arXiv:2603.11454v1 [math.RA] 12 Mar 2026

有限格同余密度的聚点

G´ABOR CZ´EDLI

Dedicated to George Grätzer on the occasion of his ninetieth birthday, with appreciation and admiration, and in friendship

Abstract. 设 $\mathcal{W}$ 是一个非平凡的格簇，且 L 是 $\mathcal{W}$中的一个有限格。相对于 $\mathcal{W}$， L 的 *congruence density* 是 L的同余数除以属于 $\mathcal{W}$的 $|L|$元格的最大同余数。我们证明，相对于实数的序和乘法， $\mathcal{W}$ 中有限成员的同余密度集合 SCD($\mathcal{W}$) 及其拓扑闭包都是可数无限的对偶良序幺半群。我们还证明，SCD($\mathcal{W}$)的聚点集合要么是单点集，要么是可数无限集；此外，当且仅当 $\mathcal{W}$ 是模格簇的子簇时，该集合才是单点集。这给出了对模性的复杂刻画：非单点格 K 是模的，当且仅当 SCD($\mathcal{V}(K)$)只有一个聚点，其中 $\mathcal{V}(K)$表示由 K生成的簇。半模格类 $\mathcal{S}$ 不是一个簇，但 SCD($\mathcal{S}$)仍有意义；我们证明 SCD($\mathcal{S}$)恰有一个聚点。

1. Introduction and our results

阅读本文所需的预备知识不多：只需对格论或泛代数中的一些基本概念略有了解。

和往常一样，我们用基集表示一个格；因此， L 表示（L； $\vee$， $\wedge$）。除非另有明确说明，或我们讨论的是一个格类，本文中的所有格都假定是有限的，即使没有重复说明这一假设。同余格 L 的同余数记作 |Con(L)|，其中 Con(L)表示 L的同余格 。类似地， L的大小 （即元素个数）记作 $|L|$。若一个格包含多个元素，则称其为非平凡格。若一个（不一定有限的）格类$\mathcal{W}$ 中包含非平凡格，则称该类为非平凡；我们只考虑非平凡格类。我们所考虑的大多数格类都是簇，也就是说，它们由一些方程定义；或者，依照 G. Birkhoff 的经典 HSP 定理，它们在取同态像、子格和直积时封闭。

对于正整数 n 和 k 以及格的一个非平凡类 $\mathcal{W}$ ，如果集合{|Con(L)| : $L \in \mathcal{W}$ 和 $|L| = n$}至少有 k 个元素，那么该集合中第 k大的数记作 lnc($\mathcal{W}$， n， k)。（该缩写源自“同余的最大数量”一语的首字母。）

2020 *Mathematics Subject Classification.* 06B10, 06C10。*Key words and phrases.* 同余密度、聚点、格同余、对偶良序集、半模格、模格。本研究得到匈牙利国家研究、发展与创新基金资助，资助项目编号为 K 138892。**2026年3月12日版本**。

如果相关集合中的元素少于 k 个，那么 $\mathsf{lnc}(\mathcal{W},\ n,\ k)$ 未定义。对于 $\mathcal{W}$ 中的有限格 L，L 相对于 $\mathcal{W}$ 的同余密度 $\mathsf{cd}(\mathcal{W},\ L)$ 定义如下：

$$\mathrm{cd}(\mathcal{W},L):=\frac{|\mathrm{Con}(L)|}{\mathrm{lnc}(\mathcal{W},|L|,1)}. \tag{1.1}$$

例如，若 $\mathcal{W}=\mathcal{M}$为模格簇，且 $L=B_4$ 是四元布尔格，则 $\mathsf{cd}(\mathcal{M},\ B_4)=1/2$，因为恰有两个[1]$|B_4|$元模格，分别是 B_4 和四元链 C_4，$|\mathsf{Con}(B_4)|=4$，$\mathsf{lnc}(\mathcal{M},\ 4,\ 1)=|\mathsf{Con}(C_4)|=8$，因此 $\mathsf{cd}(\mathcal{M},\ B_4)=4/8=1/2$。记 $\mathcal{L}_{\mathrm{all}}$为所有格组成的簇，同样的论证表明 $\mathsf{cd}(\mathcal{L}_{\mathrm{all}},\ B_4)=1/2$。我们定义

$$\mathrm{SCD}(\mathcal{W}):=\{\mathrm{cd}(\mathcal{W},L):L\in\mathcal{W}\text{ and }L\text{ is a finite}\}, \tag{1.2}$$

有限成员的 $\mathcal{W}$的同余密度集合。

(1.1) 和 (1.2) 中定义的概念对于格以外的一般代数也有意义。对于格，根据 Freese 的一个结果，(1.1) 可简化为 [10], 另见 [8,定理 1(A)][2]，该结果断言，对于任何包含所有有限链的格类 $\mathcal{W}$ 以及任何正整数 n，$\mathsf{lnc}(\mathcal{K},\ n,\ 1)=2^{n-1}$。将这一等式与 (1.1) 结合可得，若 $\mathcal{W}$ 是包含所有有限链的格类，特别是若 $\mathcal{W}$ 是非平凡格簇，则对于其中每个有限格 L $\mathcal{W}$,

$$\mathrm{cd}(\mathcal{W},L):=|\mathrm{Con}(L)|/2^{|L|-1}. \tag{1.3}$$

为简化记号并与 [8, 9, ?] , 保持一致，我们经常省略所有格的簇 $\mathcal{L}_{\mathrm{all}}$。因此，对于有限格 L,

$$\mathrm{cd}(L):=\mathrm{cd}(\mathcal{L}_{\mathrm{all}},L)=|\mathrm{Con}(L)|/2^{|L|-1}\text{ and} \tag{1.4}$$

$$\mathrm{SCD}:=\mathrm{SCD}(\mathcal{L}_{\mathrm{all}})=\{\mathrm{cd}(L):L\text{ is a finite lattice}\}. \tag{1.5}$$

同余密度与某些格构造密切相关；参见 (3.9) 和 (3.11)。此外，(1.4) 表明，研究 $|\mathsf{Con}(L)|$ 等价于研究 $\mathsf{cd}(L)$。这也解释了为何近期论文 [8], [9], 以及脚注 2 中提到的那篇论文关注 $\mathsf{cd}(L)$，而不是 $|\mathsf{Con}(L)|$。

照例，$\mathbb{N}^+$、$\mathbb{N}_0$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$分别表示正整数、非负整数、全体整数、有理数和实数集合。对于实数 $a<b$，区间 $\{x\in\mathbb{R}:\ a<x\leq b\}$ 记作 $(a,b]_{\mathbb{R}}$；$(a,b)_{\mathbb{R}}$、$[a,b)_{\mathbb{R}}$ 和 $[a,b]_{\mathbb{R}}$ 的含义类似。对于非平凡的格簇 $\mathcal{W}$，若对所有正 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，交集 $(\mathrm{SCD}(\mathcal{W})\setminus\{r\})\cap(r-\varepsilon,r+\varepsilon)_{\mathbb{R}}$ 均非空，则称数 $r\in\mathbb{R}$ 为 $\mathrm{SCD}(\mathcal{W})$ 的聚点。

$$\text{Let }\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))\text{ denote the set of accumulation points of }\mathrm{SCD}(\mathcal{W}). \tag{1.6}$$

$\mathrm{SCD}(\mathcal{W})$ 的拓扑闭包记为 $\mathrm{Cls}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))$。即，

$$\mathrm{Cls}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))=\mathrm{SCD}(\mathcal{W})\cup\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W})). \tag{1.7}$$

同样，我们可以从记号中省略 $\mathcal{L}_{\mathrm{all}}$，于是

$$\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD})=\{r:r\text{ is an accumulation point of SCD}\}\text{ and} \tag{1.8}$$

$$\mathrm{Cls}(\mathrm{SCD})=\mathrm{SCD}\cup\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}). \tag{1.9}$$

[1]在本文中，我们不区分同构格。[2]或者，参见最近的 arXiv 论文《同余密度大于 3/32 的格》中的引理 2.1， doi.org/10.48550/arXiv.2602.04321。

对于每个非平凡的格簇 $\mathcal{W}$，不难验证——见推论 1.2(b1)——SCD($\mathcal{W}$) 是一个可数无限集。这是由三个已知事实得出的：(1) 有限格只有可数多个；(2) cd(B_4) $= 1/2$；(3) [8, 引理 2], ，此处引用为 (3.9)。可数个实数可以有不可数多个聚点；例如，Acc($[0,1]_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{Q}$) $= [0,1]_{\mathbb{R}}$。然而，我们证明 |Acc(SCD($\mathcal{W}$))| $\neq 2^{\aleph_0}$；事实上，我们证明了更多。

格 L 是半模的，如果对于任意 x、y、$z \in L$，只要 y 覆盖 x（记作 $x \prec y$），就有 $y \vee z$ 覆盖或等于 $x \vee z$（记作 $x \vee z \preceq y \vee z$）。实数的序和乘法分别记作 $\leq_{\mathbb{R}}$ 和 $\cdot_{\mathbb{R}}$。我们也在 $\mathbb{R}$ 的子集中使用这些记号；若无歧义，也可以省略下标。对于 $X \subseteq \mathbb{R}$，若 X 的每个非空子集都有最大元素，或者等价地，若 X中不存在无限严格递增序列 $a_1 <_{\mathbb{R}} a_2 <_{\mathbb{R}} a_3 <_{\mathbb{R}} \ldots$，则称 X 是 $\mathbb{R}$ 的对偶良序子集。类似地，若子集 X 是关于 $\mathbb{R}$ 的对偶良序幺半群，也就是说，X是 $\mathbb{R}^+$ 的对偶良序子集，且满足 $= [0,\infty)_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r\}$、$1 \in X$，并且对所有 a、$b \in X$均有$a \cdot_{\mathbb{R}} b \in X$。有时，在上下文清楚时，我们会省略“关于 $\mathbb{R}$”。注意，这样的幺半群按通常意义而言是有序幺半群，因为 $\cdot_{\mathbb{R}}$ 在 $\mathbb{R}^+$上保序。通常，最小的无限基数记作 $\aleph_0$。借助记号 (1.2)、(1.5) 和 (1.6)，现在可以陈述本文的主要结果。

定理 1.1。以下三个断言成立。

(a1) 所有有限格的同余密度集合SCD 在 $\mathbb{R}$ 下是一个对偶良序幺半群。(a2) 如果格的一个簇 $\mathcal{W}$ 至少包含一个（不一定是有限的）非模格，那么 $|\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))| = \aleph_0$。特别地，SCD 有可数无穷多个聚点。(a3) 令 $\mathcal{S}$ 表示半模格类，则 $\mathrm{SCD}(\mathcal{S})$ 是 SCD 的子幺半群，且恰有一个聚点：实数 0。

