arXiv:2603.11710v1 [math.LO] 12 Mar 2026

非常大可测基数上的测度数目

Arthur W. Apter、Eyal Kaplan 与 Alejandro Poveda

Abstract. 我们研究在内模型技术不可用的情形下，一个可测基数上可能存在的正规测度数目。作为替代，我们利用超幂公理的推论来得到我们的定理。我们证明，经典的 Kimchi–Magidor 结果——即前 n个可测基数可以是强紧的——可以与它们所承载的正规测度数目的任意预先指定模式相结合。我们还证明，一个超紧基数之上的第一个可测基数可以承载任意给定数目的正规测度；对于超紧基数的第一个可测极限，同样的结论也得以确立。作为我们技术的进一步应用，我们加强了 Goldberg–Woodin 的一个未发表定理，以及 Goldberg、Osinski 与 Poveda 的一个定理。我们的分析既规避了 Friedman–Magidor[14]对核心模型方法的依赖，也规避了 Prikry 型迫迭代的局限性，参见 [17]。

1. Introduction

本文研究可测基数上的正规测度数量。可测基数的起源可追溯至 S. Ulam 的经典工作 [40] ，该工作与勒贝格测度问题有关。若基数 κ 上存在非主的、 κ-完备超滤子，则称其为可测。 κ上的正规测度是这类超滤子，并且还对对角交封闭。众所周知，每个可测基数都至少携带一个正规测度。近几十年来，可测基数能够携带多少个正规测度一直是一个重要且广受研究的问题，Friedman 和 Magidor 于 [14]彻底解决了这一问题（见下文讨论）。

本文关注与非常大的基数共存的可测基数，例如强紧基数和超紧基数。若对于每个基数 $\lambda \geq \kappa$，都存在 $\mathcal{P}_\kappa(\lambda) = \{X \subseteq \lambda : |X| < \kappa\}$上的细的、 κ-完备超滤子，则称基数 κ 为强紧。若对于每个 $\lambda \geq \kappa$，都存在 $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$上的细正规超滤子，则称基数$\kappa$ 为超紧。二者都是非常强的可测性形式，其相容性强度严格高于可测基数。

研究大基数层级的更高层级颇具挑战，因为目前尚无适用于超紧基数的典范内模型 。集合论中典范内模型的构造始于 G¨odel 发现可构造集合宇宙，该宇宙记作 L。然而， L本身无法容纳大多数大基数——例如，根据 Scott 的经典定理， L中不存在可测基数。尽管如此，多年来人们已经发展出一系列能够容纳更强大基数的 L 类模型，而内模型计划旨在为所有大基数公理构造此类模型。

内模型理论方法为探究有关大基数的基本问题提供了强有力的工具和技术。可测基数上的正规测度可能有多少个，就是这类问题的一个具体例子。事实上，Kunen 构造了可测基数的典范内模型 $L[U]$，并证明其中恰有一个正规测度。后来，Mitchell 发展了形如 $L[\vec{U}]$ 的内模型，这些模型由测度的相容序列构造而成

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03E35, 03E55.*Key words and phrases.* 可测基数、分裂强迫、非平稳支撑迭代。[1]这样的超滤子 U 平凡地诱导出一个非平凡的、二值的、 κ-可加测度，定义在 $\mathcal{P}(\kappa)$ 上。事实上，与 U相关联的测度μ: $\mathcal{P}(\kappa) \to 0$, 1 对某个集合赋值为 1，当且仅当该集合属于 U。

$\neg U$，它们可以展现携带任意合理数量正规测度的可测基数。然而，Mitchell 构造所需的假设超出了单个可测基数的存在性。此前尚不清楚，单个可测基数的存在是否足以证明存在这样一种一致性：某个可测基数 κ 恰好携带 λ 个正规测度，其中预先指定的基数为 $1 < \lambda < \kappa^{++}$。[2]

解决这一问题的第一个重大进展由 Kunen–Paris 于 20 世纪 70 年代初取得[31]，；他们证明，从一个可测基数出发 κ，可以构造一个力迫扩张，使得 κ 上的正规测度个数可以是任意一个共尾性大于 λ 的基数κ^+。尤其是，可以得到正规测度的最大可能数量，即 2^{2^κ}。最近，Apter–Cummings–Hamkins [5] 研究了 Kunen–Paris 技术无法处理的第一个情形；具体而言，从一个可测基数 κ出发，作者构造了一个泛型扩张，其中 κ 恰有 κ^+ 个正规测度。不过，这仍留下了一个未解决的问题：能否从一个可测基数出发，构造一个 ZFC 模型，使其恰有 λ个正规测度，其中 $\lambda \leq \kappa^+$是任意基数?

上述问题由 Friedman 和 Magidor 在其开创性工作中彻底解决[14]。Friedman–Magidor 的工作不仅解决了一个长期悬而未决的问题，还巧妙地运用了多种复杂技术，而这些技术如今在该领域发挥着关键作用。其中包括在典范内模型上进行力迫、使用非平稳支撑迭代、广义 Sacks 强迫以及自编码力迫。后续研究（如 [8, 9, 11, 12, 3, 23, 4, 17, 10, 24]）更能彰显 Friedman–Magidor 思想在这一领域的深远影响。

Friedman–Magidor 证明的一个显著特点是，它需要在一个典范内模型上进行力迫（见 [38]）。这一特点对于他们控制泛型扩张中出现的正规测度至关重要，具体体现在两个方面。首先，新的正规测度满足这样的性质：其超幂嵌入在基模型上的限制是核心模型 [30, 37, 39] 的迭代超幂——由于核心模型的性质，这类迭代超幂尤其为人所熟知。其次，Friedman–Magidor 强迫纳入了一种编码机制，以阻止产生不需要的正规测度；反过来，这种编码利用了基模型的精细结构

这种精细结构方法虽然优雅，却严重限制了 Friedman–Magidor 方法的适用范围。也就是说，这些方法仅适用于当前内模型理论所能处理的大基数。例如，这一方法无法用于探讨第一个强紧基数上的正规测度数量，更不用说第一个超紧基数的可测极限上的正规测度数量了。

为回应这一问题，Gitik 和第二作者 [17] 的工作提出了一条绕开这些限制的替代途径。他们的方法使得我们能够证明，例如，第一个强紧基数恰好承载 η 个正规测度 $\langle U_\tau : \tau < \eta \rangle$，其中每个 U_τ 的米切尔序为 τ，并且不存在其他米切尔序大于或等于 η [17, 的可测基数（定理 4.16]）。这一结果是在假设某个超紧基数与广义连续统假设相容，且米切尔序具有线性性的条件下证明的[3]。

证明方法涉及对普里克里强迫进行非平稳支撑迭代（见[11]），为最小超紧基数 κ以下每个米切尔序为 $\geq \eta$ 的可测基数添加一个普里克里序列。在进一步假设不存在大于 κ的可测基数时，可以证明 κ 在泛型扩张中仍为强紧基数，并且 κ上的正规测度具有所需的配置。

这一方法在 [17] 中得到进一步改进，从而证明：对于任意给定的 $\eta < \kappa$ （见 [17, 定理 4.17]），第一个强紧基数 κ 可以是一致地成为最小可测基数，并且恰好具有 η 个正规测度。论证从上述模型开始，在

[2]我们在此聚焦于广义连续统假设（GCH）的情形，在该假设下，可测基数 κ 上的正规测度数量至多为 κ^{++}。[3]事实上，较弱的假设也足够；参见 [17, 定理 4.16]。

