arXiv:2603.11624v1 [math.LO] 12 Mar 2026

基于观察者的堆垛悖论方法及其所导出的逻辑

Athanassios Tzouvaras

塞萨洛尼基亚里士多德大学数学系，
541 24 希腊塞萨洛尼基，电子邮件：
tzouvara@math.auth.gr

摘要

我们通过一种基于观察者、真理随时间变化的方法来探讨模糊断言的堆垛悖论（SP）。从形式上说，这种方法产生了一种称为流变对象语义（FOS）的语义，因为它涉及包含“流变对象”的模型，也就是随时间和观察者而变化的实体。这些模型配备了主体（观察者）以及线性离散时间轴。变化实体由时间和主体的偏函数表示，而这种部分性会导致真值空缺。如果我们将真值空缺解释为第三种真值，那么 FOS 就成为一种三值逻辑；颇为有趣的是，已证明它与强 Kleene 三值逻辑完全相同。堆垛现象可以在 FOS 的结构中表示为特殊对象：相对于某位观察者和某一特定属性，这些对象会发生不可感知的变化。在这种解释中，消除堆垛悖论悖论性质的关键在于函数的偏性。固定观察者后，部分性对应于观察者一方的间断观察。间断会产生观察空缺，在此期间，观察者所理解的对象归属属性可能发生变化，而不违反不可察觉条件。据视觉注意和人类聚焦能力领域的专家所言，间断观察有坚实的生理学依据。文中还讨论了观察空缺与视界穿越之间的关系。

数学　　数学主题分类（*2020*）：03B80, 06　　B50

关键词和短语。堆垛悖论、模糊谓词、观察间隙、流变对象语义、不可察觉地变化的对象、强克莱尼逻辑。

1 引言

堆垛悖论（下文简称 SP）是模糊性领域中一个广为人知且长期存在的难题，具体来说，它属于离散模糊性，即指涉及以自然数计量的数量的模糊谓词（如秃头、大、堆等）。

从数学角度看，堆垒悖论意味着归纳法失效：某些模糊谓词会在 $\mathbb{N}$ 中生成没有最小元的子集。例如，若 $P(n)$ 表示属性“n 很小”（或“n不大”），n 是一个正整数，那么显然，$P(n)$ 和 $\neg P(n)$ 的外延都非空。此外，既然常识要求 $P(n) \Rightarrow P(n+1)$，那么从 $P(n)$ 的外延过渡到 $\neg P(n)$ 的外延，便以一种神秘而难以理解的方式发生：既没有越过任何边界，也无人能够说清这种过渡是在何时、以何种方式实现的。我们把从 $P(n)$ 到$\neg P(n)$，或反过来的这种过渡，称为模糊过渡。对于普通整数集合 $\mathbb{N}$，模糊过渡当然确实会造成悖论（即矛盾）。如果我们坚持要为这类谓词指定集合外延，那么唯一可行的数学方案似乎是采用算术的非标准模型，因为这类模型确实允许存在没有最小元的集合。 [14], 采用了这种方法，并指出这类模型确实忠实地呈现了模糊谓词的大多数基本特征。例如，若 M 是一个带有 $\mathbb{N} \subset M$ 的非标准模型，那么集合 $\mathbb{N}$和 $M\backslash\mathbb{N}$ 就构成一个模糊过渡，因为 $\mathbb{N}$ 和 $M\backslash\mathbb{N}$ 分别没有最大元和最小元。但是，非标准整数完全不可行，因此无法用于日常经验（详见第 4.2 节）。

本文在不脱离标准自然数基础的前提下，对模糊过渡作出形式化描述。至于变化着的（事实上是流变的）实体所遵循的逻辑，我们将采用一种适用于描述它们的特殊语义；这种语义高度依赖于一个标准堆垒悖论（SP）研究（例如 [2], [4] 和 [10]的研究）中未曾考虑的因素。也就是说，在每个特定连锁事件中都在场的观察者所起的作用：观察者会宣布某个给定对象 a 是否满足 P 或非P（或者说，他们是否认为该对象满足 P 或非P）。这种语义称为流变对象语义（FOS），将在第 2 节中讨论。

1.1 论文内容

我们在此对堆垒悖论（SP）所采用的方法，基于依赖于主体和时间的真值形式化。它是命题逻辑经典语义的一种变体，不同之处在于，基础模型中的对象

并非恒定不变，而是作为时间和观察者的“流变”函数，即不断变化的部分函数。它被称为流变对象语义（FOS）。在 FOS 中，我们有一条由 $\mathbb{N}$ 表示的时间轴，以及一个由 I 表示的观察者集合（尽管我们大多指单个观察者 i）。变化对象由从 $I \times \mathbb{N}$ 映射到经典关系结构 $\mathcal{A} = \langle A,\ R_1,\ R_2,\ \ldots \rangle$的部分（实际上是有限）函数表示。函数的部分性 f使得时间轴上可以存在这样的点 $t < t' < s$： $f(i,\ t)$和 $f(i,\ s)$有定义，而 $f(i,\ t')$没有定义。这被解释为关于观察者 i对对象 f 进行观察时， t与 s 之间的“观察空缺”。观察空缺意味着，对象和情境的观察通常是间断或间歇进行的。观察的总时段被分割成若干互不相交的时间区间，其间存在观察空缺。根据不可感知地变化的情境的定义，在持续不断的知觉聚焦期间不可能发生模糊过渡。因此，如果某个特定的变化情境中发生了模糊过渡，它只能发生在观察空缺期间。由于对象的形式表示中可能存在大量观察空缺，这便很容易为堆垒悖论提供一种解决方案。

FOS 的另一个显著特征如下。正如预期，FOS 论域中所用函数的部分性，即观察空缺，会在其满足关系 $\Vdash$ 中产生真值空缺。如果我们将这些空缺解释为第三种真值（未定），那么 FOS 便产生一种三值逻辑。有趣的是，这种逻辑（以联结词 $\wedge$、 $\vee$ 和 $\neg$ 的真值表形式）与强 Kleene 三值逻辑完全相同。

本文结构如下：在第 2 节中，我们概述 FOS 的框架，并证明它是一种可靠而不完备的逻辑。在第 3 节中，我们在 FOS 框架内处理堆垒悖论，并说明它如何被消除。在第 4 节中，我们引述认知心理学与视觉理论领域一些专家关于观察空缺这一想法之合理性问题的观点。我们还讨论观察空缺如何解释视界跨越。最后，在附录中，我们证明 FOS 与强克莱尼逻辑具有相同的真值表。