定理 1.1 有几个推论；这些推论和定理本身在若干引理之后，于第7节中证明。除了定理中使用的记号外，这些推论还依赖于 (1.7)、(1.8) 和 (1.9) 中引入的记号。

推论 1.2. 对于每个非平凡的格簇，以下四个断言对$\mathrm{SCD}(\mathcal{W})$ 均成立，特别是对SCD也成立。

(b1) $|\mathrm{Cls}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))| = |\mathrm{SCD}(\mathcal{W})| = \aleph_0$.(b2) $\mathrm{Cls}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))$ 关于 $\mathbb{R}$ 是一个对偶良序幺半群；$\mathrm{SCD}(\mathcal{W})$是它的子幺半群，而$\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))$ 是它的子半群。此外，实数0 属于$\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))$。(b3) $\mathrm{SCD}(\mathcal{W})$ 的聚点要么有可数无穷多个，要么恰有一个。也就是说，$|\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))| \in \{1, \aleph_0\}$.(b4) $\mathrm{SCD}(\mathcal{W})$ 恰有一个聚点，当且仅当 $\mathcal{W}$ 是模格簇 $\mathcal{M}$ 的子簇。

对于不一定有限的格 L，令 $\mathcal{V}(L)$ 表示由 L生成的簇；它由所有满足在 L 中成立的恒等式的格组成。根据 G. Birkhoff 定理，$\mathcal{V}(L)$ 是 L 的直积幂的子格的同态像构成的类。以下两个引理给出了模性的复杂刻画。

推论 1.3. 设 L 是一个不一定有限的非平凡格。那么， L 是模格，当且仅当 $\mathrm{SCD}(\mathcal{V}(L))$ 恰有一个（等价地，至多有一个）聚点。

照例， ω^* 表示负整数有序集的序型。

推论 1.4. 设 L 是一个不一定有限的非平凡格。那么， L 是模格，当且仅当 $\mathrm{SCD}(\mathcal{V}(L))$ 的序型为 ω^*。

对于 $X \subseteq \mathbb{R}$，实数 $r \in \mathbb{R}$ 是 X 的左聚点，如果对每个正的 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，都有 $X \cap (r-\varepsilon, r) \neq \emptyset$。类似地，如果对所有正的 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，都有 $X \cap (r, r+\varepsilon) \neq \emptyset$，那么它是 X 的右聚点。

推论 1.5. 设 $\mathcal{W}$ 是一个非平凡格簇。那么，$\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))$ 中的每个元素都是 $\mathrm{SCD}(\mathcal{W})$ 的右聚点，但不是左聚点。特别地，SCD 没有左聚点。

2. Some related work and possible prospects

本文是先前那些论文的直接延续，这些论文针对某些 n 与 k确定了 $\mathrm{Inc}(\mathcal{L}_{\mathrm{all}}, n, k)$；参见 Freese [10] 关于 $k = 1$， [3] 关于 $k = 2$，Mure̦san 与 Kulin [16] 关于 $n \geq 6$ 和 $k \in \{3, 4, 5\}$（以及关于 $(n, k) = (5, 3)$），以及 [8, ?] 关于$9 \leq n$ 和 $k \leq n + 4$（以及当 k 较小时的某些更小的 n）。此外还有一些相关论文，其中同余被其他相容关系（如一元子代数关系）所取代，格被其他代数（如半格）所取代，或者研究了具有许多同余或其他相容关系的某些后果。除了先前提到的论文之外，还可参见例如 [4], [5], [6], [7], Ahmed 与 Horv´ath [2], Kwuida 与 Mure̦san [15], Zaja、Haje 与 Ahmed [18], 以及 Ahmed、Salih 与 Hale 的 arXiv 论文，doi.org/10.48550/arXiv.2408.09595。

这些论文连同本文表明，对于格和类格代数，以及对某些其他代数而言，研究各种密度及其聚点可能会带来进一步的结果。

与定理 1.1(a3)相关，请注意，关于有限半模格的同余格已有许多结果。例如，参见 Gr¨atzer [12] 以及 [14, 第10–11、15章，以及 29], Adaricheva、Freese 和 Nation 的定理 12 的对偶[1], ，以及补充参考文献[3] 中属于 arXiv 论文[4] DOI 10.48550/arXiv.2107.10202 的十余篇其他论文。

3. Tools used in the paper

本节回顾文献中的必要工具。格 L 中的两个区间 $[a_0, b_0]$和 $[a_1, b_1]$称为转置，如果存在一个 $i \in \{0, 1\}$，使得 $b_i \wedge a_{1-i} = a_i$ 且 $b_i \vee a_{1-i} = b_{1-i}$。对于元素 x、 $y \in L$，为明确术语，以下条件等价：(1) $x \prec y$；(2)y 覆盖 x；(3) x 是 y的下覆盖；(4) (x, y) 是一条边；(5) $[x, y]$ 是一个素区间。对于 a、 $b \in L$，包含这一对元素 (a, b) 的最小同余（换言之，坍缩 a 和 b）记作 $\mathrm{con}(a, b)$ 或 $\mathrm{con}_L(a, b)$。同余 $\mathrm{con}(a, b)$ 的描述见 Gr¨atzer [11, 定理 230]——这一描述归功于 R. P. Dilworth。对于素区间 $[a, b]$，一种更有效的描述

[3]参见 https://www.math.u-szeged.hu/~czedli/m/listak/publ-psml.pdf 以获取更新。[4] https://doi.org/10.7151/dmgaa.1416 处的期刊版本不包含补充参考文献。

$\mathrm{con}(a,\ b)$ 的描述见 Gr¨atzer [13]。不过，我们只需要以下众所周知的事实；该事实本身显而易见，且可由 Gr¨atzer [11,定理 230] 或 Gr¨atzer [13]推出：对于格中的任意两条边 $(a,\ b)$ 和 $(c,\ d)$，

$$\text{if } [a,b] \text{ and } [c,d] \text{ are transposed, then } \mathrm{con}(a,b)=\mathrm{con}(c,d). \tag{3.1}$$

如果元素 $u\in L$ 恰好有一个下覆盖，则称其为并不可约的。用 $\mathrm{Ji}(L)$ 表示 L 的并不可约元素集合。对于 $u\in\mathrm{Ji}(L)$，u 的唯一下覆盖记为 u_*。恰好有一个（上）覆盖的元素集合记为 $\mathrm{Mi}(L)$，其成员称为交不可约元素。对于 $a,\ b\in\mathrm{Ji}(L)$,

$$\text{let } a\le_* b \text{ or } a\le_{*L} b \text{ denote that } \mathrm{con}(a_*,a)\le\mathrm{con}(b_*,b), \text{ and} \tag{3.2}$$

$$\text{let } a=_* b \text{ or } a=_{*L} b \text{ stand for } \mathrm{con}(a_*,a)=\mathrm{con}(b_*,b). \tag{3.3}$$

借助定义于 (3.2) 中的自反且传递关系，$(\mathrm{Ji}(L);\le_{*L})$ 是一个拟序集。$\mathrm{Ji}(L)$ 的子集 X 是 $(\mathrm{Ji}(L);\le_{*L})$ 的理想，如果对于任意$x\in X$ 和 $y\in\mathrm{Ji}(L)$，$y\le_{*L}x$ 蕴含 $y\in X$。用 $\mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(L);\le_{*L})$ 表示 $(\mathrm{Ji}(L);\le_{*L})$ 的理想集合。则 $(\mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(L);\le_{*L});\cup,\cap)$ 是一个分配格。根据 [8][5], 中的 (2.1)、(2.2) 和 (2.7)，我们有 $\mathrm{Con}(L)\cong(\mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(L);\le_{*L});\cup,\cap)$。因此

$$|\mathrm{Con}(L)|=|\mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(L);\le_{*L})|. \tag{3.4}$$

通常，(3.4) 可以按如下方式加以改进。假设 B 是 $\mathrm{Ji}(L)$ 的一个子集，使得利用 (3.3) 中引入的记号，

$$\text{for each } x\in\mathrm{Ji}(L),\ \text{there is a } b\in B \text{ such that } x=_{*L} b. \tag{3.5}$$

由 (3.2)、(3.3) 以及 (3.4) 之前的那句话[6]可直接得出，(3.5) 蕴含 $\mathrm{Con}(L)\cong\mathrm{Idl}(B;\le_{*L})$。因此，

$$\text{if a subset } B \text{ of } \mathrm{Ji}(L) \text{ satisfies (3.5), then } |\mathrm{Con}(L)|\le 2^{|B|}. \tag{3.6}$$

L 中具有多于一个下覆盖的元素是并可约的；它们的集合记为 $\mathrm{Jr}(L)$。类似地，$\mathrm{Mr}(L)$ 表示交可约的 元素的集合，这些元素按对偶方式定义。由于 $0\notin\mathrm{Ji}(L)\cup\mathrm{Jr}(L)$，我们有 $|L|=1+|\mathrm{Ji}(L)|+|\mathrm{Jr}(L)|$。因此，利用 (3.6)、$\mathrm{Ji}(L)$ 代替 B 满足 (3.5) 这一事实以及对偶性，

$$\mathrm{cd}(L)=\frac{|\mathrm{Con}(L)|}{2^{|L|-1}}\le\frac{2^{|\mathrm{Ji}(L)|}}{2^{|\mathrm{Ji}(L)|+|\mathrm{Jr}(L)|}}=2^{-|\mathrm{Jr}(L)|}\text{ and }\mathrm{cd}(L)\le 2^{-|\mathrm{Mr}(L)|}. \tag{3.7}$$

对于有限格 K 与 M，我们将 M 的图置于 K 的图之上，并把K 的顶元 1_K 与 M的底元 0_M 等同，从而得到粘合和 $K\dotplus M$（的图）。注意到 $K\dotplus M$ 同构于直积 $K\times M$的子格 $(K\times\{0_M\})\cup(\{1_K\}\times M)$。因此，对于格的每一个簇$\mathcal{W}$ 以及任意两个有限格 K 与 M，

$$\text{if } K,M\in\mathcal{W},\ \text{then } K\dotplus M\in\mathcal{W}. \tag{3.8}$$

[8] 引理 2 断言，对于有限格 $L_1,\dots,L_t$,

$$\mathrm{cd}(L_1\dotplus\cdots\dotplus L_t)=\mathrm{cd}(L_1)\dots\mathrm{cd}(L_t). \tag{3.9}$$

