arXiv:2603.11529v1 [math.GR] 12 Mar 2026

拓扑环上的模余循环与 Haar 型测度

Takao Inoué

信息学院，大和大学，大阪，日本*

2026年3月12日

摘要

本文是作者配套工作 [4]的延续，该工作研究拓扑拟群上的 Haar 型测度，并结合 Kunen 定理分析了拟群情形。我们将该框架推广到局部紧拓扑圈，并研究 Haar 型（准不变）Radon 测度，以及描述此类测度在平移下发生畸变的模余循环。与经典的群情形不同，环中平移的复合受到结合性失效的影响，从而产生由结合律偏差映射支配的附加修正项。我们导出由此得到的余循环关系，并证明环恒等式，特别是穆方型与 Kunen 型恒等式，对模数据施加结构限制。在结合极限下，该余循环退化为局部紧群的经典模函数。

关键词： 拓扑环；Haar 型测度；准不变 Radon 测度；模余循环；结合性偏差；穆方恒等式；Kunen 定理

MSC2020： 20N05, 22A30, 28C10, 43A05

*电子邮箱：inoue.takao@yamato-u.ac.jp；个人邮箱：takaoapple@gmail.com[通信时我更喜欢使用个人邮箱地址。]

目录

1 导论 2

2 拓扑环与平移算子 3

3 Haar 型测度与模余循环 4 4 平移复合偏差 6

4.1 偏差同胚.6 4.2 测度类修正.6

5 环恒等式与余循环约束 8

5.1 一般刚性原理.8 5.2 Moufang 型约束.9 5.3 Kunen 恒等式.10 5.4 释义.10

6 一个基本例子 11 7 结论与未来方向 12 模余循环框架的结构概述 14 结构图及其与拟群框架的关系 16

1 导论

经典的 Haar 测度在局部紧拓扑群的分析中起着核心作用。它提供了与群的代数结构相容的平移不变测度，而其模函数则量化了在仅假定左不变性时右不变性的缺陷。

然而，当结合性被削弱或去除时，此类不变测度的存在性就变得微妙得多。特别是，对于一般的拓扑拟群，尚无已知的 Haar 存在性定理的类似结果。在配套论文 [4], 中，作者在显式的准不变性假设下为拓扑拟群引入了一种 Haar 型框架，并证明 Kunen 型恒等式对相应的模行为施加了很强的限制。

本文旨在作为该项拟群工作的环论延续。由于每个环都是具有双侧单位元的拟群，自然要问：当这样的单位元从一开始就存在时，Haar 型图景会如何变化。环结构提供了典范的左、右平移算子，从而使测度论修正机制能够表述得更为明确。

因此，本文通篇将*Haar* 型测度一词用于指称局部紧拓扑环上的 Radon 测度，并假设该测度在相关平移下（以及在需要时，在相应的偏差同胚下）准不变。我们不声称存在一般性的存在性定理。相反，如 [4], 中所做的那样，我们分析假设此类 Haar 型测度存在所带来的结构性后果。

利用推前测度的 Radon–Nikodym 导数进行研究，会导出一个模余循环

$$\lambda(a,x)=\frac{d(L_a)_*\mu}{d\mu}(x),$$

一般而言，它同时取决于平移元素和平移点。在群情形中，平移律是结合的，而模余循环在空间上为常数时便化为经典模函数。然而，对于环，复合 $L_a\circ L_b$ 未必等于 L_{ab}。由此产生的差异由偏差同胚刻画，模余循环则会多出一个修正项。

本文的主要目标是明确阐释这一机制，并进一步说明环恒等式如何对其施加约束。这应被视为 [4]中拟群分析在环上的对应版本：能够限制平移复合自由度的恒等式，也会限制与 Haar 型测度相关的模数据自由度。具体而言，Moufang 型关系和 Kunen 恒等式对偏差项施加相容性条件，进而约束可能出现的测度畸变。

注记 1.1. 本文的结果是结构性的，而非存在性的。我们并不证明任意局部紧拓扑圈上 *Haar* 型测度的存在性。相反，在假定这种测度存在的前提下，我们分析环结构对其拉东–尼科迪姆导数所施加的约束，并将它们与 [4]中发展的拟群框架联系起来。