2 流变对象语义学（FOS）

与抽象且不受时间影响的数学对象不同，物理对象总是依赖于时间，而且通常也依赖于主体。因此，17 对于理解素数定义的任何人来说，过去一直是、将来也永远是素数，而一个男人 a 可以

在某个时间 t 对于某个主体 i 不是秃头，而在另一个时间 $t' > t$ 对于同一个主体却是秃头。此外， a 可以在同一时间 t对于某个主体 i不是秃头，而对于另一个主体 j却是秃头。在上述例子中涉及两类事物：个体（或者是像17这样的抽象个体，或者是像某个特定男人这样的具体个体）和性质（素数性、秃头）。事实上，在弗雷格—罗素传统中，整个世界由个体及个体的性质构成。这一传统对世界提供了一幅相当简化的图景，但我们将在此遵循它，因为它构成了整个一阶逻辑的基础。经典逻辑是我们思考时最可靠的基础，但它相当狭窄。例如，它无法（直接）处理变化实体。我们的目标是修改标准语义，以便容纳关于这类随时间和主体而变化的实体的真理。

我们先从一阶关系语言 $L = \langle P_1, P_2, \ldots \rangle$ 开始，其中每个 P_k 都是某个元数为 $n_k > 0$ 的谓词符号。 L 也可能包含常项，但下文我们会为解释 L 的结构中的所有元素使用名称，因此特殊常项是多余的。 L 的公式和句子按通常方式定义。一阶 L 结构通常是一个元组 $\mathcal{A} = \langle A, R_1, R_2 \ldots \rangle$，其中 A 是一个非空集合，且每个 R_k 都是 A 上解释 P_k 的一个 n_k 元关系，即 $P_k^{\mathcal{A}} = R_k$。我们假定 A 的元素表示物理对象，例如一定数量的沙子，或逐渐缓慢变化的实体的快照，例如头部的毛发部分，或正在成熟的水果的各个阶段等。给定 $\mathcal{A}$， $L(A)$ 表示语言 $L \cup A$，即以 A 的元素作为参数（以其自身为名称）扩充后的 L。于是，对于 $L(A)$ 的每个句子 ϕ， $\mathcal{A} \models \phi$ 均按通常方式定义。

为了定义随时间和主体变化的对象，我们首先固定一个非空的主体集合 主体 I。字母 i, j 表示该集合中的元素。时间将由一个无限、线性且离散有序的集合 $\langle T, < \rangle$表示。为简便起见，以下我们将时刻集合与 $\langle \mathbb{N}, < \rangle$等同。不过，我们仍会用 t 表示时刻。当然， $t + 1$ 表示紧接在 t之后的时刻。

在 $\mathcal{A}$ 上的变化对象是一个有限（因此是部分）函数 $f : I \times \mathbb{N} \hookrightarrow A$（记号 $f\colon X \hookrightarrow Y$ 表示 $dom(f)$ 是X的子集）。这里，集合 A 被视为变化对象的“对象形式”集合，并满足下文讨论的某些条件。直观地说，如果 $f(i, t)$ 有定义，那么

$$f(i, t) := \text{“the form of } f \text{ perceived by } i \text{ at time } t\text{”}. \tag{1}$$

如果 $rng(f)$ 恰好是一个单元素集合 $\{a\}$，那么我们可以将 f 视为一个常量实体，它不依赖于时间和观察者，例如数学中的抽象实体。

但如果例如 f 是一个特定的男人，比如约翰，而 i 是一个观察者，比如彼得，并且彼得恰好在观察时间 t的约翰，那么 $f(i,\ t)$ 表示彼得在 t感知到的约翰的瞬时图像或形式[1]。否则， $f(i,\ t)$ 未定义。注意，当且仅当 $dom(f)$ 是有限的， f 才是有限的。在实践中，由于我们始终关注单个主体 i的行为，因此我们关注函数 f_i的性质，其中

$$f_i(t) := f(i,t),$$

而不是 f。之所以要求 f 是有限的，而不仅仅是部分的，是因为如果 I 具有多个元素，那么对于某些 $i \in I$， f 可能是部分的，但它可能是 $dom(f_i) = \mathbb{N}$。这意味着 i 会在整个时间轴上持续不断地观察对象 f，这极不现实。即使我们要求对于每个 i， f_i 都是部分的， $dom(f_i)$仍可能是无限的。对 f 的有限性要求使情况更加自然，因为这符合现实观察者的有限资源。

关系呢？它们也会随时间或主体，或者随二者而变化吗？自然的答案是否定的。根据普遍观点，性质是抽象的，并且相对于时间和主体保持稳定；至少，它们比物理实体稳定得多。因此，例如，如果彼得在时间 t说“约翰不秃头”，而在稍后的时间 $t' > t$ 改变其观点，认为“约翰秃头”，我们不会将这一变化归因于秃头谓词的变化，而会将其归因于约翰的变化。因此，我们始终假设，与对象不同，谓词 $P_1, P_2, \ldots$ 是独立于 时间和主体的。[2]

通常，如果 $\langle i,t\rangle \in dom(f)$，我们记作 $f(i,t)\downarrow$；否则记作 $f_i(t)\downarrow$，以及 $f(i,t)\uparrow$。鉴于（1）中赋予 $f(i,t)$ 的预期含义，两个共存的对象 f, g 应满足以下条件：

(†) If $f \neq g$ then $rng(f) \cap rng(g) = \emptyset$.

这是因为 $rng(f)$是 f 在世界中的“轨迹”，而不存在两个

[1]对象函数 f 与其形式值 $f(i,t)$ 之间的对比，大致使人想起柏拉图式二分法，即将存在物划分为理念及其形式。 f 是对象在其时间性形式 $f(i,t)$ 背后持存的“理念”或“同一性”。对象处于流变之中，但在这种流变之下仍有某种东西作为基础。相比之下，古老的赫拉克利特式模型认为一切都只是流变的形式，否认有任何稳定的东西作为这种流变的基础。从形式上看，这相当于只有值，而不是由某个特定函数产生值。[2]另一方面，确实存在取决于其使用语境的谓词。例如，谓词“大”在用于描述星系中的恒星数量、堆中的沙粒数量以及学校班级中的学生人数时，其含义和外延都大不相同。因此，在全文中我们都假定，每个谓词 P_i 始终在某个固定语境中得到解释。

不同的对象拥有重叠的轨迹。另一方面，如果$f \neq g$我们可能有 $dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$，这意味着观察者$i$ 可以在时间 t 同时观察两个或更多不同的对象。例如，观察者同时观察约翰和比尔，并宣布“约翰比比尔高”，就是这种情况。一般来说，观察者应该能够观察由许多不同组成区间构成的情形。

