arXiv:2603.11630v1 [math.LO] 12 Mar 2026

再论岩浆宇宙：我们定义有序对、关系、数以及分离公理的一种特殊形式

Athanassios Tzouvaras

塞萨洛尼基亚里士多德大学数学系，
541 24 塞萨洛尼基，希腊，电子邮箱：
tzouvara@math.auth.gr

摘要

本文是 [4]的配套文章。我们讨论以下两个问题：1）我们能否在 [4] 的岩浆宇宙 M 中定义 M所缺失的某些非常基本的集合论对象的对应物，或仅仅是类似物，具体而言即有序对、二元关系（尤其是函数）以及自然数与序数？2）是否存在分离公理以及或许替换公理的受限形式的公理模式，使其在 M中成立？我们证明如下：1）有序对的岩浆类似物确实可以借助某些称为“岩浆对”的岩浆来定义。然而，当我们用它们来生成关系、尤其是函数时，会出现一些无法克服的问题。这些问题源于岩浆元素的特殊性：它们被区分为“预期的”与“附带的”，这一区分源于其固有的依赖关系。因此，岩浆函数只能在非常特殊的条件下加以定义。2）我们分离出某一类公式，称为“岩浆公式”，并将限于这些公式的分离公理模式称为“岩浆分离模式”（MSS），证明其在 M中成立。另一方面，替换公理严重失效，而这是由于其函数性形式所致。

数学主题分类（*2020*）：00A69, 06A06

关键词：Castoriadis 的岩浆、岩浆宇宙、岩浆的预期元素与共侧元素、岩浆有序对、关系与函数、岩浆类、岩浆分离公理。

1 引言

1.1 论文内容

在 [4] 中构造的岩浆宇宙 M 是 $V(A)$ 的子宇宙；后者是带有原子集 A 的 ZF 宇宙。构造它的目的是形式化地捕捉 Castoriadis 在 [1] 和[2], 中阐述的岩浆概念的某些方面。它与集合宇宙有显著差异，其中一个重要差异是它不包含有限集合（包括空集）。因此， M 不包含通常的有序对 $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$，也不包含笛卡尔积以及关系（二元和 n元关系），尤其不包含函数，因为所有这些数学实体都完全借助有序对构造而成。因此，一个自然的技术挑战是，在 M 中找出上述基本对象的岩浆类比物或熔浆对应物，首先是有序对，然后利用它们构造岩浆积、关系、函数以及自然数与序数。这将有助于我们进一步探索宇宙 M，并理解生活在其中是什么样的：我们不再身处熟悉的、由彼此独立的实体构成的集合论“分离”世界，而是置身于由彼此依存、不可分离的实体构成的“非分离”世界。

在这篇与 [4]配套的论文中，我们主要着手处理这一课题。出发点是这样一个观察：对于 $x \in M$而言，单元素集合 $\{x\}$的岩浆类比物是 M的基本开集 $pr(x)$。这使我们能够为任意 x、 $y \in M$定义一个岩浆 $\langle\langle x、\ y\rangle\rangle \in M$，使其满足关于对的基本条件，即 $\langle\langle x、\ y\rangle\rangle = \langle\langle x'、\ y'\rangle\rangle$ 当且仅当 $x = x'$ 且$y = y'$。 $\langle\langle x、\ y\rangle\rangle$ 是 x、 y的岩浆有序对。然而，与集合论中的对不同，对于任意一对 $\langle\langle x、\ y\rangle\rangle$ ，都存在无穷多个子对$\langle\langle x'、\ y'\rangle\rangle \subseteq \langle\langle x、\ y\rangle\rangle$。这给积的定义，尤其是将关系和函数定义为由岩浆对组成的岩浆，带来了严重困难，并导致我们将岩浆中的元素区分为“预期的”和“附带的”。具体而言，每当我们希望关系R包含某个特定的对 $\langle\langle x、\ y\rangle\rangle$（我们称之为“预期的”对）时，由于依赖关系，R还必须包含每一个 $\langle\langle x'、\ y'\rangle\rangle \subseteq \langle\langle x、\ y\rangle\rangle$（即每一个依赖于 $\langle\langle x、\ y\rangle\rangle$的对，因为 $\subseteq$ 是 M中刻画依赖关系的关系）。我们将每一个依赖于预期的 $\langle\langle x、\ y\rangle\rangle$ 的此类对 $\langle\langle x'、\ y'\rangle\rangle$ 称为“附带的”对。关系定义之所以复杂且不够明晰，恰恰是因为每个预期对都会伴随着大量附带对。定义岩浆函数时，这个问题会更加突出；所谓岩浆函数，就是满足每个输入都具有通常的唯一输出条件的岩浆关系。

按照目前的岩浆对定义，这类关系在 M 中并不存在，除非修改定义并施加特殊条件。一种解决办法是设计一种 $\langle\langle x,\ y\rangle\rangle$ 在 M 中的定义，使其不产生真旁系子对。但我不认为这样的定义能够实现。

此外，我们还将展示如何在M中定义自然数与序数，并说明在 M 中，针对一类称为“幺半群式”的特殊公式，分离模式成立。

本文内容安排如下：

第2节回顾 [4] 中的一些技术事实，这些事实对本文后续内容至关重要。

第3节介绍幺半群式有序对，并证明有关它们的基本事实。

第4节讨论幺半群式积，它们是笛卡尔积的类似物；我们也将在此首次看到“附带的”元素在区分岩浆中“预期的”元素时所发挥的关键作用。此外，我们还将在本节介绍幺半群式（二元）关系和函数，并讨论由此面临的问题。

第5节定义幺半群式自然数函数和序数函数，并举例说明如何将它们与函数结合使用。

在第6节中，我们证明，分离公理模式的一种自然的受限形式——岩浆分离模式（MSS），它只使用“岩浆式”公式，在 M 中成立。另一方面，我们证明替换公理会因其函数性特征而彻底失效。

1.2 [4] 简介

在本引言余下部分，为方便读者，我们简要概述 [4] 中介绍的岩浆及岩浆宇宙。令 ZFA 表示带有一集合 A 原子（或非集元素）的 ZF 理论，并令 $V(A)$ 表示建立在 A 上的 ZFA 宇宙。在 [4] 中，我们引入并研究了“岩浆宇宙” $M(A)$（或者，更确切地说，$M(A,\ \preccurlyeq)$，因为 $M(A)$ 的定义在很大程度上依赖于原子集合 A 上的预序 $\preccurlyeq$）。为了使 $\preccurlyeq$ 更忠实地模拟集合族元素之间的依赖关系——C. Castoriadis [1]和 [2]将其称为“岩浆”——我们假设 $\preccurlyeq$ 还具有不含极小元素这一额外性质；也就是说，对每个 $a \in A$，都存在一个 b，使得 $b \prec a$（这意味着 $b \preccurlyeq a$ 和 $a \not\preccurlyeq b$）。

给定预序 $\preccurlyeq$ of A，对每个 $a \in A$，令 $pr(a) = \{b \in A :\ b \preccurlyeq a\}$

为 a 的前驱集合。集合 $pr(a)$ 是 A 上自然拓扑的基，称为下拓扑；若对于每个 $a \in x$， $pr(a) \subseteq x$，则 $x \subseteq A$ 称为“下开”，或简称开。令 $LO(A, \preccurlyeq)$ 为 A 的下开子集集合。由于对 $\preccurlyeq$ 施加了非极小性条件，很容易得出：(a) $LO(A, \preccurlyeq)$ 中的所有集合都是无限的；(b) $LO(A, \preccurlyeq)$ 中不存在 $\subseteq$-极小集合。 $LO(A, \preccurlyeq)$ 的元素构成岩浆宇宙第一（底）层的岩浆。因为我们可以将预序 $\preccurlyeq$ 移至 A 的幂集上，然后依次移至所有更高阶的幂集上，如下所示。对于 $x, y \subseteq A$，令

$$x \preccurlyeq^+ y :\Leftrightarrow (\forall a \in x)(\exists b \in y)(a \preccurlyeq b).$$

容易看出， $\preccurlyeq^+$ 是 $\mathcal{P}(A)$上的一个预序。此外，若 $\preccurlyeq$ 不含极小元素，则 $\preccurlyeq^+$ 也不含。现在，若我们令

$$pr^+(x) = \{y \subseteq A : y \preccurlyeq^+ x\},$$

则在集合 $pr^+(x)$与 x的幂集之间成立如下显著的关系。

命题 1.1 ([4,命题 3.2])

(i) 对任意 x， $y \in \mathcal{P}(A)$， $y \subseteq x \Rightarrow y \preccurlyeq^+ x$，因此 $\mathcal{P}(x) \subseteq pr^+(x)$。*(ii)* 若 $x \in LO(A, \preccurlyeq)$，则*(i)*的逆命题成立，即对每个 $y \in \mathcal{P}(A)$， $y \preccurlyeq^+ x \Rightarrow y \subseteq x$，因此 $pr^+(x) \subseteq \mathcal{P}(x)$。*(iii)* 因此对每个 $x \in LO(A, \preccurlyeq)$， $pr^+(x) = \mathcal{P}(x)$。*(iv)* 特别地， $\preccurlyeq^+ \restriction LO(A, \preccurlyeq) = \subseteq$，并且

$$LO(LO(A, \preccurlyeq), \preccurlyeq^+) = LO(LO(A, \preccurlyeq), \subseteq).$$

由上文的条款 (iv) 可知，若我们设定 $M_1 = LO(A, \preccurlyeq)$，那么$LO(M_1, \preccurlyeq^+) = LO(M_1, \subseteq)$。出于同样的原因，若我们设定 $M_2 = LO(M_1, \subseteq)$，则将关系 $\subseteq$ 从 M_1 到 M_2 的集合上的平移 $\subseteq^+$ 又是 $\subseteq$。对于所有后续的层 M_3 M_4， ...，依此类推，其中每一层的定义方式都类似。此外，如果 α 是极限序数，我们可以直接将此前所有层的并集作为M_α ，并再次按照 $\subseteq$排序。然后，我们可以通过设定 $M_{\alpha+1} = LO(M_\alpha, \subseteq)$ 继续推进。如此一来，每个序数 $\alpha \geq 1$都对应定义了 M_α 。

鉴于上述事实，岩浆宇宙 $M(A)$ 在$V(A)$ 中定义如下。

$M_1 = LO(A, \preccurlyeq)$.
$M_{\alpha+1} = LO(M_\alpha, \subseteq)$, for every $\alpha \geq 1$.

