arXiv:2603.11540v1 [math.GT] 12 Mar 2026

具有希钦全纯性的实射影曲面嫁接

TOSHIKI FUJII

Abstract. 我们定义实射影曲面上的可嫁接曲线。特别地，我们在 Hitchin 情形下构造可嫁接曲线，并证明具有相同 Hitchin 全纯且带有相同权类型的实射影结构彼此通过多重嫁接相关联。

1. Introduction

设 Σ 为亏格 $g > 1$的定向闭光滑曲面，并设 Σ 表示 Σ的万有覆盖。 Σ上的实射影结构 是一个$(\mathbb{RP}^2, PGL(3,\mathbb{R}))$-结构。换言之，它是 $\mathbb{RP}^2$ 的极大图册，其过渡映射属于 $PGL(3,\mathbb{R})$。

另有一个等价定义。实射影结构是一个对(D,ρ)，其中$D\colon \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{RP}^2$是局部微分同胚，且 $\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to PGL(3,\mathbb{R})$是一个表示，使得 D 是 ρ-等变的，即对所有 $\gamma \in \pi_1(\Sigma)$有 $D \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ D$。映射 D 称为发展映射，而 ρ 为*holonomy* 表示 （见 [Gol3]）。两个射影结构(D_1,ρ_1)与(D_2,ρ_2)等价，如果存在 $\pi_1(\Sigma)$-等变微分同胚$\sim \quad \sim\Phi\colon \Sigma \to \Sigma$ 以及 $A \in PGL(3,\mathbb{R})$，使得 $D_2 = A \circ D_1 \circ \Phi$ 且 $\rho_2 = A \circ \rho_1 \circ A^{-1}$。

本文研究一种称为嫁接的操作，它能够在不改变 holonomy 表示的情况下，根据给定的实射影结构生成一种新的结构。更具体地说，嫁接操作通过沿着一种特定类型的简单闭曲线（称为可嫁接曲线）切开射影曲面，并沿该曲线插入一种特殊类型的环带（例如 Hopf 环带）来实现（见 §2.4）。

D. Sullivan 和 W. Thurston [ST]曾利用嫁接在二维环面上构造实射影结构的例子，其发展映射并非到其像上的覆盖映射。传统上， $\mathbb{RP}^2$-曲面上的可嫁接曲线被认为是简单闭测地线，也就是说，它们在 $\mathbb{RP}^2$中发展为直线段。本文提出可嫁接曲线的拓扑定义。

嫁接之所以重要，是因为具有 Hitchin 全纯的实射影结构与嫁接数据 双射对应，后者由一对 $(\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^n)$ 构成，其中 $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ 是互不相交的简单闭曲线的有限集合，而$\{w_i\}_{i=1}^n$ 是特定权的集合。也就是说，这些权重是写成两个元素 x 与 y的偶指数之积的字，称为完全偶字。Goldman 证明， Σ 上每一个具有 Hitchin 全纯的实射影结构，都可由其相关联的凸实射影结构，通过沿每一条 α_i 嫁接一条对应于 w_i 的环带而得到（见 [Gol1]）。这一操作称为多重嫁接。

与上述实射影结构类似，每个具有福克斯 holonomy 的 Σ 上的 $\mathbb{CP}^1$-结构，都可以通过沿带权多曲线嫁接其关联的双曲结构得到。权重取值于 $\mathbb{Z}_{>0}$，并对应于可用于嫁接的霍普夫环带。因此，多重曲线的定向无关紧要。相比之下，在实射影结构的情形中，权重更为复杂，而且必须考虑嫁接数据（$\{\alpha_i\}_{i=1}^n$,$\{w_i\}_{i=1}^n$）中多重曲线的定向：沿 α_i 插入对应于 w_i 的环带，等价于沿 $\alpha_i{}^{-1}$ 插入对应于某个权重 $w_i{}^*$ 的环带。代数上，$w_i{}^*$ 也可以描述为将 w_i 逆序并交换 x 和 y 后得到的词。我们将嫁接数据（$\{\alpha_i\}_{i=1}^n, \{w_i\}_{i=1}^n$）的权类型 定义为权重 $\{w_1, w_1{}^*, \cdots, w_n, w_n{}^*\}$ 的集合（见定义 5.1）。

在 $\mathbb{CP}^1$-结构的设定下，[CDF] 证明了：任意两个具有福克斯 holonomy ρ 的奇异射影结构之间，至多经过两次多重嫁接的复合即可相互转化。本文对实射影结构得到如下类似结果：

定理 A. 设 σ_1 与 σ_2 为 Σ 上具有相同 Hitchin 全纯的两个实射影结构。此外假设它们对应于权类型相同的嫁接数据。则 σ_2 可由 σ_1 经至多 $6g$ 次多重嫁接的复合得到。

作为直接推论，对给定的奇异射影结构，可通过重复多重嫁接回到该结构本身。为证明此结果，我们具体构造了具有 Hitchin 全纯 ρ的实射影曲面上的可嫁接曲线。该构造采用与 [CDF]中类似的方法。在此过程中，我们得到了如下结果（见命题 3.2）。

定理 B。 设 M 是一个具有 Hitchin 全纯 ρ的实射影曲面。对于任意本质简单闭曲线 β, 在 M 上存在一条与β同伦的可嫁接简单闭曲线。

令 $MG(\rho)$ 为如下定向图：其顶点是具有 Hitchin 全纯 ρ 的射影结构；若 σ_2 可由 σ_1 经过多重嫁接得到，则两个顶点 σ_1 和 σ_2 之间存在一条从 σ_1 指向σ_2 的有向边。主要结果表明，对于 $MG(\rho)$ 的任意两个顶点 σ_1 和 σ_2，如果 σ_1 的权类型以某种意义“包含”于 σ_2的权类型中，则它们之间存在一条从 σ_1 指向 σ_2 的有向边（见推论 6.1）。

我们使用了 Luo [Luo] 提出的、后来由 Ito [Ito 在 §2.5] 中进一步仔细研究的多重曲线上的一些手术操作。不过，在本文中，我们在 §4.1 中引入了新的记号，以避免不必要的复杂性。（见注 4.1。）

本文结构如下。§2 中，我们讨论可嫁接曲线的定义和嫁接过程。§3 中，我们在具有 Hitchin 全纯单值化的非凸实射影曲面上构造可嫁接曲线。该构造给出了定理 B。§4 中，我们描述沿 §3 中构造的曲线对非凸实射影结构进行嫁接所得到的射影结构。§5 中，我们证明定理 A。§6 中，我们构造了一个与权类型相关的$MG(\rho)$模型，该模型反映了其部分连通性。

致谢。作者谨向我的导师 Shinpei Baba 致谢，感谢他多次讨论并给予有益建议。

2. Graftable curves

我们在一般的 $\mathbb{RP}^2$-曲面上定义可嫁接曲线，并描述嫁接过程。对于 $\mathbb{CP}^1$-结构，嫁接见 [CDF, §2]和 [Gol1, §1]。§2.1 中介绍的基本概念基于 [Gol1, §3]。

2.1. 特殊 $\mathbb{RP}^2$-环带和环面。本小节介绍嫁接所用的基本 $\mathbb{RP}^2$-曲面。

一个特殊 $\mathbb{RP}^2$-环带是一个紧致的 $\mathbb{RP}^2$-流形，其测地边界与圆同伦等价。现在我们考虑全纯单值化为（正）双曲的特殊 $\mathbb{RP}^2$-环带，即它有三个互不相同的正特征值。令 $A \in PGL(3,\mathbb{R})$ 为一个双曲变换。A 有三个不动点 p_+, p_-, p_o。与 A 的最大特征值对应的不动点 p_+ 称为吸引点；类似地，与最小特征值对应的 p_- 和与中间特征值对应的 p_o 分别称为排斥点和鞍点。变换 A 恰好保留三条分别经过两个不动点 p_op_+、 p_+p_- 和 p_-p_o 的射影直线，以及由它们围成的三角形区域。

一个初等环带 是特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环带，其内部是双曲变换 A 的一个不变三角形区域的商空间。初等环带具有以下基本性质;

环带分解定理。 设 M 是一个特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环带。那么 M 可分解为初等环带。

Goldman 在 [Gol1 的推论 3.6] 中证明了该定理，并对所有特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环带进行了分类。Choi 的论文也在更一般的情形下介绍了该定理，参见 [Cho2，附录 B]。

一个特殊 $\mathbb{RP}^2$-环面 是一个闭的可定向 $\mathbb{RP}^2$-流形 T ，与环面同胚，并具有一条简单闭测地线 C ，其全纯单值化是双曲变换A，且 T 的全纯单值化表示满射到 $\langle A\rangle$。

通过沿着 C切割 T ，我们得到一个特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环带 $T|C$ 。$T|C$ 分解为基本环带: $T|C = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$。每个基本环带 E_i都由两条简单闭测地线围成，其中一条发展到主直线p_+p_- ，另一条则发展到 p_-p_o 或 p_op_+。我们分别用 V_1、V_2 和 V_3表示 $T|C$ 中发展到 p_op_+、p_+p_- 和 p_-p_o的简单闭测地线。不失一般性，我们可以假设 C 发展到主直线。将简单闭测地线从 $T|C$的一个边界分支到另一个边界分支依次排列，可得到有限序列 V_i （ $i = 1$、2、3）。该序列满足两个约束：（i）不能有 V_i 紧接在自身之后；（ii） V_1 和 V_3不能彼此紧接。此外，该序列以 V_2开头并以其结尾。条件（i）和（ii）意味着该序列具有以下形式：（$V_2V_{i_1}$）$\cdots$（$V_2V_{i_n}$）V_2，其中 i_1、$\cdots$、i_n均为1或3。因此，我们可以将该序列改写为正词w（x、y），其中 x 表示 V_2V_1，而 y 表示 V_2V_3。这个词 w（x、y）由一个

偶数个 x 和偶数个 y 组成，因为这两个边界分支发展到同一条主线段。

我们称字 $w(x,y)$ 是完全偶的，如果它由偶数个 x 与偶数个 y 组成。

定义 2.1. 完全偶字 w 是本原的，如果 w 非平凡，且不存在某个 $n \geq 2$ 与某个完全偶字 w'，使得它可写成 $w = (w')^n$。完全偶字 w 是不可约的，如果 $w = w_1 w_2$ 蕴含 $w_1 = 1$ 或 $w_2 = 1$。

设 ${}^t w$ 表示从右向左读取 w 所得的字，$\overline{w}$ 表示互换 x 与 y 所得的字。我们将 w^* 定义为 ${}^t w = {}^t \overline{w}$。

特殊 $\mathbb{RP}^2$-环面的同构类集合与完全偶字的所有循环等价类集合一一对应。我们将对应于完全偶字 w 的特殊 $\mathbb{RP}^2$-环面记为 T_w^A。

2.2. 嫁接环面。 我们关注 $\mathbb{RP}^2$-曲面 M 上一条可沿其进行嫁接的简单闭曲线 α。设 α 具有双曲 holonomy A。在要求原曲面 M 的全纯单值化保持不变的条件下，我们便考虑满足下列条件的$\mathbb{RP}^2$-环面 T：

(i) 曲线 α 嵌入到 T 中；(ii) 存在一条与 α 恰好相交一次且全纯单值化平凡的简单闭曲线 $\beta \subset T$。

条件 (ii) 等价于 T 的 holonomy 表示满射到 $\langle A \rangle$。

定义 2.2。 嫁接环面 是一个 $\mathbb{RP}^2$-环面，其 holonomy 表示满射到由双曲变换 A 生成的 $\langle A \rangle$。

特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环面是嫁接环面。嫁接环面有一条全纯单值化为 A 的简单闭曲线。

命题 2.3。 嫁接环面可以如下构造：取互素整数 m 和 n，其中包括数对 $(m, n) = (1, 0)$。首先，将一个具有简单闭测地线 C 的特殊 $\mathbb{RP}^2$-环面 T 剖开，该测地线的全纯单值化为 A^m。然后，通过 C 的管状邻域上的一个射影自同构 A^n 重新粘合 $T|C$。

证明。设 T 是一个环面，$p\colon \widetilde{T} \to T$ 是一个万有覆盖。设 $dev\colon \widetilde{T} \to \mathbb{RP}^2$ 是与 T 上的实射影结构对应的开发映射，其全纯单值化是到 $\langle A \rangle$ 的一个满射。假设 $dev(T)$ 与 $\mathbb{RP}^2$ 上由 A 保持的直线 l_1、l_2、$l_3 (l = l_1 \cup l_2 \cup l_3)$ 不相交。我们在 $\mathbb{RP}^2 \setminus l$ 上选取一个由 A 保持的黎曼度量 g，例如在仿射图坐标中选取。于是我们得到 T 上的黎曼度量 g'，使得 $p^* g' = dev^* g$。由于 $\overline{T}$ 是紧的，g' 是完备的，因此 $dev^* g$ 也是完备的。因此，$dev\colon \widetilde{T} \to \mathbb{RP}^2$ 是到一个由 l_1、l_2、l_3 围成的三角形区域上的微分同胚。这意味着 $\pi_1(T) \cong \mathbb{Z}$。这就产生了矛盾。

我们假设相交 $dev^{-1}(l_i)$ 在覆盖变换下保持不变。因此，$p(dev^{-1}(l_i))$ 是 T 中的紧子流形。令 C 为.....的一个连通分支

$p(dev^{-1}(l_i))$。 C 是一条简单闭曲线，其发展像为直线 l_i。 $T|C$ 是一个边界凸的双曲环带。环带分解定理表明， $T|C$可分解为基本环带。

以下结论源于全纯单值化 $\pi_1(T) \twoheadrightarrow \langle A\rangle$;

- 测地线 C的全纯单值化为 $A^m(m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$,
- T 上的实射影结构是通过射影同构 A^n沿 C 粘合 $T|C$ 得到的,
- m并且 n 互质。

□

2.3. 可嫁接曲线。 设 M为一个 $\mathbb{RP}^2$曲面，且 $A \in PGL(3,\mathbb{R})$ 为一个（正的）双曲变换。特殊 $\mathbb{RP}^2$-环面 T 的全纯单值化覆盖空间 $\widehat{T}$是万有覆盖空间 T 关于全纯单值化表示的核的~商空间。 T的 发展映射 $\widetilde{T} \to \mathbb{RP}^2$ 下降为映射 $\widehat{T} \to \mathbb{RP}^2$。

定义 2.4。 α 上的简单闭曲线若满足以下条件，则称为可嫁接的： α 的全纯单值化 A 是双曲的，并且存在一个特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环面 T，其全纯单值化为 $\pi_1(T) \twoheadrightarrow \langle A\rangle$，使得， $\widetilde{\alpha} \subset M$ 是 α的一个提升时，

(i) 存在一个提升 $\widetilde{\sim dev}$: 发展映射在 $\widetilde{\alpha}$上的限制 $\widetilde{\alpha} \to T$，且 (ii) 此提升是单射（嵌入）。