---

[5]或者，根据脚注 2 中提到的论文里的 (3.8) 和 (3.13)，也可以由已知事实得出：$\mathrm{Con}(L)$ 是分配的；对于每个有限分配格 D，$D\cong(\mathrm{Idl}(\mathrm{Ji}(D);\trianglelefteq)$；并且对于每个有限格，$\mathrm{Ji}(\mathrm{Con}(L))$ $\{\ u_*\ u\ \ u\in\ L\ \}$ L $=$ $\mathrm{con}(,\ ):\mathrm{Ji}(\ )$。[6]或者，这也可以由脚注 2 中提到的论文里的 (3.8) 和 (3.13) 得出。

特别是，由于根据 Freese [10]（或者更直接地，根据 [8, 定理 1(A)]，），对于任意有限链 D，$\mathrm{cd}(D) = 1$，我们有：对于有限链 C 和有限格 L，

$$\mathrm{cd}(L \dotplus C) = \mathrm{cd}(C \dotplus L) = \mathrm{cd}(L). \tag{3.10}$$

若 S 是有限格 L 的子格，且存在 L 的子格 S_0、……、S_t，使得 $S_0 = S$、$S_t = L$，并且对所有 $i \in \{1, \ldots, t\}$、$S_{i-1} \subseteq S_i$ 和 $|S_i \setminus S_{i-1}| = 1$，那么我们称 L 是 S 的可拆卸扩张。文献 [9] 证明了，对于有限格 L 和 S，

$$\text{if } L \text{ is a dismantlable extension of } S, \text{ then } \mathrm{cd}(L) \leq \mathrm{cd}(S). \tag{3.11}$$

对于有限格 L，若 L 中的一个元素与 L 中的每个元素都可比较，则称其为窄元。L 的窄元集合记为 $\mathrm{Nar}(L)$。若 (a, b) 是 L 的一条边（即 $a \prec b$），且 a、$b \in \in \mathrm{Nar}(L)$，则称 (a, b) 是 L 的粘合边。其余的边称为非粘合边。对于 L 中的元素 w，记 $x \leq w\}$ 和 $x \geq w\}$ 分别为 $\{x \in L$ 和 $\{x \in L$，即 $\mathrm{idl}(w)$ 和 $\mathrm{fil}(w)$；或者，为了标明所在的格，分别记作 $\mathrm{idl}_L(w)$ 和 $\mathrm{fil}_L(w)$。现在，若 (a, b) 是 L 的一条粘合边，则 L 可分解为 $L = \mathrm{idl}(a) \dotplus [a, b] \dotplus \mathrm{fil}(b)$。将 $\mathrm{idl}(a) \dotplus \mathrm{fil}(b)$ 记为 $\mathrm{Col}(L; a, b)$；我们称 $\mathrm{Col}(L; a, b)$ 是由 L 坍缩粘合边 (a, b) 得到的。关键在于，中间的粘合和分量 $[a, b]$ 是一个二元素链。因此，反复使用 (3.10) 或使用 (3.9)，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{cd}(L) &= \mathrm{cd}(\mathrm{idl}(a) \dotplus [a, b] \dotplus \mathrm{fil}(b)) = \mathrm{cd}(\mathrm{idl}(a)) \cdot \mathrm{cd}([a, b]) \cdot \mathrm{cd}(\mathrm{fil}(b)) \\ &= \mathrm{cd}(\mathrm{idl}(a)) \cdot \mathrm{cd}(\mathrm{fil}(b)) = \mathrm{cd}(\mathrm{idl}(a) \dotplus \mathrm{fil}(b)) = \mathrm{cd}(\mathrm{Col}(L; a, b)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

按任意顺序逐一坍缩所有粘合边后，我们得到 L 的核，记作 $\mathrm{Cor}(L)$。下面的引理由 (3.12) 得出，并且在 [8, 引理 3][7] 中已隐含。

引理 3.1. 对于每个有限格 L，$\mathrm{Cor}(L)$ 的边恰好是 L 的非粘合边。此外，$\mathrm{cd}(L) = \mathrm{cd}(\mathrm{Cor}(L))$。

有限格 L 在其边 (u, v) 处的单点扩张 $\mathrm{Ext}_1(L; (u, v))$ 定义为满足以下条件的 $L \cup \{x\}$：$x \notin L$，$u \prec x \prec v$ 属于 $\mathrm{Ext}_1(L; (u, v))$，并且 x 在 $\mathrm{Ext}_1(L; (u, v))$ 中既是交不可约的，也是并不可约的。换句话说，我们在 L 的图中，从 u 到 v 的边上插入一个新顶点，从而得到 $\mathrm{Ext}_1(L; (u, v))$ 的图。也就是说，旧边 (u, v) 被 $\mathrm{Ext}_1(L; (u, v))$ 中的两条新边 (u, x) 和 (x, v) 取代。由于图决定了格，下面这个取自 Gr¨atzer [11,引理 290]，的民间常识引理几乎是显然的。

引理 3.2 (Gr¨atzer [11])。对于有限格 L 的每条边 (u, v)，$\mathrm{Ext}_1(L; (u, v))$ 是一个格，且 L 是它的子格。此外，$\mathrm{Ext}_1(L; (u, v))$ 是 L 的可拆卸扩张。

4. Six preparatory lemmas

设 $e_1 = (u_1, v_1), \ldots, e_t = (u_t, v_t)$ 是有限格 L 的边的一个枚举。将此枚举记为 π。设 $s = (s_1, \ldots, s_t) \in {\mathbb{N}_0}^t$ 是一个由非负整数组成的 t 元组。重复进行单点扩张 $s_1 + \cdots + s_t$ 次：首先在 L 的图中的边 e_1 上插入 s_1 个新元素（即顶点），然后在边 e_2 上插入 s_2 个新元素，……最后在边 e_t 上插入 s_t 个新元素。将以此方式得到的偏序集记为 $\mathrm{MExt}(L, \pi; s)$；我们称之为

[7]脚注 2 所提论文中的 (3.1) 也隐含地表达了这一点。

L 的多点扩张，其参数为 π 和 s。对于 $r=(r_1,\ldots,r_t)$ 和$s=(s_1,\ldots,s_t)$，若属于 ${\mathbb{N}_0}^t$，则 $r\le s$ 表示对所有 $i\in\{1,\ldots,t\}$，都有 $r_i\le s_i$。

引理 4.1。$\mathrm{MExt}(L,\pi;\ s)$ 如上所定义，是一个有限格，并且是 L 的可拆卸扩张。此外，如果 $r,s\in{\mathbb{N}_0}^t$ 满足 $r\le s$，那么 $\mathrm{MExt}(L,\pi;\ s)$ 是 $\mathrm{MExt}(L,\pi;\ r)$ 的可拆卸扩张。

证明。要在边 e_1 上添加 s_1 个新顶点，我们重复应用单点扩张 s_1 次。因此，设 $L_0:=L$ 且 $w_{1,\ 0}:=u_1$。对于 $i\in\{1,\ldots,s_1\}$，令 $L_i:=\mathrm{Ext}_1(L_{i-1};\ (w_{1,\ i-1},v_1))$，并令 $w_{1,\ i}$ 为新顶点。也就是说，$w_{1,\ i}$ 是 $L_i\setminus L_{i-1}$ 的唯一元素。

在 L_{s_1} 中，所有 s_1 个新顶点都出现在 L 的（原始）边上。对于 L 的第二条边，我们以类似方式进行。具体而言，令 $w_{2,\ 0}:=u_2$。对于 $i\in\{1,\ldots,s_2\}$，令$L_{s_1+i}:=\mathrm{Ext}_1(L_{s_1+i-1};\ (w_{2,\ i-1},\ v_2))$，并令 $w_{2,\ i}$ 为新顶点。

然后我们继续处理边 e_3，依此类推。最后，我们得到 $L_{s_1+\cdots+s_t}=\mathrm{MExt}(L,\pi;s)$。反复应用引理 3.2 可知，对于所有 $j\in\{1,2,\ldots,s_1+\cdots+s_t\}$，$L_j$ 以及 $\mathrm{MExt}(L,\ \pi;\ s)$ 都是格，且 L_j 是 L_{j-1} 的“一步”可拆卸扩张。

子格 L_j 证明了 $\mathrm{MExt}(L,\ \pi;\ s)$ 是 L 的可拆卸扩张。显然，若 $r\le s$，则我们可以通过单点扩张从 $\mathrm{MExt}(L,\ \pi;\ r)$ 得到 $\mathrm{MExt}(L,\ \pi;\ s)$（当 $r=s$ 时，零步即可）。因此，$\mathrm{MExt}(L,\ \pi;s)$ 是 $\mathrm{MExt}(L,\ \pi;\ r)$ 的可拆卸扩张，从而完成引理 4.1 的证明。□

注记 4.2。格 L 和 $\mathrm{MExt}(L,\ \pi;s)$ 不能确定 π 和 s。例如 r
例如，若 $L=B_4$ 是四元布尔格，那么对 π 的任意选择 d
每个 $s\in\{(1,\ 0,\ 0,\ 0),(0,\ 1,\ 0,\ 0),(0,\ 0,\ 1,\ 0),(0,\ 0,\ 0,\ 1)\}$ 都会得到 N_5，即五元非模格。

对于满足 $k\ge3$的 $k\in\mathbb{N}^+$，令 M_k 表示由 k 个两两不可比元素 a_1、…、a_k、一个底元素 u和一个顶元素 v组成的（$k+2$）元格。换言之，M_k 是长度为 2 的（$k+2$）元模格。

引理 4.3. 对于 $3\le k\in\mathbb{N}^+$，令上述描述的 M_k 为有限格 L 的子格，且满足 $u\prec_L a_i$（对 $i\in\{1,\ldots,k\}$）。也就是说，M_k 的下方 k 条边也是 L的边，但上方 k 条边则未必如此。则 $\mathrm{cd}(L)\le2^{-k}$。

证明。对于 $i\in\{1,\ldots,k\}$，取一个极小元 $b_i\in\mathrm{idl}(a_i)\setminus\mathrm{idl}(u)$。若 b_i有两个不同的下覆盖 x 和 y，那么根据 b_i的极小性，x 和 y 都属于 $\mathrm{idl}(u)$，因此 $x\vee y$ 也属于 $\mathrm{idl}(u)$，这与$x\vee y=b_i\notin\mathrm{idl}(u)$矛盾。因此 $b_i\in\mathrm{Ji}(L)$。结合 $u\prec a_i$ 和 $b_{i*}\prec b_i$ 以及$b_i\not\le u$ 和 $b_{i*}\le u$，可得 $[b_{i*},b_i]$ 和 $[u,a_i]$ 是转置区间。因此，由 (3.1) 和等式 $a_i=b_i\vee u$ 分别可得

$$\mathrm{con}_L(b_{i*},b_i)=\mathrm{con}_L(u,a_i)\text{ for }i\in\{1,\ldots,k\},\text{ and }|\{b_1,\ldots,b_k\}|=k.\tag{4.1}$$