$M_\alpha = \bigcup_{1\leq\beta<\alpha} M_\beta$，如果 α 是极限序数。
$M = M(A) = \bigcup_{\alpha\geq 1} M_\alpha$。

下一个命题给出了一些关于 M_α和 M的基本事实。

命题1.2 ([4, 引理4.2])
(i) $M_\alpha \subseteq V_\alpha(A)$，$M_1 \subseteq \mathcal{P}(A)\backslash\{\emptyset\}$，$M_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{P}(M_\alpha)\backslash\{\emptyset\}$以及 $M_\alpha \in M_{\alpha+1}$，对每个 $\alpha \geq 1$。
(ii) 对于 $\alpha \geq 1$，空间 $M_{\alpha+1} = LO(M_\alpha, \subseteq)$的布尔开集为以下集合

$$pr_\alpha(x) = \{y \in M_\alpha : y \subseteq x\} = \mathcal{P}(x) \cap M_\alpha.$$

因此：

$$x \in M_{\alpha+1} \Leftrightarrow x \subseteq M_\alpha \wedge x \neq \emptyset \wedge (\forall y \in x)(\mathcal{P}(y) \cap M_\alpha \subseteq x).$$

(iii) 类 M 在某种意义上“几乎”是传递的：对于每个$x \in M_\alpha$，若 $\alpha \geq 2$，则 $x \subseteq M$。然而，对于 $x \in M_1$，$x \subseteq A$。因此 $M \cup A$ 是传递的。

(iv) M是 V（A）的真子类，而 $M \cap V = \emptyset$，其中 V是 V（A）中纯集的子类（即那些满足 TC（x）$\cap A = \emptyset$的 x）。
(v) M 中的所有集合都是无限的。*(*
vi) M中不存在 $\subseteq$-极小集合。

在 [4] 中，引入岩浆主要是为了回应Castoriadis关于某些集合似乎无法纳入标准康托宇宙的担忧，同时也为了捕捉他对这类集合基本性质的直觉。尽管如此，玛格玛层级／宇宙$M = M$（A）$= \bigcup_{\alpha\geq 1} M_\alpha$似乎具有更广泛的意义，或者说本身就具有意义，具体而言，它构成了一个由集合组成的层级总体；与相应的集合宇宙 V（A）相比，它唯一的差别在于其元素的不可分离性，也就是说，这些元素无法分裂为任意的子集合族。当然，这导致许多ZFC公理（配对公理、并集公理、分离公理等）失效，因为其中大多数公理的目的恰恰是确保集合在存在性上的独立，以及尽可能大的多样性。

2 岩浆行为依赖关系的后果

元素之间的依赖关系对岩浆有着重大影响，这正是它们的行为与集合的行为显著分化的原因。

这种分化的主要表现，在于关于岩浆元素的清晰性和确定性不足。实际上，这意味着我们永远无法完全知晓一个岩浆究竟包含什么。例如，给定任意指定的岩浆 x_1、.....、x_n，我们可以定义包含它们的其他岩浆，而且还可以定义其中最小的一个，即 $pr(x_1) \cup \cdots \cup pr(x_n)$；然而，即使这个集合也从不恰好只包含 x_1、.....、x_n。它还包含无穷多个其他岩浆，它们都是 x_i 的子岩浆，而对于这些子岩浆的性质，我们无法作出任何精确的说明。这与集合的情形形成鲜明对比。在集合论中，集合构造的基本机制之一是分离公理，它断言：对于每个性质 $\phi(x)$ 以及每个预先存在的集合 X，都存在一个集合 Y，恰好包含 X 中满足 $\phi(x)$ 的元素。假设我们清楚地知道满足 $\phi(x)$ 的对象是什么样的，也清楚地知道 X 中的对象是什么样的，那么可以推出，Y 的元素是完全确定的。对于 M，不存在任何类似的结论。$L = \{\in\}$ 的基本性质 $\phi(x, x_1, \ldots, x_n)$，带有参数 x_1、.....、x_n，这些性质在 M 内定义岩浆，它们正是定义 $pr(x_1) \cup \cdots \cup pr(x_n) = (\mathcal{P}(x_1) \cup \ldots \cup \mathcal{P}(x_n)) \cap M$ 的性质，也就是说

$$\phi(x, x_1, \ldots, x_n) := \bigvee_{i=1}^{n} x \subseteq x_i.^1$$

然而，正如它们在 [4], 的形式框架中所呈现的那样，岩浆的元素归属具有不确定性和不清晰性，这表明所提出的形式化相当成功。事实上，Castoriadis 发展并阐述岩浆的概念及其“逻辑”，正是为了凸显思维（逻辑）和集合族所具有的那些品质：它们处于完全确定性和完全清晰性的对立面；他相信，这些品质潜藏于周遭的一切之中，却无法通过他所谓的“西方思想”加以捕捉和理解。

因此，M中的对象与 ZF 模型中的对象表现得如此不同，这一事实并不令人意外。问题在于，M内部是否存在任何有趣的数学事实。我们已经谈过岩浆元素普遍具有的模糊性。然而，如果我们试图在 M 中定义关系，尤其是函数，问题就会变得尖锐得多。众所周知，迄今为止唯一

[1]关于上文提到的岩浆元素缺乏明晰性和清晰度，我觉得颇为值得注意且耐人寻味的是，公式$\phi(x$、x_1，.....、$x_n)$ 在 M *infinite powersets* 中定义了（从 ZF 的角度来看），因为许多研究者（其中包括 S. Feferman、N. Weaver、H. Field 等人）都曾将无限集的幂集称为“内在模糊的”集合族。

广受认可的、以数学方式定义这些实体的方法，是借助有序对。因此，首先要问的是，作为通常有序对的类比物，“岩浆对”能否在 M 中自然定义。答案是肯定的。我们将在下一节看到，可以令人满意地定义有序对的岩浆类比物，即对于任意 $x, y \in M$，岩浆 $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ 都具有对的基本性质，也就是说，

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle\langle x', y'\rangle\rangle \Rightarrow x = x' \ \& \ y = y'.$$

不过我们也将看到，仅凭这一点还不足以忠实地定义二元关系，尤其是函数，无法仿照相应 ZF 对象的通常定义。

2.1 关于岩浆的一些初步技术事实

在 M 中构造标准 ZFA对象的幺半群式对应物（例如有序对）的基本思路，是用包含它们的相应最小 岩浆，来代替并不存在于 M 中的单元素集合$\{x\}$，以及更一般地说，有限集 $\{x_1, \ldots, x_n\}$。例如，对于每个 $a \in A$，满足 $a \in u$ 的最小岩浆 u 是 a 的前驱构成的前驱集 $pr(a)$；更一般地，对于任意有限 $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$，包含所有 a_i 的最小岩浆是 $pr(a_1) \cup \cdots \cup pr(a_n)$。然而，正如命题1.2 (ii) 所示，问题似乎在于，对于每个$x \in M$，都存在一个由这类基本集合组成的数组 $pr_\alpha(x)$，每个 α 对应一个，且满足 $x \in M_\alpha$。（请注意，原子 $a \in A$ 并非如此，因为$A \cap M = \emptyset$。）不过，正如下文推论 2.2 所示，所有这些前驱集都是相同的。

命题2.1 ([4], 命题 4.5，推论 4.6)

(i) 若 $x \in M_1$，则 $\mathcal{P}(x) \cap M \subseteq M_1$，因此 $\mathcal{P}(x) \cap M = \mathcal{P}(x) \cap M_1$。*(ii)* 若 $x \in M_{\alpha+1}$，则对每个 $\alpha \geq 1$，$\mathcal{P}(x) \cap M \subseteq M_{\alpha+1}$，因此$\mathcal{P}(x) \cap M = \mathcal{P}(x) \cap M_{\alpha+1} = pr_{\alpha+1}(x)$。*(iii)* 若 $\alpha < \beta$ 是极限序数且 $x \in M_\alpha$，则 $pr_\alpha(x) = pr_\beta(x)$。*(iv)* 对每个 $\alpha \geq 0$，若 $x \in M_{\alpha+1}$，则 $\mathcal{P}(x) \cap M \in M_{\alpha+2}$。*(v)* 若 $x \in M$ 且 $x \subseteq M_\alpha$，则 $x \in M_{\alpha+1}$（也就是说，M_α 的每个属于 M 的子集都是 M_α 的开子集）。

令 $rank_M(x)$ 表示 x 的岩浆秩，即 $rank_M(x) = \min\{\alpha : x \in M_{\alpha+1}\}$。

推论 2.2 设 $x \in M$ 且 $rank_M(x) = \alpha$。那么对每个满足 $x \in M_\beta$ 的 $\beta \geq \alpha+1$，都有 $pr_\beta(x) = pr_{\alpha+1}(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$。

证明。设 $\beta \geq \alpha+1$ 且 $x \in M_\beta$。若 β 是后继序数，设为 $\beta = \gamma+1$，则由 2.1 的条款 (ii)，$pr_\beta(x) = pr_{\gamma+1}(x) = \mathcal{P}(x) \cap M_{\gamma+1} = \mathcal{P}(x) \cap M$。但同理，$pr_{\alpha+1}(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$，因此 $pr_\beta(x) = pr_{\alpha+1}(x)$。若此时 β 是极限序数，则 $M_{\alpha+1} \subseteq M_\beta$，因此 $pr_{\alpha+1}(x) \subseteq pr_\beta(x) = \mathcal{P}(x) \cap M_\beta \subseteq \mathcal{P}(x) \cap M$。但已有 $pr_{\alpha+1}(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$，所以 $pr_\beta(x) = pr_{\alpha+1}(x) = \mathcal{P}(x) \cap M$。⊣

鉴于推论 2.2，今后通常省略 $pr_\alpha(x)$ 中的下标，并对每个 $x \in M$ 简写为 $pr(x)$，其中 $pr(x)$ 总是表示$pr_{rank(x)+1}(x)$，或者根据 2.2，

$$pr(x) = \mathcal{P}(x) \cap M. \tag{1}$$

此外，下面我们将经常使用运算 $pr(\cdot)$的迭代，写作 $pr^2(x)$，而不写 $pr(pr(x))$；一般而言，$pr^n(x)$，$n \in \mathbb{N}$ 表示第 n 次迭代。

引理 2.3 运算 pr： $A \cup M \to M$ 满足以下性质：

(i) pr 在 M 上是单射，即对所有 x、$y \in M$，$pr(x) = pr(y) \Rightarrow x = y$。*(ii)* pr 是关于 $\subseteq$ 的嵌入，即 $x \subseteq y \Leftrightarrow pr(x) \subseteq pr(y)$。*(iii)* 对任意 $a \in A$ 和 $x \in M$，$pr(a) \neq pr(x)$。*(iv)* 对于 a、$b \in A$，$pr(a) = pr(b) \Leftrightarrow a \sim b$，其中 $a \sim b$ 表示等价关系 $a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a$。

证明。(i) 设 $x, y \in M$。由 (1)，$pr(x) = pr(y)$ 意味着 $\mathcal{P}(x) \cap M = \mathcal{P}(y) \cap M$，因此 $x \in \mathcal{P}(y)$ 且 $y \in \mathcal{P}(x)$。由此可得 $x \subseteq y$ and $y \subseteq x$，即 $x = y$。

(ii) 若 $x \subseteq y$，由 (1) 可立即得到 $pr(x) \subseteq pr(y)$。反之，若 $pr(x) \subseteq pr(y)$，则 $x \in pr(y)$，因为 $x \in pr(x)$，故 $x \subseteq y$。

(iii) 若 $a \in A$，则 $pr(a) \subseteq A$；而对于 $x \in M$，有 $pr(x) \subseteq M$。由于 $A \cap M = \emptyset$，结论得证。

(iv) 这直接由 $pr(a)$ 的定义得出。⊣

下面我们将定义有序对以及自然数与序数的岩浆类比物。在这些构造中，我们主要使用岩浆的**并集公理**，因此必须明确哪些这样的并集是合法的，即属于 M，哪些不是。下面的事实阐明了这一情况。

引理 2.4 设 x，$y \in M$。

(i) 若 x、$y \in M_1$，则 $x \cup y \in M_1$。*(ii)* 若 x、$y \in M \backslash M_1$，则 $x \cup y \in M \backslash M_1$。*(iii)* 若 $x \in M_1$ 和 $y \in M \backslash M_1$，则 $x \cup y \notin M$。

证明。(i) 回顾一下，$M_1 = LO(A, \preccurlyeq)$，即 M_1 由 A的下开子集组成，因此它对并集封闭。

(ii) 设 $x, y \in M\backslash M_1$。那么，对于某个 $\alpha, \beta \geq 1$，有 $x \in M_{\alpha+1}$和 $y \in M_{\beta+1}$。因此 $x \subseteq M_\alpha$ 和 $y \subseteq M_\beta$。于是，对于任意极限序数 $\gamma \geq \alpha, \beta$，我们有 $x \cup y \subseteq M_\gamma$，从而 $x \cup y \in M_{\gamma+1}$。所以显然 $x \cup y \notin M_1$。

(iii) 设 $x \in M_1$ 和 $y \in M\backslash M_1$。若 $x \cup y \in M$，则显然 $x \cup y \notin M_1$（否则 $y \in M_1$）。因此，对某个 $\alpha \geq 1$，有 $x \cup y \in M_{\alpha+1}$，从而$x \cup y \subseteq M_\alpha \subseteq M$。但这是不成立的，因为 $x \subseteq A$是 M_1的一个元素，且$A \cap M = \emptyset$。⊣

前一引理第 (iii) 款的一个重要推论是：在下一节中我们将用于岩浆对定义的编码里，不能使用形如 $pr(a) \cup pr(pr(a))$的并集（对于 $a \in A$），因为 $pr(a) \in M_1$，而 $pr(pr(a)) \in M\backslash M_1$，从而根据 (iii)，$pr(a) \cup pr(pr(a)) \notin M$。因此，我们将不使用 $pr(a)$，而改用属于 M_2的$pr^2(a) = pr(pr(a))$。