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{dev} \nearrow & \widehat{T} \\ & & \downarrow \\ \widetilde{\alpha} & \xrightarrow{dev} & \mathbb{RP}^2 \end{array}$$

一个可嫁接多重曲线 是由互不相交的可嫁接简单闭曲线组成的多重曲线。

2.4. **沿闭曲线嫁接。**

命题 2.5。 设 α 是 $\mathbb{RP}^2$-曲面 M上的一条可嫁接简单闭曲线。那么， α可射影嵌入嫁接环面。

证明。 存在一个特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环面 T，满足定义中的两个条件 (i)、(ii)。设 $\theta \in \pi_1(M)$ 为对应于 α 的覆盖变换。存在一个射影~自同构 f 作用于全纯单值化覆盖空间 T，使得下图

$$\begin{array}{ccc} \widehat{T} & \xrightarrow{f} & \widehat{T} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{RP}^2 & \underset{A}{\to} & \mathbb{RP}^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\alpha} & \longrightarrow & \widehat{T} \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \widetilde{\alpha} & \longrightarrow & \widehat{T} \end{array}$$

交换。$\langle f\rangle$ 在 T 上自由且不连续地适当作用，并且简单闭曲线 α 可以射影嵌入嫁接环面 $T/\langle f\rangle$。□

注 2.6. 设 α 是一条可嫁接简单闭曲线。存在许多可嫁接环面 α，它们可以射影嵌入于其中。

若 α 是一条可嫁接简单闭曲线，则可以沿 α 进行嫁接，在不改变全纯单值化的情况下构造出另一种射影结构。构造如下（与 [CDF，第 2.2] 节比较；另见 [Gol1，第 1 节和第 4.2] 节）。我们沿简单闭曲线 α 的所有提升 $\widetilde{\alpha}$，切开万有覆盖 Σ。沿每条这样的提升，我们插入一份 $\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ 射影条带 $T\setminus dev(\widetilde{\alpha})$。借助发展映射的提升进行粘合。由此得到一个新的万有覆盖 Σ'，以及一个新的发展映射 $D'\colon \widetilde{\Sigma}'\to\mathbb{RP}^2$；该映射在 $\widetilde{\Sigma}$ 上由 D 定义，在 $\widehat{T}\setminus\widetilde{dev}$ 上则为恒等映射（$\widetilde{\alpha}$）。空间 $\widetilde{\ }$ Σ' 带有由原有作用诱导的自然作用 $\pi_1(\Sigma)$。该作用是自由且适当不连续的，扩展后的发展映射 D' 是 ρ-等变的。因此，这定义了 Σ 上的一种新的实射影结构。

根据命题 2.5，存在射影嵌入 $\widehat{\ }$ 嫁接环面。因此，嫁接可以直接视为在 Σ 中进行的剪切粘贴过程：沿着 α 剪开 Σ，然后将圆柱 $(T/\langle f\rangle)|\alpha$ 粘回去。

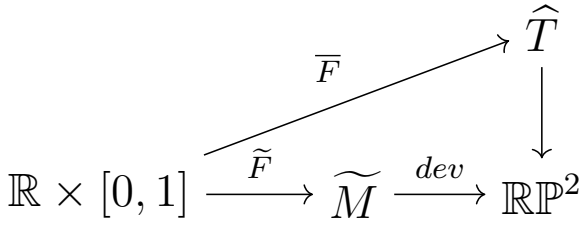
我们将 Σ 上这一新的实射影结构记为 $\mathbf{Gr}(\sigma,(\alpha,T/\langle f\rangle))$.

2.5. **可嫁接曲线的同伦**。

定义 2.7。设 α 和 α' 是实射影曲面 M 上的可嫁接简单闭曲线。

α 如果存在一个特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环面 T 以及一个同伦 $F\colon S^1\times[0,1]\to M$，使得 α 和 α' 作为可嫁接曲线是 同伦的，则

(i) 存在 $dev\circ F$ 的提升，(ii) F_t:
$\mathbb{R}\times\{t\}\to T$ 在每个层级 $t\in[0,1]$ 都是单射。



如果两个可嫁接简单闭曲线 α 和 α' 同伦，那么 α 和 α' 都射影嵌入于同一个嫁接环面 T中。因此，所得的实射影结构 $\mathbf{Gr}(M,(\alpha,T))$ 和 $\mathbf{Gr}(M,(\alpha',T))$ 是等变的。

3. Construction of graftable curves

3.1. 凸几何。在本小节中，我们回顾凸实射影几何的基本概念和结果，并准备下一小节将使用的记号。

区域 $\Omega \subset \mathbb{RP}^2$ 若包含于某个仿射图中，且按通常意义为凸，则称其为凸。若其闭包 Ω 包含于该仿射图中，则称其为适当凸。此外，若 $\overline{\Omega}$ 适当凸且其边界 $\partial\Omega$ 不含任何线段，则称 Ω严格凸。

设 Σ 是一个亏格为 >1 的闭定向曲面。其上的凸实射影结构是一种实射影结构，其发展映射 $dev\colon \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{RP}^2$ 是到 $\mathbb{RP}^2$ 中某个凸域 Ω 上的微分同胚。全纯单值化表示 $\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to PGL(3,\mathbb{R})$ 是一个希钦表示，即它可以变形为忠实且离散的表示。反过来，Goldman 和 Choi [CG] 证明，给定一个希钦表示$\rho\colon \pi_1(\Sigma) \to PGL(3,\mathbb{R})$，存在唯一一个凸实射影结构，其全纯单值化表示为 ρ。此时，Ω 严格凸，且其边界 $\partial\Omega$ 属于类 C^1（见~[Gol2，定理 3.2 (1)]）。万有覆盖 Σ 与 Ω 等同，而曲面 Σ 可实现为商空间 $\Omega/\rho(\pi_1(\Sigma))$。

全纯单值群 $\rho(\pi_1(\Sigma))$ 的每个非平凡元素 A 都是正双曲的（参见 [Cho2，引理 4.3] 以及 [Gol2，定理 3.2 (3)]）。吸引点 p_+ 和排斥点 p_- 位于边界 $\partial\Omega$ 上，而鞍点 p_o 位于 Ω 外部。主直线 p_+p_- 将 Ω 分为两个区域 Ω_+ 和 Ω_-，它们由 Ω 中主线段的定向决定。有四个三角形区域 $\triangle_k^A(k=1、2、3、4)$ 在 A 作用下保持不变，因此 $\Omega_+ \subset \triangle_1^A$、$\Omega_- \subset \triangle_4^A$、$\triangle_1^A \cap \triangle_2^A \subset p_op_+$、$\triangle_3^A \cap \triangle_1^A \subset p_-p_o$；见图 1。我们用 $\overrightarrow{l_i^j}$ 表示连接两个不动点、位于 $\triangle_i^A \cap \triangle_j^A$中的（开）线段。我们定义由 $\overrightarrow{\triangle_k^A}$和 $\overrightarrow{l_i^j}$的副本构成的六边形区域 $H_{\pm *}^A$：

$$
\begin{aligned}
H_{+xx}^A &= l_4^1 \cup \triangle_1^A \cup l_1^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^4 \cup \triangle_4^A,\\
H_{-xx}^A &= l_1^4 \cup \triangle_4^A \cup l_4^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^1 \cup \triangle_1^A,\\
H_{+xy}^A &= l_4^1 \cup \triangle_1^A \cup l_1^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^1 \cup \triangle_1^A,\\
H_{-xy}^A &= l_1^4 \cup \triangle_4^A \cup l_4^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^4 \cup \triangle_4^A,\\
H_{+yy}^A &= l_4^1 \cup \triangle_1^A \cup l_1^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^4 \cup \triangle_4^A,\\
H_{-yy}^A &= l_1^4 \cup \triangle_4^A \cup l_4^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^1 \cup \triangle_1^A,\\
H_{+yx}^A &= l_4^1 \cup \triangle_1^A \cup l_1^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^1 \cup \triangle_1^A,\\
H_{-yx}^A &= l_1^4 \cup \triangle_4^A \cup l_4^2 \cup \triangle_2^A \cup l_2^3 \cup \triangle_3^A \cup l_3^4 \cup \triangle_4^A.
\end{aligned}
$$

严格凸域 Ω 带有一种自然度量，称为希尔伯特度量。对于两个不同的点 $x,\ y \in \Omega$，设 l 为经过 x 和 y的直线，且设 $a,\ b \in \partial\Omega$ 为

l 与边界的交点，按顺序排列，使得 a， x， y， b 依次位于 l 上。 d_H 与 x 之间的希尔伯特距离定义为

$$d_H(x,y) = \frac{1}{2}[a,x,y,b],$$

其中 $[a,x,y,b]$ 表示四个共线点的交比。由于 Ω 的射影自同构保持 d_H，Ω 上的希尔伯特度量便下降为凸实射影曲面 $\Sigma = \Omega/\rho(\pi_1(\Sigma))$ 上的度量。曲线 α 在 Σ 上是测地线，当且仅当 α 在万有覆盖 Ω 中的每个提升都是一条线段。每个非平凡自由同伦类都由唯一一条闭测地线表示。此外，如果闭测地线 α 与一条简单闭曲线同伦，那么 α 就是简单的。任意两条简单闭测地线（或多重测地线）都处于极小位置，即在其自由同伦类中实现可能的最少交点数。（参见 [Gol2, §3.5]）

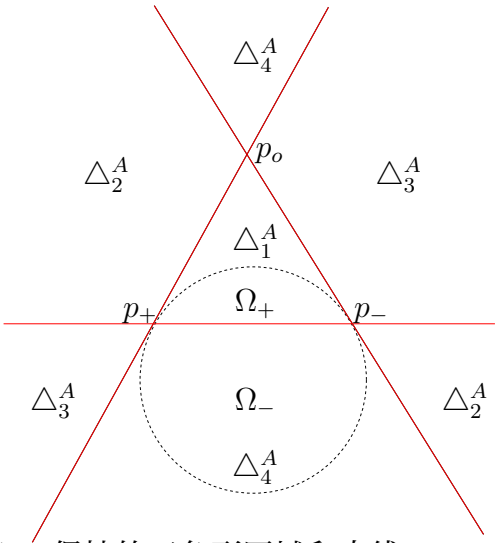


FIGURE 1.双曲变换 A保持的三角形区域和直线。

3.2. 具有 Hitchin 全纯的实射影结构。 我们用 σ_c 表示曲面 $\Sigma_c = \Omega/\rho(\pi_1(\Sigma))$上对应于 Hitchin 表示 ρ的凸实射影结构： $\pi_1(\Sigma) \to PGL(3,\mathbb{R})$。该结构 σ_c的发展映射是到凸域 $\Omega \subset \mathbb{RP}^2$上的微分同胚。因此，任何具有双曲 holonomy $A \in PGL(3,\mathbb{R})$的简单闭曲线 α都是可嫁接的，并且可以射影嵌入到任意特殊 $\mathbb{RP}^2$-环面 T_w^A中。此外，嫁接 $\mathbf{Gr}(\sigma_c,(\alpha,T_w^A))$仅依赖于 α 作为一条曲线的同伦类。

定理 (Goldman [Gol1]). 每一个具有 Hitchin 全纯 ρ的实射影结构 σ 都是通过沿多重曲线 $\alpha = \{\alpha_i\}$嫁接凸结构 σ_c 而得到的。

这族简单闭曲线与不可约完全偶字组成的配对可以一一由 σ 重构如下：令 $\mathbb{RP}^2$ 为 $\mathbb{RP}^2$的双重覆盖。由于 Σ是可定向的，

⁀实射影结构 σ 可以提升为（$\mathbb{RP}^2$， $SL(3,\ \mathbb{R})$)-结构。Σ上的平坦
⁀ ⁀$\mathbb{RP}^2$丛 $\mathcal{E}_\sigma$
分解为两个子丛：Ω 丛 $\mathcal{E}_\sigma^+$和（$\mathbb{RP}^2\setminus\Omega$）-⁀丛 $\mathcal{E}_\sigma^-$，因为全纯单值群保持分解 $\mathbb{RP}^2=\Omega\cup(\mathbb{RP}^2\setminus\Omega)$。发展截面 $\mathcal{D}_\sigma$： $\Sigma\to\mathcal{E}_\sigma$ 将 Σ 分解为子曲面 $\Sigma^+=\mathcal{D}_\sigma{}^{-1}(\mathcal{E}_\sigma^+)$和 $\Sigma^-=\mathcal{D}_\sigma{}^{-1}(\mathcal{E}_\sigma^-)$。Goldman 通过计算平坦丛 $\mathcal{E}_\sigma$的欧拉类证明， Σ^-的每个分支都必须是一个环带。

现在考虑一组互不相交的 α_i 同伦非平凡简单闭曲线，即一个多重曲线的同伦类。对每个 i ，选取一个不可约完全偶词 w_i。我们称这样一组 $\eta=(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n,\ w_1,\ \cdots,\ w_n)$为一组嫁接数据，并将嫁接数据的集合记为 $\mathcal{GD}$。两组嫁接数据（$\alpha_i,\ w_i$）和（${\alpha_i}^{-1},\ {w_i}^*$）等价。具有 Hitchin 全纯群的实射影结构 ρ 与嫁接数据 $\mathcal{GD}$一一对应。我们将与嫁接数据 $\eta\in\mathcal{GD}$相对应、全纯单值化为ρ的实射影结构记为$\mathbf{Gr}^\eta$。

3.3. 可嫁接多重曲线的构造。给定有限指标集 I的一组嫁接数据 $\eta=(\{\alpha_i\}_{i\in I},\ \{w_i\}_{i\in I})$。本节给出一种构造：对于两条同伦横截的多重曲线 $\alpha=\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 和 $\beta=\{\beta_j\}_{j\in J}$，构造一条可嫁接多重曲线$\beta_R$，$\beta_L$，使其在$\mathbf{Gr}^\eta$ 中与 β同伦。

我们将主要说明 β_R 的构造； β_L 的构造与 β_R 的类似，将在最后讨论。如果 α_{i_1} 和 α_{i_2} 平行，那么我们可以将 w_{i_1} 和 w_{i_2} 相乘。这样一来，我们可以假设 α 不含平行环。首先假设多重曲线 β 也不含平行环。在这种情况下，可以假设 α 和 β 的每个分支都是简单闭测地线。回想一下，$\mathbf{Gr}^\eta$ 是通过将 $\Sigma_c|\alpha$ 与一些嫁接环带粘合而得到的。

$\Sigma_c|\alpha$ 的边界由 α_i 中每条曲线的两个副本 α_i' 和 α_i'' 组成，并且 $p\in\alpha_i\cap\beta$ 中每个点都有两个副本 $p'\in\alpha_i'$ 和 $p''\in\alpha_i''$。我们固定一个小的正数 ϵ，考虑点 $p_R'\in\alpha_i{}'$ 和 $p_R''\in\alpha_i{}''$：它们分别位于 p' 和 p'' 上，距 p 右侧的距离为 ϵ（相对于希尔伯特度量）。