2 拓扑环与平移算子

定义 2.1. 一个环是一个集合 L，配备了二元运算

$$L\times L\to L,\qquad (x,y)\mapsto xy,$$

以及一个元素 $e \in L$，使得

$$ex = xe = x \qquad (x \in L),$$

并且方程

$$ax = b, \qquad ya = b$$

对所有 a、$b \in L$ 均有唯一解。

定义 2.2. 拓扑圈是一个环 L，并赋予豪斯多夫拓扑，使得乘法

$$L \times L \to L, \qquad (x, y) \mapsto xy,$$

以及左右除法运算都是连续的。

定义 2.3. 对每个 $a \in L$，定义左平移 和右平移 为

$$L_a(x) = ax, \qquad R_a(x) = xa.$$

命题 2.4. 对每个 $a \in L$，映射 L_a 和 R_a 都是 L 的双射。如果 L 是拓扑圈，则它们是同胚。

证明。 圈公理表明，方程 $ax = b$ 和 $ya = b$ 有唯一解，因此 L_a 和 R_a 是双射。在拓扑情形下，乘法的连续性保证了 L_a 和 R_a 的连续性，而除法运算的连续性则保证了它们逆映射的连续性。 □

所有左平移和右平移构成的族生成了环的自然变换几何。在结合的情形下，有精确的复合律

$$L_a \circ L_b = L_{ab},$$

但对于一般的环，这一恒等式并不成立，而其失效将成为下文所研究的模修正项的来源。

3 Haar 型测度与模余循环

在本节中，设 L 是一个局部紧致拓扑环，且 μ 是 L 上的 Radon 测度。

定义 3.1。如果 μ 是左准不变的，我们就称其为 左 Haar 型测度；也就是说，对每个 $a \in L$，都有

$$(L_a)_*\mu \ll \mu.$$

等价地，对每个 $a \in L$，都存在一个正可测函数

$$\lambda(a, \cdot) : L \to \mathbb{R}_{>0}$$

使得

$$\frac{d(L_a)_*\mu}{d\mu}(x) = \lambda(a, x)$$

对 μ-几乎处处的 $x \in L$,

因此，按照本文的术语，Haar 型测度是这样一种 Radon 测度：相关的平移推前测度关于原测度绝对连续。我们称 λ 为与 μ相关联的左模余圈。如果 Radon–Nikodym 导数与 x 无关，我们将其共同值记作 $\Delta_L(a)$，由此得到一种模函数型对象，这与群情形中的模函数直接类似。

类似地，可以定义右 ***Haar*** 型测度及右模余圈 $\rho(a,\ x)$，如下所示：

$$\frac{d(R_a)_*\mu}{d\mu}(x) = \rho(a, x).$$

命题 3.2。左模余圈满足归一化条件

$$\lambda(e, x) = 1$$

对于几乎所有的 $\mu,\ x \in L$ 都成立。对于 ρ 也有类似的结论。

证明。 由于 $L_e = \mathrm{id}_L$，有 $(L_e)_*\mu = \mu$，因此

$$\frac{d(L_e)_*\mu}{d\mu}(x) = 1$$

对于几乎所有的 $\mu,\ x$。 □

定义 3.3。 若环 L 满足以下条件，则称其关于 μ 是 幺模的 : 两个模余循环均为平凡的:

$$\lambda(a, x) = \rho(a, x) = 1$$

对于所有 $a \in L$，且对于几乎所有的 $\mu,\ x \in L$。

注 3.4. 即使 $\lambda(a, x)$ 依赖于 x，自然也可以将其视为模函数的一种非结合类比。它逐点依赖于 x，这反映出在群情形之外，测度的扭曲并非仅由平移元素决定。

4 平移复合的偏差

现在，我们将精确说明非结合性如何进入测度论图景。

4.1 偏差同胚

对于 $a, b \in L$，复合映射 $L_a \circ L_b$ 仍是 L 的一个同胚，但一般来说它不等于 L_{ab}。由于 L_{ab} 是一个同胚，我们可以如下分离出这一差异。

定义 4.1。对于 $a, b \in L$，定义结合性偏差同胚

$$\Phi_{a,b} : L \to L$$

by

$$L_a \circ L_b = \Phi_{a,b} \circ L_{ab},$$

等价地，

$$\Phi_{a,b} = L_a \circ L_b \circ L_{ab}^{-1}.$$

注 4.2。此定义无需在环乘法中调用逆元$(ab)^{-1}$。它只使用平移映射 L_{ab} 的逆同胚，而这在环中总是存在的。若 L 是结合的，则对所有 a, b，都有 $\Phi_{a,b} = \mathrm{id}_L$。