3 幺半群式有序对

在集合论文献中，有序对的各种定义陆续出现，其中占主导地位并被广泛采用的是 Kuratowski 对 $\langle x, y\rangle$ 的定义，即将其定义为集合 $\{\{x\}, \{x, y\}\}$。关于所有已提出定义的综述，见 [5], 及其所引文献。所列定义中还有如下一种：$\langle x, y\rangle := \{\{x, 0\}, \{y, 1\}\}$。与 Kuratowski 序对相比，它唯一的“缺陷”在于预设了“特殊”对象 0 和 1 的存在。我们下面给出的岩浆对定义，更接近于基于特殊对象 0,1 的对的定义，而不是 Kuratowski 的定义。具体而言，我们固定两个相对于 $\preccurlyeq$不可比的原子$a_0, a_1 \in A$，即 $a_0 \not\preccurlyeq a_1$ 与 $a_1 \not\preccurlyeq a_0$，因而等价地有 $pr(a_0) \not\subseteq pr(a_1)$ 以及 $pr(a_1) \not\subseteq pr(a_0)$。作出这样一种选择的理由将在后文阐明。

定义 3.1 对于任意 $x, y \in M$，第一组成部分为x、第二组成部分为 y 的岩浆对，记作 $\langle\langle x, y\rangle\rangle$，定义如下：

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle := pr(pr^2(x) \cup pr^2(a_0)) \cup pr(pr^2(y) \cup pr^2(a_1)).$$

注记。(1) 在前述定义中，部分 $pr^2(x) \cup pr^2(a_0)$ 与$pr^2(y) \cup pr^2(a_1)$分别模仿集合 $\{x, 0\}$与 $\{y, 1\}$，而 $\langle\langle x, y\rangle\rangle$则模仿序对 $\{\{x, 0\}, \{y, 1\}\}$。

(2) 提高 $pr(a_0)$、 $pr(a_1)$的秩并用 $pr^2(a_0)$、 $pr^2(a_1)$替换它们，其原因在于引理 2.4 (iii)；据此，对于 $a \in Apr(a)$， $\cup x$ 不是岩浆，除非 $x \in M_1$。

(3) 出于对称性的考虑，使用 $pr^2(a_0)$和 $pr^2(a_1)$后，因而需要转而分别使用 $pr^2(x)$和 $pr^2(y)$，而非 $pr(x)$和 $pr(y)$。

主要任务是验证对象 $\langle\langle x,\ y\rangle\rangle$ 确实具有有序对所应有的性质，即 $\langle\langle x,\ y\rangle\rangle = \langle\langle x',\ y'\rangle\rangle \Rightarrow x = x'$ 和$y = y'$。为此，我们需要一些预备引理。

引理 *3.2* 设 x、 y、 x'、 y'、 $z \in M$。则：*(i)* $pr(x) \cup pr(y) \subseteq pr(z)$ 当且仅当 $x \subseteq z$ 且 $y \subseteq z$。*(ii)* $pr(z) \subseteq pr(x) \cup pr(y)$ 当且仅当 $z \subseteq x$ 或 $z \subseteq y$。*(iii)* $pr(x) \cup pr(y) = pr(z)$ 当且仅当 $x \subseteq y = z$ 或 $y \subseteq x = z$。*(iv)* $pr(x) \cup pr(y) \subseteq pr(x') \cup pr(y')$ 当且仅当以下条件之一成立：*(a)*$x, y \subseteq x'$，*(b)* $x, y \subseteq y'$，*(c)* $x \subseteq x'$ 且 $y \subseteq y'$，*(d)* $x \subseteq y'$ 且 $y \subseteq x'$。

证明。 (i) $pr(x) \cup pr(y) \subseteq pr(z)$ 当且仅当 $x \in pr(z)$，并且 $y \in pr(z)$ 当且仅当 $x \subseteq z$与$y \subseteq z$。

(ii) $pr(z) \subseteq pr(x) \cup pr(y)$ 当且仅当 $z \in pr(x)$ 或 $z \in pr(y)$ 当且仅当 $z \subseteq x$ 或 $z \subseteq y$。

(iii) $pr(x) \cup pr(y) = pr(z)$ 当且仅当 (i) 和 (ii) 的合取项成立，即当且仅当 $x \subseteq z \wedge y \subseteq z \wedge z \subseteq x$，或 $x \subseteq z \wedge y \subseteq z \wedge z \subseteq y$。第一个合取项简写为 $y \subseteq x = z$，第二个合取项简写为 $x \subseteq y = z$。

(iv) 设 $pr(x) \cup pr(y) \subseteq pr(x') \cup pr(y')$。显然，该包含关系成立，当且仅当$x, y \in pr(x')$，或 $x,\ y \in pr(y')$，或 ($x \in pr(x')$ 且 $y \in pr(y')$)，或 ($x \in pr(y')$ 且 $y \in pr(x')$)。这四种可能性分别等价地写作可能性 (a)、(b)、(c)、(d)。⊣

引理 3.3 设 x、 y、 x'、 $y' \in M$。那么

$$pr(x) \cup pr(y) = pr(x') \cup pr(y'),$$

当且仅当以下条件之一成立：

(I) $x = x'$ 和 $y = y'$，或 *(II)* $x = y'$ 和 $y = x'$，或 *(III)* $\{x, y\}$ 中的一个元素等于 $\{x', y'\}$中的一个元素，而另外两个元素是这两个相等元素的子岩浆。

证明。 令 $x, y, x', y' \in M$，并假设 $pr(x) \cup pr(y) = pr(x') \cup pr(y')$。这等价于以下合取项： $pr(x) \cup pr(y) \subseteq pr(x') \cup pr(y')$，以及

$pr(x') \cup pr(y') \subseteq pr(x) \cup pr(y)$。根据引理 3.2 的子句 (iv)，第一个合取项等价于以下析取：

(a) $x, y \subseteq x'$。(b) $x, y \subseteq y'$。(c) $x \subseteq x'$ 且 $y \subseteq y'$。(d) $x \subseteq y'$ 且 $y \subseteq x'$。

同样，第二个合取项等价于以下各项的析取

(a′) $x', y' \subseteq x$。(b′) $x', y' \subseteq y$。(c′) $x' \subseteq x$ 且 $y' \subseteq y$。(d′) $x' \subseteq y$ 且 $y' \subseteq x$。

因此，等式 $pr(x) \cup pr(y) = pr(x') \cup pr(y')$ 等价于 (a)-(d) 与 (a′)-(d′) 的 16 种组合的析取，即下列合取项的析取：

(a) & (a′)：$x, y \subseteq x'$ 且 $x', y' \subseteq x$。则 $y, y' \subseteq x = x'$。(a) & (b′)：$x, y \subseteq y'$ 且 $x', y' \subseteq y$。则 $x, x' \subseteq y = y'$。(a) & (c′)：$x, y \subseteq x'$, $x' \subseteq x$ 且 $y' \subseteq y$。则 $y, y' \subseteq x = x'$。(a) & (d′)：$x, y \subseteq x'$, $x' \subseteq y$ 且 $y' \subseteq x$。则 $x, y' \subseteq x' = y$。(b) & (a′)：$x, y \subseteq y'$, $x', y' \subseteq x$。则 $x', y \subseteq x = y'$。(b) & (b′)：$x, y \subseteq y'$, $x', y' \subseteq y$。则 $x, x' \subseteq y = y'$。(b) & (c′)：$x, y \subseteq y'$, $x' \subseteq x$ 且 $y' \subseteq y$。则 $x, x' \subseteq y = y'$(b) & (d′)：$x, y \subseteq y'$, $x' \subseteq y$ 且 $y' \subseteq x$。则 $x', y \subseteq x = y'$。(c) & (a′)：$x \subseteq x'$, $y \subseteq y'$ 且 $x', y' \subseteq x$。则 $y, y' \subseteq x = x'$。(c) & (b′)：$x \subseteq x'$, $y \subseteq y'$ 且 $x', y' \subseteq y$。则 $x, x' \subseteq y = y'$。(c) & (c′)：$x \subseteq x'$, $y \subseteq y'$, $x' \subseteq x$ 且 $y' \subseteq y$。则 $x = x'$ 且$y = y'$。(c) & (d′)：$x \subseteq x'$, $y \subseteq y'$, $x' \subseteq y$ 且 $y' \subseteq x$。则 $x = y = x' = y'$。(d) & (a′)：$x \subseteq y'$, $y \subseteq x'$ 且 $x', y' \subseteq x$。则 $x', y \subseteq x = y'$。(d) & (b′)：$x \subseteq y'$, $y \subseteq x'$ 且 $x', y' \subseteq y$。则 $x, y' \subseteq x' = y$。(d) & (c′)：$x \subseteq y'$, $y \subseteq x'$, $x' \subseteq x$ 且 $y' \subseteq y$。则$x = y = x' = y'$。(d) & (d′)：$x \subseteq y'$, $y \subseteq x'$, $x' \subseteq y$ 且 $y' \subseteq x$。则 $x = y'$ 且 $x' = y$。

带下划线的合取项验证了可能性 (I) 和 (II)，其余情况则验证了该断言的可能性 (III)。⊣

定理 3.4 对于任意 x、y、x'、$y' \in M$,

$$\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle\langle x', y'\rangle\rangle \Leftrightarrow x = x' \ \& \ y = y'.$$

证明。设 $\langle\langle x, \ y\rangle\rangle = \langle\langle x', \ y'\rangle\rangle$。则

$$pr(pr^2(x) \cup pr^2(a_0)) \cup pr(pr^2(y) \cup pr^2(a_1)) =$$

$$pr(pr^2(x') \cup pr^2(a_0)) \cup pr(pr^2(y') \cup pr^2(a_1)). \tag{2}$$

由引理 3.3，等式 (2) 成立当且仅当下列情形之一成立：

(I) $pr^2(x) \cup pr^2(a_0) = pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$ 且 $pr^2(y) \cup pr^2(a_1) = pr^2(y') \cup pr^2(a_1)$，或 (II) $pr^2(x) \cup pr^2(a_0) = pr^2(y') \cup pr^2(a_1)$ 且 $pr^2(y) \cup pr^2(a_1) = pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$，或

(III) $\{pr^2(x) \cup pr^2(a_0)\ pr^2(y) \cup pr^2(a_1)\}$ 中的岩浆之一等于 $\{pr^2(x') \cup pr^2(a_0)\ pr^2(y') \cup pr^2(a_1)\}$中的岩浆之一，且另外两个是相等者的子半群。

我们分别检验情形 I、II 和 III。

情形 I。设 $pr^2(x) \cup pr^2(a_0) = pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$ 且 $pr^2(y) \cup pr^2(a_1) = pr^2(y') \cup pr^2(a_1)$。我们考察第一个等式。我们将证明 $x = x'$。由于 $pr(x) \in pr^2(x)$（因为对每个 x，$x \in pr(x)$），由此可得 $pr(x) \in pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$，即 $pr(x) \in pr^2(x')$ 或 $pr(x) \in pr^2(a_0)$。第二种选择不可能，因为它蕴含 $pr(x) \subseteq pr(a_0)$（因为 $x \in pr(y)$ 蕴含$x \subseteq y$）。但这样一来 $x \in pr(a_0)$，从而 $x \in A$，这是假的。因此必然有$pr(x) \in pr^2(x')$，或 $pr(x) \subseteq pr(x')$。由 pr 的单调性，可得$x \subseteq x'$。交换 x 与 x'，我们类似地有 $pr(x') \in pr^2(x) \cup pr^2(a_0)$，由此如前推得 $x' \subseteq x$。因此本情形的第一个等式蕴含 $x = x'$。由完全相同的论证，第二个等式蕴含 $y = y'$。