现在， $\beta\cap(\Sigma_c|\alpha)$ 是由连接$\Sigma_c|\alpha$边界上各点的测地线段 $[p,q]$ 组成的。我们将 $\Sigma_c|\alpha\subset\Sigma$ 中的 β_R 定义为线段 $[p_R,q_R]$ 与上文构造的 p_R 和 q_R的并。注意，只要 ϵ 足够小，线段 $[p_R,q_R]$ 就彼此不相交。

接着，我们在嫁接环带中定义多重曲线 β_R。首先，假设 β与 α_i 相交一次。不失一般性，我们可以假设 β 和 α_i 与 Σ 的定向相容地相交。沿 α_i 插入的嫁接环带对应于完全偶字 w_i，并分解为八种特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环带$F_{\pm xx}^{\alpha_i}$， $F_{\pm xy}^{\alpha_i}$， $F_{\pm yy}^{\alpha_i}$和 $F_{\pm yx}^{\alpha_i}$：令 $A_i=\rho(\alpha_i)\in PGL(3,\ \mathbb{R})$。每个环带 $F_{\pm *}^{\alpha_i}$分解为四个基本环带，并对应于指标字 $*$。诱导的发展映射映到一个六边形区域 $H_{\pm *}^{A_i}$，如第 3.1 小节所述。

在每个环带 $F_{\pm *}^{\alpha_i}$ 中，按照下图图 2（图 3）所示构造一条简单弧。

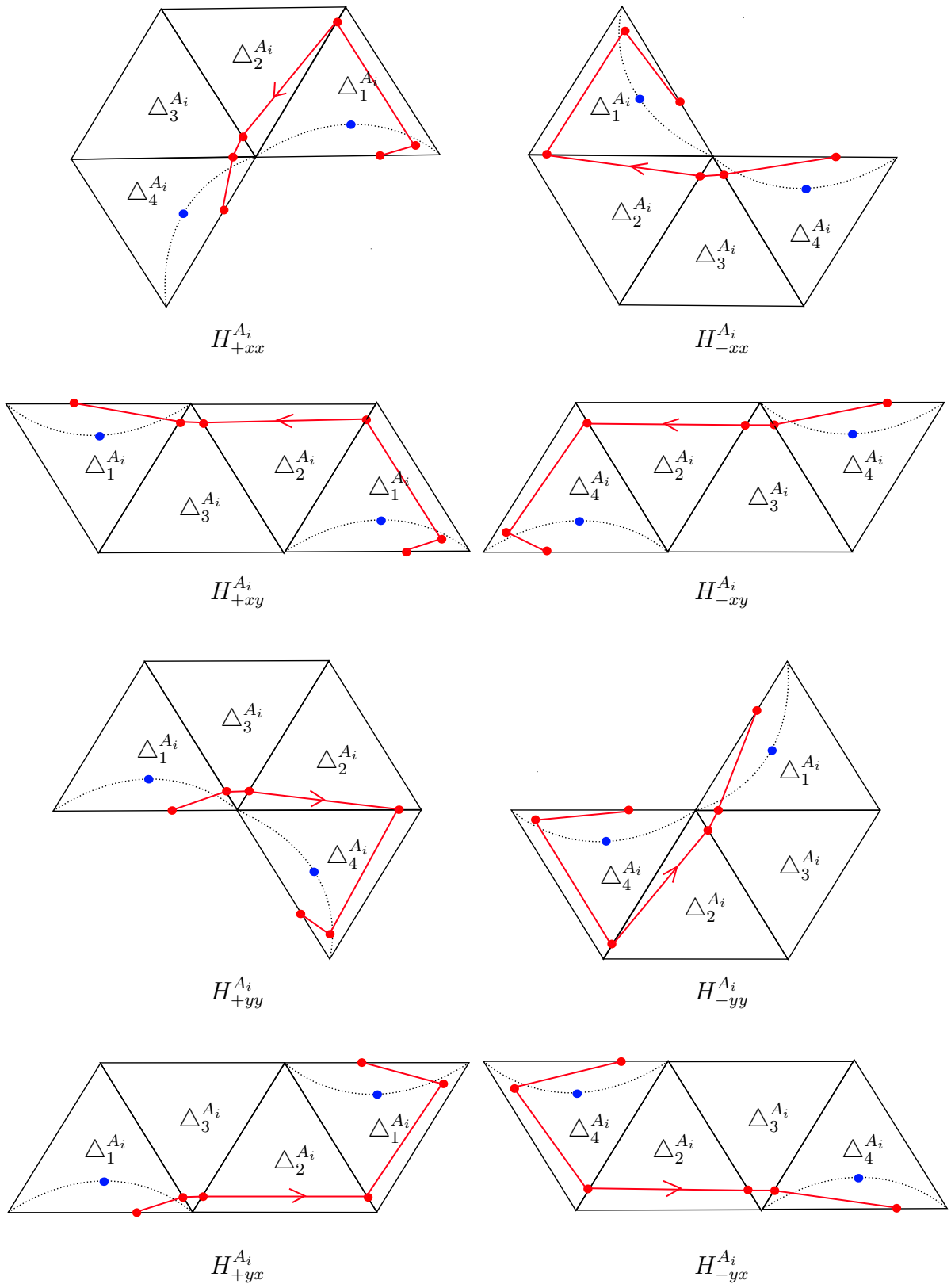


FIGURE 2. β_R 嫁接环带（红线）中的情况。蓝点是 $\rho(\beta_j)$ 的不动点。

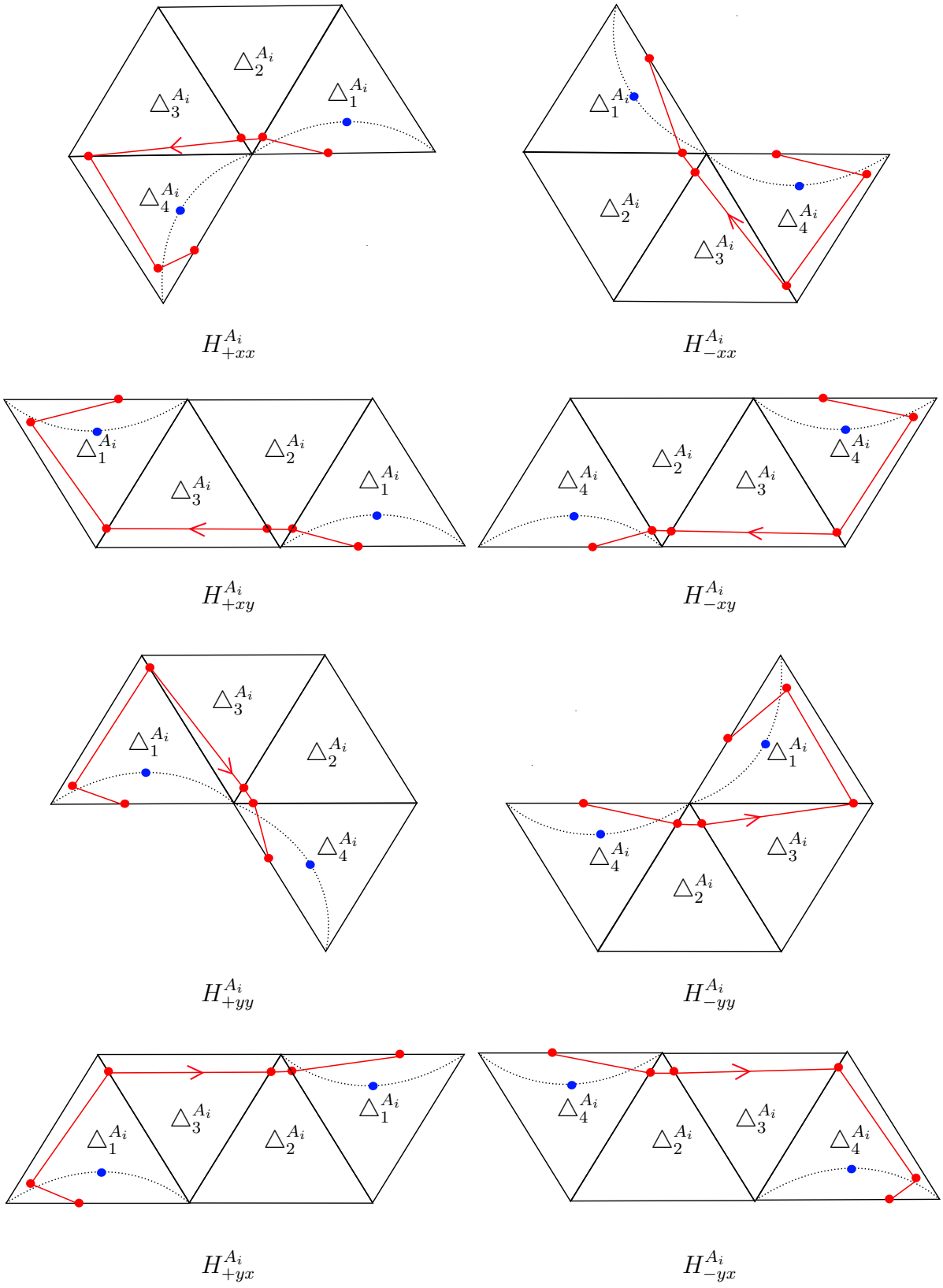


FIGURE 3. β_L 位于嫁接环带（红线）中。蓝点是 $\rho(\beta_j)$的不动点。

然后，通过连接这些弧，便可在嫁接环带中得到连接 p'_R 和 p''_R 的 β_R。

现在我们验证上述构造的 β_R 是可嫁接多曲线。由于各分支互不相交，只需验证 β_R 的每个分支 $(\beta_j)_R$ 都是可嫁接的。更具体地说，我们将证明如下结论。首先，为 β 与 α_i 的每个交点赋予一个权重：如果 α_i 和 β 在该点附近的定向与曲面 Σ 的定向一致，则赋予 w_i；否则，如图 4 所示，赋予 w_i^*。

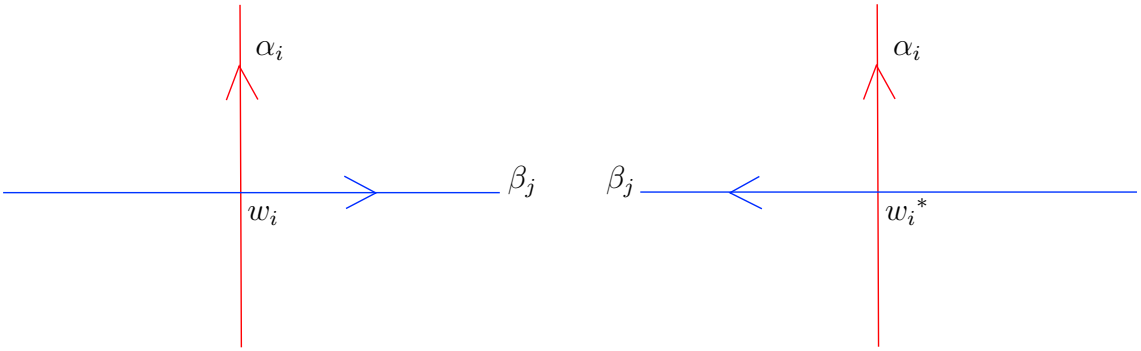


FIGURE 4. 沿着 β_R的赋权方案。

然后，沿着 β_j，按照交点出现的顺序将权重相乘，并将所得的完全偶字记为 $\widehat{\tau_j}$。设 τ_j 是满足 $\widehat{\tau_j} = {\tau_j}^n$ 的本原完全偶字，其中某个 $n \geq 1$。我们希望证明

(1) $(\beta_j)_R$ 是简单的，(2) 存在到 $T^{\rho(\beta_j)\tau_j}$ 的、限制在$\widetilde{(\beta_j)_R}$上的发展映射的提升。(3) 该提升是单射。

(1) 嫁接环带由基本环带组成。因此，我们将验证初等环带中的每条弧 γ 是简单的。γ 在每个三角形 $\triangle_k^{A_i}$中的提升由连接 $\mathbb{RP}^2$中的线段构成。这些线段在 $\triangle_k^{A_i}$中延长时均与主线段相交，见图2。这意味着γ 到万有覆盖的提升彼此不相交，因而 γ 是一条简单弧。

(2) 设 $\widehat{\tau_j} = B_j$。$H^{B_j}_{\pm *}$ 的基本的并。纯单值化覆盖的发展像如图5所示。图5表明它可以提升到 $H^{B_j}_{\pm *}$。

(3) 三角形区域 $\triangle_1^{A_{i_1}}$与 $\triangle_1^{A_{i_2}}(i_1 \neq i_2)$不相交。同样，三角形区域 $\triangle_4^{A_{i_1}}$与 $\triangle_4^{A_{i_2}}$也互不相交。因此，我们可以通过同伦使

$\widetilde{(\beta_j)_R}$到 $T^{B_j}_{\tau_j}$的提升是单射嵌入的。

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$ $T^{B_j}_{\tau_j}$中的简单弧的提升两两不相交，见图5。这意味着