接下来，对于 $i\in\{1,\ldots,k\}$，取一个满足 $a_i\le c_i\prec v$的元素 $c_i\in L$。对于不同的$i,\ j\in\{1,\ldots,k\}$，有 $a_j\not\le c_i$，否则 $v=a_i\vee a_j\le c_i\vee c_i=c_i$将导致矛盾。因此，由 $c_i<a_j\vee c_i\le v$ 和 $c_i\prec v$ 可得 $a_j\vee c_i=v$。类似地，$u\le a_j\wedge c_i<a_j$和 $u\prec a_j$推出 $a_j\wedge c_i=u$。于是 $[u,a_j]$和 $[c_i,v]$是转置区间。因此，由 (3.1) 可得

$$\text{for any two distinct }i,j\in\{1,\ldots,k\},\ \ \mathrm{con}_L(u,a_j)=\mathrm{con}_L(c_i,v).\tag{4.2}$$

对于任意两个不同的 $i,j\in\{1,\ldots,k\}$，我们可以选取一个 $t\in\{1,\ldots,k\}\setminus\{i,j\}$。先对 i和 t 应用 (4.2)，再对 t 和 j应用 (4.2)，可得 $\mathrm{con}(u,a_i)=\mathrm{con}(c_t,v)=$

$\mathsf{con}(u, a_j)$。因此，$\mathsf{con}_L(u, a_1) = \cdots = \mathsf{con}_L(u, a_k)$。将这一串等式与 (3.3) 以及 (4.1) 的前半部分结合，可得 $b_1 =_{*L} b_2 =_{*L} \ldots =_{*L} b_k$。因此，$B := \mathsf{Ji}(L) \setminus \{b_2, \ldots, b_k\}$ 满足 (3.5)。此外，根据 (4.1) 的后半部分，$v \in \mathsf{Jr}(L)$，以及等式 $|\mathsf{Ji}(L)| = |L| - 1 - |\mathsf{Jr}(L)|$，我们有 $|\mathsf{Ji}(L)| \leq |L| - 1 - 1 = |L| - 2$，并且

$$|B| = |\mathrm{Ji}(L)| - (k-1) \leq |L| - 2 - (k-1) = |L| - 1 - k.$$

该不等式与 (3.6) 蕴含 $|\mathsf{Con}(L)| \leq 2^{|B|} = 2^{|L|-1-k}$。最后，将该不等式除以 $2^{|L|-1}$，可得 $\mathsf{cd}(L) \leq 2^{-k}$，从而完成引理 4.3 的证明。□

对于正整数 c，k_1，……，k_c，令 $R(k_1, \ldots, k_c)$ 为最小的数 n，使得无论我们如何用 c 种颜色 γ_1，……，γ_c[8] 给具有 n 个元素的完全（简单无向）图 K_n 的边着色，都存在一个 $i \in \{1, \ldots, c\}$ 以及 K_n 的一个具有 k_i 个元素的完全子图，其所有边的颜色均为 γ_i。根据拉姆齐定理 [17],

$$R(k_1, \ldots, k_c) \text{ is a positive integer; in particular, it exists.} \tag{4.3}$$

对于整数 $k \geq 3$，我们引入如下记号，其右侧有 $k-1$ 个 k：

$$R_{k-1}(k) := R(\underbrace{k, k, \ldots, k}_{k-1}). \tag{4.4}$$

引理 4.4。对于任意整数 $k \geq 3$ 以及任意有限格 L，如果 L中的一个元素至少有 $R_{k-1}(k)$ 个覆盖，那么 $\mathrm{cd}(L) \leq 2^{-k}$。

我们猜想，该引理在弱得多的假设下仍然成立——或许只需 k 个覆盖即可。然而，这对我们的目的而言已经足够，而且很容易证明。

证明。令 L 如引理中所述，并将 $R_{k-1}(k)$ 记为 t。根据 (4.3)，$t \in \mathbb{N}^+$。显然，$k \leq t$。取一个元素 $u \in L$，使其至少有 t 个覆盖，并令 a_1、……、a_t 为 u 的两两不同的覆盖。令 $H := \{a_i \vee a_j \colon 1 \leq i < j \leq t\}$；它是 $\mathsf{Jr}(L)$ 的一个子集。如果 $|H| \geq k$，则 $|\mathsf{Jr}(L)| \geq k$ 和 (3.7) 得出所需的等式 $\mathsf{cd}(L) \leq 2^{-k}$。因此，我们可以假设 $|H| < k$。于是存在两两不同的元素 h_1、……、$h_{k-1} \in L$，使得 $H \subseteq \{h_1, \ldots, h_{k-1}\}$。令 K_t 为顶点集 $\{a_1, \ldots, a_t\}$ 上的 t 元完全图。我们按如下方式用 h_1、……、h_{k-1} 为 K_t 的边着色：对于 $1 \leq i < j \leq t$，边 (a_i, a_j) 的颜色为 $a_i \vee a_j$。注意，除非 $|H| = k-1$，否则有些颜色不会被使用。根据拉姆齐数 $t = R_{k-1}(k)$ 的定义，存在一个 $s \in \{1, \ldots, k-1\}$ 和一个具有 k 个顶点的“单色”完全子图 $\{a_{p_1}, \ldots, a_{p_k}\}$，使得对于所有 $1 \leq i < j \leq k$，边 (a_{p_i}, a_{p_j}) 的颜色为 h_s。也就是说，$a_{p_i} \vee a_{p_j} = h_s$。因此，用 $(u, h_s, a_{p_1}$、……、$a_{p_k})$ 代替 $(u, v, a_1$、……、$a_k)$，引理 4.3 适用，从而得到 $\mathsf{cd}(L) \leq 2^{-k}$。引理 4.4 的证明完毕。□

对于 $k \in \mathbb{N}^+$ 和 k元组 $a = (a_1, \ldots, a_k)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_k)$，令 $a \leq b$ 表示对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$，$a_i \leq b_i$ 成立。

引理 4.5. 给定整数 $k \in \mathbb{N}^+$，设 $s^{(1)}$、$s^{(2)}$、$s^{(3)}$……为非负整数的 k 元组的无限序列。则存在 i、$j \in \mathbb{N}^+$，使得 $i < j$ 且 $s^{(i)} \leq s^{(j)}$。

[8] K_n 的每条边恰好有一种颜色，有些颜色 γ_i 可能不会被使用。

证明. 我们通过对 k 使用归纳法来证明该引理。该命题对 $k = 1$ 是平凡的。因此假设 $k \geq 2$，并且该引理对所有更小的值成立。为了得出矛盾，我们假设存在一个无限序列

$$s^{(1)} = (s_1^{(1)}, \ldots, s_k^{(1)}),\ s^{(2)} = (s_1^{(2)}, \ldots, s_k^{(2)}),\ s^{(3)} = (s_1^{(3)}, \ldots, s_k^{(3)}),\ \ldots \tag{4.5}$$

非负整数，使得

$$s^{(i)} \not\leq s^{(j)} \text{ for all } i, j \text{ with } i < j. \tag{4.6}$$

对于 $j \in \{1, \ldots, k\}$，定义 $T_j := \{s_j^{(i)} :\ i \in \mathbb{N}^+\}$。我们声称，$T_1$、.....、$T_k$ 中至少有一个是无限的。反设不然。那么，对于所有 $i \in \mathbb{N}^+$，k 元组$s^{(i)}$ 都属于有限集 $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_k$。因此，存在 i、$j \in \mathbb{N}^+$，使得 $i < j$ 且 $s^{(i)} = s^{(j)}$，这与 (4.6) 矛盾。因此，某个$j \in \{1, \ldots, k\}$对应的 T_j 是无限的。由对称性，不妨设这个 j是 k，也就是说，T_k是无限的。为了定义 (4.5) 中序列的一个子序列，令 $m_1 := 1$。由于 T_k 是无限的，存在最小的 $m_2 \in \mathbb{N}^+$，使得 $m_1 < m_2$ 且 $s^{(m_1)}_k < s^{(m_2)}_k$。同样，由于 T_k是无限的，存在最小的 $m_3 \in \mathbb{N}^+$，使得 $m_2 < m_3$ 且 $s^{(m_2)}_k < s^{(m_3)}_k$。依此类推；若 m_j 已定义，则 $m_{j+1} \in \mathbb{N}^+$ 是满足 $m_j < m_{j+1}$ 且 $s^{(m_j)}_k < s^{(m_{j+1})}_k$ 的最小整数。为简化记号，我们可以用子序列 $s^{(m_1)}$、$s^{(m_2)}$、$s^{(m_3)}$、.....替换原序列；(4.6) 仍然成立。因此，经过这次替换后，除了满足 (4.6) 外，我们还可以假设序列$s^{(1)}$、$s^{(2)}$、$s^{(3)}$、.....具有以下附加性质

$$s_k^{(1)} < s_k^{(2)} < s_k^{(3)} < s_k^{(4)} < \ldots \tag{4.7}$$

令 $\widehat{s}^{(i)} := (s_1^{(i)},\ \ldots\ldots,\ s_{k-1}^{(i)})$，我们得到一个由 $\widehat{s}^{(1)}$、$\widehat{s}^{(2)}$、$\widehat{s}^{(3)}$、..... 组成的（$k-1$）-元组序列。将（4.6）与（4.7）结合可知，该（$k-1$）-元组序列同样满足（4.6）。这与归纳假设矛盾，从而完成引理 4.5 的证明。□

请注意，上述证明的动机是这一众所周知的事实：直幂（$\mathbb{N}_0{}^k; \leq$）既没有无穷严格递减序列，也没有无穷反链；反链 是由两两不可比较元素组成的偏序集。

若链 $H = (H; \leq)$ 的每个非空子集都有一个（唯一确定的）最小元，则称其为良序集 。对于 $\mathbb{R}$ 的子集 H，如果（$H; \leq$）是良序集，则称 H 是 $\mathbb{R}$ 的良序子集，其中“$\leq$”是实数的通常序关系 $\leq_{\mathbb{R}}$ 在该子集上的限制。下面这个简单引理属于民间常识；其各部分[9] 的习题难度都不高；为完整起见，我们给出一个简短的证明。

引理 4.6. 假设 $H \neq \emptyset$是 $\mathbb{R}$的良序子集。那么 $|H| \leq |\mathrm{Cls}(H)| \leq \aleph_0$，且$\mathrm{Cls}(H)$ 也是良序集。此外，$\mathrm{Acc}(H)$ 中的每个元素都是 H的左聚点，但不是右聚点。

证明。对于 $r \in \mathbb{R}$，令 next(r) $\in H$ 为满足 $r < h$ 的最小元素 $h \in H$；若不存在这样的元素，则 next(r) $:= \infty$。对于任意 $r \in \mathbb{R}$，$(r,\ \text{next}(r))_{\mathbb{R}} \cap H = \emptyset$，因此 r 不是右聚点。因此 H 没有右聚点。