该模型中，最小强紧基数 κ 具有 η 个正规测度；接着对每个小于 κ的可测基数添加一个普里克里序列，进行普里克里强迫的 Magidor（即全支集）迭代。根据 Magidor 的一个著名定理 [35], κ 在由此得到的模型中， [7], 是强紧基数，也是最小可测基数。正如 Ben-Neria 在 [7], 中指出的，普里克里强迫的 Magidor 迭代不会改变 κ上的正规测度数量，因此 κ在泛型扩张中恰好具有 η 个正规测度。Ben-Neria 假设 Magidor 迭代是在典范内模型上进行的，但在基模型满足广义连续统假设这一较弱假设下，他的结果仍然成立（见 [27]）。

由上文自然产生的一个问题是，类似的结果是否可以在例如第二个强紧基数处得到。 [17]的方法遇到两个主要障碍。首先，反大基数假设被用来确保超紧基数 κ在低于 κ 的非平稳支撑迭代之后仍保持强紧——假定在 κ之上不存在可测基数。其次，最小强紧基数 κ 在其上方添加普里克里序列之后不再是强紧的，从而无法使用类似方法来控制第二个强紧基数上正规测度的个数。

在 [28], 中，第二作者引入了分裂强迫，从而规避了 Friedman–Magidor 强迫中对内模型理论的依赖。[4] 分裂强迫的主要优点之一在于其极为简单的性质。这种简洁在很大程度上得益于 Omer Ben-Neria 的建议，其见解显著简化并改进了第二作者最初的强迫构造。在本文中，我们采用分裂强迫的若干变体，以避开 [17]中对 Prikry 型强迫的使用。分裂强迫的一个关键吸引力在于其灵活性：它可以加以修改、细化，并与其他强迫技术相结合，同时保持基模型中已有的许多大基数构型。

我们的定理（见下文定理 3.1、3.2、3.3、3.5 和 4.4）是在如下假设下证明的：相关的大基数与广义连续统假设以及 Goldberg 的超幂公理（超幂公理）相容（关于超幂公理的细节见 [19] ）。事实上，这些证明仅使用了超幂公理的一个推论：每个可测基数上都存在米切尔序为序数 0 的唯一正规测度。[5] 因此，只需假设该性质与相关的大基数假设相容。Goldberg 的工作有力地支持了我们初始假设的合理性，其中包括在存在非常大的大基数时，对超幂公理下宇宙结构的详细分析。

在这些想法的基础上，我们证明如下结果：

定理 3.1. 假设广义连续统假设 成立，存在 $n < \omega$ 个超紧基数 $\langle \kappa_i : i < n \rangle$，在 κ_{n-1}之上没有可测基数，且每个 κ_i 都具有米切尔序为0的唯一正规测度。对每个 $i < n$，设 $\tau_i \leq \kappa_i^{++}$为一个基数。则存在一个泛型扩张，其中广义连续统假设 成立，$\langle \kappa_i : i < n \rangle$ 是前 n 个强紧基数、前 n 个可测基数，且每个 κ_i恰好具有 τ_i 个正规测度。

定理3.2。 假设广义连续统假设 成立， κ 是一个超紧基数，且 λ 是高于 κ的第一个可测基数。此外，假设 λ 具有唯一正规测度。那么，对每个基数$\tau \leq \lambda^{++}$，都存在一个力迫扩张，使得以下条件成立：

(1) κ是超紧的；*(2)* λ是可测的；*(3)* λ
恰好承载 τ 个正规测度。

定理 3.3. 假设广义连续统假设 成立，并且 κ 是第一个由超紧（强）基数组成的可测极限。假设 κ 携带一个米切尔序为序数 *0* 的唯一正规测度。设 $\tau \leq \kappa^{++}$ 是一个基数。那么，存在一个泛型扩张，使得 κ 仍然是第一个由超紧（强）基数组成的可测极限，并且 κ 恰好携带 τ 个正规测度。

[4]该方法还有一个额外优点，即避免使用广义 Sacks 强迫和自编码力迫。[5]这直接源于米切尔序的线性性，这是超幂公理的一个众所周知的推论（见[19, 定理2.3。11]）。

定理 3.1 将经典的 Kimchi–Magidor恒等危机定理与我们分析正规测度数量的新技术结合起来。Kimchi–Magidor原始证明的一个重要组成部分是使用拉弗力迫，使超紧基数在充分有向闭的力迫下不可毁。然而，拉弗不可毁性准备也会在泛型扩张中引入许多不需要的正规测度；我们的分析包含一个新的不可毁性定理版本，它可以控制泛型扩张中具有平凡Mitchell秩的正规测度数量（参见定理 2.15）。

如上所述，Gitik–Kaplan 在证明最小可测基数可以是强紧基数且携带唯一正规测度时，使用了反大基数假设。在一项未发表的工作中，Goldberg–Woodin 已经在不诉诸任何反大基数假设的情况下，证明了同一结果；其前提是超幂公理与存在超紧基数的可测极限相一致。在此基础上，并利用定理 3.3，我们得以证明对原始戈德堡–伍丁定理的以下加强：

定理 3.5. 假设广义连续统假设 成立， κ 是超紧基数的可测极限， $\tau \leq \kappa^{++}$，且 κ 有一个米切尔序为序数 *0* 的唯一正规测度。那么存在一个泛型扩张，其中 κ是最小可测基数、最小强紧基数，并且 κ 恰好携带 τ 个正规测度。

本文最后将改进 Goldberg、Onsinski 和 POVEDA 关于第一个超紧基数在 HOD 中的地位的一条定理，该定理假设 Woodin 的 HOD 假设成立。 [20] 回顾一下，在 HOD 假设下，第一个可延拓基数（事实上，HOD-超紧已足够）在 HOD 中是超紧的 [43, 42]。[6] 一个自然的问题是，这是否是最优结果——也就是说，在 HOD 假设下，第一个超紧基数是否必定在 HOD 中超紧。对此，[20] 通过构造一个满足 HOD 假设的模型，给出了否定答案；在该模型中，第一个超紧基数 κ 是强紧的，但在 HOD 中并非 2^κ-超紧。以[20] 中的思想为基础，我们构造了一个满足 HOD 假设的模型，其中第一个超紧基数在 HOD 中是强紧的，且恰好携带一个正规测度。这加强了 [20]中得到的构形。

定理4.4。假设广义连续统假设和 $V = \mathrm{gHOD}$ 均成立， κ 是一个超紧基数，并且 κ 上存在唯一的正规测度，且其*Mitchell*秩平凡。那么，以下构型是一致的：

(1) HOD 假设成立。*(2)* κ是超紧基数。*(3)* 在HOD中， κ 是强紧基数，且恰好承载一个正规测度。

2. Preliminaries

2.1. 关于非平稳支撑迭代的一般性质。本文使用的主要技术是非平稳支撑力迭代。

我们将在本节利用这些迭代，收集一些标准事实，以供后文使用。回顾一下，若序数集合 A 满足：对于每个不可达基数 λ， $A \cap \lambda$在 λ中是非平稳的，则称 A 在不可达基数中是非平稳的。