情形 II。设 $pr^2(x) \cup pr^2(a_0) = pr^2(y') \cup pr^2(a_1)$ 且 $pr^2(y) \cup pr^2(a_1) = pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$。我们证明这种情形不可能。考察第一个等式。由于 $pr(a_0) \in pr^2(a_0)$，可得 $pr(a_0) \in pr^2(y') \cup pr^2(a_1)$。于是，要么 $pr(a_0) \in pr^2(y')$，要么 $pr(a_0) \in pr^2(a_1)$。我们证明这两种情况都不可能。若 $pr(a_0) \in pr^2(y')$，则 $pr(a_0) \subseteq pr(y')$。但对所有 $y' \in M$，$pr(a_0) \subseteq A$ 而$pr(y') \subseteq M$，所以 $pr(a_0) \cap pr^2(y') = \emptyset$。另一方面，若$pr(a_0) \in pr^2(a_1)$，则会有 $pr(a_0) \subseteq pr(a_1)$。但请记住，我们选择 a_0, a_1，使得 $pr(a_0) \not\subseteq pr(a_1)$ 且 $pr(a_1) \not\subseteq pr(a_0)$，这又导致矛盾。这证明第一个等式不可能成立。这足以证明整个情形不可能；出于同样的原因，第二个等式也不可能成立。

情形 *III*。这种情形分为四个子情形，但它们全都不可能。

(a) $pr^2(x) \cup pr^2(a_0) = pr^2(y') \cup pr^2(a_1)$，另外两个并集是它的子半群。这一等式在情形 II 中已被证明不可能成立。

(b) $pr^2(y) \cup pr^2(a_1) = pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$，另外两个并集是它的子半群。这一等式也可以完全按照前一个等式的证明方式证明不可能成立。

(c) $pr^2(x) \cup pr^2(a_0) = pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$，且另外两个并集是其的子半群。在情形 I 中已证明第一个等式蕴含$x = x'$。然而我们还必须有 $pr^2(y) \cup pr^2(a_1) \subseteq pr^2(x) \cup pr^2(a_0)$ 以及$pr^2(y') \cup pr^2(a_1) \subseteq pr^2(x') \cup pr^2(a_0)$。然而后两个包含关系同样不可能，这再次是由于 $pr^2(a_0)$ 与 $pr^2(a_1)$ 的不相容性。因为由第一个包含关系我们必须有 $pr(a_1) \in pr^2(x) \cup pr^2(a_0)$。但我们在情形 II 中已看到 $pr(a_1) \notin pr^2(x)$ 以及 $pr(a_1) \notin pr^2(a_0)$。

(d) $pr^2(y) \cup pr^2(a_1) = pr^2(y') \cup pr^2(a_1)$，且另外两个并集是其的子半群。这与 (c) 类似。

总之，可知只有情形 I 是可能的，因此 $\langle\langle x, y\rangle\rangle = \langle\langle x', y'\rangle\rangle$ 当且仅当 $x = x'$ 且 $y = y'$。⊣

将岩浆对推广为岩浆 n-元组（$n \geq 2$），可完全仿照普通对和元组的情形给出。也就是说，我们定义

$$\langle\langle x, y, z\rangle\rangle := \langle\langle\langle x, y\rangle\rangle, z\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle\rangle := \langle\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle, x_{n+1}\rangle\rangle.$$

事实 3.5 岩浆具有岩浆有序对这一性质，可在 $\langle A \cup M \in\rangle$ 中用所选元素 a_0 $a_1 \in A$作为参数来定义。

证明。 考虑结构 $\langle A \cup M, \in\rangle$的语言中的以下性质 $\phi(x)$:

$$\phi(x) := x \in M \wedge (\exists y, z \in M)(x = pr(pr^2(y) \cup pr^2(a_0)) \cup pr(pr^2(z) \cup pr^2(a_1)).$$

显然， $\phi(x)$ 是一个以 a_0， a_1 为参数的 $\{\in\}$-性质，并且

$$\text{“}x \text{ is a magmatic ordered pair”} \Leftrightarrow \langle A \cup M\rangle \models \phi(x).$$

⊣

4 岩浆积。预期对象与附带对象

在 ZF 中，二元关系被定义为笛卡尔积 $X \times Y$ 的子集。因此，我们首先需要定义这个积的岩浆类比。具体来说

给定 $x, y \in M$使得 $x, y \subseteq M$，即 $x, y \in M \backslash M_1$，我们希望幺半群式积是包含幺半群式对 $\langle\langle z, w\rangle\rangle$的最小岩浆，其中 $z \in x$ 且 $w \in y$。这个岩浆记作 $x \boxtimes y$。由于每当 $\langle\langle z, w\rangle\rangle \in x \boxtimes y$时，我们必须有 $pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle) \subseteq x \boxtimes y$，因此将 x 与 y 的幺半群式积定义如下是自然的：

$$x \boxtimes y := \cup\{pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle) : z \in x \wedge w \in y\}. \tag{3}$$

问题是：除了自身，$pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle)$ 还包含哪些其他岩浆？答案是：$pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle)$ 除了 $\langle\langle z, w\rangle\rangle$ 之外，还包含无穷多个其他幺半群式岩浆对，以及无穷多个并非岩浆对的其他岩浆。我们先确定 $pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle)$ 中包含哪些其他幺半群式岩浆对。下一个引理将证明这些事实。

引理 4.1 *(a)* $\langle\langle z', w'\rangle\rangle \in pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle)$ 当且仅当 $\langle\langle z', w'\rangle\rangle \subseteq \langle\langle z, w\rangle\rangle$ 当且仅当 $z' \subseteq z$ 和 $w' \subseteq w$。

(b) 此外，对于每一对 $\langle\langle z, w\rangle\rangle$，以下这些不是对的无穷岩浆集合族也包含在 $pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle)$ 中：

$$\{pr(pr^2(z') \cup pr^2(a_0)) : z' \subseteq z\} \subseteq pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle),$$

$$\{pr(pr^2(w') \cup pr^2(a_1)) : w' \subseteq w\} \subseteq pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle).$$

证明。(a) 显然，$\langle\langle z', w'\rangle\rangle \in pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle)$ 当且仅当 $\langle\langle z', w'\rangle\rangle \subseteq \langle\langle z, w\rangle\rangle$，或

$$pr(pr^2(z') \cup pr^2(a_0)) \cup pr(pr^2(w') \cup pr^2(a_1)) \subseteq pr(pr^2(z) \cup pr^2(a_0)) \cup pr(pr^2(w) \cup pr^2(a_1)).$$

根据引理 3.2 (iv)，最后一个包含关系成立当且仅当：

(i) $pr^2(z') \cup pr^2(a_0) \subseteq pr^2(z) \cup pr^2(a_0)$ 且 $pr^2(w') \cup pr^2(a_1) \subseteq pr^2(w) \cup pr^2(a_1)$，或

(ii) $pr^2(z') \cup pr^2(a_0) \subseteq pr^2(z) \cup pr^2(a_0)$ 且 $pr^2(w') \cup pr^2(a_1) \subseteq pr^2(z) \cup pr^2(a_0)$，或

(iii) $pr^2(z') \cup pr^2(a_0) \subseteq pr^2(w) \cup pr^2(a_1)$ 且 $pr^2(w') \cup pr^2(a_1) \subseteq pr^2(w) \cup pr^2(a_1)$，或

(iv) $pr^2(z') \cup pr^2(a_0) \subseteq pr^2(w) \cup pr^2(a_1)$ 和 $pr^2(w') \cup pr^2(a_1) \subseteq pr^2(z) \cup pr^2(a_0)$。

但定理 3.4 已表明，由于 $pr(a_0)$ 与 $pr(a_1)$ 的不相容性，(ii) 的第二个合取项、(iii) 的第一个合取项以及 (iv) 的两个合取项都是不可能的。因此，该断言等价于合取 (i)，即 $pr^2(z') \cup pr^2(a_0) \subseteq pr^2(z) \cup pr^2(a_0)$ 与 $pr^2(w') \cup pr^2(a_1) \subseteq pr^2(w) \cup pr^2(a_1)$。3.4 中还表明，当且仅当$z' \subseteq z$ 与 $w' \subseteq w$ 时，这一点成立。

(b) 只需注意到，给定 $\langle\langle z,w\rangle\rangle$，对每个 $z'\subseteq z$ 与 $w'\subseteq w$，$pr($ $pr^2(z')\cup pr^2(a_0))\subseteq\langle\langle z,w\rangle\rangle$ 与 $pr(pr^2(w')\cup pr^2(a_1))\subseteq\langle\langle z,w\rangle\rangle$，而岩浆 $pr($ $pr^2(z')\cup pr^2(a_0))$、$pr(pr^2(w')\cup pr^2(a_1))$ 显然是非对。⊣

问题在于，我们为什么不简单地仿照标准积来定义 $x\boxtimes y$，并令 $x\boxtimes y:=\{\langle\langle z,w\rangle\rangle:z\in x\wedge w\in y\}$。答案是，$\{\langle\langle z,w\rangle\rangle:z\in x\wedge w\in y\}$ 不是一个岩浆，这可由引理 4.1 (ii) 得出：$\{\langle\langle z,w\rangle\rangle:z\in x\wedge w\in y\}$ 仅由对组成，而集合 $pr(\langle\langle z,\ w\rangle\rangle)$ 必须包含在 $x\boxtimes y$ 中，其中包含大量并非对的岩浆。尽管如此，集合 $\{\langle\langle z,w\rangle\rangle:z\in x\wedge w\in y\}$仍值得拥有一个记号和名称，因为它恰好包含了 $x\boxtimes y$ 中的所有对。我们称它为**弱岩浆积**，并用 $\boxdot$ 表示。也就是说，我们令

$$x\boxdot y:=\{\langle\langle z,w\rangle\rangle:z\in x\wedge w\in y\}. \tag{4}$$

给定两个岩浆集合族 $x,\ y$ 记作 $x=_p y$ 当且仅当 $x,\ y$ 包含完全相同的岩浆对。

事实 4.2 对于任意 $x,y\in M\backslash M_1$，$x\boxtimes y=_p x\boxdot y$。

证明。显然 $x\boxdot y\subseteq x\boxtimes y$。因此，只需证明每个 $x\boxtimes y$中的对都属于 $x\boxdot y$。取一个 $\langle\langle z',w'\rangle\rangle\in x\boxtimes y=\cup\{pr(\langle\langle z,w\rangle\rangle):z\in x\wedge w\in y\}$。那么，对于某些满足 $z\in x$和 $w\in y$的 $\langle\langle z,w\rangle\rangle$，有 $\langle\langle z',w'\rangle\rangle\in pr(\langle\langle z,w\rangle\rangle)$。由此可得 $\langle\langle z',$ $w'\rangle\rangle\subseteq\langle\langle z,w\rangle\rangle$，故由引理 4.1 (a)，$z'\subseteq z$ 且$w'\subseteq w$。但是，由于 x 是一个岩浆，$z\in x$ 蕴含 $pr(z)\subseteq x$，所以 $z'\subseteq z$ 蕴含$z'\in x$。同理，$w'\in y$，因此根据定义，$\langle\langle z',w'\rangle\rangle\in x\boxdot y$.⊣

Another fact concerning $x\boxtimes y$ is the following.