[9]我们找到了两个例子；参见 https://people.math.harvard.edu/~elkies/Misc/sol6.html 和 https://math.stackexchange.com/questions/1983425/there-is-no-well-ordered-uncountable-set-of- real-numbers。

将 H 的最小元素记为 h_0，注意到对于每个 $x \in \mathsf{Acc}(H)$，都有 $h_0 \leq x$。为了证明 $\mathsf{Cls}(H) = H \cup \mathsf{Acc}(H)$ 也是良序的，假设 $\emptyset \neq X \subseteq \mathsf{Cls}(H)$。为导出矛盾，设 X 没有最小元。令 $u \in \mathbb{R}$ 表示 X的下确界；由于对所有 $x \in X$，$h_0 \leq x$ 成立，因此该下确界存在。由于 X 没有最小元，$u \notin X$。对于每个 $n \in \mathbb{N}^+$，选取一个元素 $p_n \in (u, u + 1/n)_{\mathbb{R}} \cap X$，并如下定义 $h_n \in H$。若 $p_n \in H$，则 $h_n := p_n$。否则 $p_n \in \mathsf{Acc}(H)$，我们从 $(u, u + 1/n)_{\mathbb{R}}$中选取 $h_n \in H$，它是 p_n的一个邻域。由于在两种情况下 $h_n \in (u, u + 1/n)_{\mathbb{R}}$，所以 u 是 H的右聚点，但这已被排除。因此，$\mathsf{Cls}(H)$是 $\mathbb{R}$的良序子集。

对于每个 $r \in \mathbb{R}$，我们将 $\mathsf{next}'(r) \in \mathsf{Cls}(H)$ 定义为满足 $r < c$ 的 $c \in \mathsf{Cls}(H)$ 中的最小元；若不存在这样的 c，则令 $\mathsf{next}'(r) = \infty$。对于每个 $x \in \mathsf{Cls}(H)$，选取一个有理数 $q_x \in (x, \mathsf{next}'(x))$。若 $x, y \in \mathsf{Cls}(H)$ 满足 $x < y$，则 $q_x < \mathsf{next}'(x) \leq y < q_y$，由此函数 $x \mapsto q_x$ 从 $\mathsf{Cls}(H)$ 到 $\mathbb{Q}$ 是单射。因此$|H| \leq |\mathsf{Cls}(H)| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$，引理 4.6 得证。□

5. 骨架子格

对于有限格 L的元素 w，定义如下

$$\mathrm{LoCov}(w) = \mathrm{LoCov}_L(w) := \{x \in L : x \prec w\} \text{ and}$$
$$\mathrm{UpCov}(w) = \mathrm{UpCov}_L(w) := \{x \in L : w \prec x\}$$

分别表示 w 的下覆盖集和（上）覆盖集。w 的下覆盖集 $|\mathsf{LoCov}(w)|$ 的元素个数以及元素个数 $|\mathsf{UpCov}(w)|$（上）覆盖集分别记为 $\mathsf{nlc}(w)$ 和 $\mathsf{nuc}(w)$。我们也可以写作 $\mathsf{nlc}_L(w)$ 和 $\mathsf{nuc}_L(w)$，以表示格 L。

有限格 L的骨架子格 $\mathsf{Skel}(L)$定义为

$$\mathrm{Skel}(L) := \mathrm{Jr}(L) \cup \mathrm{Mr}(L) \cup \bigcup_{x \in \mathrm{Jr}(L)} \mathrm{LoCov}(x) \cup \bigcup_{x \in \mathrm{Mr}(L)} \mathrm{UpCov}(x). \tag{5.1}$$

这一术语可由以下事实加以说明:

$$\mathrm{Skel}(L) \text{ is a sublattice of } L. \tag{5.2}$$

事实上，若 $x, y \in \mathsf{Skel}(L)$是可比较的，则 $x \vee y$ 与 $x \wedge y$ 都属于$\{x, y\} \subseteq \mathsf{Skel}(L)$。若 $x, y \in \mathsf{Skel}(L)$是不可比较的，则 $x \wedge y \in \mathsf{Mr}(L) \subseteq \mathsf{Skel}(L)$且 $x \vee y \in \mathsf{Jr}(L) \subseteq \mathsf{Skel}(L)$。因此（5.2）成立。

我们将有限格 L 的可约数 定义为

$$\mathrm{rno}(L) := \sum_{x \in \mathrm{Jr}(L)} (\mathrm{nlc}(x) + 1) + \sum_{x \in \mathrm{Mr}(L)} (\mathrm{nuc}(x) + 1). \tag{5.3}$$

下面的引理是（5.1）与（5.3）的直接推论。

引理 5.1. 对于每个有限格 L，我们有 $|\mathrm{Skel}(L)| \leq \mathrm{rno}(L)$。

对于满足 $1 \in \mathsf{Jr}(L)$ 且 $0 \in \mathsf{Mr}(L)$ 的有限格 L，有 $0, 1 \in \mathsf{Skel}(L)$。因此，对于每个 $x \in L$，下述定义中的交和并均非空；$\bigwedge X$ 与 $\bigwedge_{u \in X} u$ 相同，反之亦然。我们定义

$$x^{\mathrm{up}} := \bigwedge\big(\mathrm{Skel}(L) \cap \mathrm{fil}_L(x)\big) \text{ and } x_{\mathrm{dn}} := \bigvee\big(\mathrm{Skel}(L) \cap \mathrm{idl}_L(x)\big).$$

显然， x^{up} 是 Skel(L) ∩ 上滤子$_L$(x) 中的最小元，反之亦然。此外，

$$x^{\mathrm{up}}, x_{\mathrm{dn}} \in \mathrm{Skel}(L),\ x_{\mathrm{dn}} \le x \le x^{\mathrm{up}}, \text{ and } x \in \mathrm{Skel}(L) \iff x_{\mathrm{dn}} = x^{\mathrm{up}}. \tag{5.4}$$

For a lattice L, let $\mathrm{Edge}(L) := \{(u,v) \in L : u \prec_L v\}$ denote the *edge set* of L.

引理 5.2。 若 L 是一个有限格，且 $0 \in \mathrm{Mr}(L)$ 和 $1 \in \mathrm{Jr}(L)$，则

$$L = \bigcup_{(u,v)\in \mathrm{Edge}(\mathrm{Skel}(L))} [u,v]_L \tag{5.5}$$

对于任意一条边 $(u,v) \in \mathrm{Edge}(\mathrm{Skel}(L))$，区间 $[u,v]_L$ 是一个链。

证明。将 (5.5) 的右端记为 T。为简便起见，令 S 表示 Skel(L)。显然， $L \supseteq T$ 且 $S \subseteq T$。因此，要验证 (5.5)，只需证明对于每个$x \in L \setminus S$，都有 $x \in T$。对于一个元素 $x \in L \setminus S$，令 $u := x_{\mathrm{dn}}$ 以及 $v := x^{\mathrm{up}}$。于是，根据 (5.4) 和 $x \notin S$，我们有 $u < x < v$。因此，要证明 $x \in T$，只需证明 $u \prec_S v$。反设不然，并取一个元素 $w \in S$ 使得 $u < w < v$。如果有 $x \le w$，那么 $v = x^{\mathrm{up}} \le w$ 将与 $w < v$矛盾。同样， $w \le x$ 将推出 $w \le x_{\mathrm{dn}} = u < w$，再次得到矛盾。因此 $w \parallel x$（不可比性的记号），且 $x < w \vee x \in$ Jr(L) $\subseteq S$。于是 $v = x^{\mathrm{up}} \le w \vee x$。但 $w \vee x \le v$，从而 $v = w \vee x \in$ Jr(L)，并因此 LoCov$_L$(v) $\subseteq S$。由于 $x < v$，存在一个 $y \in$LoCov$_L$(v) 使得 $x \le y$。利用 $y \in S$，我们得到 $v = x^{\mathrm{up}} \le y \prec_L v$。这是矛盾，故证明了 $u \prec_S v$ 以及 (5.5)。

接下来，为了导出矛盾，假设 $u \prec_S v$ 但 $[u,v]_L$ 不是一条链。选取 $x,\ y \in [u,v]_L$ 使得 $x \parallel y$。那么 $u < x \vee y \le v$、 $x \vee y \in$ Jr(L) $\subseteq S$，并且$u \prec_S v$ 推出 $v = x \vee y \in$ Jr(L)。因此 LoCov$_L$(v) $\subseteq S$。于是 $x < v$ 给出一个元素 z，使得 $x \le z \in$ LoCov$_L$(v) $\subseteq S$。因此 $u < x \le z < v$ 和 $z \in S$与 $u \prec_S v$矛盾。由此 $[u,v]_L$ 是一条链，引理 5.2 的证明完成。□

引理 5.3。 对于有限格 L，令 u 和 v 分别为Skel(L)的最小元和最大元。令 K 表示区间 $[u,v]_L$。那么格K 具有以下性质： $0_K \in \mathrm{Mr}(K)$、 $1_K \in \mathrm{Jr}(K)$，且cd(K) =cd(L)。

证明。 如果存在元素 $x \in$ idl$_L$(u) 和 $y \in L$，使得 $x \parallel y$，那么 $u > x \wedge y \in$Mr(L) $\subseteq$ Skel(L) 将与 u 是 Skel(L) 的最小元这一事实矛盾。因此， idl$_L$(u) $\subseteq$ Nar(L)，且 idl$_L$(u) 是一条链。根据对偶性， fil$_L$(v) $\subseteq$Nar(L)，且 fil$_L$(v) 也是一条链。依次收缩这两条链的边，我们得到 $K = [u,v]_L$。由 (3.12) 可知， cd(K) = cd(L)。

由于 $u \in$ idl$_L$(u) $\subseteq$ Nar(L)，对于 $x \in$ Jr(L)，有 $u \notin$ LoCov$_L$(x)；对于 $y \in$ Mr(L)，有 $u \notin$ 上覆盖集$_L$(y)。此外， $u \notin$ Jr(L)，否则 LoCov$_L$(u) $\subseteq$ Skel(L) 将与 u 的定义矛盾。因此，由 (5.1) 可得 $u \in$ Mr(L)。对于任意 $p \in$ 上覆盖集$_L$(u)，包含关系 UpCov$_L$(u) $\subseteq$ Skel(L) 意味着 $p \le v$，由此可得$p \in [u,v]_L = K$。因此， UpCov$_L$(u) $\subseteq$ UpCov$_K$(u)，从而 $0_K = u \in$ Mr(K)。对偶地， $1_K \in$Jr(K)，引理 5.3 的证明完毕。□