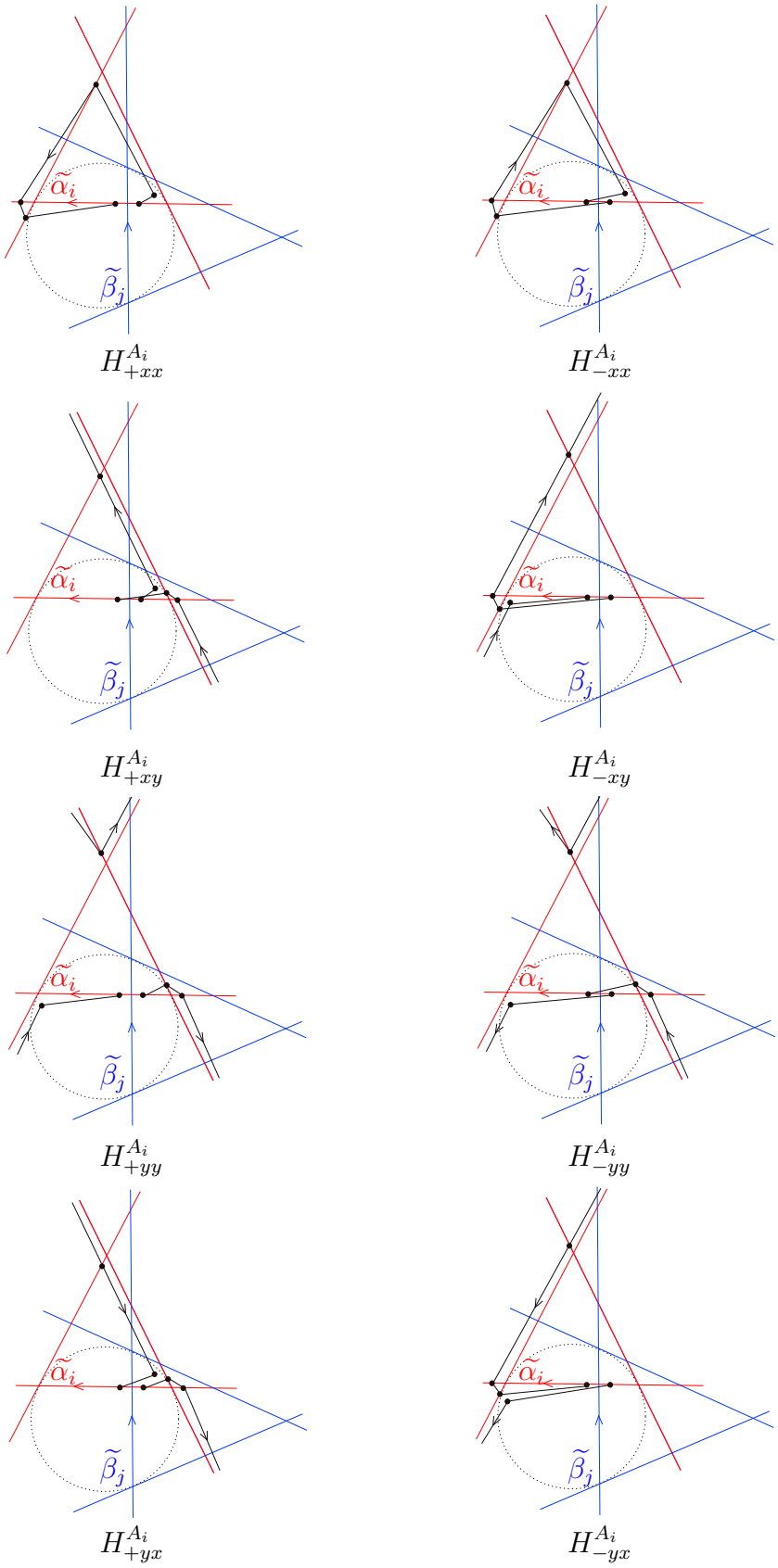


FIGURE 5. 嫁接环带中的 β_R 发展像。

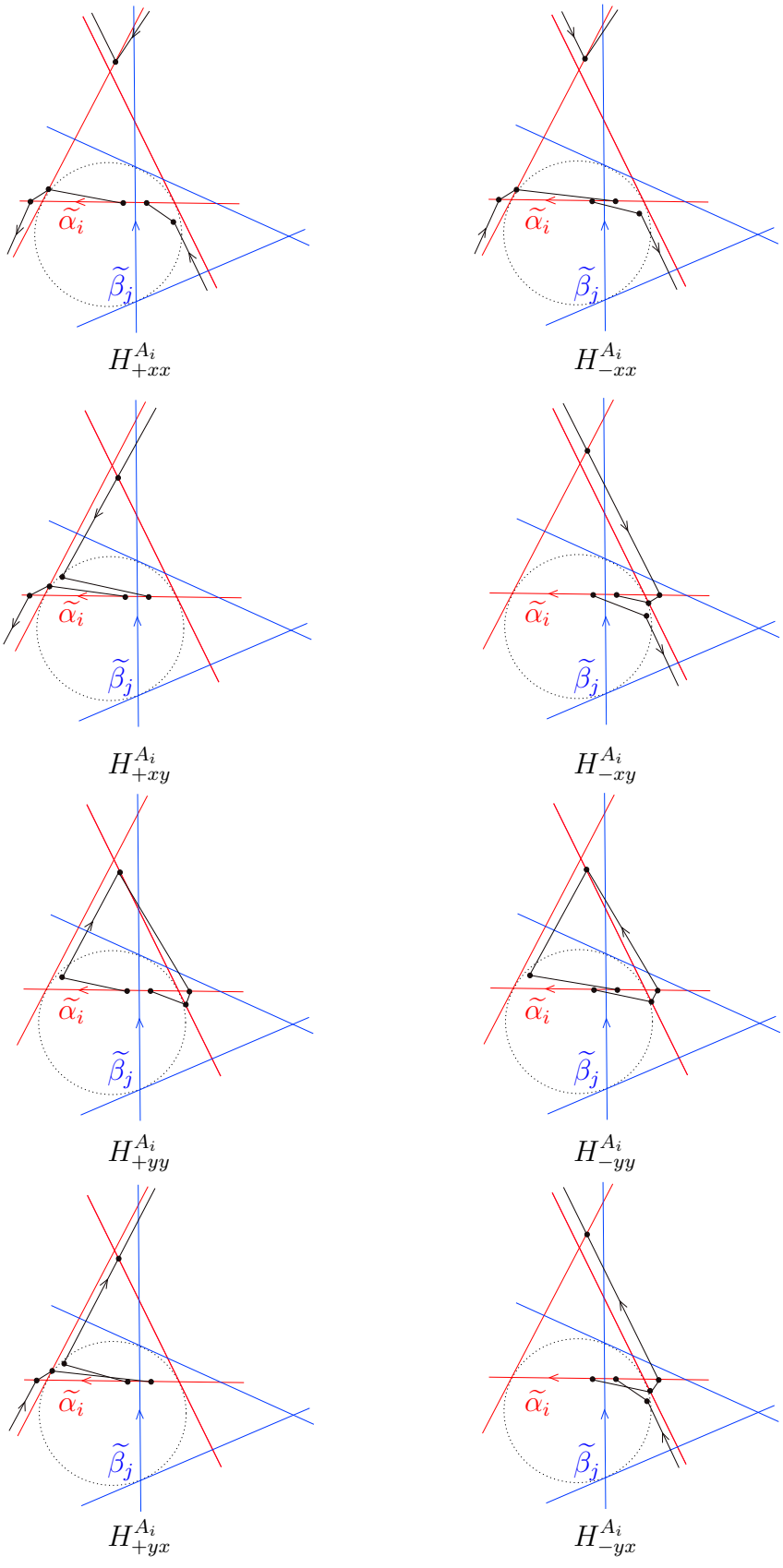


FIGURE 6. β_L 在嫁接环带中的发展像。

下面解释多重曲线 β 与 α_i 相交于多个交点时的构造。令 $\{p_l\}$ 为 α_i 与 β的交点集合。然后像之前一样构造点 $(p_l)'_R$和 $(p_l)''_R$ 。每条连接嫁接环带中相应点的简单弧，其构造方式与 β 和 α_i 在一点相交时相同。类似地，在 β 与 α 的每个交点处赋予权重，并将沿每个分支 β_j 的权重相乘，其中 β。对于本原完全偶字 τ_j，将所得权重记为 ${\tau_j}^n$ 。可以证明以下条件;

- 存在一个提升至 $\widehat{T^{\rho}{}_{(\beta_j)}{}^{\tau_j}}$ 的提升，其中发展映射限制在$\frown\!\!\!\!\!\!\sim(\beta_j)_R$上，
- 该提升是单射的。

一个关键观察是， β_R 是互不相交的简单闭曲线的并。特别地，我们将验证在 $F^{\alpha_i}_{\pm *}$ 中构造的弧彼此不相交。在图 7中，我们勾画了 β_R 在 $F^{\alpha_i}_{+xx}$ 中的情形，其中有两个交点。

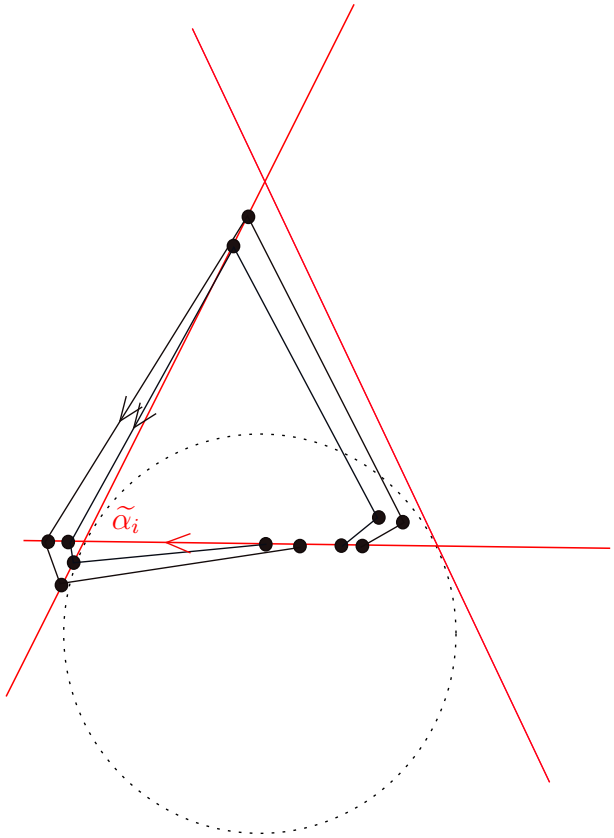


FIGURE 7. 第 在 β 与 α_i 相交于两点的情况下， $F^{\alpha_i}_{+xx}$ 中 β_R 的提升。

$H^{A_i}_{\pm *}$ 中的简单弧的提升彼此不相交，因此，这些弧投影到 $F^{\alpha_i}_{\pm *}$时也彼此不相交。因此，β_R 是一条多重曲线。

最后，如果 β 有一些与 β_j平行的分支，那么我们对 β_j的每个副本都进行上述构造。然后，我们可以通过一个小的同伦移动它们，使它们不再重叠，并将它们并排排列。

β_L 的构造与 β_R的构造类似。我们考虑分别位于p 左侧、距两份副本 $p' \in \alpha'$ 和 $p'' \in \alpha''$ 为 ϵ 的点 $p'_L \in \alpha'_i$ 和$p''_L \in \alpha''_i$。然后，通过连接图 3 中的弧，我们在嫁接环带中得到连接p'_L 和p''_L 的 β_L 。 $H^{A_i}_{\pm *}$ 中每条简单弧的发展像如图 6 所示。我们可以验证，β_L 是一个多重曲线，并且对每个 $j \in J$，发展映射在$\frown\!\!\!\!\!\!\frown(\beta_j)_L$上的限制有一个到$\frown\!\!\!\!\!\!\frown T^{\rho}_{(\beta_j)}\tau_j$的单射提升。

注3.1。 每个分支（β_j）$_R$、（β_j）$_L$ 都可以分别射影嵌入到特殊$\mathbb{RP}^2$-环面 $T^{\rho(\beta_j)\tau_j}$、 $T^{\rho}{}_{(\beta_j)}\tau_j$ 中。因此，尽管β_R和 β_L同伦，但作为可嫁接多重曲线时，它们并不同伦。

最后，我们证明了以下结论。

命题 3.2. 设 $\eta = (\{\alpha_i\}_{i\in I}, \{w_i\}_{i\in I})$ 为一组嫁接数据。给定两条同伦横截的多重曲线 $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in I}$和 $\beta = \{\beta_j\}_{j\in J}$，按照上文所述，为 β 和 α 的每个交点赋予权重，并沿 β 的每个分支 β_j将权重相乘。对于本原完全偶字τ_j，将得到的权重记为 ${\tau_j}^n$ 。那么，存在一条可嫁接多重曲线 β_R ，并且 β_L 在$\mathbf{Gr}^\eta$ 上与 β 同伦，使得每个分支 $(\beta_j)_R$、$(\beta_j)_L$ 分别可以射影嵌入到特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环面 $T^{\rho}{}_{(\beta_j)}\tau_j$, $T^{\rho(\beta_j)\tau_j}$中。 —

4. 沿曲线嫁接

我们分析　上一节构造的可嫁接曲线上的嫁接 .

4.1. 嫁接数据上的运算。 给定嫁接数据 $\eta = (\{\alpha_i\}_{i\in I},\ \{w_i\}_{i\in I})$ 以及一条与 $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ 同伦横截的多重曲线 $\beta = \{\beta_j\}_{j\in J}$ ，我们将得到新的嫁接数据 $\eta\#_R\beta$ 和 $\eta\#_L\beta$。

在每个交点 $p \in \alpha_i \cap \beta_j$ 处，选取点 p_N，$p_S \in \alpha_i$ 和 p_W，$p_E \in \beta_j$，使其充分靠近 p，从而这四个点按逆时针顺序依次为 p_N、p_W、 p_S 和 p_E。此外，安排构造，使 β_j 的方向（定向）与从 p_W 指向 p_E 的方向相同。通过若干弧连接这些点，构造一条多重曲线。这条多重曲线由三类弧组成：**(i)** α 的子弧，**(ii)** β 的子弧，以及 **(iii)** 其他弧。

(i) 令 p_Np_S 为 α_i 上经过点 p 连接 p_N 和 p_S 的子弧。考虑补集 $\alpha_i \setminus \bigcup p_Np_S$，即可得到所需的子弧；该补集是连接 α_i 上相邻点的一组子弧。

(ii) 与 β_j 相交的 α 的分支，沿 β_j 的定向依次排列为α_{i_0}、α_{i_1}、$\cdots$、$\alpha_{i_{n-1}}$。我们将它们各自的交点记为 p_{i_0}、p_{i_1}、$\cdots$、$p_{i_{n-1}}$。与上一节一样，我们为 β_j 和 α的每个交点p_{i_k} 赋予一个权重，然后沿 β_j将这些权重相乘。所得权重是 τ_j的幂，其中 τ_j 是

完全偶字。假设 τ_j 分解为若干个不可约完全偶字 m 的乘积。对于每个 k，我们将用 β_j 的一段子弧连接$(p_{i_k})_E$ 和$(p_{i_{k+m}})_W$，且该子弧不包含 p_{i_k}或$p_{i_{k+m}}$。

(iii) 对于 α 与 β的每个交点 p，我们按如下方式处理。为构造 $\eta\#_R\beta$，如图 8 右侧所示，我们将 p_N 与 p_W 相连，并将 p_S 与 p_E 相连。为构造 $\eta\#_L\beta$，则如图 8 左侧所示，我们将 p_N 与 p_E 相连，并将 p_S 与 p_W 相连。

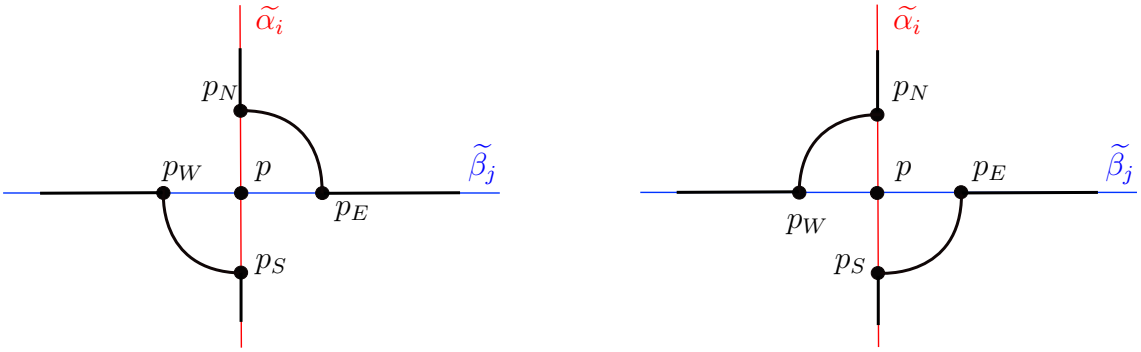


FIGURE 8. $\eta\#_R\beta$ 的子线段（右侧），以及 $\eta\#_L\beta$ 的子线段（左侧）。

构造出的曲线由无向简单闭曲线组成。我们按如下方式为每条这样的简单闭曲线 γ 赋予定向和权重。取 α 中与 γ相交的一个分支 α_i，为其赋予与 α_i相容的定向，并赋予权重 w_i。不难验证，这种赋值是良定义的。通过同伦对构造出的曲线作轻微扰动，我们得到了新的嫁接数据。