定义 2.1 令 $\mathcal{A} = \langle A, R_1, R_2, \ldots\rangle$ 为语言 $L = \langle P_1, P_2, \ldots\rangle$的一阶结构。令 I为一组主体，并令 $Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$表示所有满足 $dom(f) \subset I \times \mathbb{N}$且 $rng(f) \subset A$ 的有限函数的集合。 $\mathcal{A}$ 上的流动结构是一个结构 $\mathcal{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots\rangle$，满足$F \subseteq Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$，且 F的元素满足上文的条件 (†)。

可以定义对象 f 的若干特征。下文只需要用到以下特征。回顾一下，对于每个 $f \in F$和 $i \in I$， f_i 是由 $f_i(t) = f(i, t)$定义的函数。令

$$W_i(f) = dom(f_i) = \{t : \langle i, t\rangle \in dom(f)\}.$$

$W_i(f)$ 是 i 观察对象 f的所有时刻的集合。

给定一个流动结构 $\mathcal{F} = \langle F, R_1, R_2 \ldots\rangle$，令 $L(F)$ 按通常方式表示L，并将集合 F 中的元素作为参数加入其中。

我们下面实际需要的只是“情境真值”这一概念，且仅适用于形式为谓词 $P_k(f_1, \ldots, f_{n_k})$ 的原子句及其否定，其中 P_k 是一个 n_k-关系符号，而 $f_1, \ldots, f_{n_k} \in F$，相对于 $\mathcal{F}$ 和一对 $\langle i, t\rangle \in I \times \mathbb{N}$，记作

$$\mathcal{F}, \langle i, t\rangle \Vdash P_k(f_1, \ldots, f_{n_k}).$$

然而，出于完备性的考虑，我们为 $L(F)$ 的每个命题句 ϕ 给出 $\mathcal{F}, \langle i, t\rangle \Vdash \phi$ 的定义，即给出由原子句 $P_k(f_1, \ldots, f_{n_k})$（其中 $f_i \in F$）以及联结词 $\wedge$、 $\vee$ 和 $\neg$ 构成的句子的定义。

定义2.2 给定一个流动结构 $\mathcal{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots\rangle$ 在 $\mathcal{A}$ 上，一个对 $\langle i, t\rangle \in I \times \mathbb{N}$ 以及一个关于 $L(F)$ 的句子 ϕ，关系“$\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$”按如下方式归纳定义：：

a) $\mathcal{F}, i, t \Vdash P_k(f_1, \ldots, f_{n_k})$ 当且仅当 $f_1(i, t) \downarrow \& \cdots \& f_{n_k}(i, t) \downarrow \& \mathcal{A} \models P_k(f_1(i, t) \ldots, f_{n_k}(i, t))$，也就是说，如果所有 $f_{n_l}(i, t)$ 都有定义，并且 $\langle f_1(i, t) \ldots, f_{n_k}(i, t)\rangle \in R_k$。

b) $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg P_k(f_1, \ldots, f_{n_k})$ 当且仅当 $f_1(i, t) \downarrow \& \cdots \& f_{n_k}(i, t) \downarrow \& \mathcal{A} \models\neg P_k(f_1(i, t) \ldots, f_{n_k}(i, t))$，也就是说，如果所有 $f_{n_l}(i, t)$ 都有定义，且 $\langle f_1(i, t) \ldots, f_{n_k}(i, t)\rangle \notin R_k$.

c) $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi \wedge \psi$当且仅当 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$且 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \psi$。
d) $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi \vee \psi$ 当且仅当 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$ 或 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \psi$。
e) $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg(\phi \wedge \psi)$ 当且仅当 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi \vee \neg\psi$。 f) $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg(\phi \vee \psi)$ 当且仅当 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$。 g) $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\neg\phi$当且仅当 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$。

我们将上述定义的语义称为流变对象语义（FOS）。

FOS 是一种没有公理和推理规则、只有通过满足关系 $\Vdash$给出的语义部分的逻辑。我们可以将 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi(f)$ 读作“$\mathcal{F}$在 $\langle i, t\rangle$处支持 ϕ”，或者更恰当地读作“i看到（或相信，或认为） f 在时间 t 于 $\mathcal{F}$满足 ϕ ”。下面我们将证明，FOS 是可靠的，即没有结构能够证明矛盾；但由于每个论域 $\mathcal{F}$中的函数具有部分性，它是不完备的，也就是说，存在 ϕ ，使得对于某些 i, t, $\mathcal{F}, i, t \nVdash \phi$和 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi$。这就是为什么在定义 2.2 中，我们还需要定义复杂公式的否定的真值。

引理 2.3 *(i) FOS* 是可靠的：不存在 $\mathcal{F}$、 i、 t 和 ϕ，使得 $\mathcal{F}$、 i、 $t\Vdash\phi$ 和 $\mathcal{F}$、 i、 $t\Vdash \neg\phi$。

(ii) FOS 是不完备的：存在 $\mathcal{F}$、 i、 t 和 ϕ，使得 $\mathcal{F}$、 i、 $t\nVdash \phi$ 和 $\mathcal{F}$、 i、 $t\nVdash \neg\phi$。

证明。 (i) 对 ϕ 的复杂度使用归纳法。(1) 若 ϕ 是原子的，则它具有形式 $P_k(f_1, \ldots, f_n)$，其中 P_k 是 L 的某个谓词，且存在某些 $f_1, \ldots, f_n \in F$。于是该断言由定义 2.2 的条款 (a) 和 (b) 得出。(2) 若该断言对 ϕ 成立，则由于 2.2 的条款 (g)，它对 $\neg\phi$ 也成立。(3) 我们假设该断言对 ϕ 和 ψ 成立，并证明它对 $\phi \wedge \psi$ 成立。设 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi \wedge \psi$ 且 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg(\phi \wedge \psi)$。根据 2.2 的条款 (e)，后者等价于 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi \vee \neg\psi$。因此我们既有 ϕ 和 ψ 为真，又有某些 $\neg\phi$ 和 $\neg\psi$ 为真，这与归纳假设矛盾。(4) 类似地，鉴于 2.2 的条款 (f)，我们证明该断言对 $\phi \vee \psi$ 成立。

（ii）例如，令 $\phi(x)$ 表示秃头的一元谓词 $P(x)$。再令 $f \in F$ 为一个流变对象， i 为一位观察者，并且 $t \in \mathbb{N}$ 满足 $f(i,\ t)$ 未定义，即 $f(i,\ t) \uparrow$。那么根据 2.2 的条款 (a)、(b)， $\mathcal{F},\ i,\ t \nVdash P(f)$ 和 $\mathcal{F},\ i,\ t \nVdash \neg P(f)$。⊣