推论 4.3 对于任意 $x,\ y\in M,\ pr\ (\langle\langle x,\ y\rangle\rangle)\ =_p pr\ (x)\ \boxtimes pr\ (y)$。

证明。 $\Leftarrow$: 设 $\langle\langle u,v\rangle\rangle\in pr(x)\boxtimes pr(y)$。那么，根据定义 $\langle\langle u,v\rangle\rangle\in pr(\langle\langle z,w\rangle\rangle)$, 其中某个 $z\in pr(x)$ 和 $w\in pr(y)$ 满足条件；等价地，$\langle\langle u,v\rangle\rangle\subseteq\langle\langle z,w\rangle\rangle$，其中某个 $z\subseteq x$ 和 $w\subseteq y$ 满足条件。由引理 4.1，$\langle\langle u,v\rangle\rangle\subseteq\langle\langle z,w\rangle\rangle$ 成立当且仅当 $u\subseteq z$ 且 $v\subseteq w$。又由于 $z\subseteq x$ 且 $w\subseteq y$，可知 $u\subseteq x$ 且 $v\subseteq y$，因此再次由 4.1 可得 $\langle\langle u,v\rangle\rangle\subseteq\langle\langle x,y\rangle\rangle$，或者 $\langle\langle u,v\rangle\rangle\in pr(\langle\langle x,y\rangle\rangle)$。这就证明了 $\Leftarrow$。

$\Rightarrow$: 设 $\langle\langle u,\ v\rangle\rangle \in pr(\langle\langle x,\ y\rangle\rangle)$。那么 $\langle\langle u,\ v\rangle\rangle \subseteq \langle\langle x,\ y\rangle\rangle$，因此由引理 **4.1**，$u \subseteq x$ 且 $v \subseteq y$。由此可得 $u \in pr(x)$ 和 $v \in pr(y)$，所以 $\langle\langle u,\ v\rangle\rangle \in pr(\langle\langle u,\ v\rangle\rangle) \subseteq pr(x) \boxtimes pr(y)$。$\dashv$

岩浆集合 $x \boxtimes y$ 与非岩浆而仅是集合的 $x \boxdot y$ 之间的区别，引出了关于岩浆中某些元素所起作用的一个更一般的区别。在许多情况下，尤其是在我们开始定义关系和函数时（见下一节），我们需要关注给定岩浆 x 中的一些特定孤立元素，它们也以枚举 $\{y_i$ 的形式出现：对于集合 I，$i \in I\} \subset x$。主体希望关注孤立元素 $\{y_i : i \in I\}$（属于）x，是因为它们发挥着特定作用，具体来说，它们以生成 x的形式

$$\cup\{pr(y_i) : i \in I\},$$

也就是说，x 是包含所有 y_i、$i \in I$的最小岩浆。例如，当主体想要将岩浆 x 中的一个元素 z_i 与另一个岩浆 y中的一个元素 w_i 配对，以便定义 x 与 y之间的二元关系时，就会出现这种情况。为此，只需将岩浆对$\langle\langle z_i,$ $w_i\rangle\rangle$ 汇集起来，并将此关系定义为岩浆

$$\cup\{pr(\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle) : i \in I\}.$$

现在，正如 $x \boxtimes y$ 和 $x \boxdot y$的差异一样，$\cup\{pr(y_i) : i \in I\}$ 与 $\{y_i : i \in I\}$之间的差异，或 $\cup\{pr(\langle\langle z_i,\ w_i\rangle\rangle) : i \in I\}$ 与 $\{\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle : i \in I\}$之间的差异，在于这些配对中的第二个集合族恰好包含了我们想要聚焦的孤立元素，我们可以合理地称之为预期的元素；而相应的岩浆则包含更多元素，也就是.....的元素。

$$\cup\{pr(y_i) : i \in I\} \backslash \{y_i : i \in I\}$$

and

$$\cup\{pr(\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle) : i \in I\} \backslash \{\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle : i \in I\},$$

分别地，我们称之为非预期 或附带的元素。它们只不过是那些依赖于预期元素（在岩浆之间的依赖关系 $\subseteq$ 下）并在没有主体意图的情况下发挥作用的元素。

然而，问题在于，像 $\{y_i : i \in I\}$ 和 $\{\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle : i \in I\}$ 这样的集合在 M 中并不存在；也就是说，对于一个“生活”在 M 中的主体而言，它们根本不存在

，关于它们的任何讨论都只能在外部进行，由生活在 M 之外的主体来展开。

为了补救这一情形，我们在此对 M 作一次相当无害的扩张，即将所有此类孤立元素集并入其中。集合 $\{y_i: \ i \in I\}$是函数类 $M^I = \{f|f: \ I \to M\}$的元素，其中我们将 $\{y_i: \ i \in I\}$ 等同于函数 $f: \ I \to M$，且对每个$i \in I$有 $f(i) = y_i$。然后令

$$M^{\text{seq}} = \cup\{M^I : I \in V\} \text{ and } \widehat{M} = M \cup M^{\text{seq}},$$

$\frown M$ 即为 M 所需的扩张，在其中我们可以谈论孤立$\widehat{\ }$岩浆的集合。 M 也同样配备有 $\in$，正如 M一样。

定义 4.4 若 $x = \cup\{pr(y_i): \ i \in I\}$，则称岩浆 x 由原群集$\{y_i: \ i \in I\}$生成。在这种情况下，我们称 y_i 为 x 的预期元素，并称 x 的其余元素为附带的。我们分别用 $int(x)$和 $col(x)$表示 x的预期元素集与附带元素集。

$\widehat{\ }$本节余下部分，我们将采用结构 $\langle M, \in\rangle$，而不是 $\langle M, \in\rangle$。如前所述，预期元素与附带元素之间的区别，在上文式（3）定义的岩浆乘积 $x \boxtimes y$ 与式（4）定义的相应弱积$x \boxdot y$之间的区别中得到了鲜明体现。从定义可立即得出

$$int(x \boxtimes y) = x \boxdot y, \text{ and } col(x \boxtimes y) = (x \boxtimes y) \backslash x \boxdot y.$$

$\widehat{\ }$注意到 $x \boxdot y \in M \backslash M$。还要注意，虽然岩浆的集合$\{y_i: \ i \in I\}$ 总是唯一生成一个满足 $int(x) = \{y_i: \ i \in I\}$ 的岩浆 x，但反过来并不成立。也就是说，一般给定一个岩浆 x，并不一定存在一组唯一的 生成元集 $\{y_i: \ i \in I\}$ 属于 x。一般而言，一个给定的岩浆可以有多个生成元集。事实上，在每种情形下，我们选择x 的哪个子集作为 x 的“生成元集”，大多是一种主观的 选择和决定。这取决于 x的具体形式，以及我们处理 x的目的。例如，岩浆乘积 $x \boxtimes y$ 并非凭空突然出现的一般岩浆，而是我们有意且特意定义的，目的是模仿笛卡尔积。因此，其定义（3）自然赋予了$x \boxdot y$ 中的元素生成元的地位。

关于 M^{seq}。

1）如果我们从原群集 $\{y_i : i \in I\}$ 中去掉枚举，就只得到 M 的一个非空子集（函数 $f : I \to M$ 的值域，其中$f(i) = y_i$，由此产生特定枚举）。因此，或者也可以将M_{seq}定义为 M 的非空子集的集合，$\mathcal{P}(M) \backslash \{\emptyset\}$。不过在这种情况下，我们很可能需要使用新变量$\widehat{\ }$，以便在膨胀结构 M 中指代 M_{seq} 的元素。因此，将 M^{seq} 的元素作为原群的枚举集使用会更加方便。

2) M^{seq}中的集合也包含 M的元素，因为每个 $x \in M$都是 M的子集，显然可以在 $V(A)$的语境下获得若干种枚举。因此，实际上 $M \subseteq M^{\text{seq}}$，尽管在实践中，$\frown M$ 的主体只打算枚举 M 中的孤立元素，也就是说，不构成岩浆的元素。不过，事实是 $M \subseteq M^{\text{seq}}$ 在处理 M时不会造成问题$\widehat{\ }$。

3) 另一方面，M^{seq} 是一个“扁平”的集合类，也就是说，它不包含 M的子集的集合，例如对于 $x \in M$ $\{x\} \in M^{\text{序列}}$而言如此，但 $\{\{x\}\} \notin M^{\text{seq}}$并非如此，因此 $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \notin M^{\text{seq}}$ 也一样。因此，标准对在 M中$\widehat{\ }$不可用，这意味着即使在 M 中，也有必要像上一节那样定义岩浆有序对。

附带元素的作用尤为关键，因为它们是处理岩浆时问题的主要来源。即使我们感兴趣的只是一个单个预期的岩浆 x，它属于一个岩浆 y，但为了在 y 的语境中处理它，我们需要将其视为最小原群 $pr(x) \subseteq y$ 的一个元素。不过，正如我们在脚注 1 中已经注意到的，每个岩浆 $pr(x)$ 总是一个（局部）无穷幂集，因此是众所周知的难以管理和控制的集合。也就是说，除了这个单个预期元素，我们还需要应对 $pr(x)\backslash\{x\}$ 中无穷多个附带元素，而这些元素恰恰是依赖于 x 的元素。

现在有趣的是，在许多情况下，附带元素分为两类。$pr(x)$的一类附带元素可能由$x' \in pr(x)$中的元素组成；相对于特定情形下成立的某种相似性概念，这些元素与 x “相似”。$pr(x)$的另一类附带元素则是那些与 x不相似的元素。例如，如果预期原群是一个对 $\langle\langle x,\ y\rangle\rangle$，那么 $pr(\langle\langle x,\ y\rangle\rangle)$中与 $\langle\langle x,\ y\rangle\rangle$ 相似的元素也都是对。正如我们上文所见，这些对恰好是形如 $\langle\langle x',\ y'\rangle\rangle$的那些，其中 $x' \subseteq x$ 且 $y' \subseteq y$。$pr(\langle\langle x,\ y\rangle\rangle)$的另一类附带元素由非对元素组成。引理 4.1 证明的正是这一点：也就是说，每个 $pr(\langle\langle x,\ y\rangle\rangle)$都同时包含无穷多个相似附带元素（子句 (a)），以及无穷多个不相似的附带元素（子句 (b)）。

（子句 (a)），以及无穷多个不相似的附带元素（子句 (b)）。请注意，积 $x \boxtimes y$ 与弱积 $x \boxdot y$ 的区别仅在于不相似的元素，也就是说， $x \boxtimes y$ 和 $x \boxdot y$ 包含相同的对，而$x \boxtimes y \backslash x \boxdot y$ 仅由非对元素构成。因此，从某种意义上说，附带元素给 $x \boxtimes y$ 带来的"噪声"可以相当程度地忽略，因为它来自第二类元素。然而我们将看到，如果我们以类似于标准定义的方式来定义岩浆关系和函数，所添加的"噪声"可能来自第一类附带元素，也就是说，仍然是对。

$\widehat{\ }$4.1 M中的岩浆关系与函数

我们将采用定义二元关系的标准方法：将其定义为积 $x \boxtimes y$ 的某些子岩浆 x, y。然而，并非任何这样的子岩浆 $z \subseteq x \boxtimes y$ 都适合这一用途。显然，它必须包含岩浆对；而由引理 4.1 的条款 (b) 可知， $x \boxtimes y$ 可能包含完全不含任何对的子岩浆。无论如何，定义这类子岩浆最自然的方式是借助生成元集；这些生成元实际上就是我们希望纳入关系中的预期的对，并将以枚举 $\{\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle$ 的形式表示： $i \in I\}$。因此， $x \boxtimes y$上的二元关系将是一个岩浆 $\mathbf{R} \subseteq x \boxtimes y$，满足

$$\mathbf{R} = \cup\{pr(\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle) : i \in I\}, \tag{5}$$

而集合 $\{\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle : i \in I\}$ 是 $\mathbf{R}$ 的预定序对的集合。请注意，这种一般关系与积 $x \boxtimes y$（它也是一种关系）之间的（重要）区别在于如下事实： $x \boxtimes y$ 的预定序对是所有 对 $\langle\langle z, w\rangle\rangle$，其中 $z \in x$ 与 $w \in y$，亦即 $x \boxdot y$ 的全部元素，而 $\mathbf{R}$的预定序对仅构成 $x \boxdot y$ 的一个子集。给定这样一个二元关系$\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$ 的定义域 与值域是如下定义的岩浆 $dom(\mathbf{R})$、 $ran(\mathbf{R})$：

$$dom(\mathbf{R}) = \cup\{pr(z) : (\exists w)(pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle) \subseteq \mathbf{R})\},$$
$$ran(\mathbf{R}) = \cup\{pr(w) : (\exists z)(pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle) \subseteq \mathbf{R})\}.$$

首先，不难验证如下内容。

事实 4.5 如果 $\boldsymbol{R} = \cup\{pr(\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle) : i \in I\}$，则 $dom(\boldsymbol{R}) = \cup\{pr(z_i) : i \in I\}$ 且 $ran(\boldsymbol{R}) = \cup\{pr(w_i) : i \in I\}$.