4.2 测度类修正

由于 $L_a \circ L_b = \Phi_{a,\ b} \circ L_{ab}$，比较推前测度 $(L_a \circ L_b)_* \mu$ 和 $(L_{ab})_* \mu$ 时，必须考虑额外的变换$\Phi_{a,\ b}$。

定义 4.3。假设 μ 在 $\Phi_{a,\ b}$下准不变。我们记

$$J_\Phi(a, b; x) := \frac{d(\Phi_{a,b})_* \mu}{d\mu}(x)$$

为与偏差同胚相关的 *Radon–Nikodym* 导数。

下一个引理是关于拉东–尼科迪姆导数的标准链式法则计算。

引理 4.4. 设 f、$g:\ L \to L$ 为同胚，使得 μ 在 g 与 f下拟不变。记

$$\alpha(x) = \frac{df_*\mu}{d\mu}(x), \qquad \beta(x) = \frac{dg_*\mu}{d\mu}(x).$$

Then

$$\frac{d(f\circ g)_*\mu}{d\mu}(x) = \alpha(x)\,\beta(f^{-1}x)$$

对于几乎所有的 x，相对于 μ。

证明。 有 $(f\circ g)_*\mu = f_*(g_*\mu)$。令 $g_*\mu = \beta\,\mu$，再通过 f 推前，得到

$$(f\circ g)_*\mu = f_*(\beta\,\mu).$$

对测试函数求值，并对推前 f 应用变量替换公式，即得所述恒等式。

□

命题 4.5 （偏差修正的余循环关系）。 假设 μ 是左拟不变的，且在每个偏差同胚 $\Phi_{a,b}$ 下也准不变。那么，对于几乎所有的 $x \in L$，相对于 μ，

$$\lambda(a,x)\,\lambda\big(b, L_a^{-1}x\big) = J_\Phi(a,b;x)\,\lambda\big(ab, \Phi_{a,b}^{-1}x\big).$$

等价地，将 x 替换为 $\Phi_{a,\ b}(x)$ 后，

$$\lambda\big(a, \Phi_{a,b}(x)\big)\,\lambda\big(b, L_a^{-1}\Phi_{a,b}(x)\big) = J_\Phi(a,b;\Phi_{a,b}(x))\,\lambda(ab,x).$$

证明。 由引理 4.4，先应用于 L_a 和 L_b，可得

$$\frac{d(L_a\circ L_b)_*\mu}{d\mu}(x) = \lambda(a,x)\,\lambda\big(b, L_a^{-1}x\big).$$

另一方面，利用因式分解

$$L_a\circ L_b = \Phi_{a,b}\circ L_{ab}$$

并将引理 4.4 应用于 $\Phi_{a,b}$ 和 L_{ab}，得到

$$\frac{d(L_a\circ L_b)_*\mu}{d\mu}(x) = J_\Phi(a,b;x)\,\lambda\big(ab, \Phi_{a,b}^{-1}x\big).$$

比较这两个表达式即可证明该论断。 □

推论 4.6（结合极限）。 如果 L 是结合的，则 $\Phi_{a,\,b}=$恒等$_L$ 和$J_\Phi(a,b;\,x)=1$。因此

$$\lambda(a,x)\,\lambda\big(b,L_a^{-1}x\big)=\lambda(ab,x).$$

特别地，如果 $\lambda(a,x)=\Delta_L(a)$ 与 x 无关，那么

$$\Delta_L(ab)=\Delta_L(a)\Delta_L(b),$$

于是便恢复了经典模函数。

5 环恒等式与对余循环的约束

命题 4.5 中修正后的余循环关系表明，乘法性的障碍恰好是偏差项 $J_\Phi(a,b;x)$。因此，约束偏差同胚的恒等式也会约束模余循环。

5.1 一般刚性原理

命题 5.1。 设 $\mathcal{I}$ 是一族环恒等式，其平移理论内容意味着，对于某些对 (a,b)，有

$$\Phi_{a,b}=\mathrm{id}_L.$$

于是，对于这些对，模余循环满足非扭曲关系

$$\lambda(a,x)\,\lambda\big(b,L_a^{-1}x\big)=\lambda(ab,x)$$

对 μ-几乎所有的 x。

证明。若$\Phi_{a,b}=\mathrm{id}_L$，则 $J_\Phi(a,b;x)=1$ 且$\Phi_a^{-1}{}_{,b}=\mathrm{id}_L$。该断言由命题 4.5 立即得出。 □

