表达式。

在均匀相中，我们可以在动量空间中进行计算，此时涨落算符和协方差矩阵都变为对角形式。沿用第2节引入的记号，涨落算符写作

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(\epsilon_{\mathbf{q}} + i\zeta_{\mathbf{q}}\right) , \tag{55}$$

其中 $\epsilon_{\mathbf{q}}$ 和 $\zeta_{\mathbf{q}}$ 均为实数。请记住，我们考虑的是非厄米性 $\zeta_{\mathbf{q}}$较小的极限。协方差矩阵可直接求得为

$$\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{q}}} . \tag{56}$$

综上，利用公式（54），我们可以计算均匀相中的平均局域熵产生率，得到

$$\sigma_\psi = \int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{\zeta_{\mathbf{q}}^2}{\epsilon_{\mathbf{q}}} + \text{higher order terms} , \tag{57}$$

这与公式（43）完全一致。

4.3. 对非互易 *Model A* 的应用

现在我们聚焦于非互易 Model A，这是一种非厄米扩展的 ψ^4理论，最初由文献 [51] 提出，用作具有视锥相互作用的伊辛模型的粗粒化描述。其控制朗之万方程的确定性部分为

$$\Gamma F[\psi] = -r\psi + \mu\nabla^2\psi - u\psi^3 + 2\lambda\psi(\mathbf{v}\cdot\nabla)\psi , \tag{58}$$

其中， r 是约化温度， μ 是弹性常数， u 和 λ 分别是四次耦合和非互易耦合。非互易项取决于视觉锥向量$\mathbf{v}$，该向量由系统的微观细节决定。在高温下， r 为正，确定性运动方程唯一的均匀定态解是基态 $\psi_0 = 0$。随着温度降低， r 变为负值，系统经历从无序相到有序相的连续相变。场获得非零期望值，确定性运动方程有两个稳定的均匀解，即$\psi_0 = \pm m = \pm\sqrt{-r/u}$，其中 m 是磁化强度。涨落算符为

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \left[-\nabla^2 + r + 3u\psi_0^2 + 2\lambda\psi_0(\mathbf{v}\cdot\nabla)\right] , \tag{59}$$

在傅里叶空间中变为

$$\widehat{\mathcal{A}}_0(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2 + r + 3u\psi_0^2 + 2i\lambda\psi_0 q_{\mathrm{v}} . \tag{60}$$

这里，我们定义了沿视觉锥向量方向的动量分量，即 $q_{\mathrm{v}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}$。由式（60）我们可以直接确定涨落算符特征值的实部和虚部

$$\epsilon_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^2 + r + 3u\psi_0^2 \,, \tag{61a}$$

$$\zeta_{\mathbf{q}} = 2\lambda\psi_0 q_{\mathrm{v}} \,. \tag{61b}$$

利用式（57），我们发现均匀 ψ_0 相中的平均局域熵产生率为 b e

$$\sigma_\psi = \int_{\mathbf{q}} \frac{4\lambda^2\psi_0^2 q_{\mathrm{v}}^2}{\mathbf{q}^2 + r + 3u\psi_0^2} + \mathcal{O}(\gamma) \,. \tag{62}$$

关于我们的结果，有几点值得立即注意。首先，局域熵产生率明确为非负值，这与热力学第二定律一致。具体而言，它与非互易耦合 λ的平方成正比，这意味着在不存在非互易性时，系统处于平衡态。正如文献 [39] 对非互易 Cahn-Hilliard 模型的研究中所观察到的那样，局域熵产生率在形式上是发散的，因为当 $q \to \infty$时，被积函数收敛到一个有限值，这意味着需要引入紫外调节器。最后，局域熵产生率与磁化强度 ψ_0 成正比，因此在无序相中为零。

有趣的是，我们的公式（54）并不局限于均匀相，而是可以用于计算确定性部分动力学的任意定态解附近的局域熵产生率。在下一节中，我们将利用它计算非互易 Model A 中畴壁背景下的局域熵产生率。