注 4.1。如果忽略嫁接数据中的权重，运算 # 可视为 Luo],[Ito] 引入的、仅作用于多重曲线上的一种拓扑运算。事实上，考虑一条多重曲线，其中对每个 $j \in J$ 都包含 m 条平行的简单闭曲线 β_j。对这条多重曲线施行拓扑运算，并与 α 配合，所得结果与 $\eta\#\beta$ 相同。

4.2. 沿 β_R 和 β_L 嫁接。设 $\eta = (\{\alpha_i\}_{i\in I}, \{w_i\}_{i\in I})$ 是一组嫁接数据，M 是与 η 对应、具有 Hitchin 全纯单值化 ρ 的 $\mathbb{RP}^2$-曲面。回顾一下，在上一节中，对于任意与 $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ 同伦横截的多重曲线 β，我们构造了可嫁接的多重曲线 β_R 和 β_L，它们分别与 β 同伦。此外，每个分支 $(\beta_j)_R$、$(\beta_j)_L$ 分别射影嵌入特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环面 $T^{\rho}(\beta_j)$ τ_j, $T^{\rho(\beta_j)}$ τ_j 中。本节中，沿 β_R 和 β_L 嫁接时，我们将使用这个特殊的 $\mathbb{RP}^2$-环面。因此，我们将 $\mathbf{Gr}(M, ((\beta_j)_R, T^{\rho}(\beta_j)\tau_j)_{j\in J})$ 简写为 $\mathbf{Gr}(M, \beta_R)$。类似地，我们将 $\mathbf{Gr}(M, ((\beta_j)_L, T^{\rho}(\beta_j)\ \tau_j)_{j\in J})$ 简写为 $\mathbf{Gr}(M, \beta_L)$。

我们将$\mathbf{Gr}(M, \beta_R)$和$\mathbf{Gr}(M, \beta_L)$描述为对凸实射影曲面的嫁接。回想一下，我们用$\mathbf{Gr}^{\eta}$表示与嫁接数据 η 对应的射影结构。

命题 4.2。给定嫁接数据 $\eta = (\{\alpha_i\}_{i\in I}, \{w_i\}_{i\in I})$，以及一条与 $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ 同伦横截的多重曲线 β，令 β_R 和 β_L 表示上一节构造在 $\mathbf{Gr}^{\eta}$ 上的可嫁接多重曲线。那么，

$$\mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}_\eta, \beta_R) = \mathbf{Gr}_{\eta \#_R \beta},$$
$$\mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}_\eta, \beta_L) = \mathbf{Gr}_{\eta \#_L \beta}.$$

证明。 我们描述射影结构 $\sigma' = \mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}_\eta, \beta_R)$ 的嫁接环带。$\mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}_\eta, \beta_L)$ 的嫁接环带的描述类似。

首先，通过对$j \in J$应用归纳法，我们可以假设 β 是一条简单闭曲线。我们用 Ω 表示 Σ_c的万有覆盖的发展像。

首先属于我们选择我们按照与 $\widetilde{\beta}$ 的交点顺序，将 α 中 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$与 β 相交的分支的提升标记为 $\{\widetilde{\alpha}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$。若 Σ 为与射影结构 $\sigma = \mathbf{Gr}_\eta$对应的实射影曲面 $\widetilde{\ }$，则通过将嫁接环带 $T^{\rho(\alpha_i)}{}_{w_i} \setminus \widetilde{\alpha}_i$的万有覆盖

$\frown$ $\frown$粘合到 $\widetilde{\Sigma_c} \setminus \bigcup \widetilde{\alpha}_i$上，构造出 Σ，同时也构造出发展映射 $D\colon \widetilde{\Sigma} \to \mathbb{RP}^2$。这些嫁接区域称为气泡，见图 9。

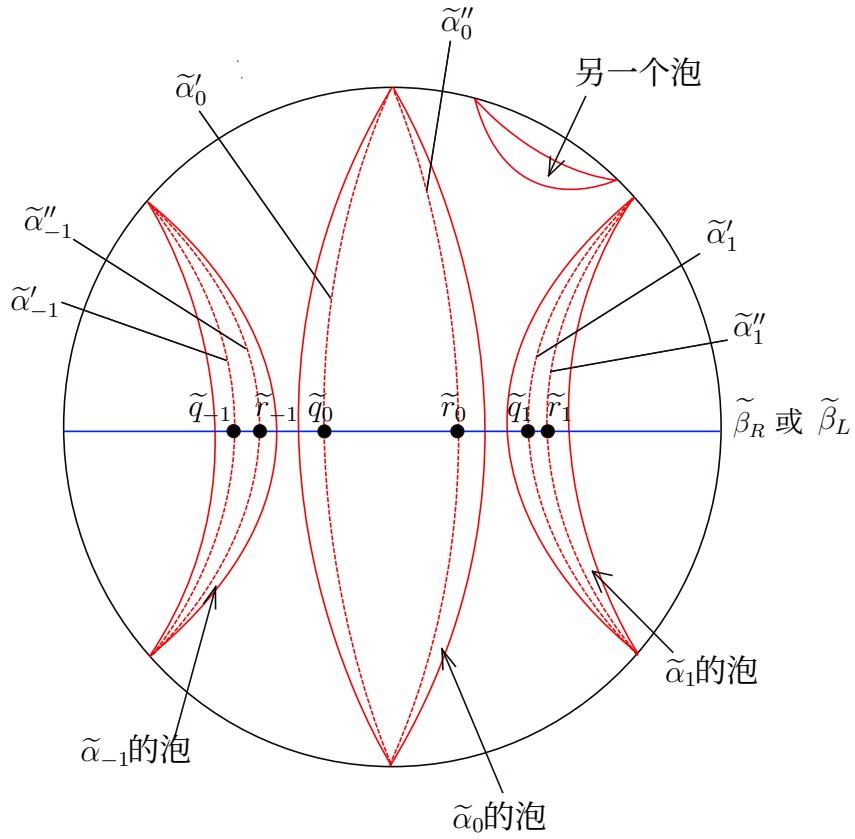


FIGURE 9. Σ的万有覆盖

在每个气泡中，沿着 β 的方向，有 $D^{-1}(\partial\Omega)$的两个分支，记为 $\widetilde{\alpha}_i'$ 和 $\widetilde{\alpha}_i''$。曲线 β_R 依次与这些曲线 $\widetilde{\alpha}_i'$ 和 $\widetilde{\alpha}_i''$ 相交。对于每个 i，我们将 $\widetilde{\alpha}_i'$ 与 β_R 的交点记为 $\widetilde{q}_i$。类似地，我们将 $\widetilde{\alpha}_i''$ 与 β_R 的交点记为 $\widetilde{r}_i$。

让我们更仔细地分析射影结构 $\sigma' = \mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}^{\eta}, \beta_R)$。与 σ' 相对应的实射影曲面的万有覆盖 $\widetilde{\Sigma}'$ 是通过沿着 Σ 中的 $\widetilde{\beta}_R$ 切开 Σ，并粘合一份 $T^{\rho(\tau)}(\beta) \setminus \widetilde{D}$ 得到的。令 D': $\widetilde{\Sigma}' \to \mathbb{RP}^2$ 为 σ' 的发展映射。我们有 β_R: β_R^R 的两个副本 β_R^R 和 β_R^L，其中 β_R^R 是泡在其右侧的边界分支。令 $\widetilde{q}_i^R$ 和 $\widetilde{q}_i^L$ 分别为位于β_R^R 和β_R^L 中的、与 $\widetilde{q}_i$ 对应的点。类似地，令 $\widetilde{r}_i^R$ 和 $\widetilde{r}_i^L$ 分别为位于 β_R^R 和 β_R^L 中的、与 $\widetilde{r}_i$ 对应的点。

如果 τ 分解为 m 不可约完全偶字，那么 $D'^{-1}(\partial\Omega)$中β_R 的泡由 $\widetilde{q}_i^L\widetilde{q}_{i+m}^R$ 和 $\widetilde{r}_i^L\widetilde{r}_{i+m}^R$ 线段组成。我们在图 10 中展示了泡 β_R 中的线段，该泡展开为 $\partial\Omega$。

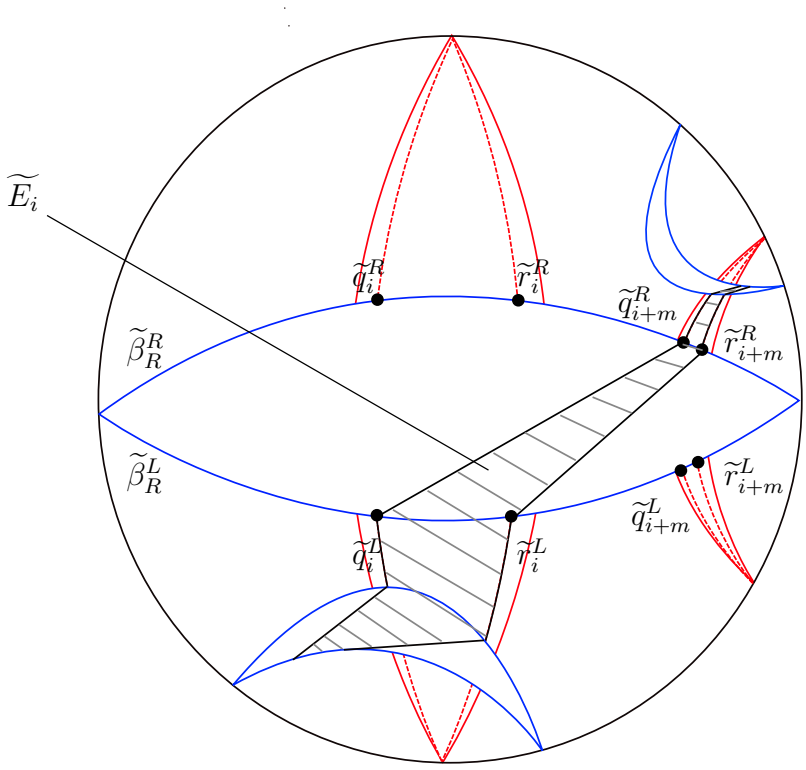


FIGURE 10. Σ' 对应于射影结构 $\eta\#_R\beta$的万有覆盖：阴影区域 $\widetilde{E_i}$ 展开为 $\mathbb{RP}^2 \setminus \Omega$。

因此，$D'^{-1}(\partial\Omega)$ 是通过连接这些线段和 $\widetilde{\alpha}_i'$, $\widetilde{\alpha}_i''$ 构造的。容易看出，$D'^{-1}(\mathbb{RP}^2 \setminus \Omega)$ 是由曲线 $D'^{-1}(\partial\Omega)$ 围成的区域。

最后，我们将计算嫁接环带上的权重。令 $D'^{-1}($ 的每个分支 $\widetilde{\mathbb{RP}^2\setminus\Omega)}$ 与 β_R 的泡相交，并包含点 $\widetilde{q_i^L}$ 和 $\widetilde{r_i^L}$ 的曲线记为 E_i。$\widetilde{\ }$ 我们用 E_i 表示由 E_i 覆盖的曲面 Σ' 上的嫁接环带。我们为 ∂E_i 赋予与 α_i 相容的定向。现在我们将计算嫁接环带 E_i 的权重。曲线 $\beta_R^L \cap E_i$ 与发展为 $\rho(\partial E_i)$ 的不变 $\widetilde{\ }$ 直线的简单闭曲线横截相交。$\rho(\partial E_i)$ 的轴（主直线）与 $\widetilde{\alpha_i}$ 和 β 均相交，如下方图 11 所示。

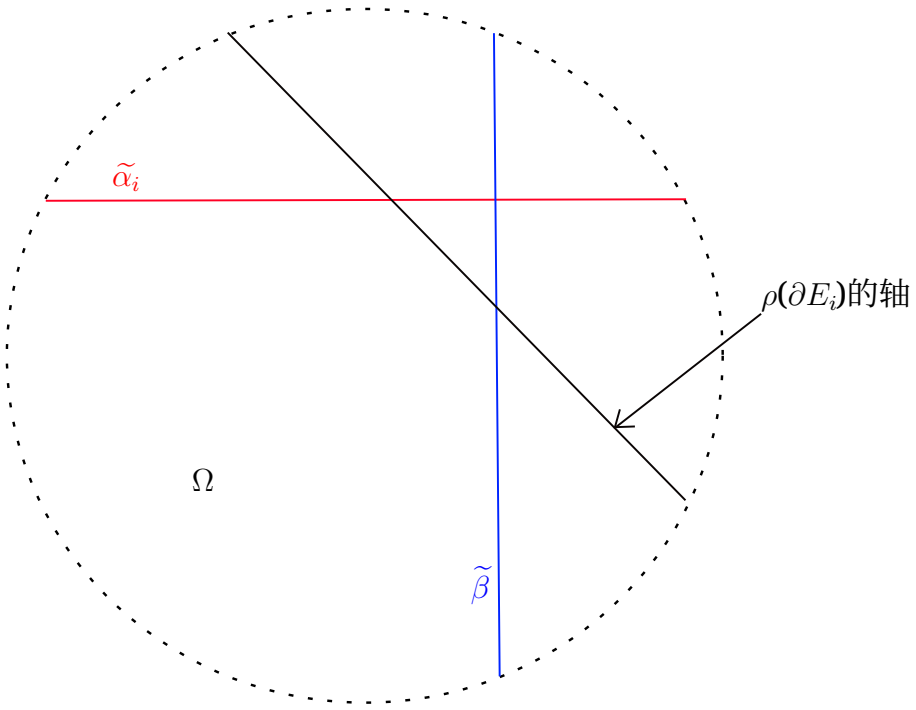


FIGURE 11. $\rho(\partial E_i)$的轴

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 通过观察 $\beta_R^L \cap E_i$ 的发展像，并依次记录其与 $\rho(\partial E_i)$ 的不变直线的交点，我们可以验证 E_i 的权重为 w_i。□

注 4.3. 我们可以通过沿着 $(\beta_j)_R$、$(\beta_j)_L$ 嫁接 $T^{\rho}{}_{(\beta_j)^{\tau_j}}$，$T^{\rho}{}_{(\beta_j)^{\tau_j}}$ 的 n_j 重覆盖，分别对每个 $j \in J$，得到另一种射影结构 σ''。在这种情况下，我们不考虑 β，而是对每个 $j \in J$，考虑由 n_j 条与 β_j 平行的曲线组成的多重曲线，然后应用命题 4.2 来计算 σ''。