证明。 我们只证明 $dom(\mathbf{R})$ 这一结论。首先，根据 $dom(\mathbf{R})$ 的定义，显然有 $\cup\{pr(z_i) : i \in I\} \subseteq dom(\mathbf{R})$。反过来

取一个 $z' \in dom(\mathbf{R})$。根据后者的定义，存在 z, w 使得$z' \in pr(z)$，且 $\langle\langle z, w\rangle\rangle \in \mathbf{R}$。但同样根据 $\mathbf{R}$ 的定义可知，存在某些 $i \in I$, $\langle\langle z, w\rangle\rangle \subseteq \langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle$，由此可得 $z \subseteq z_i$；又由于$z' \subseteq z$，我们还得到 $z' \subseteq z_i$，即所需的 $z' \in pr(z_i)$。⊣

$\mathbf{R}$ 与 $x \boxtimes y$ 之间的区别，也是前者更难处理的原因，在于$\mathbf{R}$ 包含第一类附带元素，也就是成对的元素；而正如我们所见， $x \boxtimes y$ 只包含第二类附带元素，也就是非成对元素。具体而言，$\mathbf{R}$ 的预期元素恰好是这些对：$\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle, i \in I$；但事实上，$\mathbf{R}$ 还包含所有形如$\langle\langle z'_i, w'_i\rangle\rangle$的对，其中 $i \in I$，且 $z'_i \subseteq z_i$ 和$w'_i \subseteq w_i$。实际上，这意味着，如果我们希望$\mathbf{R}$ 成为某种广群序关系 $<$，其预期定义域为 $\{z_i : i \in I\}$，预期值域为 $\{w_i : i \in I\}$，使得 $z_i < w_i$ 且除此之外别无其他，那么，根据定义（5）及相应的定义域和值域 $dom(\mathbf{R}), ran(\mathbf{R})$，我们有：

• 将岩浆 $dom(<) = \cup\{pr(z_i : i \in I\}$ 接受为 $<$ 的实际定义域，并将岩浆 $ran(<) = \cup\{pr(w_i : i \in I\}$ 接受为 $<$ 的实际值域，而且

•接受 p认定始终 $y\ z'_i \subseteq z_i$, 并始终 $y\ w'_i \subseteq w_i$, $z'_i < w'$

$_i$所有这些额外的对 $\langle\langle z'_i,\ w'_i\rangle\rangle$ 被强制纳入 $<$，都是正则有序对，与预期的对完全相似，因此绝不能忽略，第二类附带元素则可能可以忽略。不过我们可以看到，对于关系 $<$，附带对保留了预期对的某些性质，例如对称性和传递性，但不具备反对称性。

函数。被强制纳入某个关系的定义域和值域的附带对，带来的问题在我们想要定义和处理的关系是函数时会更加突出。与其他二元关系相比，函数的特殊之处在于，唯一性这一要求在其定义中起着关键作用：当且仅当对于每个 $x \in dom(R)$，都存在唯一一个 $y \in ran(R)$，使得$\langle x,\ y\rangle \in R$，一个（通常意义上的）关系 R 才是函数。此外，对于某类函数，还有一项不那么关键的唯一性要求，涉及 $dom(R)$ 中的元素：对于每个 $y \in ran(R)$，都存在唯一一个 $x \in ran(R)$，使得 $\langle x,\ y\rangle \in R$。这就是一对一函数。其他类型的二元关系都没有这样的要求。

显然，上述第一个唯一性条件也应适用于关系 $\mathbf{R}$，该关系将扮演“幺半群式函数”的角色，也就是说，对于每个 $z \in dom(\mathbf{R})$，都必须有唯一的 $w \in ran(\mathbf{R})$ 与之对应。由此立即可知，这样的 $\mathbf{R}$ 应由一组

预定序对 $\langle\langle z_i,\ w_i\rangle\rangle, i \in I$ 生成，并具有如下性质

$$(\forall i, j \in I)(z_i = z_j \Rightarrow w_i = w_j). \tag{6}$$

显然，条件 (6) 是$\mathbf{R}$ 表现为函数的必要条件，但绝非充分条件。尽管如此，满足 (6) 的关系值得有一个名称。

定义 4.6 若一个幺半群式关系$\mathbf{R}$ 满足

$$\mathbf{R} = \cup\{pr(\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle) : i \in I\},$$

其中生成元集 $\{\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle :\ i \in I\}$ 满足 (6)。

现在，正如我们先前所见，任何幺半群式关系都会如此，半函数$\mathbf{R}$ 中不可避免地出现附带对 $\langle\langle z_i', w_i'\rangle\rangle$（对所有 $z_i' \subseteq z_i$ 和 $w_i' \subseteq w_i$ 都如此），这彻底破坏了$\mathbf{R}$所有对之间的任何唯一性，因为简单来说，对每个 $i \in I$，$\{\langle\langle z_i, w_i'\rangle\rangle :\ w_i' \subseteq w_i\} \subseteq \mathbf{R}$，也就是说，每个 $z_i \in dom(\mathbf{R})$ 都对应着无穷多个“像”$w_i' \subseteq w_i$。

为了规避这一不可避免的事实，我们将采取一条不同的路径来定义幺半群式函数。我们将利用一个性质显著的特征：几乎所有生成关系的预定序对都具有这一性质，即如果 $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个预定序对，那么 z 和 w 都是相对于附带对 $\langle\langle z',\ w'\rangle\rangle$ 中出现的元素 z' 和 w' 而言的 极大元素，因为对于所有此类对，$z' \subseteq z$ 和 $w' \subseteq w$。我们将如下利用这些预定序对的第二个元素的极大性。给定 $\mathbf{R}$，对每个 $z \in dom$（$\mathbf{R}$），令

$$\mathbf{R}[z] = \{w : \langle\langle z, w\rangle\rangle \in \mathbf{R}\} = \cup\{pr(w) : \langle\langle z, w\rangle\rangle \in \mathbf{R}\}.$$

[显然，$\mathbf{R}[z]$ 是一个岩浆。关于两个集合族的相等性，包含关系 $\subseteq$ 是显然的。反之，设 $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \in \mathbf{R}$ 且 $w' \in pr$（w）。于是 $w' \subseteq w$，因此 $\langle\langle z,\ w'\rangle\rangle \subseteq \langle\langle z,\ w\rangle\rangle$，从而 $\langle\langle z,\ w'\rangle\rangle \in \mathbf{R}$，因为 $\mathbf{R}$ 是一个岩浆。因此 $w' \in \mathbf{R}[z]$。]

现在，如果对于每个 $z \in dom(\mathbf{R})$，$\mathbf{R}[z]$都包含一个最大元，那么$\mathbf{R}$ 的唯一性条件就可以得到满足。在这种情况下，我们可以将这个最大元定义为$\mathbf{R}$ 在 z 处的值，并记作$\mathbf{R}(z)$。

定义4.7 若岩浆半函数$\mathbf{R}$ 对每个 $z \in dom(\mathbf{R})$，都存在一个最大元$w \in ran(\mathbf{R})$使得 $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \in \mathbf{R}$，即存在一个 w，使得对每个 $w' \in \mathbf{R}[z]$,$w' \subseteq w$，则称之为岩浆函数，或简称函数，。这个最大元 w 将是$\boldsymbol{R}$ 在 z 处的值，记作$\mathbf{R}(z)$。我们用$\mathbf{F}$、$\mathbf{G}$等符号表示岩浆函数。

岩浆函数最简单的例子是由单个有序对生成的关系，即形如 $\mathrm{F} = pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle)$ 的关系（回想一下，根据推论 4.3，$pr(\langle\langle z, w\rangle\rangle$ 也与积 $pr(z) \boxtimes pr(w)$ 相同）。那么，每个$z' \in dom(\mathrm{F})$都与 w 有关，并且显然 w 是具有此性质的最大元，因此对每个 $z' \in dom(\mathrm{F})$，都有 $\mathrm{F}(z') = w$。另一方面，若 $\mathrm{R} = pr(\langle\langle z, w_1\rangle\rangle) \cup pr(\langle\langle z, w_2\rangle\rangle)$，且 w_1, w_2 不可比，即 $w_1 \not\subseteq w_2$ 且 $w_2 \not\subseteq w_1$，那么 R 不是函数，因为 $w_1, w_2 \in \mathrm{R}[z]$，但不存在 $w \in \mathrm{R}[z]$ 使得$w_1, w_2 \subseteq w$。更一般地，若 $\mathrm{R} = pr(\langle\langle z_1, w_1\rangle\rangle) \cup pr(\langle\langle z_2, w_2\rangle\rangle)$，其中 w_1,w_2 不可比且 $z_1 \cap z_2 \neq \emptyset$，则 R 不是函数。因为若 $z_1 \cap z_2 \neq \emptyset$，那么后者是一个岩浆[2]，并且由于 $z_1 \cap z_2 \subseteq z_1, z_2$，可得$\langle\langle z_1 \cap z_2, w_1\rangle\rangle$和 $\langle\langle z_1 \cap z_2, w_2\rangle\rangle$都包含在 R 中，因此 $w_1, w_2 \in \mathrm{R}[z_1 \cap z_2]$；又由于 w_1, w_2 不可比，$\mathrm{R}[z_1 \cap z_2]$ 不包含最大元。

半函数成为函数的一个充分条件如下。

引理 4.8 设 $\boldsymbol{R}$ 是由 $\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle, i \in I$ 生成的半函数。如果集合 $\{z_i : i \in I\}$ 两两不交，那么 $\boldsymbol{R}$ 就是一个函数。

证明。设 R 具有上述性质。我们必须证明，对于每个 $z \in dom(\mathrm{R})$，$\mathrm{R}[z]$ 都有一个最大元。现在，如果 $\langle\langle z, w\rangle\rangle$ 是 R 的任意一对，那么必然存在唯一的 i，使得 $\langle\langle z, w\rangle\rangle \subseteq \langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle$。因为若 $\langle\langle z, w\rangle\rangle$是 $\langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle$ 和 $\langle\langle z_j, w_j\rangle\rangle$的子集，且 $i \neq j$，那么就应有$z \subseteq z_i \cap z_j$；但这与假设矛盾，因为 z_i,z_j 两两不交。由此可知，对于每个 $\langle\langle z, w\rangle\rangle \in \mathrm{R}$，$\mathrm{R}[z]$ 的最大元就是使 $\langle\langle z, w\rangle\rangle \subseteq \langle\langle z_i, w_i\rangle\rangle$ 成立的（唯一） w_i。⊣

但请注意，引理 4.8 的条件并非 $\mathbf{R}$ 成为函数的必要条件。最简单的反例是任意一个由形如 $\{\langle\langle z_i, w\rangle\rangle : i \in I\}$ 的对构成的集合所生成的半函数 $\mathbf{R}$，也就是说，$ran(\mathbf{R})$ 由 $\{w\}$生成。以下是一个不那么简单的例子。

例 4.9 设 $\boldsymbol{R} = pr(\langle\langle z_1, w_1\rangle\rangle) \cup pr(\langle\langle z_2, w_2\rangle\rangle)$，其中：*(1)* z_1, z_2 不可比；*(2)* $z_1 \cap z_2 \neq \emptyset$；*(3)* $w_1 \subsetneq w_2$。则 $\boldsymbol{R}$ 是一个函数。

[2]回想一下，对于两个岩浆 z_1, z_2, $z_1 \cap z_2$ 可以为空，此时 $z_1 \cap z_2 \notin M$。例如，如果不存在满足 $b \preccurlyeq a_0$ 和 $b \preccurlyeq a_1$ 的 b，那么 $pr(a_0) \cap pr(a_1) = \emptyset$。由归纳法还可得，对于这样的 a_0, a_1 $pr^n(a_0) \cap pr^n(a_1) = \emptyset$ 对所有 $n \geq 1$ 都成立。另一方面，如果 $z_1 \cap z_2 \neq \emptyset$，那么它是一个岩浆，因为对于每个 $w \in z_1 \cap z_2$，都有 $pr(w) \subseteq z_1 \cap z_2$。