现在，如果我们将“$\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$”解释为“$\phi$在 $\mathcal{F}, i, t$中为真”，并将“$\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi$”解释为“$\phi$ 在 $\mathcal{F}, i, t$中为假”，分别记作$\mathcal{F}_{i,t}(\phi) = \mathrm{T}$和$\mathcal{F}_{i,t}(\phi) = \mathrm{F}$，那么我们就可以将“$\mathcal{F}, i, t \nVdash \phi$and $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi$”解释为“$\phi$在$\mathcal{F}, i, t$中未定”，并记作$\mathcal{F}_{i,t}(\phi) = \mathrm{U}$。这样，FOS可视为一种三值

逻辑，其真值为 {T，U，F}，指定值为T。关于这种逻辑，一个有趣的事实是，它与强Kleene三值逻辑相同，因为二者关于 $\wedge$、 $\vee$ 和 $\neg$ 的真值表完全一致。本文末尾的附录证明了这一结果。

根据定义， $\mathcal{F}$ 的对象都在变化。然而，尤其重要的是那些相对于观察它们的主体而言不可感知地变化的对象。（为简便起见，我们假设不可感知性是一种主体间条件，即，如果某个对象相对于某个主体 i不可感知地变化，那么它相对于任何其他主体 j也不可感知地变化。）

定义 2.4 设 $\mathcal{F} = \langle F, R_1, R_2, \ldots\rangle$ 为固定值，设 $f \in F \subseteq Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$，并且设 $\phi(x)$是 $L(F)$的一个属性。 f 被称为相对于 ϕ 不可感知地变化（*i.c.*），如果

$$(\forall i \in I)(\forall t \in \mathbb{N})[f(i,t)\downarrow \,\& f(i,t+1)\downarrow \Rightarrow (\langle i,t\rangle \Vdash \phi(f) \Leftrightarrow \langle i,t+1\rangle \Vdash \phi(f))].$$

直观地说，如果对于每个主体 i而言，当他/她在两个连续时刻 t 和 $t+1$观察 f 时，他相信f 在 t 满足 ϕ，当且仅当他相信 f 在 $t+1$满足 ϕ，那么 f 相对于 ϕ是 i.c.[3] 。相对于某个属性ϕ存在 i.c. 对象的原因当然在于，与谓词 ϕ相关的变化速率相对于人类辨别能力而言非常低。例如，衰老大概会持续改变人的面部和身体，但这种变化在几天、几个月甚至几年内都无法察觉。

i.c. 对象的示例

1) 设 M 是一个特定的男人， A 是一个集合，其中可能还包含若干观察者 $i \in I$ 在一段时间内的若干时刻 $t \in \mathbb{N}$ 拍摄的 M头部有头发部分的快照。如果 $f \in Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$且 $f(i,\ t)\downarrow$，我们假设 $f(i,\ t)$是 i 在时间 t拍摄的快照。设 $P(x)$是语言 L中的秃头一元谓词，它由 A上的秃头一元关系 $R \subseteq A$ 解释。因此，我们关注一阶结构 $\mathcal{A} = \langle A,\ R\rangle$ 以及 $\mathcal{A}$上的流动结构$\mathcal{F}$。实际上，每个 $f \in Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$都是相对于$P$ 的 i.c. 对象，因为秃头这一属性对任何观察者而言，在两个连续时刻之间都不会改变。也就是说，对于任意两个连续快照

[3]使用“不可感知地变化”这一术语时，重点在于“不可感知地”，而非“变化”。也就是说，即使 f完全没有变化，即$f(i,\ t) = f(i,\ t+1)$，它仍然是 i.c.。

$f(i,t)$和 $f(i,t+1)$由同一观察者 i拍摄，若二者都有定义，则要么 $\mathcal{A} \models P(f(i,t)) \wedge P(f(i, t+1))$，要么 $\mathcal{A} \models \neg P(f(i,t)) \wedge \neg P(f(i,t+1))$。因此，如果 $f(i,t)\downarrow$且 $f(i,t+1)\downarrow$，那么 $\langle i,t\rangle \Vdash P(f) \iff \langle i,t+1\rangle \Vdash P(f)$。因此， f 满足定义 2.4 的条件。

2）作为另一个例子，设 D 是一个每单位时间倾出一粒沙子的装置，并设 A 是观察者在不同时刻所获取的、由不断增加的沙量构成的快照集合。对于每个 $f \in Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$， $f(i,\ t)$ 表示 i 在 t 所感知到的沙量（如果 i 确实在 t 观察沙子）。设 $P(x)$ 表示“堆”这一谓词，并设 $H \subseteq A$ 表示该属性在 A 上的外延。也就是说，如果 $a \in A$ 是一定量的沙子， $a \in H$ 就意味着 a 是一个堆。我们关注结构 $\mathcal{A} = \langle A,\ H\rangle$ 以及 $\mathcal{A}$ 上的流动结构 $\mathcal{F}$。根据普遍观点，由于单粒沙子不可能影响“堆”这一属性，因此显然，每个 $f \in Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$ 都是相对于谓词 P 的 i.c. 对象。[4]

3）第三个例子稍微更为“抽象”。考虑一台机械数字计数器，按递增顺序显示连续整数 1、2、.....、1013、1014、.....。假设在时间 n ，数字 $k+n$ 正在显示（其中 k 是取决于计数器的常数）。 A 是显示出来的整数集合，而 $P(x)$ 是一个大数谓词。主体 i 不时地看一眼显示屏，并断言显示的整数是大数或非大数。如果 $f(i,t)\downarrow$，那么 $f(i,t)$ 分别是主体 i 在 t 观察到的整数，以及他的断言 $P(f(i,t))$ 或 $\neg P(f(i,t))$。设 $R \subseteq A$ 解释 P。我们考察结构 $\mathcal{A} = \langle A, R\rangle$ 以及定义在 $\mathcal{A}$ 上的流动结构 $\mathcal{F}$。 $\langle i,\ t\rangle \Vdash P(f)$ 表达了这样一个事实：“i 在 t 观察到整数 $f(i,t)$，并相信 $f(i,t)$ 是大数。”由于大数性质不会因加 1 或减 1 而改变，显然每个 $f \in Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$ 都是关于谓词 P 的 i.c. 对象。