设 κ 是一个马洛基数。若对于每个不可达基数 $\alpha \leq \kappa$， $\mathbb{P}_\alpha$ 都是 $\langle \mathbb{P}_\beta \colon \beta < \alpha \rangle$的非平稳支撑极限；并且对于 $\alpha < \kappa$的其他每个取值， $\mathbb{P}_\alpha$ 都是 $\langle \mathbb{P}_\beta \colon \beta < \alpha \rangle$的逆极限，则迭代力迫 $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle$ 称为非平稳支撑迭代。更严格地说，对于每个 $\alpha \leq \kappa$，条件 $p \in \mathbb{P}_\alpha$ 都是定义域为 α的函数，并满足：

(1) 对所有的 $\beta < \alpha$、 $p \restriction \beta \in \mathbb{P}_\beta$ 和 $p \restriction \beta \Vdash p(\beta) \in \mathbb{Q}_\beta$。

[6]这个结果是最优的；也就是说，第一个可延拓基数在一致性意义下可以是 HOD 中的第一个强紧基数 [20]。

(2) p 的支集，

$$\mathrm{supp}(p) = \alpha \setminus \{\beta < \alpha \colon p \restriction \beta \Vdash p(\beta) = \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{Q}}_\beta}\},$$

在不可达基数中是非平稳的。

假设 κ 是一个马洛基数，且 $I \subseteq \kappa$ 是不可达基数的一个平稳集。我们称 $\mathbb{P}$ 为 I间隔非平稳支撑迭代，如果除了是一个非平稳支撑迭代 $\langle \mathbb{P}_\alpha$ 之外，$\mathbb{Q}_\alpha \colon \alpha < \kappa\rangle$, $\mathbb{P}$ 还满足：对每个 $\alpha \in \kappa \setminus I$，$\mathbb{Q}_\alpha$ 都被 $\mathbb{P}_\alpha$ 强迫为平凡力迫。

在我们的语境中，$\mathbb{P}$ 将是一个非平稳支撑迭代，其迭代 $\mathbb{Q}_\alpha$ 具有某些闭包性质，例如 α闭包 或 α策略闭。回忆一下，若一个强迫偏序集 $\mathbb{Q}$ 中任意长度小于 α 的条件递减序列都有 $\mathbb{Q}$ 中的下界，则称 $\mathbb{Q}$ 为 α闭的。

对 α-闭合的一种自然弱化形式，在文献中十分常见，这就是α-策略闭合的概念：

定义 2.1（α-策略闭合）。

(1) 设 $\mathbb{Q}$ 是一个强迫概念，α 是一个正则基数。令 $G_\alpha(\mathbb{Q})$ 为一个双人博弈，由 α 个阶段组成，玩家在其中构造一个条件的下降序列。玩家 I 在奇数阶段行动，玩家 II 在偶数阶段行动（包括极限阶段）。如果在某个小于 α 的极限阶段，玩家 II 未能选出一个扩展此前构造的所有条件的条件，则玩家 I 获胜。否则，玩家 II 获胜。(2) 如果玩家 II 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q})$ 中有必胜策略，我们就称强迫概念 $\mathbb{Q}$ 是 α-策略闭的 。类似地，如果对于所有 $\beta < \alpha$，玩家 II 在 $G_\beta(\mathbb{Q})$ 中都有必胜策略，我们就称 $\mathbb{Q}$ 是 $<\alpha$-策略闭的 。

在非平稳支撑迭代的背景下，一个重要工具是所谓的融合引理。粗略地说，这个引理保证（在满足一些额外的闭性假设的前提下），如果 $\mathbb{P}$ 是一个非平稳支撑迭代，且 $\vec{d} = \langle d(\alpha) \colon \alpha < \kappa\rangle$ 是 $\prec\mathbb{P}$ 的一列稠密开集，那么就可以在指标 α 的某个闭无界集上对 D 进行“对角化”。

引理 2.2（融合引理）。假设 κ 是 *Mahlo*，且 $I \subseteq \kappa$ 是由不可达基数组成的平稳集。设 $\langle \mathbb{P}_\alpha, \mathbb{Q}_\alpha \colon \alpha < \kappa\rangle$ 是一个 I-间隔的非平稳支撑迭代力迫，并满足：

(1) 对每个 $\alpha < \kappa$，秩$(\mathbb{Q}_\alpha) < \min(I \setminus (\alpha+1))$。(2) 对每个 $\alpha < \kappa$，$1\!\!1 \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$\mathbb{Q}_\alpha$ 是 α-策略闭的”。(3) 对每个 $\alpha \in \kappa \setminus I$，$1\!\!1 \Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$ “$\mathbb{Q}_\alpha$ 是平凡力迫”。

令 $\mathbb{P}$ 为 $\langle \mathbb{P}_\alpha \colon \alpha < \kappa\rangle$的非平稳支撑极限。那么，对每个 $p \in \mathbb{P}$ 以及 $\mathbb{P}$的稠密开子集序列 $\vec{d} = \langle d(\alpha) \colon \alpha < \kappa\rangle$，都存在一个条件 $p^* \leq p$ 和一个闭无界集 $C \subseteq \kappa$，使得对每个 $\alpha \in C$，

$$\{r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} \colon r^\frown(p^* \setminus \alpha+1) \in d(\alpha)\}$$

在 $\mathbb{P}_{\alpha+1}$ 中，$p^* \restriction (\alpha+1)$ 是稠密的。

证明。对每个 $\alpha \in I$，固定一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称 $\dot{\tau}_\alpha$，它是玩家 II 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$中的策略。我们构造如下序列：

- $\langle p_i \colon i < \kappa\rangle$ 在 $\mathbb{P}$ 中的条件递减序列。
- $\langle \alpha_i \colon i < \kappa\rangle$ 中的连续递增共尾序列。
- $\langle C_i \colon i < \kappa\rangle$ 的闭无界子集递减序列（按包含关系），其中每个 C_i 都与 $\mathrm{supp}(p_i)$ 不相交。

构造方式确保以下性质成立：

- 对于每个 $i < j < \kappa$, $p_i \restriction \alpha_i + 1 = p_j \restriction \alpha_i + 1$。

[7]这一概念也被称为 $\prec\alpha$-策略闭，这一术语见第一作者与 Shelah 的合作研究 [6]。

• 对于每个 $i<\kappa$, $\{r\in\mathbb{P}_{\alpha_i+1}\colon\ r^\frown p_i\setminus(\alpha_i+1)\in d(\alpha_i)\}$ 在 $\mathbb{P}_{\alpha_i+1}$ 中稠密，且位于 $p_i\restriction(\alpha_i+1)$之下。• 对于每个 $i<j$, $\alpha_j\in C_i$。• 对于每个 $i<\kappa$ 以及 $\alpha\in\mathrm{supp}(p_i)\setminus(\alpha_i+1)$, $p_i\restriction\alpha$ 强制 $\langle\dot{p}_j(\alpha)\colon\ j<i,\alpha\in\mathrm{supp}(p_j)\rangle\dot{}$是玩家 II 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$ 的一次部分对局中的着法序列，其中玩家 II 按照其必胜策略 $\dot{\tau}_\alpha$进行博弈。

令 $p_0=p$、$\alpha_0=0$ 和 C_0 为任意一个与 $\mathrm{supp}(p)$ 不相交的闭无界集，以此开始构造。假设对于某个 $i<\kappa$，已经构造出 p_i,α_i,C_i。令 $\alpha_{i+1}=\mathrm{min}(C_i\setminus\alpha_i+1)$。我们定义 $p_{i+1}\leq p_i$，使得：