4.3. **映射类群在嫁接数据上的作用。** 回顾一下，嫁接数据 $\eta = (\{\alpha_i\}_{i\in I}, \{w_i\}_{i\in I})$ 是由定义在 α 上的多重曲线 $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in I}$ 和权重 $\{w_i\}_{i\in I}$ 组成的一对。

将定向曲面 Σ 的映射类群记为 $\mathbf{Mod}(\Sigma)$。映射类群 $\mathbf{Mod}(\Sigma)$ 按如下方式作用于嫁接数据集合 $\mathscr{GD}$。给定一个

嫁接数据 $\eta=(\{\alpha_i\}_{i\in I},\{w_i\}_{i\in I})$ 和 $\phi\in\mathbf{Mod}(\Sigma)$,

$$\phi\cdot\eta\coloneqq(\phi_*\{\alpha_i\}_{i\in I},\{w_i\}_{i\in I}).$$

此作用与 $\mathscr{GD}$ 上的运算 # 有关:

$$\phi\cdot(\eta\#_R\beta)=(\phi\cdot\eta)\#_R(\phi_*\beta),$$
$$\phi\cdot(\eta\#_L\beta)=(\phi\cdot\eta)\#_L(\phi_*\beta).$$

因此，结合这一事实与命题 4.2，可得以下结论。

推论 4.4。设 $(\{\alpha_i\}_{i\in I},\{w_i\}_{i\in I})$ 是一组嫁接数据，且 β 是与 $\alpha=\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 同伦横截的多重曲线。给定 $\phi\in\mathbf{Mod}(\Sigma)$,

$$\mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}_{\phi\cdot\eta},(\phi_*\beta)_R)=\mathbf{Gr}_{\phi\cdot(\eta\#_R\beta)},$$
$$\mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}_{\phi\cdot\eta},(\phi_*\beta)_L)=\mathbf{Gr}_{\phi\cdot(\eta\#_L\beta)}.$$

5. The proof of the main theorem

本节证明定理 A。

5.1. 嫁接数据的权类型。回顾一下，嫁接数据 $\eta=(\{\alpha_i\}_{i\in I},\ \{w_i\}_{i\in I})$ 是由一组互不相交的简单闭曲线 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 和一组不可约完全偶字 $\{w_i\}_{i\in I}$构成的一对。在本节中，若 α_i 和 α_j 同伦，则可将它们视为一条简单闭曲线，并赋予其权重之积，即 w_iw_j （或者根据 α_i 和 α_j的排列方式，也可能是w_jw_i ）。

定义 5.1。设 $\eta=(\{\alpha_i\}_{i\in I},\ \{w_i\}_{i\in I})$ 为嫁接数据。权类型 $WT(\eta)$ 是多重曲线 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ 上权类型的集合:

$$WT(\eta)=\{w_i,{w_i}^*\mid i\in I\}$$

5.2。主定理的证明。

引理 5.2。设 w 是满足 $w=w^*$ 的本原完全偶字。给定与多重曲线 α 和 γ相关联的嫁接数据 η_α 和 η_γ，其中α 和 γ 的每个分支都赋予权重 w。设 α 和 γ 是 Σ 中的两条同伦横截的多重曲线，且 α 的每个分支都与 γ 相交，反之亦然。那么存在一条与 α 同伦横截的多重曲线 β，使得 $\eta_\gamma=\eta_\alpha\#_R\beta$。类似地，存在一条与 α 同伦横截的多重曲线 β'，使得 $\eta_\gamma=\eta_\alpha\#_L\beta'$。

证明。在这种情况下，我们无需考虑嫁接数据的定向和权重。正如 [CDF，第 3 节所述，嫁接数据上的运算 # 可以降为仅作用于多重曲线的运算4] （见注 4.1）。此引理源自 [CDF，引理 4.1]。□

引理 5.3。设 w 是满足 $w=w^*$ 的完全偶字。给定两个嫁接数据 η_1 和 η_2，其权重均为 w，则 $\mathbf{Gr}^{\eta_2}$ 可由 $\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 经过两次多重嫁接的复合得到。

证明。我们可以将问题化归为 w 是本原的情形。事实上，若 $w = \tau^n$，则 τ 也满足 $\tau = \tau^*$。

设 Σ_c 是全纯单值化为 ρ 的实凸射影曲面。我们用 α_1 和 α_2 表示 Σ_c 上与 $\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 和 $\mathbf{Gr}^{\eta_2}$ 的嫁接环带相对应的、带有重数的两条多重测地线。考虑 Σ_c 上的简单闭测地线 γ，它切割 α_1 的所有分支以及 α_2 的所有分支。根据命题 4.2 和引理 5.2，存在一条位于 $\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 上的多重曲线 β_1，以及一条位于 $\mathbf{Gr}^{(\gamma,w)}$ 上的多重曲线 β_2，使得 $\mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}^{\eta_1}, (\beta_1)_R) = \mathbf{Gr}^{(\gamma,w)}$，且$\mathbf{Gr}(\mathbf{Gr}^{(\gamma,w)}, (\beta_2)_R) = \mathbf{Gr}^{\eta_2}$。□

下面的命题是上述引理的推广。

命题5.4。设 w 是一个完全偶字。给定两个嫁接数据 η_1 和 η_2，其权重均为 w，则 $\mathbf{Gr}^{\eta_2}$ 可通过一系列多重嫁接由 $\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 得到。

证明。设 $\sigma_i = \mathbf{Gr}^{\eta_i}$ 和 α_i 是 η_i 的多重曲线。若对于某个 $n > 1$ 和本原完全偶字 w'，有 $w = (w')^n$，则我们可以将嫁接数据 η_1 和 η_2 的权重视为 w'。因此，我们可以假设 w 是本原的。此外，由于可以沿 α_2 的每个分支进行嫁接，我们可以假设 α_2 是一条简单闭曲线。

沿着 $\sigma_1 = \sigma_1^{(0)}$ 上 α_1 的每个分支进行嫁接，我们得到一个射影结构$\sigma_1^{(1)}$，其中所有权重均取值为 ww^*。利用引理 5.3，通过多重嫁接，这给出了一个射影结构 $\sigma_1^{(2)}$，它对应于对于任意非平凡简单闭曲线 α 的嫁接数据 (α, ww^*)。

我们取 α 为图 12 所示的非分离简单闭曲线。

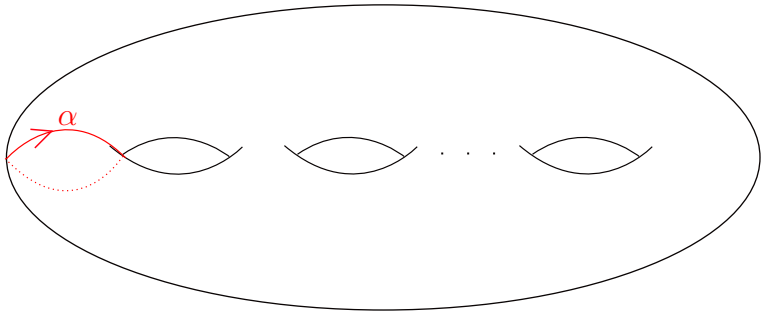


FIGURE 12. 简单闭曲线 α

我们将通过多重嫁接，从 $\sigma_1^{(2)}$ 构造一条简单闭曲线 γ，使得存在一个保向微分同胚 ϕ，将 γ 映射到 α_2。根据推论 4.4，$\mathbf{Gr}^{\eta_2}$可由$\mathbf{Gr}^{(\phi_*\alpha,ww^*)}$ 通过多重嫁接得到。至此，证明完成。

我们将论证分为两种情况：(i) α_2 是非分离的，(ii) α_2 是分离的。(i) 假设 α_2 是非分离的。首先，我们将构造两条互不相交的简单闭曲线 γ_1 和 γ_2，其权重为 w。设 α' 为一条不与 α相交的非分离简单闭曲线。设 β 为一条分别与 α 和 α' 恰好相交一次的简单闭曲线，如图 13 所示。

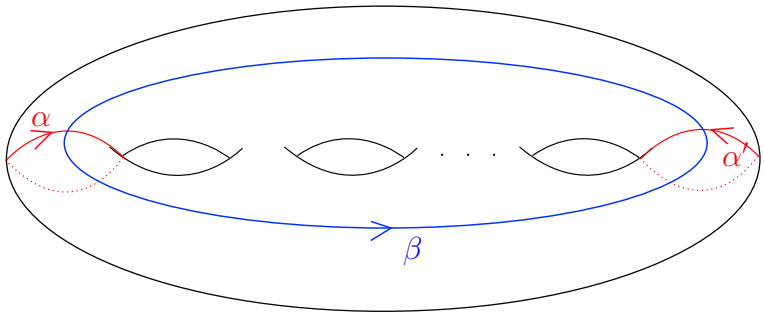


FIGURE 13. 简单闭曲线 α' 和 β

沿着$(\alpha, T^{\rho}{}_{(\alpha)w*})$和$(\alpha', T^{\rho(\alpha')}{}_{w})$进行嫁接，可得到另一个射影结构 $\sigma_1^{(3)}$，其对应的嫁接数据为 $\{(\alpha,\ w^*ww^*),\ (\alpha',\ w)\}$。接着，沿着 β_R进行嫁接，可得到射影结构$\sigma_1^{(4)} = \mathbf{Gr}(\sigma_1^{(3)},\ (\beta_R,\ T^{\rho(\beta)}_{ww^*}))$。根据命题 4.2，$\sigma_1^{(4)}$ 对应的嫁接数据为 $\{(\gamma_1,\ w),\ (\gamma_2,\ w)\}$，其中 γ_1和 γ_2如图 14 所示。

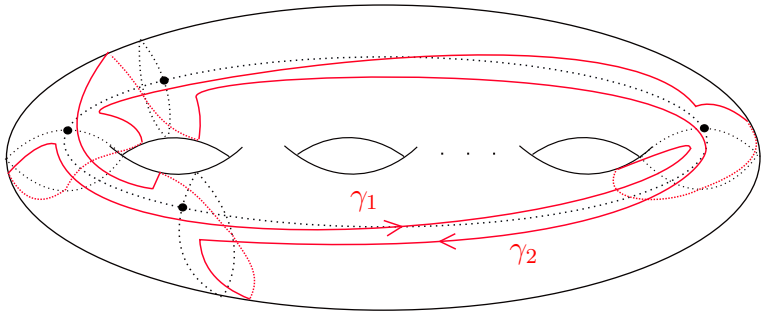


FIGURE 14. 简单闭曲线 γ_1 和 γ_2

接下来，我们将把 γ_1 和 γ_2 变换为一条简单闭曲线 γ。
存在一条非分离简单闭曲线 γ，使得 $i(\gamma_1,\ \gamma) = i(\gamma_2,\ \gamma) = 1$（图 15）。

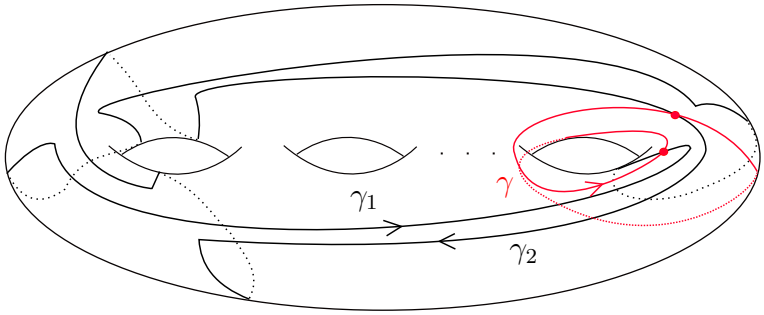


FIGURE 15. 简单闭曲线 γ

然后，我们通过同时沿着 $\gamma_1{}^{-1}$ 和 $\gamma_2{}^{-1}$ 对 γ 施加德恩扭转，构造一条简单闭曲线 δ。沿 δ_R 的嫁接得到 $\mathbf{Gr}^{(\gamma,w)} = \mathbf{Gr}(\sigma_1^{(4)}, \delta_R)$。（参见[CDF，引理 4.1]。）

(ii) 接下来假设 α_2 是分离的。设 α' 是一条不与 α 相交的分离简单闭曲线。设 β 是一条分别与 α 相交一次、与 α' 相交两次的简单闭曲线，如图 16 所示。

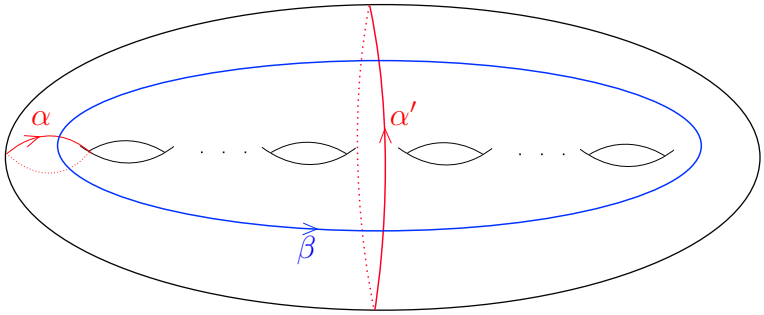


FIGURE 16. 简单闭曲线 α' 和 β

沿 $(\alpha', T^{\rho(\alpha')_w})$ 进行嫁接，可得到另一个对应于嫁接数据 $\{(\alpha, ww^*), (\alpha', w)\}$ 的射影结构 σ_1^3。接着得到射影结构 $\sigma_1^{(3)} = \mathbf{Gr}(\sigma_1^{(2)}, \beta_R)$。根据命题 4.2，$\sigma_1^{(3)}$ 对应于嫁接数据 (γ, w)，其中 γ 是图 17 所示的分离简单闭曲线。

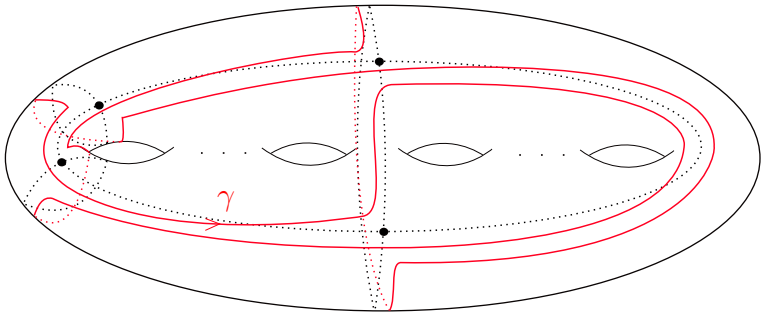


FIGURE 17. 简单闭曲线 γ

我们交换 w 和 w^*，并按照上述相同的论证来构造 γ^{-1}。每条简单闭曲线都可以通过保向微分同胚映射 γ 或 γ^{-1} 得到。□

现在我们来证明主定理。设 Σ 是一个亏格为 g 的闭定向曲面。

定理。设 η_1 和 η_2 是定义在 Σ上的嫁接数据，且具有相同的权类型。设$\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 和$\mathbf{Gr}^{\eta_2}$ 是具有相同 Hitchin 全纯性的射影结构 ρ。那么$\mathbf{Gr}^{\eta_2}$ 可以通过至多 $6g$ 次多重嫁接由$\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 得到。