这一简单观察构成了本文的结构核心：只要某个环恒等式消除了平移偏差，就会迫使模余循环趋向于乘法性。

5.2 Moufang 型约束

穆方恒等式是最重要的非结合恒等式之一。其一种标准形式为

$$((xy)z)y = x(y(zy)).$$

这类恒等式并不会使一般的环变得结合，但会强有力地约束左平移与右平移之间的相互作用。

注 5.2. 在穆方环中，许多复合平移都存在一般环中不可能出现的其他因式分解。因此，相应的偏差同胚不能任意变化。在测度论层面，这迫使左模余圈、右模余圈与偏差项之间满足相容关系。

我们不在缺少额外假设的情况下声称存在普遍适用的闭式公式，而是记录本文所需的精确结构性结论。

定理 5.3 (Moufang 型相容性)**.** 设 L 是一个配备 *Haar* 型测度 μ 的局部紧拓扑环，也就是说，μ 是一个在相关偏差同胚作用下准不变的 *Radon* 测度。

假设某个穆方恒等式给出了同一平移算子的两种因式分解：

$$T_1 = T_2.$$

于是，由 T_1 和 T_2 计算得到的 *Radon–Nikodym* 导数相同，因此相应的左右模余循环乘积几乎处处相等。

证明。 将两边都写成左、右平移与偏差同胚的复合。对每个因式分解反复应用引理 4.4，可得到同一推前测度 $T_{1*}\mu = T_{2*}\mu$ 的 Radon–Nikodym 导数的两种表达式。这些导数相等，便得到所需的相容关系。

□

注 5.4。 该定理有意在结构层面进行表述。要获得余循环的显式闭合恒等式，必须明确指定与所选穆方律相对应的精确平移因式分解，并追踪由此产生的偏差项。这里相关的要点是，穆方律必然蕴含此类恒等式的存在。

5.3 Kunen 恒等式

现在我们转向拟群论文[4]中强调的恒等式：

$$((xy)z)y = x(y(zy)).$$

文献中常将其称为 Kunen 恒等式；它带有穆方型的特征。在 [4], 的拟群情形中，这一恒等式曾被用于推导强有力的结构限制，并最终将模行为与单位元的出现联系起来。

本文在环的情形下重新考察这一恒等式，此时双侧单位元已是结构的一部分。因此，问题不再是如何产生单位元，而是 Kunen 关系对 Haar 型测度的模数据有何影响。与拟群论文一样，关键在于平移理论：等式两边确定了底层空间上的同一变换，因此相应的 Radon–Nikodym 导数必然相等。

定理 5.5 (Kunen 型约束)。设 L 是一个局部紧致拓扑环，配备 *Haar* 型测度 μ，并假设该测度在 *Kunen* 恒等式中出现的平移和偏差同胚下准不变。则恒等式

$$((xy)z)y = x(y(zy))$$

这在相关的左、右模余循环与偏差项之间诱导出相容关系。特别是，当 *Kunen* 恒等式使偏差同胚退化为恒等映射时，相应的模修正项便会消失。

证明。 Kunen 恒等式两边定义了同一个复合平移算子。分别对相应的两种分解应用引理 4.4，可得同一推前测度的 Radon–Nikodym 导数的两种表达式。这些表达式相等，便得到了所述的相容关系。最后一个结论则是命题 5.1 的直接应用。

□

5.4 解释

可以将这一图景概括如下。

- 模余循环衡量平移下 μ 的失真。

- 偏差同胚 $\Phi_{a,\ b}$ 衡量平移复合层面上结合性的失效。
- 修正项 $J_\Phi(a,\ b; x)$ 正是余循环不具乘法性的障碍。
- 环恒等式约束着$\Phi_{a,\ b}$，因此也约束了修正项可能的形式。