(1) $p_{i+1}\restriction\alpha_{i+1}=p_i\restriction\alpha_{i+1}$。 (2) $\alpha_{i+1}\notin\mathrm{supp}(p_{i+1})$（并且由于 $\alpha_{i+1}\in C_i$ 和 C_i 与 $\mathrm{supp}(p_i)$ 不相交，$p_{i+1}\restriction(\alpha_{i+1}+1)=p_i\restriction(\alpha_{i+1}+1)$）。 (3) $p_{i+1}\setminus(\alpha_{i+1}+1)$ 满足以下两个性质：(a) $p_{i+1}\setminus(\alpha_{i+1}+1)$ 被 $p_{i+1}\restriction(\alpha_{i+1}+1)$ 强制为一个扩张 $s\leq p_i\setminus(\alpha_{i+1}+1)$，且 $\{r\in\mathbb{P}_{\alpha_{i+1}+1}\colon\ r^\frown s\in d(\alpha_{i+1})\}$ 是 $\mathbb{P}_{\alpha_{i+1}+1}$ 在 $p\restriction(\alpha_{i+1}+1)$ 以下的稠密子集。(b) 对每个 $\alpha\in\mathrm{supp}(p_{i+1})\setminus(\alpha_{i+1}+1)$，$p_{i+1}\restriction\alpha$ 强制 $\langle\dot{p}_j(\alpha)\colon\ j\leq i,\alpha\in\mathrm{supp}(p_j)\rangle\dot{}$ 是博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$ 一次进行中玩家 II 的行动序列，其中玩家 II 按照 $\dot{\tau}_\alpha$ 进行游戏。

断言 2.2.1. 可以安排条款（*3*）。

断言的证明。 我们需要论证这样的条件 s 存在。这基本上源于这样一个事实：$|\mathbb{P}_{\alpha_{i+1}+1}|$ 严格小于 $\mathbb{P}\setminus(\alpha_{i+1}+1)$的策略闭合度。[8] 更正式地说，令 $\langle q_\alpha\colon\ \alpha<\chi\rangle$ 为 $\mathbb{P}_{\alpha_{i+1}+1}$ 中所有低于 $p_i\restriction(\alpha_{i+1}+1)$的条件的单射枚举。我们如下构造 $\mathbb{P}_{\alpha_{i+1}+1}$-名称 $\langle\dot{p}^\beta_{i+1}\colon\ \beta\leq\chi\rangle$：

• $p_{i+1}\restriction(\alpha_{i+1}+1)$ 强制 $\langle\dot{p}^\beta_{i+1}\colon\ \beta\leq\chi\rangle$ 是 $\mathbb{P}\setminus(\alpha_{i+1}+1)$中的条件递减序列。• 对于每个 $\beta<\chi$，$q_\beta{}^\frown\dot{p}^\beta_{i+1}\in d(\alpha_{i+1})$。• 对于每个 $\beta<\chi$ 和 $\alpha\in\mathrm{supp}(\dot{p}^\beta_{i+1})\setminus(\alpha_{i+1}+1)$，$\dot{p}^\beta_{i+1}\restriction\alpha$ 强制 $\langle\dot{p}^\gamma_{i+1}(\alpha)\colon\ \gamma<\beta,\ \alpha\in\mathrm{supp}(\dot{p}^\gamma_{i+1})\rangle$ 是博弈 $G_\alpha(\dot{\mathbb{Q}}_\alpha)$ 的一次进行中玩家 II 的行动序列，其中玩家 II 按照策略 $\dot{\tau}_\alpha$进行游戏。

一旦构造出这样的序列，我们就按如下方式选取所需的 $\mathbb{P}_{\alpha_{i+1}+1}$-名称 $\dot{s}$，使其成为$\mathbb{P}\setminus\alpha_{i+1}+1$ 上的一个条件，且 $\mathrm{supp}(\dot{s})=\bigcup_{\beta\leq\chi}\mathrm{supp}(\dot{p}^\beta_{i+1})$：假设已经构造了 $\alpha\in(\alpha_{i+1},\kappa)$和 $\dot{s}\restriction\alpha$。由于 $\dot{s}\restriction\alpha$ 延伸了 $p_i\restriction(\alpha_{i+1}+1,\alpha)$，它迫使 $\langle\dot{p}_j(\alpha)\colon\ j\leq i,\alpha\in\mathrm{supp}(p_j)\rangle$ 是在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$ 中按照 $\dot{\tau}_\alpha$进行时玩家 II 的行动序列。假设在同一博弈中，玩家 I 在阶段 $i+1$ 选择条件 $\dot{p}^\chi_{i+1}(\alpha)$（并且，如果 $\alpha\notin\mathrm{supp}(\dot{p}^\chi_{i+1})$，我们假设玩家 I 选择 $1\!\!1_{\dot{\mathbb{Q}}_\alpha}$）。令 $\dot{s}(\alpha)$为 $\dot{s}\restriction\alpha$ 所迫使的条件，即玩家 II 按照 $\dot{\tau}_\alpha$进行时的应对。由于 α 是严格大于 α_{i+1} 的不可达基数（尤其是$\alpha>\chi$），策略 $\dot{\tau}_\alpha$ 确保玩家 II 在上述博弈进行过程中每个阶段都能作出有效应对（回想一下，$\dot{\tau}_\alpha$ 见证了 $\mathbb{Q}_\alpha$ 是 α-策略闭的）。至此，条件 $\dot{s}$的定义完成。由于 $\chi<\mathrm{min}(I\setminus(\alpha_{i+1}+1))$，$\mathrm{supp}(\dot{s})$被迫在 $I\setminus(\alpha_{i+1}+1)$的不可达基数中是非平稳的，因此 $\dot{s}\in\mathbb{P}\setminus(\alpha_{i+1}+1)$。不难验证，它满足上述子句（3）中的要求。

因此，剩下的就是构造序列 $\langle\dot{p}^\beta_{i+1}\colon\ \beta\leq\chi\rangle$。

我们首先描述如何选取条件 $\dot{p}^0_{i+1}$。为此，选取一个条件 $q'\leq q_0{}^\frown(p_i\setminus(\alpha_{i+1}+1))$，使得 $q'\in d(\alpha_{i+1})$。定义 $\dot{p}^0_{i+1}$，使得支撑$(\dot{p}^0_{i+1})=$支撑(q')，并且对每一个$\alpha\in$支撑$(\dot{p}^0_{i+1})$，$\dot{p}^0_{i+1}\restriction\alpha$ 力迫 $\dot{p}^0_{i+1}(\alpha)$ 是一个名称，对应于在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$ 中玩家 I 于其第一步选取 $q'(\alpha)$ 之后，由 $\dot{\tau}_\alpha$指定给玩家 II 的回应。

[8] 事实上，刚刚给出的论证表明，对于每个 $\alpha<\kappa$，力迫 $\mathbb{P}\setminus(\alpha+1)$ 都是 $\mathrm{min}(I\setminus(\alpha+1)$-策略闭的。