证明。 只需证明以下命题：设 $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{3g-3}\}$ 是一个裤分解。给定嫁接数据 $\eta_2 = (\{\gamma_i\}_{i=1}^{3g-3}, \{w_i\}_{i=1}^{3g-3})$，存在嫁接数据 $\eta_1' = (\{\alpha_i\}_{i=1}^{3g-3}, \{\tau_i\}_{i=1}^{3g-3})$，使得

- α_1、 α_2、 $\cdots \alpha_{3g-3}$ 两两不相交且彼此平行，并按指标顺序位于 Σ 上，
- $\tau_i = w_i$ 或 $\tau_i = w_i^*$,
- $\mathbf{Gr}_{\eta_2}$ 可以通过一系列多重嫁接由 $\mathbf{Gr}_{\eta_1'}$ 得到。

这是因为，沿着 η_1的多重曲线的每个分支以适当的权重进行嫁接，我们便能使所有权重都等于 $\tau_1 \cdots \tau_{3g-3}$。根据命题5.4，也可以将该多重曲线约化为任意一条简单闭曲线。

我们可以假设 γ_1 和 γ_{3g-3} 是非分离的简单闭曲线。此外，我们可以假设存在一条简单闭曲线 γ，使得对于某个 $1 \leq k < 3g-3$,
$i(\gamma_i, \gamma) = 0 \ (i = 1, \cdots, k)$
$i(\gamma_i, \gamma) = 1 \ (i = k+1, \cdots, 3g-3)$.
通过对指标重新排序，我们可以进一步假设：对任意 $1 \leq i < 3g-3$，当曲面 Σ 沿 γ_1，$\cdots$，γ_i切开时，所得分支中恰好有一个不是裤子曲面。作为例子，我们在图18中说明亏格3的情形。

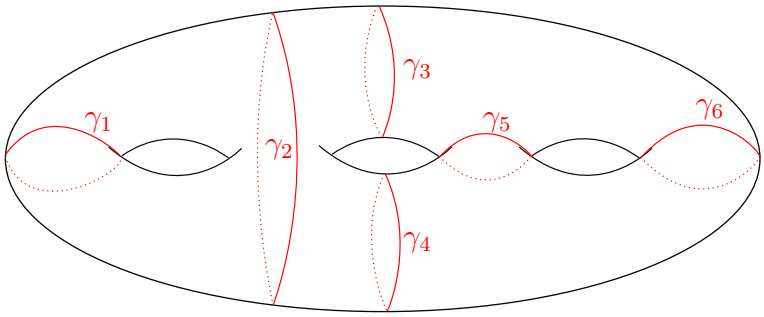


FIGURE 18. 亏格3的闭曲面上的裤子曲面 $\{\gamma_i\}_{i=1}^{6}$。

给定嫁接数据 $\eta_1' = (\{\alpha_i\}, \{\tau_i\})$，其中 $\alpha_i = \delta_0$ 对应于图19所示的非分离简单闭曲线 δ_0。

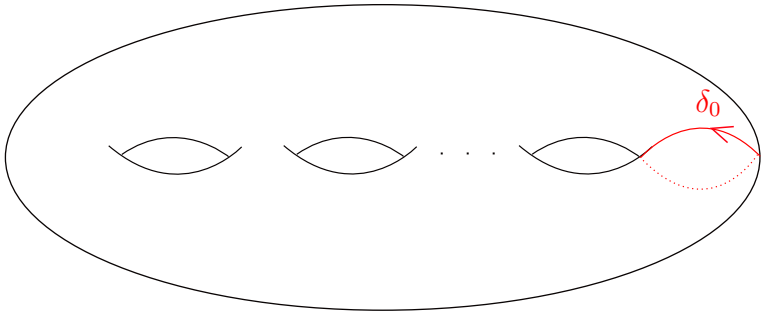


FIGURE 19. 简单闭曲线 δ_0

对每个 $i=0,\ 1,\ \cdots$，定义完全偶字 a_i 如下： $a_i=\tau_{i+1}\cdots\tau_{3g-3}$。我们将通过多重嫁接，从嫁接数据 $\mathbf{Gr}^{\eta_1'}$ 构造一个裤分解 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_{3g-3}\}$，使得存在一个保向微分同胚 ϕ，它将 γ_i 映到相应的 γ_i。根据推论 4.4，$\mathbf{Gr}^{\eta_2}$ 可由 $\mathbf{Gr}^{\phi\cdot\eta_1'}$ 通过多重嫁接得到。证毕。

(i) 首先我们归纳地构造简单闭曲线 $\gamma_1,\cdots,\overline{\gamma}_k$： (a) 如命题5.4的证明中那样构造 γ_1：设 δ_0' 为一条与 δ_0 不相交的非分离简单闭曲线。设 β_0 为分别与 δ_0 和 δ_0' 恰好相交一次的简单闭曲线，如图20所示。

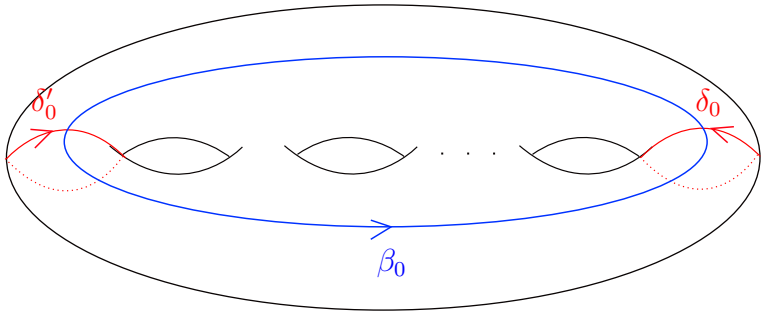


FIGURE 20. 简单闭曲线 δ_0' 与 β_0

我们得到一个射影结构 σ_0'，它对应于嫁接数据 $\{(\delta_0,a_1a_0),(\delta_0',\tau_1)\}$，该结构由 $\sigma_0=\mathbf{Gr}^{\eta_1'}$ 沿 δ_0 和 δ_0' 嫁接而得。然后我们可以得到另一个射影结构 $\sigma_1=\mathbf{Gr}(\sigma_0',((\beta_0)_R,T_{a_0}^{\rho(\beta)}))$。由命题 4.2，$\sigma_1$ 对应于嫁接数据 $\{(\gamma_1,\tau_1),(\delta_1,a_1)\}$，其中 γ_1 和 δ_1 如图21所示。

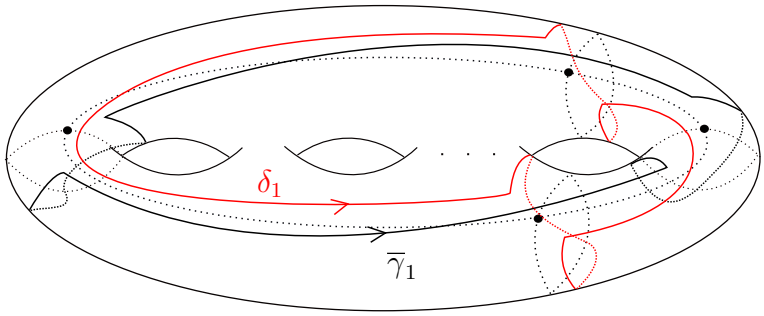


FIGURE 21. 简单闭曲线 γ_1 和 δ_1

沿构造出的曲线 γ_1 切割曲面，会得到一个子曲面 Σ_1。(b) 对于 $i>1$，基于先前构造的射影结构 σ_{i-1} 和子曲面 Σ_{i-1} 构造 γ_i：射影结构 σ_{i-1} 对应于

嫁接数据 $\{(\gamma_1, \overline{\tau_1}) \cdots, (\gamma_{i-1}, \overline{\tau_{i-1}}), (\delta_{i-1}, a_{i-1})\}$。$\delta_{i-1}$ 是 Σ_{i-1}上的非分离简单闭曲线。我们考虑两种情况。

(b-1) 存在一个裤子曲面，其边界分支为 γ_{i_1}、γ_{i_2}、γ_i $(i_1, i_2 < i)$：我们将 δ_{i-1} 置于 Σ_{i-1} 上的位置，如图22所示。令δ'_{i-1} 为 Σ_{i-1} 上的分离简单闭曲线，使得 $\Sigma_{i-1}|\delta'_{i-1}$的一个分支是边界为 γ_{i_1}、γ_{i_2}、δ'_{i-1}的裤子曲面，见图22。

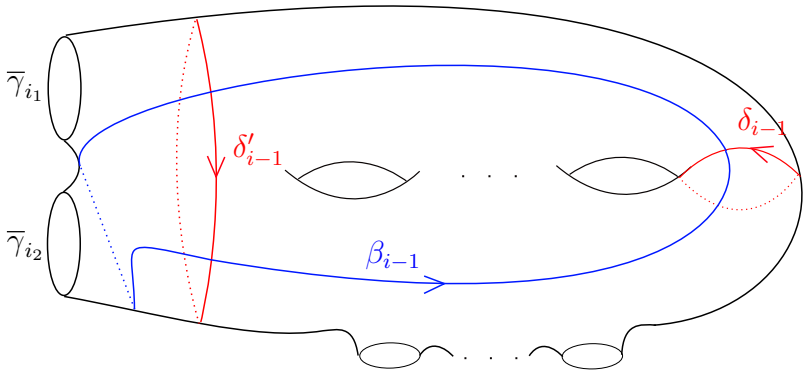


FIGURE 22. Σ_{i-1}上的简单闭曲线 δ_{i-1}、δ'_{i-1} 和 β_{i-1}

我们得到一个射影结构 σ'_{i-1}，它对应于嫁接数据

$$\{(\overline{\gamma_1}, \tau_1), \cdots, (\overline{\gamma}_{i-1}, \tau_{i-1}), (\delta_{i-1}, a_i\tau_i\tau_i{}^*a_i), (\delta'_{i-1}, \tau_i)\}$$

通过沿着 δ_{i-1} 和 δ'_{i-1}进行嫁接。令 β_{i-1} 为简单闭曲线，位于——相交 δ_{i-1} 一次且 δ $'_{i-1}$ 分别两次，如图 22 所示。

于是，我们可以得到另一个射影结构 $\sigma_i = \mathbf{Gr}(\sigma'_{i-1}, ((\beta_{i-1})_R, T^{\rho(\beta_{i-1})}\tau_i\tau_i{}^*a_i)$。根据命题 4.2，$\sigma_i$ 对应于嫁接数据

$$\{(\overline{\gamma_1}, \tau_1), \cdots, (\overline{\gamma}_{i-1}, \tau_{i-1}), (\overline{\gamma}_i, \tau_i), (\delta_i, a_i)\}$$

其中γ_i 和 δ_i 如图23所示。

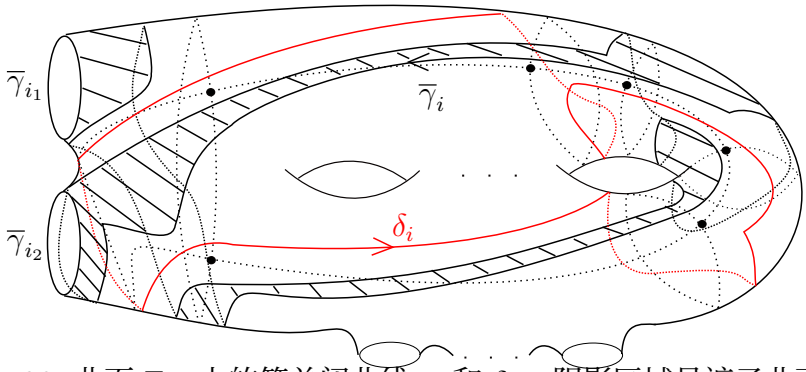


FIGURE 23. 曲面 Σ_{i-1}上的简单闭曲线 γ_i 和 δ_i。阴影区域是裤子曲面，其边界分支为γ_{i_1}、γ_{i_2} 和γ_i。

当我们沿 γ_i切割 Σ_{i-1} 时，它分解为一个裤子曲面和一个子曲面 Σ_i。 δ_i 是 Σ_i 上的非分离简单闭曲线。

(b-2) 否则，即不存在这样的裤子曲面： Σ_{i-1} 是 Σ 的一个亏格至少为 2 的紧致子曲面。我们将 δ_{i-1} 放置在 Σ_{i-1}上如图2所示的位置。

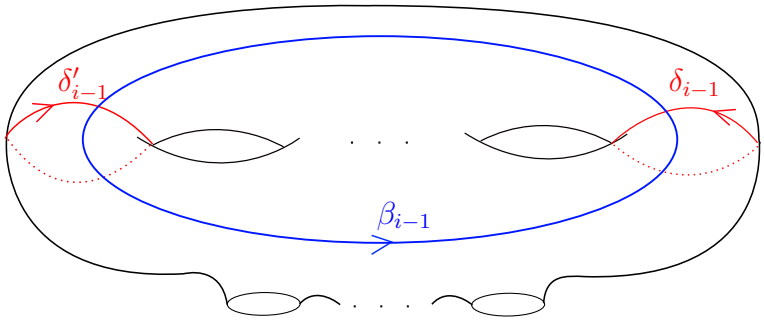


FIGURE 24. Σ_{i-1}上的简单闭曲线 δ_{i-1}、δ'_{i-1} 和 β_{i-1}

设 δ'_{i-1} 是 Σ_{i-1} 上的一条非分离简单闭曲线，且不与 δ_{i-1}相交。设 β_{i-1} 是两条非分离简单闭曲线，它们分别与 δ_{i-1} 和 δ'_{i-1} 恰好相交一次，如图24所示。我们得到与嫁接数据对应的射影结构 σ'_{i-1}

$$\{(\overline{\gamma}_1, \tau_1), \cdots, (\overline{\gamma}_{i-1}, \tau_{i-1}), (\delta_{i-1}, a_i a_{i-1}), (\delta'_{i-1}, \tau_i)\}$$

沿着 δ_{i-1} 和 δ'_{i-1}嫁接。然后，我们可以得到另一个射影结构 $\sigma_i = \mathbf{Gr}(\sigma'_{i-1}, ((\beta_{i-1})_R, T^{\rho(\beta_{i-1})a_{i-1}}))$. 根据命题 4.2， σ_i对应于嫁接数据

$$\{(\overline{\gamma}_1, \tau_1), \cdots, (\overline{\gamma}_{i-1}, \tau_{i-1}), (\overline{\gamma}_i, \tau_i), (\delta_i, a_i)\}$$