这是代数环恒等式与测度论刚性之间的结构桥梁。

6 一个基本例子

我们给出一个简单的例子，说明这一框架并非空洞无物，且偏差修正的余循环关系与熟悉的测度论行为相容。

例 6.1 （带有计数测度的有限离散环）。 设 L 是一个赋予离散拓扑的有限环，并令 μ 为L上的计数测度。于是，每个单点集都是开且紧的，因此 μ 是 *Radon* 测度。此外，每个左平移 L_a ： $x \mapsto ax$ 和每个右平移R_a ： $x \mapsto xa$ 都是有限集 L 上的双射。因此，对任意子集 $E \subseteq L$，有

$$\mu(L_a^{-1}E) = \#(L_a^{-1}E) = \#E = \mu(E),$$

右平移也同理。因此，计数测度在最强意义上确实是 *Haar* 型测度：它实际上在所有左、右平移下都保持不变。因此

$$(L_a)_*\mu = \mu, \qquad (R_a)_*\mu = \mu,$$

所以，*Radon–Nikodym* 导数恒等于1：

$$\lambda(a, x) = 1, \qquad \rho(a, x) = 1$$

对所有 a、$x \in L$ 均成立。

该环仍可能不是结合的，因此偏差同胚$\Phi_{a,\ b}$ 未必是平凡的。不过，由于每个$\Phi_{a,\ b}$ 都是有限集合上的双射，其推前也保持计数测度。因此，相应的雅可比项满足

$$J_\Phi(a, b; x) = 1.$$

因此，命题 *4.5* 中修正后的余循环关系化为一个恒真式

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1.$$

这个例子刻意设置得很简单，但有两个方面的意义。首先，它表明当前形式体系适用于真正的非结合环，而不仅限于群。其次，它揭示了非平凡性的来源：在有限离散情形中，测度论扭曲不可见，因此所有有趣的行为都必然来自无限或更微妙的局部紧环，此时 Radon–Nikodym 导数以及可能出现的偏差雅可比不再平凡。

7 结论与未来方向

我们研究了局部紧拓扑环上的 Haar 型测度，并引入了一种模余循环，用以描述这类测度在平移作用下的扭曲。

本文应视为作者此前拟群研究 [4] 的延续。在那项研究中，我们在明确的准不变性假设下分析了拟群的 Haar 型现象，并将其与库嫩型结构限制联系起来。本文则表明，在环的情形中，双侧单位元的存在使得我们能够在平移算子及其偏离结合性的层面，更明确地阐述同一总体思路。

核心概念在于，环中的结合性失效表现为平移算子复合时的偏差。这种偏差由同胚 $\Phi_{a,b}$ 编码，并在余循环关系中产生修正项 $J_\Phi(a,b;x)$

$$\lambda(a,x)\,\lambda\big(b,L_a^{-1}x\big) = J_\Phi(a,b;x)\,\lambda\big(ab,\Phi_{a,b}^{-1}x\big).$$

因此，在环的情形下，模函数的经典乘法性被 Haar 型测度的偏差修正余循环律所取代。

从这一角度看，环恒等式发挥着刚性机制的作用。只要某个恒等式限制或消除了偏差同胚，就会使模余循环更加接近局部紧群中熟悉的结合行为。因此，穆方型和 Kunen 型恒等式自然成为测度论约束的代数来源。

在结合的极限下，偏差完全消失，修正项也变得平凡，并且可以恢复局部紧致群的通常模函数

。从这个意义上说，当前框架可视为经典哈尔模图景的一种非结合扩展。上面的有限离散例子表明，即使在余循环变得平凡的情况下，该框架对于真正的非结合圈仍然有意义。

若干进一步研究的方向自然浮现。

1. **Haar 型测度的存在性**。 主要的未决问题是确定对哪些局部紧拓扑圈，哈尔型拉东测度究竟存在，以及在何种附加条件下，真正的哈尔型存在定理可能成立。2. **与拟群框架的比较**。 有必要精确区分[4] 中拟群理论的哪些部分可形式地下放到圈，以及一旦存在双侧单位元，哪些新的简化成为可能。3. **特殊类中的显式公式**。 对于穆方、博尔、布鲁克或其他具有结构的圈类，人们有望更显式地计算偏差同胚，从而得到封闭的上循环公式。4. **坍缩现象与幺模性**。 自然要问偏差修正何时恒为零，从而使该环相对于给定测度成为幺模的。5. **迈向非结合调和分析**。 若存在适当的不变测度或拟不变测度，便可尝试为拓扑圈发展卷积型构造与表示论工具。