说明。关于前面提到的第一个例子，即男人 M头部的毛发部分，有人可能会反驳说，拍摄一张

[4]请注意，在每种情况下，时间单位的长度都必须根据我们将要描述的具体 i.c. 情境来选择。例如，如果沙子倒出得非常迅速，而观察者所使用的时间单位相当大，那么定义 2.4 的条件很可能会被违反，因为观察者 i可能会判定 $f(i,\ t)$不是一个堆，而是 $f(i,\ t+1)$ is。例如，如果观察者的时间单位是一秒，而堆的变化速率是每毫秒一粒沙粒，那么在观察者的每个快照中将累积 1000 次基本变化，这当然可能被汇总为一次可感知的变化。因此，n 应始终以非常接近情境变化速率的方式来计算时间段。

M头部的快照时，观察者可能无法判断 M是秃头还是不秃头；但是，他/她可以使用修饰副词，说这个男人“近乎秃顶”、“完全秃顶”或“肯定不秃”等，这对于模糊概念来说相当常见。这一点没错，但并不影响堆垛悖论本身的核心。堆垛悖论的核心在于从一种性质 P 到另一种性质 Q的模糊过渡，“既没有跨越任何界限，也无法判断这种过渡是在何时、以何种方式实现的”，正如我们在引言中所说。为强调这一点，我们将这些不同性质视为彼此相反的性质，即 P和 $\neg P$，或“秃头”与“非秃头”。如果我们将这些性质改为“秃头”和“近乎秃顶”，也不会有任何区别。因为在这种情况下，问题相应地就变成：一个男人如何随着时间的推移，从“近乎秃顶”的状态模糊地过渡到“秃头”的状态。

3 堆垒悖论在 FOS 框架中的处理

让我们看看 FOS 如何处理堆垒悖论。回顾定义 2.1，对于每个对象 $f \in Fin(A^{I\times\mathbb{N}})$ 和每个主体 i，都对应着 f 被 i 观察的时间

$$W_i(f) = dom(f_i) = \{t \in \mathbb{N} : \langle i, t\rangle \in dom(f)\},$$

根据定义，它是 $\mathbb{N}$ 的有限子集。对于每个 $t \leq s \in \mathbb{N}$，令 $[t, s]$ 表示闭区间 $\{n \in \mathbb{N} : t \leq n \leq s\}$。允许存在仅含一个元素的平凡区间 $[n] = \{n\}$。显然，现在每个有限集 $X \subset \mathbb{N}$ 都可以唯一地分解为若干互不相交、有限、连续且极大的 X 区间之并

$$X = \bigcup_{m=1}^{p} [t_m, s_m].$$

由于连续性和极大性，对于每个 m $[t_m, s_m] < [t_{m+1}, s_{m+1}]$和 $s_m + 1 < t_{m+1}$都有此性质。否则，对某个 m，就有 $s_m + 1 = t_{m+1}$。但这样一来，$[t_m, s_{m+1}]$ 就是 X 和 $[t_m, s_m] \subset [t_m, s_{m+1}] \subseteq X$ 的一个区间，这与 $[t_m, s_m]$的极大性矛盾。因此，对于每个 $m = 1$、.....、$p-1$,

$$t_m \leq s_m \text{ and } s_m + 1 < t_{m+1}. \tag{2}$$

我们将 X 划分为满足条件 (2) 的互不相交极大区间，这称为 X 的规范分析。特别地，对于每个 f, i, $W_i(f)$ 作为 $\mathbb{N}$ 的有限子集，都有规范分析

$$W_i(f) = \bigcup_{m=1}^{p} [t_m, s_m]. \tag{3}$$

$W_i(f)$ 可能由一个时间区间构成，也可能由几个极大互不相交区间构成。构成 $W_i(f)$ 的极大区间 $[t_m, s_m]$ 是 $W_i(f)$ 的组成区间。

定义 3.1 设 $t, s \in W_i(f)$，且 $t < s$。若存在一个观察间隙，位于 t 与 s 之间（对于主体 i，相对于对象 f），则称存在这样的观察间隙，当且仅当存在 $t' \in \mathbb{N}$，使得 $t < t' < s$，且 f_i 在 t'处未定义，即 $t' \notin dom(f_i)$。

注。本文完成后，我读到了 P. Pagin 的作品 [6] 和 [7], ，发现它与本文有一些显著的相似之处。具体而言，在本文框架中，“观察间隙”这一概念所发挥的作用，在 Pagin 的作品中由他提出的“中心间隙”概念发挥。事实上，这两个概念出奇地相似。它们的差异主要在于背后的哲学动机，以及它们在不同语境中的实现方式。

观察间隙可以是一个单独的时间点，也可以是 $\mathbb{N}$ 的一个区间。等价地，当且仅当 $W_i(f)$ 由多个组成区间构成，且 t, s 不属于同一个组成区间时，$t < s$之间存在观察间隙。显然，若 $t < t' < s$ 且 $f(i, t')!\uparrow$，那么 t' 位于 $W_i(f)$ 中两个相邻组成区间之间，其形式为 $[t_k, s_k]$ 和 $[t_{k+1}, s_{k+1}]$（见图 1。）

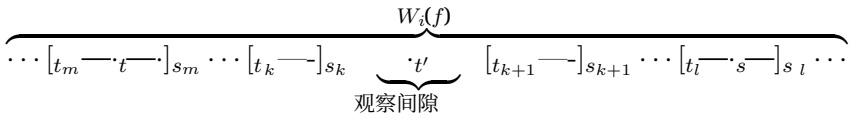


图1

观察对象 f的主体 i 存在观察空缺，这显然意味着间断观察。 也就是说，当 i在时刻 t专注于 f 时，在时刻 $t' > t$ 他的注意力从 f分散开，转而关注另一个对象，譬如 g，而在时刻 $s > t'$ 他又重新专注于 f。正如我们将在最后一节中论证的那样，这种行为对人类观察者而言相当常见且自然。

定义 3.2 设 i, f 如上所述，设 $\phi(x)$ 是 L 的一个属性，且相对于该属性， f是一个 i.c. 对象；再设 $t, s \in W_i(f)$，使得 $t < s$。如果 i 相对于 ϕ 在 t 与 s 之间改变其观点，那么我们称之为 $\langle i, t\rangle \Vdash \phi(f)$ 且$\langle i, s\rangle \Vdash \neg\phi(f)$，或者 $\langle i, t\rangle \Vdash \neg\phi(f)$ 且 $\langle i, s\rangle \Vdash \phi(f)$。

命题 3.3 设 f 是关于属性 ϕ的一个 $i.c.$ 对象。如果主体 i 相对于 ϕ 在时刻 t 和 s之间改变其观点，且$t < s$，那么必然在 t 和 s之间存在一个观察间隙。