4.4. 畴壁上的局部熵产生率

当系统温度低于临界温度时，会出现额外的定态解：畴壁。畴壁是一种仅依赖于一个空间坐标的非均匀场构型。我们将这个坐标记为 x_1；通过旋转参考系，我们总能做到这一点。该坐标可能与视觉锥向量 $\mathbf{v}$ 平行，也可能不平行。接着，我们定义 $m^2 = -r/u$, $2\alpha^2 = -r/\mu$ 和 $\delta = 2\lambda\sqrt{2/(\mu u)}$，并定义重标度场 $f(\alpha x_1) = \psi_0(x_1)/m$，使定态方程的确定性部分变为

$$f''(\xi) + 2f(\xi)\left(1 - f(\xi)^2\right) + \mathrm{v}_1\delta f(\xi) f'(\xi) = 0 \,, \tag{63}$$

其中 v_1 是 x_1 参考系中视觉锥向量$\mathbf{v}$ 的分量；若$\mathbf{v}$ 与 x_1 轴正交（即平行于畴壁），则该分量为零。方程（63）有解 f（ξ） $= \pm 1$，对应两个简并的有序态，但也存在非恒定解。目前，我们先假设视觉锥向量平行于畴壁，即 $\mathrm{v}_1 = 0$。我们可以去掉方程（63）中的最后一项，此时方程变为著名的扭结方程，其解为

$$f_{\mathrm{K/AK}}(\xi) = \pm \tanh(\xi - \xi_0) \,, \tag{64}$$

其中 ξ_0 是任意积分常数，可视为畴壁的位置，并可通过平移参考系将其设为零。标签 K 和 AK 分别表示扭结和反扭结。扭结背景中的涨落算符可分解为厄米部分和反厄米部分，分别为

$$\mathcal{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\left[-\mu\nabla^2 - 2\mu\alpha^2(1-\tanh^2\alpha x_1)\right], \tag{65a}$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{AH}}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \delta^{(d)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, 2\lambda m \tanh\alpha x_1\, \partial_{\mathbf{v}}, \tag{65b}$$

其中定义了 $\partial_{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\cdot\nabla$，即沿视觉锥向量方向的导数。我们的目标是通过式（54）计算平均局域熵产生率。首先，我们来求协方差矩阵。非厄米部分的最低阶结果由式（52）给出，可通过求解以下关系得到

$$\underline{\mathcal{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}}\,\underline{\mathcal{C}} = \mathbb{1}. \tag{66}$$

换言之，协方差矩阵是算符 $\mathcal{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{H}}$ 的格林函数。尽管难以计算，这个格林函数仍可解析求得。文献 [62] 给出了其显式解：

$$\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \int \frac{d^{d-1}\mathbf{q}_\parallel}{(2\pi)^{d-1}} e^{-i\mathbf{q}_\parallel\cdot(\mathbf{x}_\parallel-\mathbf{x}'_\parallel)} F_{q_\parallel}(w,w'), \tag{67}$$

其中 $(w,\ w') = (\tanh\alpha x_1,\ \tanh\alpha x_1')$，$\mathbf{q}_\parallel$ 是平行于畴壁且垂直于 x_1 的动量，而

$$\begin{aligned} F_{q_\parallel}(w,w') = \frac{1}{\alpha\mu}\frac{1}{2\nu}\Bigg[\theta(w-w')\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{1+w'}{1-w'}\right)^{\frac{\nu}{2}}\times \\ \times\left(1-3\frac{(1-w)(1+\nu+w)}{(1+\nu)(2+\nu)}\right)\left(1-3\frac{(1-w')(1-\nu+w')}{(1-\nu)(2-\nu)}\right) \\ +(w\leftrightarrow w')\Bigg], \end{aligned} \tag{68}$$

定义了 $\nu = \sqrt{4+q_\parallel^2/\alpha^2}$。注意，该格林函数在 $\nu = 2$ 处有奇点，即 $q_\parallel^2 = 0$。这表明存在平移零模，其产生是因为畴壁自发破缺了平移对称性。扭结背景下的式（54）为

$$\begin{aligned} \sigma_\psi(\mathbf{x}) &= \text{对角}_{\mathbf{x}}\left[\mathcal{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{AH}}\mathcal{C}\left(\mathcal{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{AH}}\right)^\dagger\right] = 4\lambda^2m^2w^2\left[\partial_{\mathbf{v}}^{(x)}\partial^{(x')}{}_{\mathbf{v}}\,\mathcal{C}(\mathbf{x},\mathbf{x}')\right] \\ &= 4\lambda^2m^2w^2\int\frac{d^{d-1}\mathbf{q}_\parallel\,(\,)_{d-1}}{2\pi}\,q_{\mathrm{v}}^2\,F_{q_\parallel}(w,\ w), \end{aligned} \tag{69}$$