本文提出的框架表明，环恒等式与哈尔型测度结构之间的相互作用，是迈向更广泛的非结合调和分析的一条颇具前景的路径。

参考文献

[1] R. H. Bruck，《二元系综述》，施普林格，1971 年。

[2] K. H. Hofmann 和 S. A. Morris，紧群的结构，de Gruyter，2006年。

[3] K. H. Hofmann 和 K. Strambach，拓扑与解析环，载于：拟群与环：理论与应用，Heldermann Verlag，1990年，第 205–262 页。[4] T. Inoué，拓扑拟群上的 *Haar* 型测度与 *Kunen* 定理，arXiv:2603.06174 [math.GR], 2026。[5] K. Kunen，拟群、环与结合律，《代数杂志》 **185**（1996年），194–204。[6] P. T. Nagy 和 K. Strambach，群论与李理论中的环，de Gruyter，2002年。[7] H. O. Pflugfelder，拟群与环：导论，Heldermann Verlag，1990年。[8] L. V. Sabinin，光滑拟群与环，Kluwer Academic Publishers，1999年。

Takao Inoué 大和大学信息学院 日本大阪府吹田市片山町 2-5-1，邮编 564-0082 inoue.takao@yamato-u.ac.jp（个人邮箱）takaoapple@gmail.com（我更喜欢使用个人邮箱）