现假设 $\beta \leq \chi$ 与 $\langle \dot{p}^{\gamma}_{i+1} \colon \gamma < \beta \rangle$ 已经定义。令 $\dot{t} \in \mathbb{P} \setminus (\alpha_{i+1}+1)$ 按如下方式归纳构造：对每一个 $\alpha \in (\alpha_{i+1}, \kappa)$，若 $\dot{t} \restriction \alpha$ 已被定义，则它力迫 $\dot{t}(\alpha)$ 是策略 $\dot{\tau}_\alpha$ 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$ 的一次进行中指定给玩家 II 的一步，其中玩家 II 的各步为 $\langle \dot{p}^{\gamma}_{i+1}(\alpha) \colon \gamma < \beta,\ \alpha \in \text{支撑}(\dot{p}^{\gamma}_{i+1}) \rangle$。注意，如此构造的条件 $\dot{t} \in \mathbb{P} \setminus (\alpha_{i+1}+1)$ 被 $p_{i+1} \restriction (\alpha_{i+1}+1)$ 力迫为 $\langle \dot{p}^{\gamma}_{i+1} \colon \gamma < \beta \rangle$ 的一个下界。选取一个扩张 $q' \leq (q_\gamma)^\frown \dot{t}$，使得 $q' \in d(\alpha_{i+1})$。现令 $\dot{p}^{\beta}_{i+1} \in \mathbb{P} \setminus (\alpha_{i+1}+1)$ 满足：对每一个 $\alpha \in (\alpha_{i+1}+1, \kappa)$，$\dot{p}^{\beta}_{i+1} \restriction \alpha$ 力迫 $\dot{p}^{\beta}_{i+1}(\alpha)$ 是 $\dot{\tau}_\alpha$ 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$ 的如下一次进行中指定给玩家 II 的一步：该博弈始于玩家 II 的各步为 $\langle \dot{p}^{\gamma}_{i+1}(\alpha) \colon \gamma < \beta,\ \alpha \in \text{支撑}(\dot{p}^{\gamma}_{i+1}) \rangle^\frown \dot{t}(\alpha)$ 的那一次进行。然后玩家 I 以条件 $q'(\alpha)$ 回应，并且按照 $\dot{\tau}_\alpha$，玩家 II 在其下一回合的回应取为 $\dot{p}^{\beta}_{i+1}(\alpha)$。

至此完成了序列 $\langle \dot{p}^{\beta}_{i+1} \colon \beta \leq \chi \rangle$ 的归纳构造，因此条件 $\dot{s}$ 的构造也随之完成。

□

我们来说明，以这种方式构造的条件 p_{i+1} 确实具有非平稳支撑。固定一个不可达基数 $\lambda > \alpha_{i+1}$。我们断言，存在一个属于 V 的 λ 中的闭无界集，并且 $p_{i+1} \restriction (\alpha_{i+1}+1)$ 强制它与 $\text{supp}(p_{i+1} \setminus (\alpha_{i+1}+1))$ 不相交。事实上，存在一个 $\mathbb{P} \restriction (\alpha_{i+1}+1)$-名称 D，表示 λ 中一个与 $\text{supp}(p_{i+1} \setminus (\alpha_{i+1}+1))$ 不相交的闭无界集。由于 $\mathbb{P} \restriction (\alpha_{i+1}+1)$ 相对于 λ 很小（尤其是，它满足 λ-c.c.），因此存在一个闭无界集 $D^* \in V$，使得 $p_{i+1} \restriction (\alpha_{i+1}+1)$ 强制 D^* 包含于 D；特别地，D^* 与 $\text{supp}(p_{i+1})$ 不相交。

最后，令 $C_{i+1} \subseteq C_i$ 为 V 中与 p_{i+1} 的支集不相交的 κ 的闭无界子集。至此，构造中的后继步骤完成。

对于构造中的极限步骤，假设对某个 $i < \kappa$，已经构造了 $\langle p_j,\ \alpha_j,\ C_j \colon j < i \rangle$。令 $\alpha_i = \sup_{j<i} \alpha_j$。我们定义 $p_i \in \mathbb{P}$，使得：

(1) $p_i \restriction \alpha_i = \bigcup_{j<i} p_j \restriction (\alpha_j+1)$。注意，该并是递增的；若 α_i 是不可达基数，则序列 $\langle \alpha_j \colon j < i \rangle$ 是 α_i 中的一个闭无界集，且与 $\text{supp}(p_i \restriction \alpha_i)$ 不相交。因此，$p_i \restriction \alpha_i \in \mathbb{P}_{\alpha_i}$。(2) $\alpha_i \notin \text{supp}(p_i)$。特别地，对于每个 $j < i$，$p_i \restriction (\alpha_i+1) \leq p_j \restriction (\alpha_i+1)$，因为 α_i 位于 $\text{supp}(p_j)$ 之外，而后者是 C_j 的一个极限点的支集。(3) $p_i \setminus (\alpha_i+1)$ 满足以下两个性质：(a) $p_i \setminus (\alpha_i+1)$ 被 $p_i \restriction (\alpha_i+1)$ 强制为 $\langle p_j \setminus (\alpha_i+1)$ 的一个公共扩张 $\dot{s} \colon j < i \rangle$，其中 $\{r \in \mathbb{P}_{\alpha_i+1} \colon r^\frown \dot{s} \in d(\alpha_i)\}$ 是 $p \restriction (\alpha_i+1)$ 以下的 $\mathbb{P}_{\alpha_i+1}$ 的一个稠密子集。(b) 对每个 $\alpha \in \text{supp}(p_i \setminus (\alpha_i+1))$，$p_i \restriction \alpha$ 强制：

$$\langle p_j(\alpha) \colon j \leq i, \alpha \in \text{supp}(p_j) \rangle$$

是玩家 II 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{Q}_\alpha)$ 的一次进行中的出招序列，其中玩家 II 按照 $\dot{\tau}_\alpha$ 进行游戏。

证明可以构造这样的 $\dot{s}$ 的方法与断言 2.2.1 的证明类似。注意，对于每个坐标 $\alpha > \alpha_i$，力迫 $\mathbb{Q}_\alpha$ 具有足够的策略闭性，以便选取局部下界。

最后，令 $p^* = \bigcup_{i<\kappa} p_i \restriction (\alpha_i+1)$。显然，对于每个不可达基数 $\lambda < \kappa$，$\text{supp}(p^*) \cap \lambda$ 在 λ 中是非平稳的。此外，$\text{supp}(p^*)$ 在 κ 中也是非平稳的，其见证是闭无界集 $C = \langle \alpha_i \colon i < \kappa \rangle$。为完成引理 2.2 的证明，我们需要验证以下内容：

断言 2.2.2. 对于每个 $\alpha \in C$，

$$\{r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} \colon r^\frown (p^* \setminus \alpha+1) \in d(\alpha)\}$$

在 $\mathbb{P}_{\alpha+1}$ 中低于 $p^* \restriction (\alpha+1)$ 的部分是稠密的。

断言的证明。设 $\alpha \in C$。我们的归纳构造确保

$$D = \{r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} \colon r \leq p_\alpha \restriction (\alpha+1) \ \wedge\ r^\frown p_\alpha \setminus (\alpha+1) \in d(\alpha)\}$$

在 $p_\alpha \restriction (\alpha+1) = p^* \restriction (\alpha+1)$ 以下是稠密的。

设 $r \in D$ 为任意的。由于 $p^* \leq p_\alpha$，特别地，

$$p^* \restriction (\alpha+1) \Vdash p^* \setminus (\alpha+1) \leq p_\alpha \setminus (\alpha+1).$$

但这样一来 $r^\frown p^* \setminus (\alpha+1) \leq r^\frown p_\alpha \setminus (\alpha+1)$，从而得到

$$D \subseteq \{r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} : r \leq p^* \restriction (\alpha+1) \wedge r^\frown p^* \setminus (\alpha+1) \in d(\alpha)\},$$

因此后者在 $p^* \restriction (\alpha+1)$。之下是稠密的 □

至此，引理 2.2 的证明完成。 □

引理 2.3. 设 $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ 是满足引理 *2.2* 之假设的 I-间隔非平稳支撑迭代。假设广义连续统假设，并设对每个 $\alpha \in I$，$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 被 $\mathbb{P}_\alpha$力迫为一个保持基数的强迫概念。则下列结论成立：