其中，函数 $F_{q_\parallel}$ 在重合极限下呈现出紧凑的形式

$$F_{q_\parallel}(w,w) = \frac{1}{\alpha\mu}\frac{1}{2\nu}\left[1+3(1-w^2)\left(\frac{w^2}{\nu^2-1}+\frac{1-w^2}{\nu^2-4}\right)\right]. \tag{70}$$

由于系统在与 x_1 正交的 $d-1$ 方向上旋转对称，我们可以在积分中用 $\mathbf{q}_\parallel^2/(d-1)$ 替换 q_v^2。

注意，公式（69）中的平均局域熵产生率包含了场为常数且处于有序相的大区域所产生的贡献。为了单独提取相边界带来的贡献，方便起见，我们减去均匀相的平均局域熵产生率。对于后者，我们选择计算 $\psi_0 = \pm m$ 的情形并不重要，因为熵产生在 $\psi_0 \to -\psi_0$ 下具有对称性。尽管我们已经有了均匀相中平均局域熵产生率的表达式（见公式（62）），但还需要一个与畴壁情形采用相同基底的表达式。按照上述相同步骤，我们得到一个类似的结果，但对应于不同的格林函数；在重合极限下，该格林函数为

$$F_{q_\parallel}^{\mathrm{hom}}(w,w) = \frac{1}{\alpha\mu}\frac{1}{2\nu}\,. \tag{71}$$

然后，我们可以计算完全由相边界存在所导致的平均局域熵产生率。引入无量纲变量 $p^2 = q_\parallel^2/\alpha^2$，可写为

$$\sigma_\psi(\mathbf{x}) = \int_0^\infty dp\ \sigma_p(\tanh\alpha x_1)\,, \tag{72}$$

其中

$$\frac{\sigma_p(w)}{\sigma^*} = \frac{4}{(4\pi)^{\frac{d-1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}\frac{p^d}{d-1}\frac{3w^2(1-w^2)}{\sqrt{4+p^2}}\left(\frac{w^2}{3+p^2}+\frac{1-w^2}{p^2}\right)\,, \tag{73}$$

and

$$\sigma^* = \lambda^2 m^2 \alpha^d/\mu\,. \tag{74}$$

首先，我们注意到，对于任意 $d \geq 2$，函数 $F_{q_\parallel}$ 在 $q_\parallel = 0$ 处的奇点都会受到积分测度以及因子 $q_\parallel^2$ 的调节。由于零模的存在而产生的红外发散在连续介质中消失了，因为谱密度在动量较小时足够快地趋于零。在更现实的情形下，如果考虑空间体积的有限性，谱会离散化，积分也会被求和所取代。此时，需要更加谨慎地处理零模的存在，例如参见文献 [62–64]。接下来，对于大动量 $\sigma_p \propto p^{d-3}$，并且对于任意 $d \geq 2$，局域熵产生率再次出现紫外发散，需要进行重整化。

为了了解 DW 存在时的 LEPR，我们绘制了 σ_p，其定义见方程（72），并取若干个 $p = q_\parallel/\alpha$值。我们令 $d = 2$，并除去所有参数，因为我们主要关注其定性行为。结果如图1所示。我们发现，LEPR 在 DW 附近有显著峰值，离开 DW 后则迅速减小。在 DW 中心处，对称性恢复，场处于无序相，因此 LEPR 在此处消失。这与方程（62）中均匀相的 LEPR 相符。这种行为与主动相分离的数值研究结果一致；相关研究发现，LEPR 局域于界面处 [22, 26, 35, 41]。在这些研究中，局域熵产生率（LEPR）在界面中心达到峰值，此处场梯度最大。相比之下，