4.9 的验证留给读者完成。

[提示：任取一对 $\langle\langle z,w\rangle\rangle \in \mathbf{R}$ 。考虑以下情形 ：
(a) $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \in pr(\langle\langle z_1,\ w_1\rangle\rangle)$ 和 $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \in pr(\langle\langle z_2,\ w_2\rangle\rangle)$。(
b) $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \in pr(\langle\langle z_1,\ w_1\rangle\rangle)$ 和 $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \notin pr(\langle\langle z_2,\ w_2\rangle\rangle)$。(c)
$\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \in pr(\langle\langle z_2,\ w_2\rangle\rangle)$ 和 $\langle\langle z,\ w\rangle\rangle \notin pr(\langle\langle z_1,\ w_1\rangle\rangle)$。]

尽管引理 4.8 的条件（生成$\mathbf{R}$定义域的岩浆彼此不相交）非常严格，我们将在下一节看到，这个条件实际上在某些情况下可以派上用场。

显然，在绝大多数情况下，半函数并不是函数，而问题的真正根源在于第 3 节定义岩浆对的方式，这种定义导致任意给定的对 $\langle\langle x,y\rangle\rangle$ 都存在大量（实际上是无穷多个）子对，即对于任意 $x' \subseteq x$ 和 $y' \subseteq y$，都有 $\langle\langle x', y'\rangle\rangle$。正是这一性质导致岩浆关系中出现相关的非预期（附带）对。因此，问题是：

(†) 是否有可能以这样的方式定义岩浆对：对于给定的 $\langle\langle x,y\rangle\rangle$，不存在满足 $x' \neq x$ 或 $y' \neq y$ 且使得 $\langle\langle x',y'\rangle\rangle \subseteq \langle\langle x,y\rangle\rangle$ 的对 $\langle\langle x',y'\rangle\rangle$？

我强烈猜测，问题（†）的答案是否定的。

$\widehat{\ }$5 岩浆自然数和序数 in M

按照冯·诺依曼定义，在 ZF 中构造自然数与序数的基本构成元素是 $\emptyset$。将 $\emptyset$ 认作 0 后，我们定义其余各数：令 $1 = \{0\}$、$2 = \{0,1\}$，等等。由于 M 中没有 $\emptyset$，我们将从一个原子 $a_0 \in A$ 开始；这个原子一经选定便固定下来，此后不再更改。元素 a_0 是起点，但并不完全是 $\emptyset$ 和 0 的“类比物”。下文将用相应通常数 0，1，. . . ，n，. . .的粗体形式$\mathbf{0},\mathbf{1},\ldots,\mathbf{n}\ldots$表示幺半群式自然数；更一般地，用相应通常序数 $\omega,\alpha,\beta,\ldots$的粗体形式 $\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\ldots$ 表示岩浆序数。我们用 $\mathbf{n}'$ 和 $\boldsymbol{\alpha}'$ 分别表示$\mathbf{n}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 的后继序数。

乍看之下，幺半群式数$\mathbf{0}$应定义为包含 a_0、$pr(a_0)$的最简单岩浆，就像 0 定义为 $\emptyset$ 一样。然而，若以 $pr(a_0)$表示$\mathbf{0}$，就无法定义一个更大的数$\mathbf{n}$，使其以$\mathbf{n} = \mathbf{0} \cup x = pr(a_0) \cup x$的形式包含$\mathbf{0}$ 作为子岩浆，其中 $x \in M\backslash M_1$。因为在这种情况下，根据引理 2.4 (iii)，$\mathbf{n} \notin M$，因为 $pr(a_0) \in M_1$，而

$\boldsymbol{n}\backslash pr(a_0)$ 会属于 $M\backslash M_1$。因此，我们改为设定 $\mathbf{0} = pr^2(a_0) = pr(pr(a_0))$。关于后继$\mathbf{n}'$ 和 $\boldsymbol{\alpha}'$的定义，我们仿照自然数的标准定义 $n+1 = n \cup \{n\}$，并设定$\mathbf{n}' = \mathbf{n} \cup pr(\mathbf{n})$；序数的定义也类似，因为包含$\mathbf{n}$ 的最小岩浆 $pr(\mathbf{n})$，是单元素集合 $\{n\}$的类比。因此，我们分别对 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha \in Ord$进行归纳法，在 ZFA 中定义$\mathbf{n}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$，如下所示：

$\mathbf{0} := pr^2(a_0)$，$\mathbf{1} :=$
$\mathbf{0} \cup pr(\mathbf{0})$，$\mathbf{2} :=$
$\mathbf{1} \cup pr(\mathbf{1})$，$\mathbf{n+1} :=$
$\mathbf{n} \cup pr(\mathbf{n})$。

此外，对于无限幺半群序数，我们规定：

$\boldsymbol{\omega} := \cup\{\mathbf{n}: n < \omega\}$,$\boldsymbol{\alpha+1} :=$
$\boldsymbol{\alpha} \cup pr(\boldsymbol{\alpha})$,$\boldsymbol{\alpha} := \cup\{\boldsymbol{\beta} : \beta < \alpha\}$,
其中 α为极限序数。

同理，扩展上一个定义，我们通过规定以下内容来定义幺半群序数加法：

$\boldsymbol{\alpha + 0} = \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\alpha + (\beta + 1)} = \boldsymbol{(\alpha + \beta) + 1} := \boldsymbol{(\alpha + \beta)} \cup pr($
$\boldsymbol{\alpha + \beta})$，且$\boldsymbol{\alpha + \beta} := \cup\{\boldsymbol{\alpha + \gamma} : \gamma < \beta\}$，其中 β为极限序数。

（乘法 $\boldsymbol{\alpha \cdot \beta}$ 也借助刚刚定义的$\boldsymbol{\alpha + \beta}$来定义，与标准序数中的定义完全相同，但下文不会用到它。）

设 $\mathbf{N} = \{\mathbf{n} : n \in \mathbb{N}\}$ 且 $\mathbf{Ord} := \{\boldsymbol{\alpha} : \alpha \geq 1\}$。显然 $\mathbf{N} \subset M$，且$\mathbf{Ord} \subset M$，后者是一个真类。此外 $\mathbf{N} \notin M$但 $\mathbf{N} \in M_{\text{seq}}$，因此 $\mathbf{N} \in \widehat{M}$，因为它是函数 $f \in M^{\mathbb{N}}$的值域，使得$f(n) = \mathbf{n}$。

众所周知，序数的序关系是 $\in$，即 $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta$。关于岩浆序数，相应的关系是真包含 $\subset$。即下列命题成立。

引理 5.1 对所有 $\alpha,\ \beta \in Ord,\ \alpha < \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\beta}$。

证明。 $\Rightarrow$：众所周知，$\alpha < \beta$ 当且仅当存在一个 $\gamma > 0$ 使得 $\beta = \alpha + \gamma$，因此只需证明，对于所有满足 $\beta > 0$的 $\alpha,\ \beta$，都有 $\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\alpha + \beta}$。利用上述定义 $\boldsymbol{\alpha + \beta}$ 的子句，通过简单的归纳法即可证明。也就是说，(i)$\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\alpha + 1}$，(ii) $\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\beta + 1}$，以及 (iii) $(\forall \gamma < \beta)(\boldsymbol{\alpha} \subseteq \boldsymbol{\gamma}) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\beta}$，其中 β为极限序数。

$\Leftarrow$: 设 $\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\beta}$。展开 $\boldsymbol{\beta}$的归纳定义后，可以看到它有唯一的展开形式，即并集 $\boldsymbol{\beta} = \cup\{x_\xi :$ 若 β 是后继序数，则为 $\xi \leq \beta\}$；若 β 是极限序数，则为$\boldsymbol{\beta} = \cup\{x_\xi : \ \xi < \beta\}$, 其中:

(i) $x_0 = pr^2(a_0)$, (ii) $x_{\xi+1} = pr(\cup\{x_\zeta : \ \zeta \leq \xi\})$,
以及 (iii) $x_\xi = pr(\cup\{x_\zeta : \zeta < \xi\}$, 若 ξ 是极限
序数。

此外，要使子岩浆 $y \subset \boldsymbol{\beta}$ 成为岩浆序数，充要条件是存在某个 $\alpha < \beta$, 使得 y 是 $(x_\xi)_{\xi}$的 α-初始段的并集；具体而言，若 α 是后继序数，则为 $y = \cup\{x_\xi : \ \xi \leq \alpha\}$；若 α 是极限序数，则为$y = \cup\{x_\xi : \ \xi < \alpha\}$。此外，在此情况下显然 $y = \boldsymbol{\alpha}$。由于$\alpha < \beta$，这证明了 $\boldsymbol{\alpha} \subset \boldsymbol{\beta} \Rightarrow \alpha < \beta$。$\dashv$

由前面的引理可知，关系 $\subset$ 可以作为定义，用来定义岩浆序数上的排序 $<$。

另一种定义。定义自然数与序数的另一种方式是：对于后继序数，令 $\boldsymbol{\alpha}' = pr(\alpha)$，而不是$\boldsymbol{\alpha} \cup pr(\boldsymbol{\alpha})$；定义的其他部分保持不变，即 $\mathbf{0} = pr^2(a_0)$ 和 $\boldsymbol{\alpha} = \cup\{\boldsymbol{\beta} : \ \beta < \alpha\}$，对于极限序数 α。特别地，对于幺半群式自然数，我们规定：

$\mathbf{0} := pr^2(a_0)$, $\mathbf{1} := pr(\mathbf{1}) = pr^3(a_0)$,
$\mathbf{n}' := pr(\mathbf{n})$，因此，通过对 $\mathbb{N}$ 进行归
纳法，$\mathbf{n} = pr^{n+2}(a_0)$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$
都成立。

请注意，这一定义类似于标准自然数的另一种定义。根据该定义，$0 = \emptyset$、$1 = \{0\}$、$2 = \{1\} =\{\{0\}\}$，一般而言 $n + 1 = \{n\}$，即对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $n = \{\{\cdots\{0\}\cdots\}\}$，许多作者采用了这种定义。

令 $\mathbb{N}^*$ 为这些替代自然数在 M^{seq}中的集合。就我们的语境而言，$\mathbb{N}^*$ 相较于 $\mathbb{N}$的一个“优势”是，它使我们能够定义可数生成岩浆，并证明它们是定义域为 $\cup\{pr(\mathbf{n}) : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*\}$的函数的值域。首先，我们有如下结论。

事实 5.2 对于所有 $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{m} \cap \boldsymbol{n} = \emptyset$。

证明。回顾一下，$pr(a_0) \in M_1$，因此 $pr^2(a_0) = \mathbf{0} \in M_2$，从而 $\mathbf{0} \subseteq M_1$。通过归纳法，我们很容易看出，对于每个 $n \geq 1$，$\mathbf{n} = pr^{n+2}(a_0) \subseteq M_{n+1}$。由 [4] 的引理 4.8，$M_{m+1} \cap M_{n+1} = \emptyset$ 对所有 $m \neq n$ 都成立，因此 $\mathbf{m} \cap \mathbf{n} = \emptyset$。$\dashv$

注意，事实 5.2 对一般的序数并不成立，因为一般而言，$\boldsymbol{\alpha} \subseteq M_\alpha$ 对每个 α 都成立，但层 M_α、M_β 并不总是互不相交。例如，根据定义，$\boldsymbol{\omega} = \cup\{\mathbf{n}: \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*\}$，对于每个 n，都有 $\mathbf{n} \subseteq \boldsymbol{\omega}$；更一般地，对于每个极限序数 α 和每个 $\beta < \alpha$，都有 $\boldsymbol{\beta} \subseteq \boldsymbol{\alpha}$。

定义 5.3 若存在序列 $\{y_n: n \in \omega\}$ 属于 M^{seq}，使得 $x = \cup\{pr(y_n): n \in \omega\}$，则称岩浆 x 为可数生成。

命题 5.4 若 $x \in M$ 是可数生成的，则存在岩浆函数 $\boldsymbol{F}$，使得 $dom(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{\omega}\backslash\mathbf{0}$ 且 $ran(\boldsymbol{F}) = x$。

证明。设 $x = \cup\{pr(y_n): n \in \omega\}$ 为可数生成的岩浆，并设

$$\mathbf{F} = \cup\{pr(\langle\langle \mathbf{n}, y_n\rangle\rangle : n \geq 0\}.$$