(1) $\mathbb{P}$保基数。*(2)* 此外，假设对于每个 $\alpha \in I$，$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 都被 $\mathbb{P}_\alpha$ 强迫为一个保广义连续统假设的强迫概念。那么 $\mathbb{P}$ 保广义连续统假设。

证明。我们先证明条款（1）。由广义连续统假设，$|\mathbb{P}| = \kappa^+$。特别地，对于每个 $\lambda \geq \kappa^{++}$，λ 仍是一个基数。κ^+ 仍是一个基数这一事实可由以下断言推出，该断言依赖于前面的融合引理：

断言 2.3.1。设 $\dot{f}$ 是一个 $\mathbb{P}$-名称，且 $1\!\!1 \Vdash_{\mathbb{P}}$ “$\dot{f} : \kappa \to \kappa^+$ 是一个递增函数”。那么，集合 $\{p \in \mathbb{P} : \exists \alpha < \kappa^+ \, (p \Vdash_{\mathbb{P}} \mathrm{Im}(\dot{f}) \subseteq \alpha)\}$ 是稠密的。

特别地，使用 $\mathbb{P}$ 进行强迫会保 κ^+。

断言的证明。令 $\langle d(\alpha) : \alpha < \kappa \rangle$ 为 $\mathbb{P}$ 的稠密开子集序列，其中每个 $d(\alpha)$ 由所有决定 $\dot{f}(\alpha)$ 取值的条件 $p \in \mathbb{P}$ 组成。由引理 2.2，每个条件都可以扩展为条件 p，使得存在一个闭无界集 $C \subseteq \kappa$，对于每个 $\alpha \in C$，

$$\{r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} : r^\frown (p \setminus \alpha+1) \in d(\alpha)\}$$

在 $p \restriction (\alpha+1)$ 下稠密。特别地，令

$$\gamma = \sup\{\beta < \kappa^+ : \exists \alpha \in C \; \exists r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} \; \Big(r^\frown (p \setminus \alpha+1) \Vdash \dot{f}(\alpha) < \beta\Big)\}.$$

于是 $\gamma < \kappa^+$（因为 $|\mathbb{P}_{\alpha+1}| < \kappa$），显然 $p \Vdash \mathrm{Im}(\dot{f}) \subseteq \gamma$。 □

为了证明 $\mathbb{P}$ 保持 κ，只需证明 $\mathbb{P}$ 保持所有基数 $\lambda < \kappa$。反设不然，令 $\lambda < \kappa$ 为被 $\mathbb{P}$ 压缩的最小基数。分解 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\lambda * \dot{\mathbb{Q}}_\lambda * \dot{\mathbb{P}} \setminus (\lambda+1)$。由于 $\dot{\mathbb{Q}}_\lambda$ 保持基数，且 $\dot{\mathbb{P}} \setminus (\lambda+1)$ 是 λ^+-分配的（参见命题 2.15.1 的证明），力迫 $\mathbb{P}_\lambda$ 会压缩 λ。由上一段的论证，λ 不可能是后继基数；这意味着 λ 是极限基数，与其是被 $\mathbb{P}$ 压缩的最小基数这一假设矛盾。

接下来讨论子句（2）。设 λ 是一个基数[9]，并将迭代分解为 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\lambda * \dot{\mathbb{Q}}_\lambda * \dot{\mathbb{P}} \setminus (\lambda+1)$。在基模型中，“$2^\lambda = \lambda^+$”成立，因此若 $\mathbb{P}_\lambda$ 保留这一事实，我们便大功告成了——事实上，$\dot{\mathbb{Q}}_\lambda$ 被迫保留广义连续统假设，而 $\dot{\mathbb{P}} \setminus (\lambda+1)$ 是 λ^+-分配的，所以它们都不会改变基模型中 λ 处的幂集函数模式。我们通过对 λ 进行归纳，证明 $\mathbb{P}_\lambda$ 保留“$2^\lambda = \lambda^+$”。假设对于每个 V-基数 $\beta < \lambda$，力迫 $\mathbb{P}_\beta$ 都会保留 β处的广义连续统假设。我们将证明，给定任意泛型 $G_\lambda \subseteq \mathbb{P}_\lambda$ 和集合 $X \in \mathcal{P}^{V[G_\lambda]}(\lambda)$，存在一个闭无界集 $C \in \mathrm{Cub}_\lambda^V$以及一个序列 $\langle X_\beta \mid \beta \in C \rangle \in \prod_{\beta \in C} \mathcal{P}^{V[G_\beta]}(\beta)$，使得 $X = \bigcup_{\beta \in C} X_\beta$.[10] 注意，这个序列集合的大小为 $(2^\lambda)^V = \lambda^+$：为说明这一点，注意每个序列 $\langle X_\beta \mid \beta \in C \rangle$ 都来自一个（部分） λ-序列，其中包含 $\mathbb{P}_\beta$ 个针对 τ_β 的好名称，每个名称都命名了 β 的一个子集。由于对于其中每个 β，

[9]注意，根据前面的观察，这里不存在歧义。[10]在 λ 为 V-奇异的情况下，C 将改为序数余终数 $^V(\lambda)$。

$\tau_\beta \in V_\lambda$，我们得出结论：此类名称序列至多有 $|{}^\lambda V_\lambda|^V = \lambda^+$个，因此序列 $\langle X_\beta \mid \beta \in C\rangle$至多有 λ^+ 个，进而 $X \in \mathcal{P}^{V[G]}(\lambda)$至多有 λ^+个。[11]

情形 λ 是正则的： 设 $X \in \mathcal{P}^{V[G_\lambda]}(\lambda)$。不失一般性，假设这是由平凡条件强迫的。对于每个 $\beta < \lambda$，令

$$d(\beta) := \{p \in \mathbb{P}_\lambda : p \restriction \beta + 1 \Vdash_{\mathbb{P}_{\beta+1}} \exists \dot{X}_\beta \subseteq \beta\ (p \setminus (\beta+1) \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda/\dot{G}_{\beta+1}} \dot{X} \cap \beta = \dot{X}_\beta)\}.$$

显然，这个集合是开的；根据引理中的假设，$\mathbb{P}_\lambda/\dot{G}_{\beta+1}$ 被强迫为 β^+-策略闭的，因此该集合也是稠密的。

应用引理 2.2，我们得到一个条件 p^* 和一个闭无界集 $C \subseteq \alpha$，使得对于每个 $\beta \in C$，集合 $e(\beta) := \{r \in \mathbb{P}_{\beta+1} \mid r^\frown p^* \setminus (\beta+1) \in d(\beta)\}$ 在 $p^* \restriction (\beta+1)$ 以下稠密。由于这样的条件有 $\mathbb{P}_\lambda$- 稠密多个，我们可以假设 $p^* \in G_\lambda$。现在，对于每个 $\beta \in C$ 和 $r \in e(\beta)$，我们调用强迫极大性原理，取 $\dot{X}_{\beta,\, r}$ 一个 $\mathbb{P}_{\beta+1}$-名称，以见证 $r \in e(\beta)$。现在我们将这些名称合并为一个 $\mathbb{P}_{\beta+1}$-名称，取

$$\dot{X}_\beta := \{\langle \dot{X}_{\beta,r}, r\rangle : r \in e(\beta)\}.$$

显然，$p^* \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \dot{X}_\beta \subseteq \dot{X} \cap \beta$。[12] 为证明反向结论，设 $\gamma < \beta$ 和 $s \le p^*$ 力迫“$\gamma \in \dot{X} \cap \beta$”。由 $e(\beta)$ 的稠密性，我们可以假设 $s \restriction (\beta+1) \in e(\beta)$。因此，$(s \restriction \beta+1)^\frown p^* \setminus (\beta+1) \in d(\beta)$，于是后者必然力迫“$\gamma \in \dot{X}_{\beta,\, s\restriction(\beta+1)} \subseteq \dot{X}_\beta$”，因此更强的条件 s 也同样力迫该命题。由稠密性论证可知，$p^* \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \dot{X} \cap \beta \subseteq \dot{X}_\beta$，正如所需。