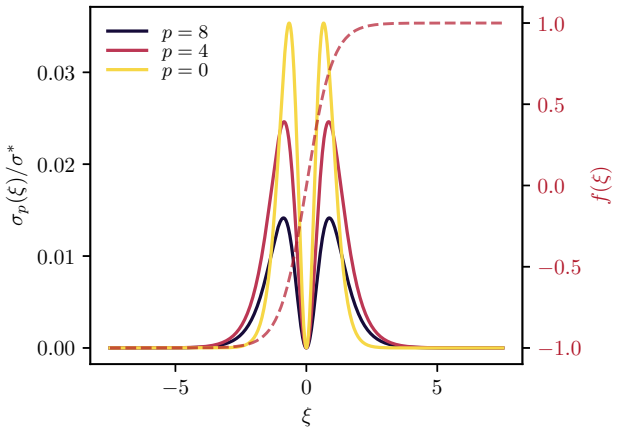


图1. 由畴壁引起的平均局域熵产生率，对应于 $d = 2$。动量分量 σ_p 如式（73）所定义，并针对无量纲动量 $p = q_{\parallel}/\alpha$的若干取值给出。

在本例中，LEPR 随序参量本身一起消失，因此在界面中心处必为零；而且在远离界面、处于体均匀相时也为零，从而形成图1所示的双峰形状。

到目前为止，我们研究了视觉锥向量恰好平行于畴壁的特殊情形，即$\mathbf{v}_1 = 0$。接下来，我们离开这一特定情形，研究一般视觉锥向量下的情况。我们在 $d = 2$中进行讨论，模型的所有定性特征在此均已呈现。坐标为（x， y），其中畴壁依赖于 x。我们取一个与 x 轴成某一夹角 $\theta_{\mathbf{v}}$ 的一般视觉锥向量，即

$$\mathbf{v} = (\cos\theta_{\mathbf{v}}, \sin\theta_{\mathbf{v}}), \tag{75}$$

如图2左图所示。于是，畴壁方程由式（63）给出，其中$\mathbf{v}_1 = \cos\ \theta_{\mathbf{v}}$。在非互易性的最低阶 λ下，或等价地δ，运动方程保持不变，协方差矩阵C的方程亦然，因此式（64）和（68）的解仍然有效。另一方面，涨落算符的反厄米部分现在为

–

$$\mathcal{A}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{AH}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta^{(d)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\ 2\lambda m \tanh\alpha x_1 \left(\cos\theta_{\mathbf{v}}\partial_x + \sin\theta_{\mathbf{v}}\partial_y\right). \tag{76}$$

由畴壁导致的最低阶平均局域熵产生率在 λ 下的动量分量由以下表达式给出

$$\sigma_p(w) = \frac{2}{\pi}\lambda^2 m^2 w^2 \alpha^3 \Big\{ p^2 \sin^2\theta_{\mathbf{v}}\, F_p(w, w) - \cos^2\theta_{\mathbf{v}}(1 - w^2)^2 \left[\partial_w \partial_{w'} F_p(w, w')\right]_{w'=w} \Big\}, \tag{77}$$

这里我们再次必须减去均匀区域的贡献。结果如图右侧面板所示：2 对应一个参考无量纲动量

p 以及 $\theta_{\mathbf{v}}$的某些取值。我们发现，随着 $\theta_{\mathbf{v}}$ 从 $\pi/2$ 变化到 0，视觉锥向量逐渐与畴壁正交，相边界处局域的熵产生会增加。尽管这是一个最低阶结果，但对它的修正将是 λ的微扰，不应影响其定性行为。