显然 $\mathbf{F}$ 是一个半函数。此外，由事实 5.2，$\{\mathbf{n}: n \geq 0\}$ 是一个两两不交集，故由引理 4.8 可知 $\mathbf{F}$ 是一个函数。由事实 4.5，

$$ran(\mathbf{F}) = \cup\{pr(y_n) : n \in \omega\} = x.$$

此外，由 $\boldsymbol{\omega} = \cup\{\boldsymbol{n}: n \geq 0\} = \cup\{pr^{n+2}(a_0): n \geq 0\}$ 的定义，我们有

$$dom(\mathbf{F}) = \cup\{pr(\boldsymbol{n}) : n \geq 1\} = \cup\{pr^{n+3}(a_0) : n \geq 0\} = \boldsymbol{\omega}\backslash pr^2(a_0) = \boldsymbol{\omega}\backslash\mathbf{0}.$$

⊣

6 M中关于分离公理和替换公理的问题

在 [4] 中，我们证明了 ZFC 的一些公理在 $\langle M, \in\rangle$ 中仍然成立。具体而言，外延公理和基础公理显然成立，而幂集公理和并集公理的一种弱形式则被证明是 M 中非平凡成立的事实。其余公理中，空集公理、配对公理、无穷公理和选择公理肯定是（且无可挽回地）不成立的。剩下的就是分离公理和替换公理（分别简称分离和替代）。其中，分离以一般形式显然在 M 中不成立，但我们将看到，一种受限形式 —— 即 ϕ 遍历某一特殊公式类的公理模式——在 M 中确实成立。另一方面，替代不可能有这样的受限形式；这是由于我们在第 4.1 节中看到的 M 中函数定义所面临的问题所致。

对于由公式 $\phi(x)$ 定义的类 $X \subseteq M$（可能带有参数），即 $X = \{x: M \models \phi(x)\}$，我们记作 $X = X_\phi$。真值

Sep 中公式 $\phi(x)$ 的真值 M 具有通常的含义，也就是说，对于任意集合 $u \in M$，$X_\phi \cap u \in M$，只要满足 $X_\phi \cap u \neq \emptyset$，因为 $\emptyset \notin M$。要看出一般形式下的 Rep 在 M 中为假，例如取公式 $\phi(x) = (x = y_0)$，其中某个岩浆 y_0 作为参数，并令 u 为任意岩浆。于是 $X_\phi \cap u = \{x : x = y_0 \wedge x \in u\}$。若 $y_0 \in u$，则 $X_\phi \cap u = \{y_0\} \notin M$。若 $y_0 \notin u$，则同样有 $X_\phi \cap u = \emptyset \notin M$。

问题是，对于由适当的一类性质 $\phi(x)$ 所定义的类，M 中是否成立分离。对于特定性质$\phi(x)$，要使分离在 M 中成立，以下是一个简单的充要条件。

引理 6.1 对于 $\phi(x)$，M 中成立分离，当且仅当对于每个 $x \in X_\phi$，$pr(x) \subseteq X_\phi$，即

$$x \in X_\phi \wedge y \subseteq x \to y \in X_\phi. \tag{7}$$

证明。假设该条件成立且 $u \in M$。我们需要证明$u \cap X_\phi$ 是一个岩浆，即 $x \in u \cap X_\phi$ 蕴含 $pr(x) \subseteq u \cap X_\phi$。取这样一个$x \in u \cap X_\phi$。现在，由于 u 已经是一个岩浆，$x \in u$ 蕴含 $pr(x) \subseteq u$；而根据我们的条件，$x \in X_\phi$ 蕴含 $pr(x) \subseteq X_\phi$。因此 $pr(x) \subseteq u \cap X_\phi$，即 $u \cap X_\phi$ 是一个岩浆，所以分离 对 ϕ 成立。反过来，假设该条件不成立，即存在一个 $x \in X_\phi$ 和一个 $y \subseteq x$，使得 $y \notin X_\phi$。固定这样的岩浆x 和 $y \subseteq x$。显然，总存在一个岩浆 u，使得 $x \in u$。于是$x \in u \cap X_\phi$，而 $y \notin u \cap X_\phi$。由此可得，$u \cap X_\phi$ 不是一个岩浆，并且分离 在 M 中不成立。⊣

引理 6.1 导出如下结论：

定义 6.2 如果类 $X \subseteq M$ 满足条件（7），则称其为幺半群式。相应地，如果 L的公式 $\phi(x)$ 满足：X_ϕ 是幺半群式的，则称该公式为幺半群式，即

$$M \models (\forall x, y)(\phi(x) \wedge y \subseteq x \to \phi(y)).$$

以下结论是显然的。

推论 6.3 可定义的类 $X \subseteq M$ 是幺半群式的，当且仅当它由幺半群式公式定义。

有一种简单方法，可分别从所有可定义类/公式的类生成所有幺半群式类/公式。这通过以下完备化过程完成。

给定一个类 $X \subseteq M$， X 的（幺半群式）完备化是该类

$$\overline{X} = \{x \in M : (\exists y)(y \in X \wedge x \subseteq y)\}.$$

类似地，给定一个以自由变量 x 出现于 L 中的公式 $\phi(x)$，其中可以带有参数， $\phi(x)$ 的（幺半群式）完备化是公式

$$\overline{\phi}(x) := (\exists y)(\phi(y) \wedge x \subseteq y).$$

下面的事实很容易证明。

事实 6.4 对于任意 ϕ、 $\overline{X}_\phi = X_{\overline{\phi}}$,

证明。 根据上述定义，我们有

$$x \in \overline{X}_\phi \Leftrightarrow (\exists y)(y \in X_\phi \wedge x \subseteq y) \Leftrightarrow (\exists y)(M \models \phi(y) \wedge x \subseteq y) \Leftrightarrow x \in X_{\overline{\phi}}.$$

⊣

岩浆分离模式（MSS）是以下断言：

（MSS）对于每个幺半群式公式 $\phi(x)$，均有
$(\forall u)(\exists v)[X_\phi \cap u \neq \emptyset \to X_\phi \cap u = v]$。

命题 6.5 MSS 在 M 中成立。

证明。 设 $\phi(x)$ 是一个岩浆公式， $X_\phi = \{x \in M : M \models \phi(x)\}$ ，并设 $u \in M$ 满足 $X_\phi \cap u \neq \emptyset$。我们必须证明 $X_\phi \cap u \in M$。我们已经看到， ϕ 是岩浆的，意味着 X_ϕ 是一个岩浆类，也就是说，对于每个$x \in X_\phi$ 和 $y \subseteq x$，都有 $y \in X_\phi$。设 $X_\phi \cap u = v$。只需证明 $x \in v$ 和 $y \subseteq x$ 蕴含 $y \in v$。但对于 X_ϕ 和 u，后一个蕴含关系都成立，因为 X_ϕ 是岩浆式的，而 u 是一个岩浆，所以确实有 $y \in v$。⊣

与分离公理不同，替换公理似乎无法进行类似的调整来使其在 M 中成立，原因主要在于其函数性的 特征，以及函数在 M 内部表示时所带来的问题，正如我们在第 4.1 节中所看到的。

在 ZF 中，替换公理和分离公理一样，也可以用可定义的有序对类来表述。如果公式 $\phi(x, y)$ 满足性质 $(\forall x)(\exists! y)(\phi(x, y)$，就称它是函数性的。由 $\phi(x, y)$,$F = \{\langle x, y\rangle : \phi(x, y)\}$ 定义的相应类也称为函数性的，并且我们可以用 $F(x) = y$ 代替 $\phi(x, y)$ 或 $\langle x, y\rangle \in F$。那么，ZF 替代公理模式就是说，对于我们宇宙 V 中可定义的每个函数性类 F，以及每个

集合 $u \in V$，由 $\{F(x) : x \in u\} = \{y : (\exists x)(x \in u \wedge \langle x, y\rangle \in F\}$ 在 F 下的像集也是 V 的一个集合。

相应的函数关系和公式的定义在 M中也类似，但它们的扩张无法表示为岩浆对的类 $\langle\langle x, y\rangle\rangle$。例如，在$M$ 中定义的一个自然函数关系是 $pr(x) = y$，其迭代也分别是 $pr^2(x)$、 $pr^3(x)$等。但如果我们试图用相应的岩浆对类来表示这一运算$X = \{\langle\langle x, y\rangle\rangle : pr(x) = y\}$，那么 X 就不是岩浆；并且对于任意岩浆u，将 pr 限制到 u, $v = \{\langle\langle x, y\rangle\rangle$ 上所得的“限制” $pr(x) = y \wedge x \in u\}$ 也不是岩浆。这一点显然，因为每个 $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ 都包含不是对的子岩浆 w ，所以 w 不能属于 v。但即使我们只考虑 $\langle\langle x, y\rangle\rangle$ 中那些同时是对的子岩浆，对于所有 $x' \subset x$,$\langle\langle x', y\rangle\rangle \subseteq \langle\langle x, y\rangle\rangle$ 而言， $\langle\langle x', y\rangle\rangle \notin v$除外，因为 $pr(x') \neq y$。

然而，即使无法用岩浆对表示函数关系，问题仍然是：岩浆在这种关系下的像是否为岩浆。答案是否定的。一个平凡的例子是取关系 $\phi(x, y) : (x = x \wedge y = y_0)$，其中参数为$y_0$，该关系定义了常值类函数 $F(x) = y_0$ 对所有 x均成立。于是对于每个岩浆 u ， u 在 F 下的像都是 $\{y_0\}$，而这并不是岩浆。一个不那么平凡的例子由运算 pr给出。

例 6.6 对于函数关系 $pr(x) = y$，替换公理在 M 中失效。

证明。反设给定一个岩浆 u，集合 $v = \{pr(x) : x \in u\}$是一个岩浆。这意味着对于每个 $x \in u$， $pr(pr(x)) \subseteq v$。我们将看到这是错误的。固定一个 $x \in u$。那么对于每个 $z \in pr(pr(x))$，即$z \subseteq pr(x)$，我们必须有 $z \in v$，也就是说，对于某个 $y \in u$，有 $z = pr(y)$。事实上，某些岩浆 $z \subseteq pr(x)$确实具有 $z = pr(y)$的形式，其中某个 $y \in u$满足条件，因为 u 是一个岩浆；当 $x \in u$ 时，对于每个 $y \subseteq x$， $y \in u$ 也成立，并且由于 pr的单调性，$pr(y) \subseteq pr(x)$。然而，并非所有 $z \subseteq pr(x)$都具有这种形式。具体而言，取 x的互异子岩浆 x_1、...、 x_n。于是对于每个 $i = 1$、...、 n，有$pr(x_i) \subseteq pr(x)$，因此 $pr(x_1) \cup \cdots \cup pr(x_n)$也是 $pr(x)$的一个子岩浆，而它显然不是 $pr(y)$的形式。⊣

唯一剩下的选择似乎是限制 Rep公理模式中所涉及的定义公式。这类限制不可能不同于对分离公理情形中所使用公式施加的限制。也就是说，给定由公式 $\phi(x, y)$ 定义的函数关系，可以尝试对 ϕ 进行某种“幺半群式完备”，类似于上面推论 6.3 中定义的那种，设

$$\overline{\phi}(x, y) := (\exists x', y')(\phi(x', y') \wedge \langle\langle x, y\rangle\rangle \subseteq \langle\langle x', y'\rangle\rangle).$$

然而，问题在于， $\phi(x, y)$ 不再定义函数关系。因为如果对两个元素 x, y 都有 $\phi(x, \overline{y})$ 成立，那么根据 ϕ 的定义以及岩浆对的性质，很容易推出对 任意 $y_1 \subseteq y \phi(x, y_1)$ 也成立，因此 ϕ 不是函数性的。

参考文献

[1] C. Castoriadis, 《社会的想象性建制》, Polity出版社，1987年。2005年再版。[2]C. Castoriadis, 《迷宫的十字路口》第2卷《人的领域》, David Ames Curtis 从法文译出并编辑，1989年。可在此获取: cornelius-castoriadis-crossroads-2-human- domains.pdf[3] T. Jech, 《集合论》, 第三千年版，施普林格，2003年。[4] A. Tzouvaras，具有相依元素的集合：卡斯托里亚迪斯“岩浆”概念的形式化，《逻辑学研究》112（2024），第4期，735–760页。[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_pair。