证明。这是关于 ϕ 的 i.c. 对象定义的一个相当直接的推论。从定义 2.4 可以清楚看出，如果 $t, t+1 \in W_i(f)$，那么 $\langle i, t\rangle \Vdash \phi(f) \Leftrightarrow \langle i, t+1\rangle \Vdash \phi(f)$。令 $t < s \in W_i(f)$，并假设 t与 s之间不存在观察间隙。那么显然 $[t, s] \subseteq W_i(f)$。如果 $s - t = n$，那么通过归纳法可知，对于每个 $0 \leq k \leq n$ $\langle i, t\rangle \Vdash \phi(f) \Leftrightarrow \langle i, t+k\rangle \Vdash \phi(f)$。因此，对于 $k = n$, $\langle i, t\rangle \Vdash \phi(f) \Leftrightarrow \langle i, s\rangle \Vdash \phi(f)$，这意味着 t与 s之间相对于 ϕ不存在观点改变，矛盾。 $\dashv$

命题 3.3 表明，只要相对于某个 i.c. 对象发生观点改变，这总是由于存在观察空缺。由于根据流变对象 $f \in F$ 的定义以及 $W_i(f)$ 的结构，观察空缺大量存在，因此，命题 3.3 也同时为堆垒悖论提供了一个解决方案：只要主体 i 发生观点改变，就断定在对 i.c. 对象 f 的两次矛盾评估之间出现了针对 i 的观察空缺。这样一来，堆垒悖论就不再是悖论。

注释 3.4 (1) $W_i(f)$ 不一定总是包含观察空缺。对于某些i 而言， f $W_i(f)$ 很可能只由一个 $\mathbb{N}$ 区间构成。然而在这种情况下，对于涉及 f 的每个 i.c. 属性 ϕ ，主体 i 都不可能沿着 $W_i(f)$ 相对于 ϕ 改变自己的观点。

(2) 如果 t， $s \in W_i(f)$、 $t < s$，并且在 t 与 s 之间存在观察空缺，那么i 不 必沿着区间 $[t, s]$ 改变其关于 ϕ 的观点。也就是说，当出现观察空缺时，观点改变是一种可能 而非必然的现象。

4 一些讨论

在最后这一节中，我们将讨论两个主题：1）是否有实验证据表明现实观察者会间断地观察；2）观察间隙这一概念如何解释穿越视界这一颇为神秘的现象。

4.1 现实观察者会间断地观察吗?

这个问题涉及认知心理学和注意聚焦理论，因此这些领域的专家可以对其作出可靠的评估，

或许还能以实验性证据为依据。我联系了几位认知心理学和视觉领域的专家。其中一位是 Erick Weichselgartner，他与 G. Sperling 一起支持[13]这样一种观点：注意是离散的（即“量子式”或“片段式”），而非连续的。当我询问 Weichselgartner 观察空缺是否可能存在时，他这样回答（个人通信）：

> “间断观察得到了充分的实证心理学研究结果支持。无论任务是什么，受试者的错误率和／或反应时间都会随着时间推移而增加。”

他还表示，在我们的讨论中，关键词不只是“注意”，而是警觉 或清醒度 或持续注意。 对于我提出的问题——“人类（也许所有哺乳动物）是否一直都以断断续续、间歇性的方式观察、思考，并进行一般意义上的交流，也就是时而进行、时而停止”——他回答道：

> “心理学文献中对于注意是连续的还是离散的存在争议（参见 [9], [11], [13]）。据我所知，这个问题仍未有定论。从心理学家的角度来看，对间断观察持否定态度与研究文献中的观点不一致。我不太理解你的数学研究，但你对心理学所作的假设没有问题！”

我还联系了约克大学视觉科学杰出教授 John Tsotsos。他在私人通信中写道：

> “人类注视某样东西时，无法长时间持续这样做，原因很简单：神经疲劳。如果你用眼睛盯住一个点，不转动眼睛，也不眨眼或做任何其他动作，视网膜感光细胞中的神经递质物质就会被消耗掉，来不及得到补充。因此，事物开始逐渐变淡，尤其是细节。转动眼睛会使神经递质物质分布到] 视网膜上不同的影像落点，因此不同时刻会有不同的感受器发挥作用。想想屏幕保护程序：它会在不同时刻使用屏幕的不同区域，从而帮助保护屏幕。眼睛也是同样的道理。这实际上也适用于视觉皮层中的所有视觉神经元。”

我认为上述说法对于间断观察的合理性及其正当性尤为重要，因为它从视觉生理学的角度解释了为什么真正的观察者无法长时间盯着某样东西。

对于神经疲劳现象引起的各种副作用，例如鲜明的黑白轮廓逐渐消融到较为柔和或灰暗的区域中、对运动的适应、闪烁和摇曳等，Tsotsos教授曾提及这些现象 [12]（第60页）。

4.2 中断观看与视界穿越

我们先简要概述一下“视界”这一概念，它可追溯至胡塞尔。P. Vopˇenka在其关于替代集合论的著作[16] 中也广泛运用了这一概念。相对于某位观察者i而言，视界是一系列（任何类型的：物理、感知、智力）向前延伸、没有最后一个元素且对 i而言可见的步骤。它是一个极具相对性和主观性的观念，却是每个人把握现实所不可或缺的。例如，一个人认为自己年轻时所处的那些时刻组成的集合，就是一个视界。每个人还都有一个终极视界，即他自己的生命历程。每个有意识主体都知道，世界延伸至任何特定视界之外。也就是说，给定任一视界 h ，其中都有一些步骤 h ，也有一些步骤在其之外 h。我们把从视界之内过渡到视界之外 h称为视界穿越。显然，后者与我们在引言中所说的“模糊过渡”一致，即从某个属性 P 到其反面 $\neg P$ 的不可察觉的过渡。

让我们再次考虑那个典型例子：集合 $Small_i$ 中的数字被 i 感知为小。它会产生一个视界，因为在每个特定时间 t， i 都无法识别出 $Small_i$的最后一个元素，即$n \in S_i$ 蕴含 $n+1 \in Small_i$。暂且不考虑 t，也就是说，用一个理想化的观察者替代真实观察者；由于没有最后一个元素，每个这样的序列看起来都可能是无限的。就刚才提到的例子而言，这意味着 $Small_i$ 看起来是无限的，但 $\mathbb{N}-Small_i \neq \emptyset$。要表示这种情况，需要将 $\mathbb{N}$ 划分成类似图2所示的形式，也就是把 $\mathbb{N}$ 分成一个没有最后一个元素的初始段（用点表示）和一个没有第一个元素的末段。