情形 λ 在 V中是奇异的： 我们考虑 λ 是 $I \cap \lambda$ 中元素的极限的情形——特别地，λ 在 V 中是强极限。若 λ 不是 $I \cap \lambda$ 中元素的极限，情形则较为简单，因为此时 $\mathbb{P}_\lambda$ 与偏序集 $\mathbb{P}_\gamma$ 强迫等价，其中 $\gamma = \sup(I \cap \lambda) < \lambda$；而通过通常的良名称论证以及 V 中的广义连续统假设，后者至多添加 λ^+ 个子集到 λ。

记作 $\zeta = \mathrm{cf}(\lambda)$。考虑力迫 $\mathbb{P}_\lambda \setminus (\zeta+1)$。它是 ζ^+-策略闭的。固定 $\langle \lambda_\alpha : \alpha < \zeta\rangle$在 λ 中的一个递增共尾序列，使得 $\lambda_0 > \zeta$。对于每个 $\alpha < \zeta$，在 $V[G_\lambda]$中，考虑

$$d(\alpha) = \{q \in \mathbb{P}_\lambda/G_{\lambda_\alpha+1} : \exists A \subseteq \lambda_\alpha (q \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda/G_{\lambda_\alpha+1}} \dot{X} \cap \lambda_\alpha = \dot{A})\}.$$

每个 $d(\alpha)$ 都是 $\mathbb{P}_\lambda/G_{\lambda_\alpha+1}$ 的一个稠密开子集，因此集合

$$D(\alpha) = \{r \in \mathbb{P}_\lambda/G_{\zeta+1} : r \restriction \lambda_\alpha + 1 \Vdash \exists A_\alpha \subseteq \lambda_\alpha (r \setminus \lambda_\alpha + 1 \Vdash \dot{X} \cap \lambda_\alpha = A_\alpha)\}$$

在 $\mathbb{P}_\lambda/G_{\zeta+1}$ 中是稠密开集。这对每个 $\alpha < \zeta$ 都成立。

由于 $\mathbb{P}_\lambda/G_{\zeta+1}$ 是 ζ^+-策略闭的，交集 $D^* = \bigcap_{\alpha<\zeta} D_\alpha$ 在 $\mathbb{P}_\lambda/G_{\zeta+1}$ 中稠密。在 $V[G_{\zeta+1}]$ 中工作。若 $q \in \mathbb{P}_\lambda/G_{\zeta+1}$ 是交集 D^* 中的一个条件，那么 q 携带一个序列 $\langle A_\alpha : \alpha < \zeta\rangle$，其中每个 A_α 都是一个以 λ_α 的子集为值的 $\mathbb{P}_{\lambda_\alpha+1}/G_{\zeta+1}$-名称，而 q 基本上将名称 $\dot{X}$ 约化为序列 $\langle A_\alpha : \alpha < \zeta\rangle$；也就是说，$q \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda/G_{\zeta+1}} \dot{A}_\alpha = \dot{X} \cap \lambda_\alpha$。

上述结果表明，$V[G_\lambda]$ 中 λ 的子集数量不超过 $V[G_{\zeta+1}]$中序列 $(V_\lambda)^\zeta$ 的数量。标准的 $\mathbb{P}_{\zeta+1}$-良名称论证表明，这个集合的基数不超过

$$\left(|(V_\lambda)^\zeta|^{|\mathbb{P}_{\zeta+1}|}\right)^V \le |{}^{<\lambda}V_\lambda|^V = |\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}|^V = \lambda^+.$$

这就完成了该引理的证明。

□

为便于后续分析，我们也记录下面这个技术性事实的证明：

[11] 当 λ 是 V-奇异时，我们将得到一个由 V_λ中的元素构成的 $\mathrm{cf}^V(\lambda)$-序列；无论哪种情况，根据基模型中的广义连续统假设，其大小都是 λ^+。[12] 当然，这里我们将 $\dot{X}_\beta$ 与其自然提升到 $\mathbb{P}_\lambda$-名称的结果视为相同。

引理 2.4. 设 $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ 是一个满足引理 *2.2* 的假设的 I-间隔非平稳支撑迭代。设 $f : \kappa \to$ 序数类 是某个条件$p \in \mathbb{P}$所迫使的函数的一个 $\mathbb{P}$-名称。那么，存在 $p^* \leq p$、一个闭无界集 $C \subseteq \kappa$ 和一个函数 $F : \kappa \to V$，使得对每个 $\alpha \in C$，都有 $|F(\alpha)| \leq |\mathbb{P}_{\alpha+1}|^V$，并且 $p^* \Vdash \forall \alpha \in \check{C}(\dot{f}(\alpha) \in \check{F}(\alpha))$。

证明。对于每个 $\alpha < \kappa$，令 $d(\alpha) := \{q \in \mathbb{P} \mid q \perp p \vee (\exists \beta\ q \Vdash \dot{f}(\alpha) = \beta)\}$。这是 $\mathbb{P}$ 的一个稠密开子集。根据融合引理 2.2，存在 $p^* \leq^* p$ 和一个闭无界集 $C \subseteq \kappa$，使得对于所有 $\alpha \in C$，$e(\alpha) := \{r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} \mid r^\frown p^* \setminus (\alpha+1) \in d(\alpha)\}$ 在 $p^* \restriction (\alpha+1)$ 以下稠密。考虑 F：定义 $C \to V$ 为

$$F : \alpha \mapsto \{\beta_r \mid r \in e(\alpha), r \leq p^* \restriction (\alpha+1), r^\frown p^* \setminus (\alpha+1) \Vdash \dot{f}(\alpha) = \beta_r\}.$$

显然，F 正是所需的。 □

回忆一下，初等嵌入 $j : V \to M$ 若称为一个 扩张子超幂嵌入，则意味着存在一个扩张子 E，使得 j 是由 E所诱导的超幂嵌入，j_E。关于扩张子的完整理论概述，读者可参阅 Kanamori 的著作 [26]。引理 2.2 的一个重要推论是扩张子超幂嵌入的提升：

引理 2.5. 设 $I \subseteq \kappa$ 是由不可达基数组成的平稳集，且 $j : V \to M$ 是一个扩张子超幂嵌入，满足 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$，并具有以下性质：

($\aleph$) $V \vDash {}^{\kappa}M \subseteq M$。($\beth$) j 的生成元有界于 $j(h)(\kappa)$ 之下，对某个函数 $h : \kappa \to \kappa$ 而言，该函数满足 $j(h)(\kappa) < \min(j(I) \setminus \kappa + 1)$。