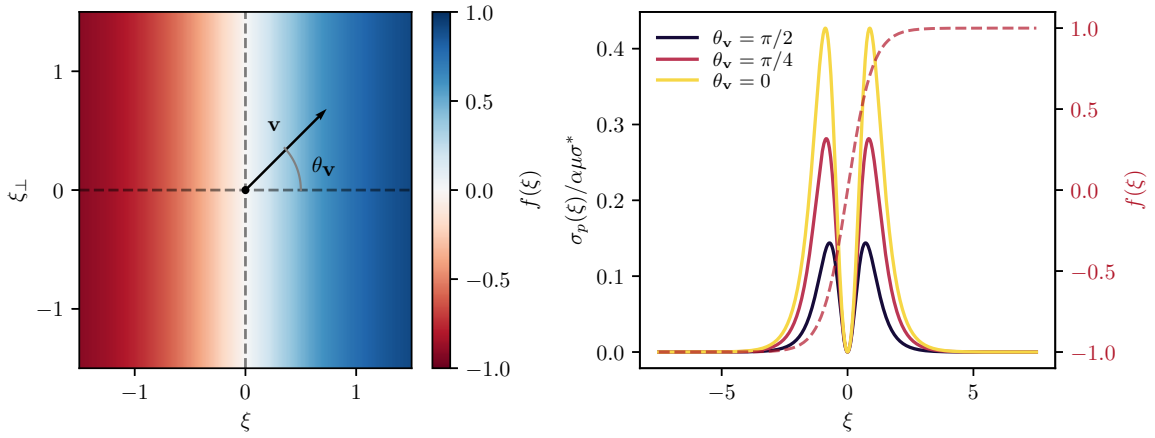


图 2. 左：畴壁与视觉锥设置的示意图。**右：**不同倾角 $\theta_{\mathbf{v}}$ 下，畴壁存在所导致的平均局域熵产生率。

5. 结论

在本研究中，我们建立了一个通用框架，用于量化具有非厄米动力学的标量 A 型模型场论中的时间反演对称性破缺。我们采用随机路径积分形式，围绕零噪声下运动方程的均匀解进行受控的小噪声展开，从而计算涨落-耗散定理（FDT）的违背程度及相关的熵产生率（EPR）。在此框架下，我们证明，偏离平衡态完全由线性化朗之万算子的反厄米分量决定。尽管如此，在某些相分离活性场理论中出现的 KPZ 型项等任何场动力学非保守项，即使加入其中， [12], 也不会在均匀背景附近的小噪声展开层面破坏时间反演对称性。只有反厄米分量会在该展开的一阶上破坏时间反演对称性。

我们的分析得出了两个主要结论。首先，在定态解附近，动力学的非厄米部分会产生对涨落耗散定理的线性修正，从而在关联函数和响应函数层面，为不可逆性提供一种直接且灵敏的诊断。其次，熵产生率在非厄米性中以二阶形式出现，体现了它作为时间反演对称性破缺的标量度量所发挥的作用。这一区别表明，涨落耗散定理违背与熵产生率探测的是非平衡动力学中相互补充的方面，并通过 Harada-Sasa 类型的关系相互关联。我们进一步

基于朗之万表述推导出了局域熵产生率的一般表达式，该表达式适用于小噪声区间内任意参考态。

为说明该框架的适用性，我们研究了金兹堡–朗道理论的一种最小非厄米扩展，该扩展受到非互易自旋系统粗粒化描述的启发。对于这一模型，我们得到了均匀背景和非均匀背景下局部熵产生率的精确表达式。特别是，我们发现，在对称相中熵产生为零，而在界面处呈局域化分布。这一结果提供了一个明确的解析实例，支持此前在活性场理论中的数值观察：不可逆性集中在边界处，例如畴壁或界面。

更广泛地说，我们的结果扩展了此前针对厄米动力学所发展的方法，并为分析源于非互易相互作用的非厄米场论中的不可逆性提供了系统框架。这类项自然出现在活性物质、驱动系统以及其他非平衡多体系统的粗粒化描述中。将该分析扩展到守恒动力学（B 型模型理论）将是很自然的方向；在这类理论中，非厄米算子可能导致熵产生呈现定性不同的空间分布。将这一框架应用于其他类别的非平衡场论，包括具有矢量序参量的系统或带有流体动力学耦合的系统，或许有助于阐明在更广泛、也更加贴近现实的背景下，非互易性产生宏观不可逆性的普遍机制。

致谢

MC 谨此感谢 DL、其研究团队以及巴塞罗那大学的热情接待和富有启发性的研究环境。MC 也感谢慕尼黑工业大学研究生院国际化基金的支持，这使得本次合作得以启动。DL 感谢 Matteo Paoluzzi 和 Sarah Loos 所进行的富有见地的讨论。MC 的研究部分由中央高校基本科研业务费（项目编号：E5ER6601A2）资助。DL、AG 和 OG 感谢 MCIU/AEI 根据资助协议 PID2022- 140407NB-C22 提供的经费支持。AG 感谢 AGAUR 和加泰罗尼亚政府通过 FI SDUR 2023 计划（编号：CCI 2021ES05FPR011）提供的经费支持。OG 感谢 AGAUR 和加泰罗尼亚政府通过 FI SDUR 2024 计划（编号：REU/2207/2024），以及 MCIU 通过 FPU24 计划（编号：FPU24/03427）提供的经费支持。