以下引理可直接由引理 5.2 得出，因此省略其证明。

引理 5.4。 对于有限格 L，满足 $0 \in \mathrm{Mr}(L)$和 $1 \in \mathrm{Jr}(L)$，令 $S := \mathrm{Skel}(L)$。则存在 π 个Edge(S) 的枚举，以及一个 |Edge(S)| 元非负整数向量 s，使得 $L = \mathrm{MExt}(S, \pi; s)$。

$\{k \in \mathbb{Z}$ 的整数部分 max$\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$ 记为 $\lfloor x \rfloor$。对于$p \in (0,1]_{\mathbb{R}}$，我们还使用 (4.4) 中引入的记号来定义

$$k(p) := \lfloor \log_2(1/p) \rfloor + 3 \quad \text{and} \quad f(p) := 2k(p) \cdot \big(R_{k(p)-1}(k(p)) + 1\big).$$

引理 5.5。对于每个正实数 $p \leq 1$ 和每个有限格 L，不等式 $\mathrm{cd}(L) \geq p$ 蕴含 $|\mathrm{Skel}(L)| \leq f(p)$。

证明。为导出矛盾，假设结论不成立，并取一个正的 $p \leq 1$和一个有限格 L，使得 $\mathsf{cd}(L) \geq p$，但 $|\mathsf{Skel}(L)| > f(p)$。由引理 5.1，$\mathsf{rno}(L) > f(p)$。为简化记号，令 $k := k(p)$，并注意到 $2^{-k} < p$。此外，令 Σ_1 和 Σ_2 分别表示 (5.3) 中第一项求和（下标为 $x \in \mathsf{Jr}(L)$）和第二项求和（下标为 $x \in \mathsf{Mr}(L)$）。不等式 $\mathsf{rno}(L) > f(p) = 2k \cdot (R_{k-1}(k) + 1)$ 表明，$\Sigma_1 > k \cdot (R_{k-1}(k) + 1)$ 或 $\Sigma_2 > k \cdot (R_{k-1}(k) + 1)$。由对偶性，不妨设 $\Sigma_1 > k \cdot (R_{k-1}(k) + 1)$。因此，$\Sigma_1$ 的求和项数大于 k，或者其中一个求和项大于 $R_{k-1}(k) + 1$。在第一种情形下，$|\mathsf{Jr}(L)| > k$，于是由 (3.7) 和 $2^{-k} < p$ 可得 $\mathsf{cd}(L) \leq 2^{-|\mathrm{Jr}(L)|} \leq 2^{-k} < p$，矛盾。在第二种情形下，对于某个 $x \in \mathsf{Jr}(L)$，有 $\mathsf{nlc}(x) + 1 > R_{k-1}(k) + 1$，即 $\mathsf{nlc}(x) > R_{k-1}(k)$。由该不等式、$k \geq 3$以及引理 4.4 的对偶形式可得 $\mathsf{cd}(L) \leq 2^{-k} < p$，再次导出矛盾。引理 5.5 的证明完毕。□

6. The semimodular case

引理 6.1。若 L 是一个有限半模格，满足 $0 \in \mathrm{Mr}(L)$ 且 $1 \in \mathrm{Jr}(L)$，则 $\mathrm{Cor}(L) = \mathrm{Cor}(\mathrm{Skel}(L))$。

证明。令 $S := \mathsf{Skel}(L)$。我们首先证明，对于 S 的每条边 (u, v)，

$$\text{if } \{u, v\} \nsubseteq \mathrm{Nar}(L), \text{ then } [u, v]_L = [u, v]_S = \{u, v\}. \tag{6.1}$$

为导出矛盾，假设 (6.1) 不成立，并选取 S 的一条边 (u, v) 作为见证该失败的边。因此 $\{u, v\} \nsubseteq \mathsf{Nar}(L)$，但 $[u, v]_L \neq \{u, v\}$。从 $[u, v]_L \setminus \{u, v\}$ 中选取一个极小元 x，即 $x \in L$ 且 $u \prec x < v$。证明中的非下标关系符号 $\prec$ 是在 L 中理解的，而 S 中的覆盖记作 $\prec_S$。

情形*1*。我们假设 $v \notin \mathsf{Nar}(L)$。取一个 $b \in L$ 满足 $b \parallel v$ 的元素。显然，$b \not\leq u$。

子情形1a。我们假设 $u \leq b$，此外还假设 $b \parallel v$。事实上，$u < b$，因为$u = b$ 将违反 $b \parallel v$。由于 $u \leq b \wedge v < v$，$b \wedge v \in \mathsf{Mr}(L) \subseteq S$，且 $u \prec_S v$，我们得到 $b \wedge v = u$。取一个满足 $u \prec c \leq b$的元素 $c \in L$。如果 x 等于 c，那么 $u = b \wedge v \geq c \wedge x = x$ 将导致矛盾。因此，c 和 x 是 u 在 L中的不同覆盖，从而 $y := c \vee x \in \mathsf{Jr}(L) \in S$。由于 L 是半模的，$x = x \vee u \preceq x \vee c = y$。事实上，$x \prec y$，因为 $x \neq y$。这个覆盖关系以及 $x < v$ 排除了 $v < y$的可能性。由于 $y \leq v$ 将导致 $c \leq b \wedge y \leq b \wedge v = u$，矛盾，因此我们有 $y \not\leq v$。因此，$v \parallel y$，从而 $v > v \wedge y \in \mathsf{Mr}(L) \subseteq S$。成员关系 $v \wedge y \in S$ 连同 $u < x \leq v \wedge y < v$ 与 $u \prec_S v$相矛盾。因此，子情形1a不可能发生。

子情形 *1b*。我们假设 $u \parallel b$，此外还假设 $b \parallel v$。令 $d := b \wedge v$。由于 $d \geq u$ 将导致 $b \geq u$，这与假设矛盾，因此 $d \parallel u$ 或 $d < u$。

为反证起见，假设 $d \parallel u$。那么 $d \wedge u < u$，我们可以选取一个元素 $y \in L$ 使得 $d \wedge u \prec y \leq d$。由于 $u \leq y$会导致 $u \leq d$，而 $y \leq u$ 会导致 $y \leq d \wedge u$，因此我们有 $u \parallel y$。于是 $u < u \vee y \leq u \vee d \leq v$。由于$u \vee y \in \mathsf{Jr}(L) \subseteq S$，由 $u < u \vee y \leq v$ 和 $u \prec_S v$可得 $u \vee y = v$。因此，根据半模性和 $d \wedge u \prec y$，有 $u = u \vee (d \wedge u) \preceq u \vee y = v$，这与 $u < x < v$矛盾。

因此 $d \nparallel u$，并且我们有 $d < u$。我们还有 $d < b$ （因为 $b \parallel v$），由此可以选取一个元素 z 使得 $d \prec z \leq b$。我们有 $z \not\leq v$，否则$z \leq b \wedge v = d$将与 $d \prec z$ 矛盾。因此 $x \vee z \not\leq v$。由于根据半模性和 $x < v$有 $x = x \vee d \preceq x \vee z$，所以不可能有 $v < x \vee z$。因此 $v \parallel x \vee z$，由此$v \wedge (x \vee z) \in \mathbf{Mr}(L) \subseteq S$。因此 $u < x \leq v \wedge (x \vee z) < v$与 $u \prec_S v$矛盾，从而排除子情形1b。此外，情形1也被排除。

情形*2*. 我们假设 $u \notin \mathbf{Nar}(L)$。取一个元素 $e \in L$，使得 $u \parallel e$。由于情形1已被排除，因此 $v \in \mathbf{Nar}(L)$，我们得到 $e \leq v$。由于 $u \parallel e$，我们可以取一个元素 $w \in L$，使得 $e \wedge u \prec w \leq e$。由于 $u \leq w$会导致 $u \leq e$，而 $w \leq u$会导致 $w \leq e \wedge u$，所以 $u \parallel w$。因此 $u < u \vee w \in \mathbf{Jr}(L) \subseteq S$。此外，$u \vee w \leq v \vee e \leq v$。结合 $u < u \vee w \leq v$、$u \prec_S v$和$u \vee w \in S$，我们得到 $u \vee w = v$。根据半模性，$u = u \vee (e \wedge u) \preceq u \vee w = v$。这与 $u < x < v$矛盾，从而排除了情形2。

所有间接假设的情形均已排除。因此，我们证明了 (6.1)。

接下来，我们证明

$$\mathrm{Nar}(S) = \mathrm{Nar}(L) \cap S. \tag{6.2}$$

由于 S 是 L的子格，包含关系 $\mathbf{Nar}(S) \supseteq \mathbf{Nar}(L) \cap S$ 显然成立。为证明反向包含，取 $x \in \mathbf{Nar}(S)$。于是 $x \in S$。为证明 $x \in \mathbf{Nar}(L)$，假设 $y \in L$。根据引理 5.2，存在 S 的一条边 (u, v)，使得 $y \in [u, v]_L$。若 $u = x$ 或 $v = x$，则 $x \nparallel y$ 显然成立。因此，我们不妨假设 $x \notin \{u, v\} = [u, v]_S$。由于 $x \in \mathbf{Nar}(S)$，$x \nparallel u$ 且 $x \nparallel v$。因此，要么 $x < u < v$ 且 $x \leq y$，要么 $u < v < x$ 且 $y \leq x$，由此再次得到 $x \nparallel y$。这就证明了反向包含关系以及 (6.2)。

对于 S 的粘合边 (u, v)，令 $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} := [u, v]_L \setminus \{u, v\}$。由于根据引理 5.2，该集合是一条链，我们可以调整下标，使得 $x_0 := u \prec_L x_1 \prec_L x_2 \prec_L \cdots \prec_L x_{k-1} \prec_L x_k := v$。我们断言

$$[x_{i-1}, x_i] \text{ is a gluing edge of } L \text{ for all } i \in \{1, \ldots, k\}. \tag{6.3}$$

为证明这一点，只需证明对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$，$x_i \in \mathbf{Nar}(L)$。不妨设 $i \in \{1, \ldots, k-1\}$，因为根据 (6.2)，$x_0 = u \in \mathbf{Nar}(S) \subseteq \mathbf{Nar}(L)$，且 $x_k = v \in \mathbf{Nar}(L)$。令 $y \in L$。若 $y \in [u, v]_L$，则由$[u, v]_L$ 是引理 5.2 中的一条链这一事实，可得 $x_i \nparallel y$。假设 $y \notin [u, v]_L$。由于 $y \nparallel u$，且由$u, v \in$ 可知 $y \nparallel v$，所以 $S\mathbf{Nar}(\subseteq) L$—见 (6.2)—，因此 $y \leq u$ 或 $y \geq v$，进而 $y \leq x_i$或 $y \geq x_i$，于是再次得到 $x_i \nparallel y$。我们已证明 (6.3) 成立。