为方便读者，我们在附录 A 中附上示意图，概括本文的概念脉络及其与 [4] 的拟群框架之间的关系。

模余循环框架的结构概述

下图概括了本文所构建的概念结构，也应视为对 [4] 中所引入的拟群框架在环论上的延续。

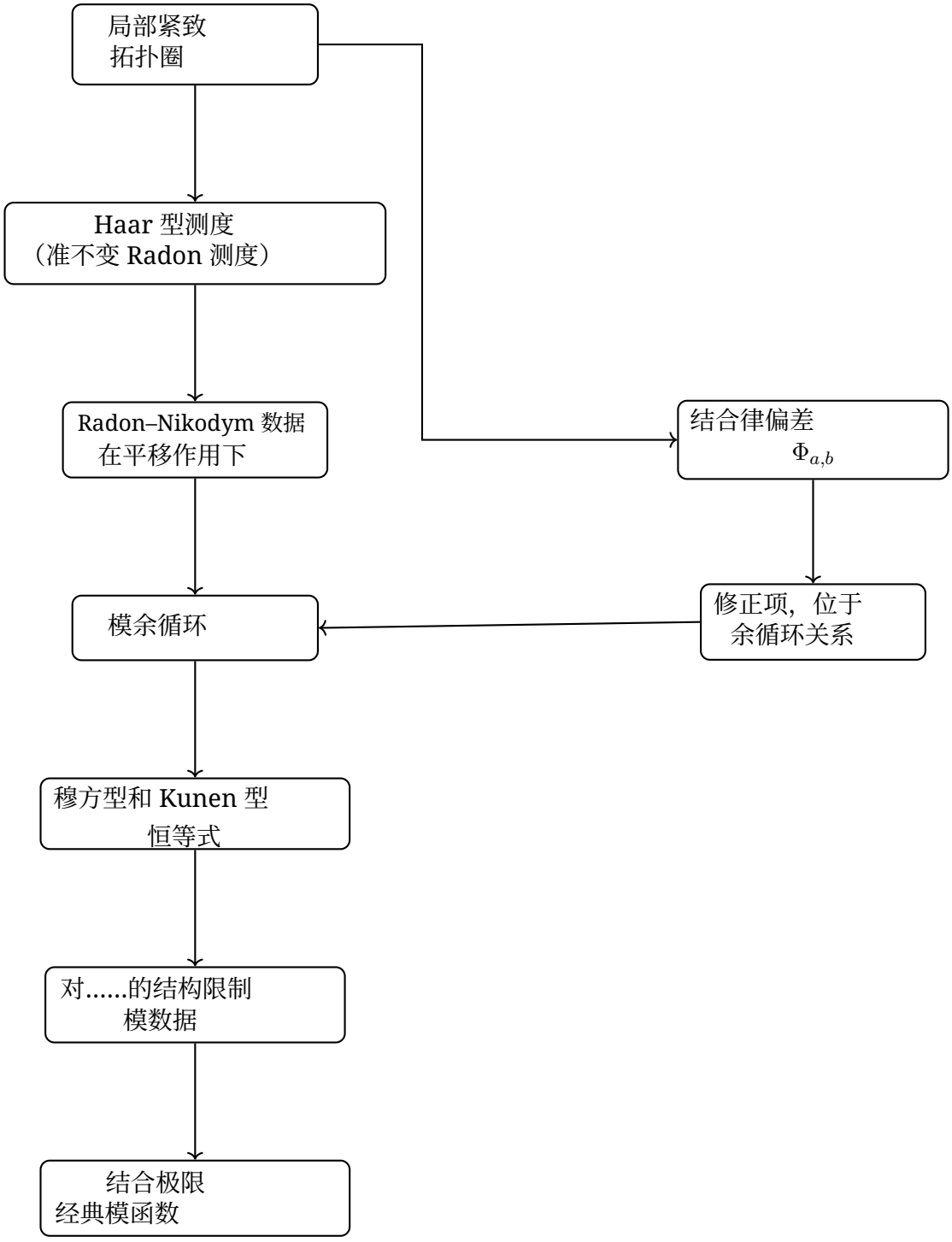


图 1：拓扑圈上 Haar-15 型测度的模余循环框架的概念结构。结合性的失效会产生结合律偏差，并由此为余循环关系带来修正项。穆方型和 Kunen 型等环恒等式则对由此得到的模数据施加结构限制。

结构图及其与拟群框架的关系

本附录纯粹旨在阐释：它对 [4] 中发展的拟群理论与本文所确立的环论模余循环框架进行了示意性比较。

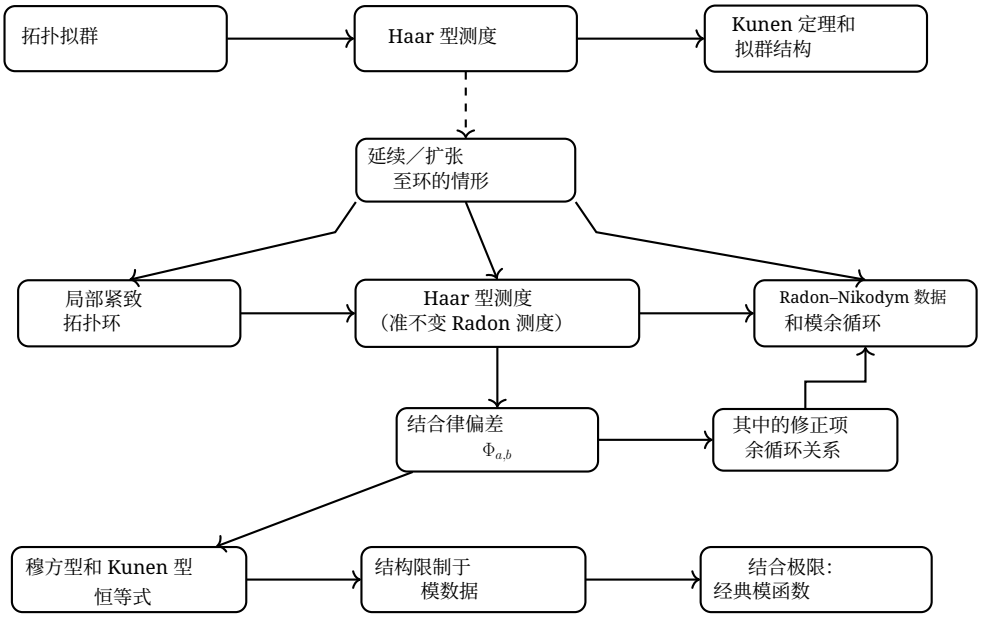


图 2： [4]的拟群框架与本文环论推广之间的比较。上行概括拟群设定，其中 Haar 型测度是结合 Kunen 定理加以研究的。下部概括本文：局部紧拓扑圈上的 Haar 型测度产生 Radon–Nikodym 数据与模余循环，并由结合性偏离产生一个附加修正项。穆方型与 Kunen 型恒等式进而对模数据施加结构限制，而在结合极限中，该理论恢复经典模函数。