参考文献

[1] Lebowitz J L 1993 《今日物理》 46 32–38[2] O'Byrne J, Kafri Y, Tailleur J 和 van Wijland F 2022 《自然综述：物理》 4 167–183[3] Tjhung E, Nardini C 和 Cates M E 2018 《物理评论 X》 8(3) 031080 URL https://link.aps. org/doi/10.1103/PhysRevX.8.031080[4]Li Y I 和 Cates M E 2020 《统计力学杂志》 2020 053206 URL https://doi.org/10.1088/ 1742-5468/ab7e2d[5] Tailleur J 和 Cates M E 2008 《物理评论快报》 100(21) 218103 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.218103[6]Cates M E 和 Tailleur J 2015 《凝聚态物理年度评论》 6 219– 244 ISSN 1947-5462 URL https://www.annualreviews.org/content/journals/10.1146/annurev-conmatphys-031214-014710[7] Solon A P, Stenhammar J, Cates M E, Kafri Y 和 Tailleur J 2018 《物理评论 E》 97(2) 020602 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.020602[8] Digregorio P, Levis D, Suma A, Cugliandolo L F, Gonnella G 和 Pagonabarraga I 2018 《物理评论快报》 121 098003[9] Caporusso C B, Digregorio P, Levis D, Cugliandolo L F 和 Gonnella G 2020 《物理评论快报》 125 178004[10] Shi X q, Fausti G, Chat´e H, Nardini C 和 Solon A 2020 《物理评论快报》 125 168001[11] Caporusso C B, Cugliandolo L F, Digregorio P, Gonnella G, Levis D 和 Suma A 2023 《物理评论快报》 131 068201[12] Cates M E 和 Nardini C 2025 《物理学进展报告》 88 056601[13] Lebowitz J L 和 Spohn H 1999 《统计物理学杂志》 95 333–365[14] Maes C 和 Netoˇcn`y K 2003 《统计物理学杂志》 110 269–310[15] Gaspard P 2004 《统计物理学杂志》 117 599–615[16] Seifert U 2012 《物理学进展报告》 75 126001 URL https://doi.org/10.1088/0034-4885/75/12/126001[17] Fodor ´E, Nardini C, Cates M E, Tailleur J, Visco P 和 Van Wijland F 2016 《物理评论快报》 117 038103[18] Fodor ´E, Jack R L 和 Cates M E 2022 《凝聚态物理年度评论》 13 215–238[19] Cocconi L, Garcia-Millan R, Zhen Z, Buturca B 和 Pruessner G 2020 《熵》 22 1252[20] Petrelli I, Cugliandolo L F, Gonnella G 和 Suma A 2020 《物理评论 E》 102 012609[21] Cengio S D, Levis D 和 Pagonabarraga I 2021 《统计力学杂志》 2021 043201[22] Ro S, Guo B, Shih A, Phan T V, Austin R H, Levine D, Chaikin P M 和 Martiniani S 2022 《物理评论快报》 129 220601[23] Semeraro M, Negro G, Suma A, Corberi F 和 Gonnella G 2024 《欧洲物理快报》 148 37001[24] Hecht L, Caprini L, L¨owen H 和 Liebchen B 2024 《化学物理杂志》 161[25] Di Terlizzi I, Gironella M, Herraez-Aguilar D, Betz T, Monroy F, Baiesi M 和 Ritort F 2024 《科学》 383 971–976[26] Pruessner G 和 Garcia-Millan R 2025 《物理学进展报告》 88 097601 URL https://doi.org/10. 1088/1361-6633/adff30[27] Cugliandolo L F 2011 《物理学杂志 A：数学与理论》 44 483001[28] Cugliandolo L F, Kurchan J 和 Peliti L 1997 《物理评论 E 》 55 3898[29] Berthier L 和 Barrat J L 2002 《化学物理杂志》 116 6228–6242[30] Grigera T S 和 Israeloff N 1999 《物理评论快报》 83 5038[31] Harada T 和 Sasa S i 2005 《物理评论快报》 95(13) 130602 URL https://link.aps.org/doi/ 10.1103/PhysRevLett.95.130602[32] Hohenberg P C 和 Halperin B I 1977 《现代物理评论》 49 435[33] T¨auber U C 2014 临界动力学：平衡态与非平衡标度行为的场论方法（剑桥大学出版社）