如果（u，v）是 S 的非粘合边，那么 $u \notin \mathbf{Nar}(S)$ 或 $v \notin \mathbf{Nar}(S)$，由此 (6.2) 蕴含 $\{u, v\} \not\subseteq \mathbf{Nar}(L)$。因此，(6.1) 得出：对于 S 的每条非粘合边（u，v），$[u, v]_L = [u, v]_S$以及（u，v）是 L 的非粘合边。结合这一事实、(5.5) 和 (6.3)，可知我们可以按以下方式从 S 得到 L：保留 S 的非粘合边，这些边在构造 $\mathbf{Cor}(S)$ 和 $\mathbf{Cor}(L)$ 时也会保留；并将每条粘合边变为一条或多条粘合边，这些边在形成核时会被收缩。因此，$\mathbf{Cor}(L) = \mathbf{Cor}(S)$，引理 6.1 得证。□

引理 6.2。对于每个正实数 p，集合

$$H_p := \{\mathrm{cd}(L) : L \textit{ is a finite semimodular lattice and } \mathrm{cd}(L) \geq p\}$$

是有限的。

证明。假设 $0 < p \in \mathbb{R}$。对于每个 $r \in H_p$，选取一个大小最小的有限半模格L_r，使得 $\mathrm{cd}(L_r) = r$。注意到 $0 \in \mathrm{Mr}(L_r)$ 且 $1 \in \mathrm{Jr}(L_r)$，因为否则将引理 5.3 应用于 L_r，便可得到一个具有相同同余密度的更小格。由 $r \in H_p$，我们有 $\mathrm{cd}(L_r) = r \geq p$。因此，引理 5.5 给出 $|\mathrm{Skel}(L_r)| \leq f(p)$。

令 $K_r := \mathrm{Cor}(\mathrm{Skel}(L_r))$。由于对于每个有限格 T，都有 $|\mathrm{Cor}(T)| \leq |T|$，因此 $|K_r| \leq |\mathrm{Skel}(L_r)|$，从而 $|K_r| \leq f(p)$。根据引理 6.1，$\mathrm{Cor}(L_r) = K_r$。于是，应用引理 3.1，$r = \mathrm{cd}(L_r) = \mathrm{cd}(\mathrm{Cor}(L_r)) = \mathrm{cd}(K_r)$。由于 r 是 H_p的任意元素，由 $r = \mathrm{cd}(K_r)$ 和 $|K_r| \leq f(p)$ 可知，H_p的每个元素都是一个至多有 $f(p)$ 个元素的格的同余密度。由于这样的格只有有限多个，我们得出引理 6.2 成立。□

7. The rest of the proofs

现在我们可以证明主要结果了。

定理 *1.1* 的证明。为反证 (a1)，假设它不成立。由于 $1 \in \mathrm{SCD}$（任意有限链都可作为见证），且 SCD 根据 (3.9) 在乘法下封闭，因此 SCD 是一个幺半群。因此，根据引理 5.3 以及 (a1) 不成立这一事实，存在一个有限格的无限序列 $L_1, L_2, L_3, \ldots$，使得

$$0 < p := \mathrm{cd}(L_1) < \mathrm{cd}(L_2) < \mathrm{cd}(L_3) < \mathrm{cd}(L_4) < \ldots \tag{7.1}$$

$$\text{and, for all } n \in \mathbb{N}^+,\ 0_{L_n} \in \mathrm{Mr}(L_n) \text{ and } 1_{L_n} \in \mathrm{Jr}(L_n). \tag{7.2}$$

由引理 5.5 可知，对于所有 $n \in \mathbb{N}^+$，$|\mathrm{Skel}(L_n)| \leq f(p)$。在同构意义下，至多有有限多个 $f(p)$ 元格。因此，存在一个有限格 S，使得对无穷多个 $n \in \mathbb{N}^+$，$S \cong \mathrm{Skel}(L_n)$ 成立。从序列 (7.1) 中剔除所有满足 $S \ncong \mathrm{Skel}(L_n)$ 的 L_n 后，序列仍然是无限的。因此，不妨假设（对剩余元素重新编号后），对所有 $n \in \mathbb{N}^+$，$\mathrm{Skel}(L_n) = S$。

固定 $\mathrm{Edge}(S)$ 的一个置换 π。对于每个 $n \in \mathbb{N}^+$，由引理 5.4 和 (7.2) 可得一个 $|\mathrm{Edge}(S)|$ 元组 $s^{(n)} \in \mathbb{N}_0^{|\mathrm{Edge}(S)|}$，使得 $L_n = \mathrm{MExt}(S, \pi; s^{(n)})$。由引理 4.5，存在 $i, j \in \mathbb{N}^+$，使得 $i < j$ 且 $s^{(i)} \leq s^{(j)}$。引理 4.1 的第二部分表明，$L_j = \mathrm{MExt}(S, \pi; s^{(j)})$ 是 $L_i = \mathrm{MExt}(S, \pi; s^{(i)})$ 的可拆卸扩张。因此，(3.11) 意味着 $\mathrm{cd}(L_i) \geq \mathrm{cd}(L_j)$，这与 (7.1) 矛盾，从而证明了 (a1) 部分。

为证明部分 (a2)，令 $k \in \mathbb{N}^+$ 满足 $k \geq 5$。取四元素布尔格 B_4，选取 $\mathrm{Edge}(B_4)$ 的一个置换 π，令 $s := (k-4, 0, 0, 0)$，并定义$N_k := \mathrm{MExt}(B_4, \pi; s)$。注意，$N_k$不依赖于 π，且 $|N_k| = k$；N_5具有通常的含义，即五元素非模格。令 $t := k-3$。那么，N_k由极大链 $0 \prec a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_t \prec 1$ 以及 a_1、.....、a_t各自的一个公共补元 b组成。

对于 $i \in \{1, \ldots, t-1\}$，令 $\Theta_i \in \mathrm{Con}(N_k)$ 为一个同余，其块为$\{a_1, \ldots, a_i\}$、$\{a_{i+1}, \ldots, a_t\}$、$\{0\}$、$\{b\}$和 $\{1\}$。由于 $\Theta_1 \wedge \cdots \wedge \Theta_{t-1}$是 N_k 的最小同余 $0_{\mathrm{Con}(N_k)}$，并且对于每个 $i \in \{1, \ldots, t-1\}$，$N_k/\Theta_i \cong N_5$，

$$N_k \text{ is a subdirect power of } N_5. \tag{7.3}$$

现在设 $\mathcal{W}$ 是一个包含非模格的簇。根据 Dedekind 模性判别准则，N_5 是该格的子格，因此 $N_5 \in \mathcal{W}$。于是由 (7.3) 可得，对于所有满足 $k \geq 8$的 $k \in \mathbb{N}^+$，都有 $N_k \in \mathcal{W}$。由 [8, 定理 2(iii)] 可知

cd(N_k) $=(8+3/2^{k-7})/64$。这是显然的，并且由 [3] 或 [8, 定理 1(B)],可知 cd(B_4) $=1/2$。定义

$$L_{k,n} = N_k \dotplus \underbrace{B_4 \dotplus B_4 \dotplus B_4 \dotplus \cdots \dotplus B_4}_{n \text{ glued-sum summands}}. \tag{7.4}$$

由于 $N_k \in \mathcal{W}$ 和 $B_4 \cong C_2 \times C_2 \in \mathcal{W}$，由 (3.8) 和 (7.4) 可得$L_{k,\,n} \in \mathcal{W}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^+$ 和 $8 \le k \in \mathbb{N}^+$均成立。将 (3.9) 应用于 (7.4)，我们得到

$$\mathrm{cd}(L_{k,n}) = \big((8+3/2^{k-7})/64\big)\cdot(1/2)^n = 2^{-(n+3)} + 3/2^{n+k-1}.$$

因此，对于每个固定的 $n \in \mathbb{N}^+$，$\lim_{k\to\infty}$cd($L_{k,\,n}$) $=2^{-(n+3)}$。所以，对于每个 $n \in \mathbb{N}^+$，$2^{-(n+3)} \in$ Acc(SCD($\mathcal{W}$))。因此，|Acc(SCD($\mathcal{W}$))| $\ge \aleph_0$。

为得到反向不等式，注意到 SCD($\mathcal{W}$) $\subseteq$ SCD。因此，由于根据部分 (a1)，SCD 是 $\mathbb{R}$ 的对偶良序子集，SCD($\mathcal{W}$) 也是如此。于是，根据引理 4.6 的对偶形式，|Acc(SCD($\mathcal{W}$))| $\le$ |Cls(SCD($\mathcal{W}$))| $\le \aleph_0$。我们已经证明了定理的部分 (a2)。

为证明 (a3) 部分，注意到所有有限链都是半模的。因此 $1 =$cd(C_2) $\in$ SCD($\mathcal{S}$)，并且 (1.3) 与 (1.4) 蕴含：对每个有限的 $L \in \mathcal{S}$，有 cd($\mathcal{S}, L$) $=$ cd(L)。容易看出，只要 K 与 L 是有限半模格，则 $K \dotplus L$ 亦然。因此 (3.9) 蕴含 SCD($\mathcal{S}$) 是 SCD 的子幺半群。如前，$B_4 := C_2 \times C_2$。由于 $1/2 =$ cd(B_4) $\in$ SCD($\mathcal{S}$)，且 SCD($\mathcal{S}$) 在乘积下封闭，故对所有 $n \in \mathbb{N}^+$，有 $(1/2)^n \in$ SCD($\mathcal{S}$)。因此$0 = \lim_{n\to\infty}(1/2)^n \in$ Acc(SCD($\mathcal{S}$))。为求矛盾，假设 $0 < p \in$Acc(SCD($\mathcal{S}$))。引理 6.2 蕴含 $H_{p/2} = \{$cd(L) : $L \in \mathcal{S}$，cd(L) $\ge p/2$，且L 有限$\}$ 是一个有限集。这与 $p \in$Acc(SCD($\mathcal{S}$)) 矛盾，从而证明了 (a3) 部分。定理 1.1 的证明完成。□

推论 *1.2* 的证明。设 $\mathcal{W}$ 是一个非平凡的格簇。由$1 =$ cd(C_2) $\in$ SCD($\mathcal{W}$)、(3.8) 和 (3.9) 可知，SCD($\mathcal{W}$) 是 SCD 的一个子幺半群，因此 SCD($\mathcal{W}$) 对乘积封闭。故对所有$n \in \mathbb{N}^+$，有 $2^{-n} =$ cd(B_4)$^n \in$ SCD($\mathcal{W}$)，从而 |SCD($\mathcal{W}$)| $\ge \aleph_0$。由于根据定理 1.1(a1)，SCD 关于$\mathbb{R}$ 是对偶良序的，且 SCD($\mathcal{W}$) $\subseteq$SCD，我们得到

$$\mathrm{SCD}(\mathcal{W}) \text{ is also dually well-ordered with respect to } \mathbb{R}. \tag{7.5}$$