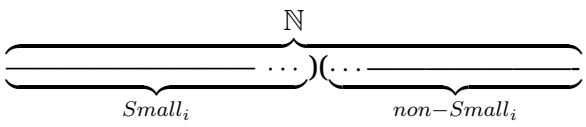


图2

当然，这种对实际时间轴的划分是不可能的，而这实际上等价于堆垛悖论。若转而采用 $\mathbb{N}$的真扩张，即自然数的非标准模型 M ，理论上就能解决这一问题。这类模型大量存在，并且在模型论中得到了广泛研究。对于任何这样的 M， $\mathbb{N}$ 都是 M的真初始段，而且 $M\backslash\mathbb{N}$不含第一个元素。因此，用 M替换 $\mathbb{N}$、用 $\mathbb{N}$替换 $Small_i$，并用 $M\backslash\mathbb{N}$替换 $not\text{-}Small_i$，我们便得到图3所示的图景。它在结构上与图2所示的图景完全相同，同时在数学上也是可能的。

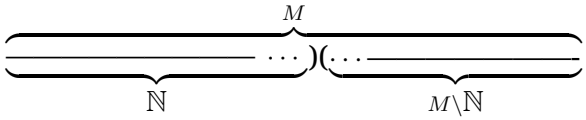


图3

在 [14] 中，我提出了通过非标准自然数集合来实现这一目标的方法。这类集合确实很好地捕捉了模糊性的许多理论层面，但其主要缺点在于非标准数的不可行性，即 $M\backslash\mathbb{N}$中的元素，因为它们与我们的现实世界相距绝对遥远，因此无法为现实模糊现象提供任何实际理解。现实生活的边界必然处于 $\mathbb{N}$之内，而只有相对于 $\mathbb{N}$ ，才应提出这些悖论。非标准分析与堆垛悖论之间的联系也可在 [1]和 [3]中找到。

如今，间断观察确实为在现存时间轴上实现视界穿越提供了一种现实且一致的方式 $\mathbb{N}$。这意味着，当我们没有注意到视界跨越时，当我们“并不在场”时，也就是说，当我们没有观察时，视界跨越便会发生。因此，与图2中涉及理想化观察者的情形不同，现实生活中发生的是图4所示的情形。只要我们有意识地关注小数字的增长，它们就会一直很小。到了某个时候，我们会停止观察，把注意力转向别的事物。过一段时间后，如果我们再把注意力转回那些不断增长的数字，可能会发现它们已经变大了。

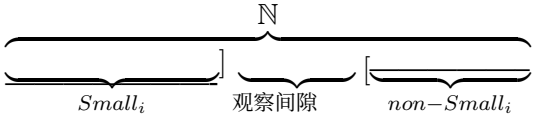


图4

那么，对于“在现实世界中，实现视界的实用工具是什么”这个问题，我认为答案是：如上所述，通过间断观察来实现视界，不仅令人满意，而且是唯一可能的方式。我们可以举出许多例子，说明视界跨越是间断观察的表现。每当我们与一位朋友阔别足够长的时间后再次相见，并观察他/她面容上的变化——从前没有的皱纹、略微变灰的头发等——我们就知道这个人已经跨越了一个视界。在这两次相遇之间的这段时间里，他/她在可察觉地发生了变化，而这期间我们并未观察他/她。相反，对于那些一直与我们相伴的配偶，我们却意识不到他们的逐渐变化。我们不可能亲眼见证视界穿越的确切时刻，因为这一时刻属于观察间隙。因此，这一时刻注定会永远无法捉摸。更诗意地说，我们的生活由交替出现的相遇（观察）与分离（中断）、接触与回避构成。视界只会在其间被跨越。

附录

FOS 的三值逻辑

回顾一下，根据定义2.2及其后的讨论，存在 $\phi$and $\mathcal{F}, i, t$，使得 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \phi$and $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi$。如果我们将“$\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$”解释为“$\phi$在 $\mathcal{F}, i, t$ 中为真”，并将“$\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi$”解释为“$\phi$在$\mathcal{F}, i, t$中为假”，分别记作 $\mathcal{F}_{i,t}(\phi) = \mathrm{T}$ 和 $\mathcal{F}_{i,t}(\phi) = \mathrm{F}$，那么我们可以将“$\mathcal{F}, i, t \nVdash \phi$and $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi$”解释为“$\phi$在 $\mathcal{F}, i, t$ 中未定义”，并记作$\mathcal{F}_{i,t}(\phi) =$U。具体地，我们定义：

定义 4.1 我们对每个句子 ϕ 定义：

- $\mathcal{F}_{i,\ t}(\phi) =$ 当且仅当 $\mathcal{F}$、i、$t \Vdash \phi$ 时为真。
- $\mathcal{F}_{i,\ t}(\phi) =$ 当且仅当 $\mathcal{F}$、i、$t \Vdash \neg\phi$ 时为假。
- $\mathcal{F}_{i,\ t}(\phi) =$ 当且仅当 $\mathcal{F}$、i、$t \nVdash \phi$，且 $\mathcal{F}$、i、$t \nVdash \neg\phi$ 时为未定。

注意，根据引理 2.3 (i)，即 FOS 的可靠性，上述定义是明确无歧义的，也就是说，不存在 $\mathcal{F}$、 i、 t 和 ϕ ，使得$\mathcal{F}_{i,\ t}(\phi)$ 同时取 T 和 F。因此，FOS 是一种可靠的三值逻辑，其真值为 {T、U、F}，指定值为 T。我们将在下文证明，这种逻辑与强克莱尼逻辑相同，即二者关于 $\neg$、 $\wedge$ 和 $\vee$ 的真值表相同。为简便起见，在接下来的两个引理中，我们省略运算符 $\mathcal{F}_{i,\ t}(\cdot)$ 的下标，只写作 $\mathcal{F}(\cdot)$。

引理 4.2 对于每个 ϕ:
(i) $\mathcal{F}(\phi) = F \Leftrightarrow \mathcal{F}(\neg\phi) = T$. *(ii)* $\mathcal{F}(\phi) = T \Leftrightarrow \mathcal{F}(\neg\phi) = F$. *(iii)* $\mathcal{F}(\phi) = U \Leftrightarrow \mathcal{F}(\neg\phi) = U$.