其中，$\overline{\gamma}_i$ 和 δ_i 如图25所示。

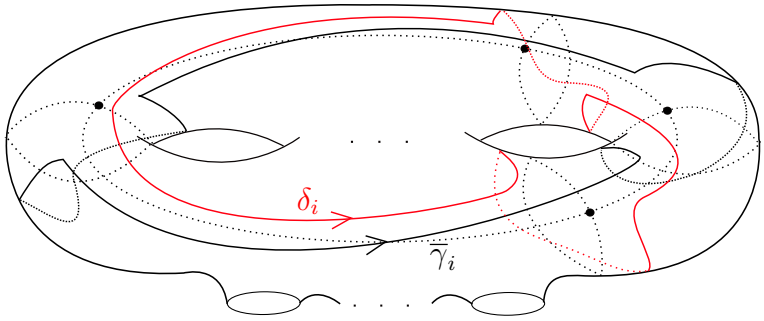


FIGURE 25. 位于 Σ_{i-1}上的简单闭曲线$\overline{\gamma}_i$ 和 δ_i

沿 γ_i 切割曲面 Σ_{i-1} 得到子曲面 Σ_i。 δ_i 是 Σ_i上的非分离简单闭曲线。

(ii) 最后，我们构造简单闭曲线γ_{k+1}，$\cdots$，γ_{3g-3}：Σ_k是 Σ 的亏格为1的紧致子曲面。Σ_k 有 $3g-3-k$ 个边界分支。我们将 δ_k 放置在 Σ_k 上如图 26所示的位置。

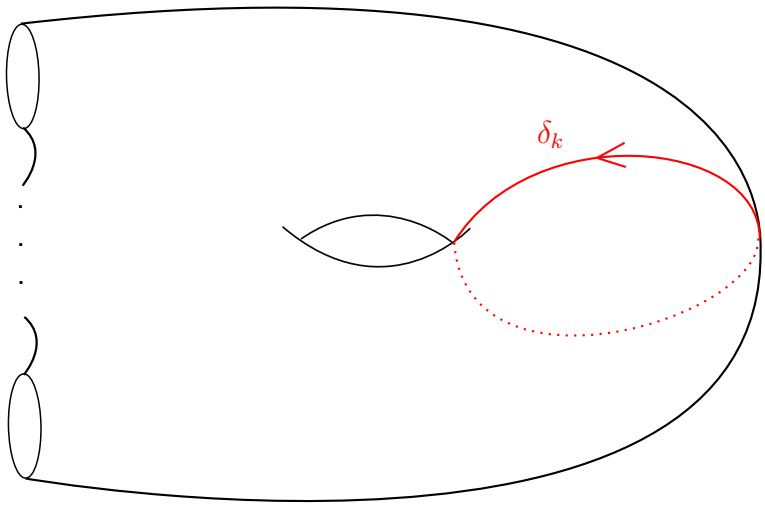


FIGURE 26. 简单闭曲线 δ_k 在 Σ_k上

设 δ_{k+1}、$\cdots\delta_{3g-3}$和 β是 Σ_k上的简单闭曲线，满足 δ_{3g-3}与 δ_k同伦，且 β与每条简单闭曲线 $\delta_i(i=k$、$\cdots$、$3g-3)$相交于一点。图 27 展示了 Σ_k 具有三个边界分支的情形。

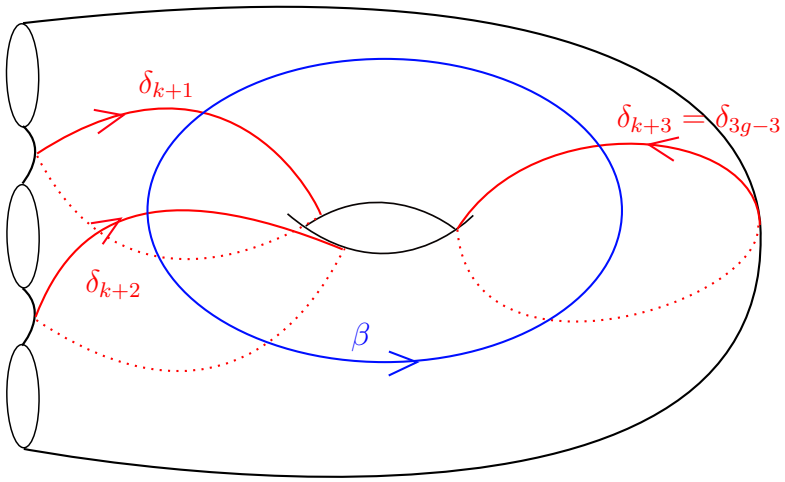


FIGURE 27. 简单闭曲线 δ_{k+1}、δ_{k+2}、δ_{k+3} 和 β 在 Σ_k上，后者有三个边界分支

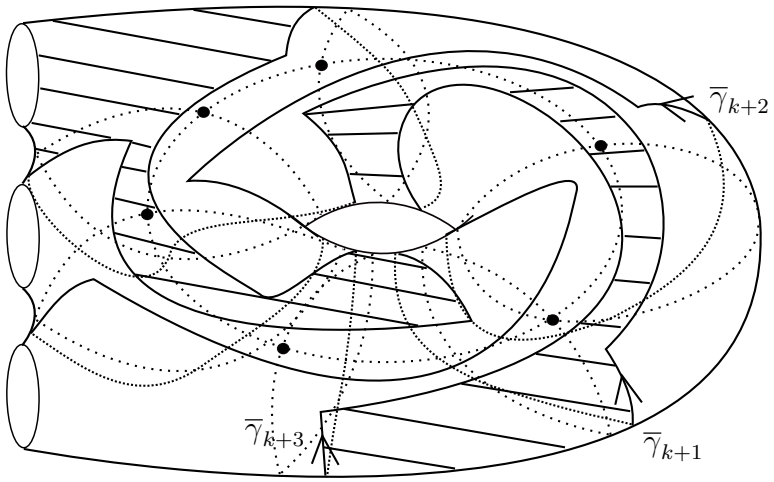
我们得到一个射影结构σ'_k，它对应于嫁接数据

$$\{(\overline{\gamma}_1,\tau_1),\cdots,(\overline{\gamma}_k,\tau_k),(\delta_{k+1},\tau_{k+1}),\cdots,(\delta_{3g-4},\tau_{3g-4}),(\delta_{3g-3},\tau_{3g-3}a_k)\}$$

通过沿 $\delta_{k+1}, \cdots, \delta_{3g-3}$ 进行嫁接。然后我们可以得到另一个射影结构 $\sigma_{k+1} = \mathbf{Gr}(\sigma'_k, (\beta_R, T_{a_k}^{\rho(\beta)}))$。根据命题 4.2，射影结构 σ_{k+1} 对应于嫁接数据

$$\{(\overline{\gamma}_1, \tau_1), \cdots, (\overline{\gamma}_k, \tau_k), (\overline{\gamma}_{k+1}, \tau_{k+1}), \cdots, (\overline{\gamma}_{3g-3}, \tau_{3g-3})\}.$$

$\overline{\gamma}_{k+1}$，$\cdots$，$\overline{\gamma}_{3g-3}$ 是 Σ_k 上的简单闭曲线，使得沿 $\overline{\gamma}_{k+1}$，$\cdots$，$\overline{\gamma}_{3g-3}$ 切割 Σ_k 后，可将其分解为 $3g-3-k$ 个裤子曲面。图 28 展示了 Σ_k 具有三个边界分支的情形。



Σ_k（它有三个边界分支）上的简单闭曲线 $\overline{\gamma}_{k+1}$、$\overline{\gamma}_{k+2}$、$\overline{\gamma}_{k+3} = \gamma_{3g-3}$。阴影区域是一个裤子曲面，其边界为 $\overline{\gamma}_{k+3}$ 和 $\overline{\gamma}_{k+1}$。

我们构造了一个与嫁接数据（$\{\gamma_i\}$，$\{\tau_i\}$）相对应的射影结构，使得存在一个保向微分同胚 ϕ，它将每个 γ_i 映到 γ_i 或 γ_i^{-1}。

最后，我们统计从 $\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 到 $\mathbf{Gr}^{\eta_2}$ 的过程中所进行的多重嫁接次数。从 $\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 到 $\mathbf{Gr}^{\eta'_1}$ 最多需要进行 6 次多重嫁接。在后一步中，进行了 $2(k+1)$ 次多重嫁接。因此，我们最多可以通过 $2(k+1)$ 次 $+ 6 \leq 6g$ 多重嫁接，从 $\mathbf{Gr}^{\eta_1}$ 到 $\mathbf{Gr}^{\eta_2}$。□

6. The oriented graph $MG(\rho)$

回想一下，$MG(\rho)$ 是一个定向图，其顶点是具有 Hitchin 全纯单值化 ρ 的实射影结构；如果可以通过多重嫁接从 σ_1 得到 σ_2，那么顶点 σ_1、σ_2 之间就有一条从 σ_1 指向 σ_2 的有向边。

我们在完全偶字集合上定义一个（偏）序 $\leq$，如下所示。给定两个完全偶字 w 和 w'，$w \leq w'$ 若 w 可分解为若干正词 $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ 和完全偶字 τ_1、$\cdots$、τ_{n-1}，使得 $w' = w_1 \tau_1 \cdots w_{n-1} \tau_{n-1} w_n$。此序在嫁接数据上诱导出一个预序（也记作 $\leq$）

：对于 $\eta,\ \eta' \in \mathscr{GD},\ \ \eta \le \eta'$若存在映射 π： WT（η） $\to WT$（η'），使得对任意 $w \in WT$（η），均有$w \le \pi$（w）。

回顾一下，我们用 T^A_w 表示具有双曲 holonomy A 的特殊 $\mathbb{RP}^2$-环面，它对应于完全偶字 w。若两个完全偶字 w 和 w' 满足 $w \le w'$，则 $T^A_{w'}$ 可由 T^A_w 沿主简单闭测地线嫁接而得。这意味着，给定两个满足 $\eta_1 \le \eta_2$ 的嫁接数据 η_1 和 η_2，我们可以通过嫁接从 η_1 构造出嫁接数据 η_1'，使得 $WT(\eta_1') = WT(\eta_2)$。作为主定理的直接推论，我们得到以下推广。

推论 6.1. 设 η_1 和 η_2 是满足 $\eta_1 \le \eta_2$ 的嫁接数据。那么，我们可以通过多重嫁接的复合，从 $\mathbf{Gr}_{\eta_1}$ 得到$\mathbf{Gr}_{\eta_2}$。

预序 $\le$ 在 $\mathscr{GD}$ 上诱导出一个等价关系 $\sim$，定义为：当且仅当 $\eta \le \eta'$ 和 $\eta' \le \eta$ 时，$\eta \sim \eta'$。于是，等价类集合 $\mathscr{GD}/\sim$ 继承了一个序（也记作 $\le$），其中若 $\eta \le \eta'$，则 $[\eta] \le [\eta']$。

推论 6.1 使我们能够构造一个与权类型相关的 $MG(\rho)$ 模型，即与有序集 $(\mathscr{GD}/\sim, \le)$ 相关联的哈塞图。

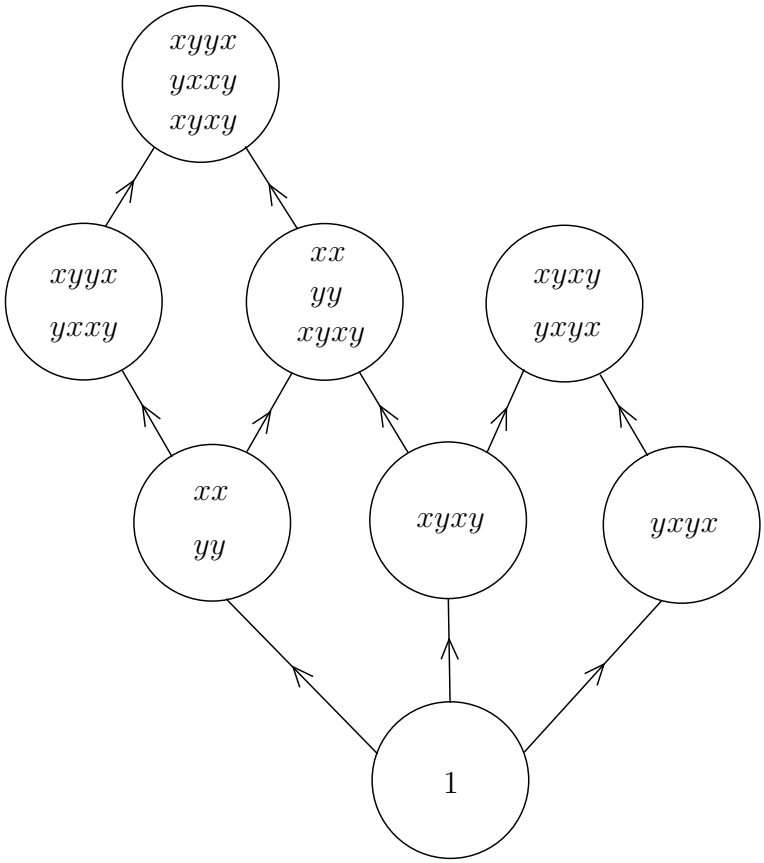


FIGURE 29. MG（ρ）的权型模型。每个圆圈表示具有所示权型的嫁接数据的等价类。

References

[CDF] G. Calsamiglia-Mendlewicz、B. Deroin 和 S. Francaviglia，《福克斯情形下多重嫁接的定向图》，数学出版物**58** (2014)，第 1 期，31–46；MR3161507[Cho1] S. Choi，《实射影曲面的凸分解。I. π-环带与凸性》，微分几何杂志**40** (1994)，第 1 期，165–208；MR1285533[Cho2] S. Choi，《实射影曲面的凸分解。II. 容许分解》，微分几何杂志**40** (1994)，第 2 期，239–283；MR1293655[CG] S. Choi 和 W. M. Goldman，《闭曲面上的凸实射影结构构成闭集》，美国数学会会刊**118**(1993)，第 2 期，657–661；MR1145415[Gol1] W. M. Goldman，《具有福克斯全纯单值化的射影结构》，微分几何杂志**25** (1987)，第 3 期，297–326；MR0882826[Gol2] W. M. Goldman，《紧曲面上的凸实射影结构》，微分几何杂志**31**(1990)，第 3 期，791–845；MR1053346[Gol3] W. M. Goldman，《流形上的几何结构》，数学研究生教材，227，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，[2022] ©2022；MR4500072[Ito] K. Ito，《奇异射影结构与拟福克斯空间。II》，杜克数学杂志**140**(2007)，第 1 期，85–109；MR2355068[Luo] F. Luo，《曲面上简单闭路的乘法结构的一些应用》，载于《纽结、辫子与映射类群——献给 *Joan S. Birman* 的论文集（纽约，*1998*）》，123–129，美国数学会／数学科学出版社高等数学研究，24，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，；MR1873113[ST] D. P. Sullivan 和 W. P. Thurston，《具有典范坐标图的流形：一些例子》，数学教学 (2) **29**(1983)，第 1–2 期，15–25；MR0702731

Graduate School of Science, Osaka University电子邮箱: u338912j@ecs.osaka-u.ac.jp