因此，引理 4.6 的对偶给出 |SCD($\mathcal{W}$)| $\le$ |Cls(SCD($\mathcal{W}$))| $\le \aleph_0$。将此与先前已证的 |SCD($\mathcal{W}$)| $\ge \aleph_0$ 相结合，我们便证明了 (b1) 部分。

引理 4.6 的对偶连同 (7.5) 还表明，Cls(SCD($\mathcal{W}$)) 关于 $\mathbb{R}$是对偶良序的。由于由上一段可知 SCD($\mathcal{W}$) 是一个幺半群，且 $\mathbb{R}$中的乘法是连续的，因此 Acc(SCD($\mathcal{W}$)) 与 Cls(SCD($\mathcal{W}$)) 对乘法封闭。这些事实连同$1 \in$ SCD($\mathcal{W}$) $\subseteq$ Cls(SCD($\mathcal{W}$)) 蕴含：Cls(SCD($\mathcal{W}$)) 是关于 $\mathbb{R}$ 的对偶良序幺半群，Acc(SCD($\mathcal{W}$)) 是它的一个子半群，而 SCD($\mathcal{W}$) 是它的一个子幺半群。最后，由于 $1/2 =$ cd(B_4) 及其所有幂都属于 SCD($\mathcal{W}$)，我们有 $0 = \lim_{n\to\infty}(1/2)^n \in$ Acc(SCD($\mathcal{W}$))。我们已证明 (b2) 部分。

由于 $0 \in$ Acc(SCD($\mathcal{W}$))，我们知道 |Acc(SCD($\mathcal{W}$))| ≥ 1。假设|Acc(SCD($\mathcal{W}$))| > 1，并取一个数 $p \in$Acc(SCD($\mathcal{W}$)) $\setminus \{0\}$。如果 1（可能的最大同余密度）属于 Acc(SCD($\mathcal{W}$))，那么 SCD($\mathcal{W}$)——进而 Cls(SCD($\mathcal{W}$)）——将包含一个趋于 1 的无限严格递增序列，这与 (b2) 矛盾。因此 $p \notin \{0, 1\}$，且幂 p^n ($n \in$

$\mathbb{N}^+$) 是半群 Acc(SCD($\mathcal{W}$)) 中互不相同的元素。因此 $|\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))| \geq \aleph_0$。由 (b1) 和 Acc(SCD($\mathcal{W}$)) $\subseteq$ Cls(SCD($\mathcal{W}$)) 可得反向不等式。因此 $|\mathrm{Acc}(\mathrm{SCD}(\mathcal{W}))| = \aleph_0$，我们便证明了 (b3) 部分。

众所周知，每个有限模格都是半模的；例如，参见 Gr¨atzer [14, 引理 2.21]。因此，定理 1.1 的 (a2) 和 (a3) 推出了 (b4)，推论 1.2 的证明也就完成了。□

推论 *1.3* 的证明。 根据引理 1.2(b2)， $0 \in \mathrm{Acc}(\mathcal{V}(L))$。因此，“恰好一个”和“至多一个”是等价的，而推论 1.2(b4) 蕴含推论 1.3。□

推论 *1.5* 的证明。 如 (7.5) 中所述，SCD($\mathcal{W}$) 关于$\mathbb{R}$是对偶良序的。因此，引理 4.6 后半部分的对偶命题推出推论 1.5。□

推论 *1.4* 的证明。 令 $\mathcal{W} := \mathcal{V}(L)$。那么 L 是模的，当且仅当 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{M}$。由推论 1.2(b1)–(b2)，SCD($\mathcal{W}$) 是无限的，且相对于 $\mathbb{R}$ 是对偶良序的。无限良序集 $(T; \leq)$ 的序型为 ω，当且仅当 $\{x \in T :$ 对于每个 $u \in T, \ x < u\}$ 都是有限的。因此，由对偶性以及 SCD($\mathcal{W}$) $\subseteq (0, 1]_{\mathbb{R}}$，SCD($\mathcal{W}$) 的序型为 ω^*，当且仅当

$$\text{for every } u \in \mathrm{SCD}(\mathcal{W}),\ (u, 1]_{\mathbb{R}} \cap \mathrm{SCD}(\mathcal{W}) \text{ is finite.} \tag{7.6}$$

因此，由推论 1.2(b4)，我们需要证明 SCD($\mathcal{W}$) 恰有一个聚点，当且仅当 (7.6) 成立。等价地，由于根据引理 1.2(b2)， $0 \in$ Acc(SCD($\mathcal{W}$))，只需证明

$$\mathrm{SCD}(\mathcal{W}) \text{ has a positive accumulation point } \iff (7.6) \text{ fails.} \tag{7.7}$$

为验证 (7.7) 中“$\Leftarrow$”这一部分，假设 (7.6) 不成立。取一个元素 $u \in$SCD($\mathcal{W}$)，使得 $(u, 1]_{\mathbb{R}} \cap$SCD($\mathcal{W}$) 是无限集。于是 $[u, 1]_{\mathbb{R}}$ 包含 SCD($\mathcal{W}$) 中无限多个元素，因此它包含 SCD($\mathcal{W}$) 的一个聚点 d 。由于 $u \in$ SCD($\mathcal{W}$)，我们有 $0 < u \leq d$。因此，SCD($\mathcal{W}$) 有一个正聚点。这就证明了 (7.7) 中“$\Leftarrow$”这一部分。

为验证“$\Rightarrow$”这一部分，令 p 为 SCD($\mathcal{W}$) 的一个正聚点。根据推论 1.5， p 是一个右聚点。因此 $(p, 1]_{\mathbb{R}} \cap$ SCD($\mathcal{W}$) 是无限集。由于 0 也是 SCD($\mathcal{W}$) 的一个聚点，存在一个元素$u \in$SCD($\mathcal{W}$)，使得 $0 < u < p$。由于 $(p, 1]_{\mathbb{R}} \cap$SCD($\mathcal{W}$) $\subseteq (u, 1]_{\mathbb{R}} \cap$ SCD($\mathcal{W}$)，集合 $(u, 1]_{\mathbb{R}} \cap$SCD($\mathcal{W}$) 也是无限集。因此 (7.6) 不成立，由此证明了 (7.7) 中“$\Rightarrow$”这一部分。于是 (7.7) 成立，推论 1.4 的证明完成。□

References

[1] Adaricheva, Kira；Freese, Ralph；Nation, James Brian。《并半分配格札记》。*International Journal of Algebra and Computation*，32（2022），第2期，347–356； doi.org/10.1142/S0218196722500175[2] Ahmed, Delbrin；Horv´ath, EszterK. 有限格子宇宙的另外两个较大的数。*Discussiones Mathematicae. General Algebra and Applications*，39（2019），251–261；doi.org/10.7151/dmgaa.1309

[3] Czedli, Gabor. 关于具有许多同余的有限格的一则札记。*Acta Universitatis Matthiae Belii Series Mathematics Online* 2018 19 25 , , , –; pdf https://actamath.savbb.sk/pdf/aumb2602.[4] Czedli, G´abor. 八十三个子格与平面性。doi.org/10.1007/s00012-019-0615-3 *Algebra Universalis*，80:45.（2019）；[5] Czedli, Gabor. 具有许多同余的有限半格。*Order*，36（2019），233–247； doi.org/10.1007/s11083-018-9464-5[6] Czedli, Gabor. 具有许多同余的格是平面的。*Algebra Universalis*，80:16（2019）；doi.org/10.1007/s00012-019-0589-1

[7] Cz ´ ´ *Acta* edli, *Sci. Math. (Szeged)* 86 2020 117 165 (). doi.org/10.14232/actasm-019-573-4
Gabor. 含有八十三个子近格的平面半格与近格。
[8] ´ ´ n Czedli, Gabor. 元素数为 个的格的最大同余数及其后续所有同余数。
Ural Mathematical Journal 11 2025 2, 81 99 doi.org/10.15826/umj.2025.2.006 , （），第 – 期；
[9] ´ ´
Czedli, Gabor. 关于子格的同余密度与拟序密度的札记。
Algebra and model theory: Collection of papers from the 17th Summer School "Problems Allied to Model Theory and Universal Algebra", 埃尔拉戈尔–新西伯利亚，2025，31–44。
https://erlagol.ru/wp-content/uploads/cbor/erlagol 2025.pdf [10] Freese, Ralph. 计算有限格的同余格。
Proc. Amer. Math. Soc., 125（ 1997 3457 3463 doi.org/10.1090/S0002-9939-97-04332-3 ），–；
[11] ¨ *Lattice Theory: Foundation.* ¨
Gratzer, George. Birkhauser，巴塞尔（2011）； doi.org/10.1007/978-3-0348-0018-1 [12] Gr¨atzer, George.
Planar Semimodular Lattices: Congruences. 载于：《格论：专题与应用》，第1卷。Birkh¨auser，Cham（2014）；
doi.org/10.1007/978-3-319-06413-0 [13] Gr¨atzer, George. 有限格中的同余与素透视。 *Algebra Universalis*, 74 doi.org/10.1007/s00012-015-0358-y
2015 351 359（），–； [14] ¨ Gratzer, George.
The Congruences of a Finite Lattice—A Proof-by-Picture Approach（第三版）。Birkh
¨ 2023 doi.org/10.1007/978-3-031-29063-3 auser，Cham（）；Kwuida,
[15] ´
Leonard；Muresan, Claudia. 关于非平凡弱双补及保持它们的格同余。 *Order*，40（2023）423–453；
doi.org/10.1007/s11083-022-09597-4 [16] Mure.san, Claudia；Kulin, J´ulia：关于有限格的最大同余数。
Order 37 2020 445 460 doi.org/10.1007/s11083-019-09514-2 ，（），–；弗兰克·普伦普顿·拉姆齐。关于形式逻辑的一个问题。 [17] *Proceedings of the London Mathematical Society* 30 1930 264 286
（），–； [18] Zaja, Neven E.；Haje, Dilbak；Ahmed, Delbrin. 有限格的第六大和第七大子宇宙数。
Academic Journal of Nawroz University 12 2023 1, ，（），第 – 期；
143 148
doi.org/10.25007/ajnu.v12n1a1713 （撰写时需登录）*Email address*: czedli@math.u-szeged.hu:
http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/

University of Szeged, Bolyai Institute. Szeged, Aradi vértanúk tere 1, HUNGARY6720