[34]Cates M E 2022 活性场理论（牛津大学出版社）ISBN 9780192858313 URL https://doi.org/10.1093/oso/9780192858313.003.0006[35] Nardini C, Fodor E, Tjhung E, van Wijland F, Tailleur J and Cates M E 2017 《物理评论 X》7(2) 021007 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.7.021007[36]Markovich T, Fodor E, Tjhung E and Cates M E 2021 《物理评论 X》11(2) 021057 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.11.021057[37]Li Y I and Cates M E 2021 《统计力学杂志》2021 013211 URL https://doi.org/10.1088/ 1742-5468/abd311[38]Loos S A M, Klapp S H L and Martynec T 2023 《物理评论快报》130(19) 198301 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.198301[39] Suchanek T, Kroy K and Loos S A M 2023 《物理评论 E》108(6) 064610 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.108.064610[40]Suchanek T, Kroy K and Loos S A M 2023 《物理评论快报》131(25) 258302 URL https: //link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.131.258302[41] Paoluzzi M, Levis D, Crisanti A and Pagonabarraga I 2024 《物理评论快报》133 118301[42] Johnsrud M K and Golestanian R 2025 Phys. Rev. Res. 7(3) L032053 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/xx4z-lj5c[43] Johnsrud M K and Golestanian R 2025 Phys. Rev. Res. 7(3) L032054 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/flzv-lq7x[44] Fruchart M and Vitelli V 2026 arXiv 预印本 arXiv:2602.11111[45] You Z, Baskaran A and Marchetti M C 2020 Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 117 19767–19772[46] Saha S, Agudo-Canalejo J and Golestanian R 2020 《物理评论 X》10 041009[47] Kawabata K, Kulkarni A, Li J, Numasawa T and Ryu S 2023 《PRX量子》4(3) 030328 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PRXQuantum.4.030328[48] Hern´andez-S´anchez L, Bocanegra-Garay I A, Ramos-Prieto I, Soto-Eguibar F and Moya-Cessa H M 2025 Phys. Rev. A 112(2) L021702 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/gwzr-cjp6[49] Alexandre J, Ellis J and Millington P 2020 Phys. Rev. D 102(12) 125030 URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.125030[50] Millington P 2022 PoS EPS-HEP2021 735[51] Garc´es A and Levis D 2025 《统计力学杂志》2025 043205 ISSN 1742-5468 URL http://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/adc896[52] Martin P C, Siggia E D and Rose H A 1973 Phys. Rev. A 8(1) 423–437 URL https://link.aps. org/doi/10.1103/PhysRevA.8.423[53] De Pirey T A, Cugliandolo L F, Lecomte V and Van Wijland F 2022 《物理学进展》71 1–85[54] Gardiner C 2010 随机方法：自然科学与社会科学手册 施普林格协同学丛书（施普林格柏林海德堡）ISBN 9783642089626 URL https://books. google.it/books?id=321EuQAACAAJ[55]Van Kampen N 2011 物理与化学中的随机过程 北荷兰个人图书馆（北荷兰出版社）ISBN 9780080475363 URL https://books.google.it/books?id=N6II-6HlPxEC[56] Onsager L and Machlup S 1953 Phys. Rev. 91 1505[57] Aron C, Biroli G and Cugliandolo L F 2010 《统计力学杂志》2010 P11018 URL https://dx.doi. org/10.1088/1742-5468/2010/11/P11018[58] Chow C C and Buice M A 2015 J. Math. Neurosc. 5 8[59] Thomas P, Fleck C, Grima R and Popovi´c N 2014 《物理学杂志 A：数学与理论》47 455007 URL https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/45/455007[60] Cugliandolo L F and Lecomte V 2017 《物理学杂志 A：数学与理论》50 345001[61] Zinn-Justin J 2002 量子场论与临界现象（牛津大学出版社）ISBN 9780198509233 URL https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198509233.001.0001[62] Ai W Y, Alexandre J, Carosi M, Garbrecht B and Pla S 2024 《高能物理学杂志》05 099[63] Carosi M and Garbrecht B 2025 Phys. Rev. D 111(8) 085002 URL https://link.aps.org/doi/

10.1103/PhysRevD.111.085002
[64] Carosi M 2025宇宙学相变中的量子涨落：从衰变率到膨胀气泡的动力学 博士论文 慕尼黑工业大学