证明。 (i) 根据定义 4.1，我们立即得到:

$$\mathcal{F}(\phi) = \mathsf{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}_{i,j} \Vdash \neg\phi \Leftrightarrow \mathcal{F}(\neg\phi) = \mathsf{T}.$$

(ii) 根据定义 4.1 和定义 2.2 (g)，我们得到:

$$\mathcal{F}(\phi) = \mathsf{T} \Leftrightarrow \mathcal{F}_{i,j} \Vdash \phi \Leftrightarrow \mathcal{F}_{i,j} \Vdash \neg\neg\phi \Leftrightarrow \mathcal{F}(\neg\phi) = \mathsf{F}.$$

(iii) 设 $\mathcal{F}(\phi) = \mathsf{U}$，即 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \phi$和 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi$。根据定义 2.2 (g)，这等价地写作 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi$和 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\neg\phi$，这意味着根据定义 $\mathcal{F}(\neg\phi) = \mathsf{U}$。⊣

现在，如果 $\mathcal{F}(\phi)$ $\mathcal{F}(\psi) \in \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$，那么根据定义 2.2，$\phi \wedge \psi$和 $\phi \vee \psi$的真值与经典逻辑中的计算完全相同。因此，我们只需检查在$\mathcal{F}(\phi)$和 $\mathcal{F}(\psi)$ 中至少有一个为 U 的情况下，$\phi \wedge \psi$和 $\phi \vee \psi$的取值。

引理 4.3 对任意 ϕ、ψ:
（*i*）若 $\mathcal{F}(\phi) = T$且 $\mathcal{F}(\psi) = U$，则 *(a)* $\mathcal{F}(\phi \wedge \psi) = U$且 *(b)* $\mathcal{F}(\phi \vee \psi) = T$。（*ii*）若 $\mathcal{F}(\phi) = F$且 $\mathcal{F}(\psi) = U$，则 *(a)* $\mathcal{F}(\phi \wedge \psi) = F$且 *(b)* $\mathcal{F}(\phi \vee \psi) = U$。（*iii*）若 $\mathcal{F}(\phi) = U$且 $\mathcal{F}(\psi) = U$，则 *(a)* $\mathcal{F}(\phi \wedge \psi) = U$且 *(b)*$\mathcal{F}(\phi \vee \psi) = U$。

证明。（i）（a）在给定的假设下，我们必须证明 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \phi \wedge \psi$且 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg(\phi \wedge \psi)$，或 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi \vee \neg\psi$。事实上，若 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi \wedge \psi$，则$\mathcal{F}, i, t \Vdash \psi$，而这是假的，因为根据假设 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \psi$且 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\psi$。另一方面，若 $\mathcal{F}, i, t. \Vdash \neg\phi \vee \neg\psi$，则 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi$或 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\psi$，而根据我们的假设，二者皆为假。（b）由于 $\mathcal{F}(\phi) = \mathsf{T}$，即 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$，显然 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi \vee \psi$ 亦然，因此 $\mathcal{F}(\phi \vee \psi) = \mathsf{T}$。

(ii) (a) 由于 $\mathcal{F}(\phi) = \mathsf{F}$，我们有 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi$，因此 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi \vee \neg\psi$，或者 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg(\phi \wedge \psi)$。因此 $\mathcal{F}(\neg(\phi \wedge \psi)) = \mathsf{T}$，从而根据引理 4.2，$\mathcal{F}(\phi \wedge \psi) = \mathsf{F}$。(b) 我们证明 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \phi \vee \psi$ 以及 $\mathcal{F}, i, t \nVdash \neg\phi \wedge \neg\psi$。事实上，若 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi \vee \psi$，则 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \phi$或者 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \psi$，这两种情况都与我们的假设矛盾。若还有 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\phi \wedge \neg\psi$，则 $\mathcal{F}, i, t \Vdash \neg\psi$，这又与我们关于 ψ 的假设矛盾。

（iii）很容易验证。 ⊣.

由引理4.2和4.3得出的 $\neg\phi$, $\phi\wedge\psi$ 和 $\phi\vee\psi$ 的真值汇总如下列真值表所示：

$\neg$	
T	F
U	U
F	T

$\wedge$	T	U	F
T	T	U	F
U	U	U	F
F	F	F	F

$\vee$	T	U	F
T	T	T	T
U	T	U	U
F	T	U	F

这些真值表与强克莱尼逻辑的真值表一致（参见 [8] 或[5]）。

致谢 我非常感谢一位曾审阅本文早期版本的审稿人。他指出，FOS 可以被视为一种三值逻辑，并推测这种逻辑可能与强克莱尼三值逻辑有相似之处。遵循他/她的建议，我最终证明了 FOS 的逻辑确实是强克莱尼逻辑。

参考文献

[1] W. Dean，《严格有限主义、可行性与堆垛悖论》，《符号逻辑评论》**11**（2018年），第2期，295-346页。[2] K. Fine，《模糊性、真理与逻辑》，*Synth´ese* **30**（1975年），第3/4期，265-300页。[3]Yair Itzhaki，《定性表征与定量表征：对堆垛悖论的非标准分析》，《语言学与哲学》**44**（2021年），第5期，1013-1044页。[4] R. Keefe，《模糊性理论，》剑桥大学出版社，2000年。[5] S. Kleene，《元数学导论》，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1952年。[6] P. Pagin，《模糊性与中心间隙》，载于：《切割与云团》，R. Dietz 和 S. Moruzzi（编），牛津大学出版社，2010年，第254–272页。[7] P. Pagin，《模糊性与论域限制》，载于：《模糊性与语言使用》，P. Egr´e 和 N. Klinedinst（编），帕尔格雷夫·麦克米伦，2011年，第283–307页。

[8] F. Paoli 和 G. St. John，《强克莱尼逻辑与弱克莱尼逻辑专题特刊编者导言》，逻辑学研究 **112**（2024年），第6期，1201-1214页。[9] A.F. Sanders 和 O. Neumann（编），《感知与行动手册》第*3*卷：注意，学术出版社，1996年，第277-331页。[10] S. Shapiro，《语境中的模糊性》，克拉伦登出版社，牛津，2006年。[11] R.N. Shepard 和 L.A. Cooper，《心理意象及其变换，》剑桥，麻省理工学院出版社/布拉德福德图书公司，1982年。277-331页。[12] R.L. Solso，《认知与视觉艺术，》布拉德福德图书公司，麻省理工学院出版社，1994年。[13] G. Sperling 和 E. Wechselgartner，《空间注意动态过程的情节理论》，《心理学评论》**102**（1995年），503-532页。[14] A. Tzouvaras，《用非标准性建模模糊性》，《模糊集与系统》**94**（1998年），385-396页。[15] A. Tzouvaras，《集合论体系中“非常”的公理化》，逻辑学研究 **73**（2003年），413-430页。[16] P. Vopˇenka，《另类集合论中的数学，》Teubner Texte，莱比锡，1979年。