设 $\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ 是一个长度为 κ 的 I-间隔非平稳支撑迭代，满足引理 *2.2* 的假设。设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 在 V 上泛型。记 $\dot{\mathbb{Q}}_\kappa = j\left(\langle \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha < \kappa \rangle\right)(\kappa)$。那么：

(1) $j(\mathbb{P})_\kappa = \mathbb{P}$，且 $G \subseteq \mathbb{P}$ 在 M 上泛型。*(2)* 在 $V[G]$ 中，设 $\mathbb{Q}_\kappa = (\mathbb{Q}_\kappa)_G$。若 $g \subseteq \mathbb{Q}_\kappa$ 在 $V[G]$ 上泛型，则 g 是 $M[G]$ 上的 $\mathbb{Q}_\kappa$-泛型。*(3)* $j[G] \setminus \kappa + 1$ 在 $M[G * g]$ 上生成一个 $j(\mathbb{P}) \setminus \kappa + 1$-泛集；也就是说，

$$H = \{q \in j(\mathbb{P}) \setminus \kappa + 1 : \exists p \in G\ (q \geq j(p) \setminus \kappa + 1)\}.$$

特别地，$j : V \to M$提升为一个嵌入 $j^* : V[G] \to M[G * g * H]$，它在$V[G * g]$中是可定义的。此外，如果对每个 $\alpha \in I$，力迫 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 是 α^+-*c.c.* 或 α^+-闭的，那么$M[G * g * H]$ 在 $V[G * g]$ 中对 κ-序列封闭。

证明。对于条款（1），注意到对每个 $\alpha < \kappa$，$\mathbb{P}_\alpha \in V_\kappa$。因此，$j(\mathbb{P})_\kappa$ 在 M之上是 $\langle \mathbb{P}_\alpha$ 的非平稳支撑极限：$\alpha < \kappa \rangle$。直到 κ 为止的非平稳支撑极限在 M 中计算正确，因为 M 对其元素中属于 V 的 κ-序列封闭。

子句（2）成立，因为 $M[G] \subseteq V[G]$。

对于子句（3），假设 $E \subseteq j(\mathbb{P}) \setminus \kappa + 1$ 是一个 $\mathbb{P}_\kappa * \dot{\mathbb{Q}}_\kappa$-名称，表示$j(\mathbb{P}) \setminus \kappa + 1$ 的一个稠密开子集。将 $E = j(f)(a)$ 写作某个生成元集合 $a \in [j(h)(\kappa)]^{<\omega}$ 以及某个 $f : [\kappa]^{|a|} \to V$。我们可以假设 $\kappa = \min(a)$，并且对每个 $\vec{\nu} \in \mathrm{dom}(f)$，$f(\nu)$ 都是一个 $\mathbb{P}_{\min(\vec{\nu})+1}$-名称，表示 $\mathbb{P} \setminus (\min(\vec{\nu}) + 1)$ 的稠密开子集。对每个 $\alpha < \kappa$，定义

$$d(\alpha) = \{q \in \mathbb{P} : q \restriction \alpha \Vdash \forall \vec{\nu} \in [h(\alpha)]^{|a|}\ (q \setminus \alpha + 1 \in f(\vec{\nu}))\}.$$

我们断言 $d(\alpha)$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个稠密开子集。为此，只需证明 $\mathbb{P} \setminus (\alpha + 1)$ 被迫为 $|h(\alpha)|^+$-分配的。事实上，$\mathbb{P} \setminus (\alpha + 1)$ 被迫为 $\min(I) \setminus (\alpha + 1)$-策略闭；这是由以下事实综合得出的：该迭代是相对于一个I-间隔的非平稳支撑进行的，并且对于每个活跃强迫阶段 $\beta \in I \setminus (\alpha + 1)$，$\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ 都被迫为 β-策略闭（类似论证见断言 2.2.1 的证明）。

根据引理 2.2，存在 $p \in G$ 和一个闭无界集 $C \subseteq \kappa$，使得对每一个 $\alpha \in C$，

$$\{r \in \mathbb{P}_{\alpha+1} : r^\frown p \setminus (\alpha + 1) \in d(\alpha)\}$$

在 $p\restriction(\alpha+1)$ 之下是稠密的。显然由此可得

$$p\restriction\alpha+1\Vdash\forall\vec{\nu}\in[h(\alpha)]^{|\alpha|}\ (p\setminus(\alpha+1)\in f(\vec{\nu})).$$

由于 $\mathbb{P}$ 是 $\langle\mathbb{P}_\alpha$ 的非平稳支撑极限：$\alpha<\kappa\rangle$，必要时通过缩小闭无界集 C，我们可以假设它与 $\mathrm{supp}(p)$ 不相交。由于 $C\subseteq\kappa$ 是一个闭无界集，我们有 $\kappa\in j(C)$。因此，$j(p)\restriction\kappa+1=p^\frown\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\kappa}\in G*g$，从而，在 $V[G*g]$ 中，

$$j(p)\setminus\kappa+1\in j(f)(a)_{G*g}=(E)_{G*g}$$

如所需。

由于每个 $p\in G$ 都具有非平稳支撑，而 H 由 $j[G]\setminus\kappa+1$ 生成，我们有 $j[G]\subseteq G*g*H$。根据 Silver提升准则，j 可提升为初等嵌入 $j^*\colon\ V[G]\to M[G*g*H]$。

最后，假设对于每个 $\alpha\in I$，$\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha}$“$\mathbb{Q}_\alpha$ 是 $\alpha^+-c.c.$”。我们论证 $M[G*g*H]$ 在 $V[G*g]$ 中对 κ-序列封闭。

命题 2.5.1. $M[G]$ 在 $V[G]$ 中对 κ-序列封闭。

证明。假设 $f\colon\kappa\to\mathrm{Ord}$ 是 $V[G]$ 中的一个序列。令 f 为它的一个 $\mathbb{P}$-名称。由引理 2.2，存在 $p\in G$ 和一个闭无界集 $C\subseteq\kappa$，使得对每个 $\alpha\in C$，

$$p\restriction\alpha+1\Vdash\exists g_\alpha\in(Ord)^\alpha\ (p\setminus\alpha+1\Vdash f\restriction\alpha=g_\alpha).$$

这是因为 力迫 $\mathbb{P}\setminus(\alpha+1)$ 是 α^+-策略闭的，因此集合

$$d(\alpha)=\{q\in\mathbb{P}\setminus\alpha+1\colon q\ \mathrm{decides}\ \dot{f}\restriction\alpha\}$$

是稠密开集。

接下来，对每个 $\alpha\in C$，固定一个 $\mathbb{P}_{\alpha+1}$-名称 $\dot{g}_\alpha$，它被 $p\restriction_{\alpha+1}$ 迫使等于上述集合 $g_\alpha\in V^{\mathbb{P}_\alpha}$。由于 M 在 V 中对 κ-序列封闭，$\langle\dot{g}_\alpha\colon\alpha\in C\rangle\in M$。因此，$(f)_G$可以在 $M[G]$ 内由 G和 $\langle\dot{g}_\alpha$重构为如下并集

$$\bigcup_{\alpha\in C}(g_\alpha)_{G\restriction\alpha+1}.$$

至此，该断言的证明完毕。 □

接下来，我们论证 $M[G*g]$ 对 κ-序列于 $V[G*g]$中封闭。这是显然的，若 $\mathbb{Q}_\kappa$ 是κ^+-链条件或 κ^+-闭于 $V[G]$ （对于 κ^+-链条件情形，见 [13, 命题 8.4]）。进而，这两个性质中的任一者在 $V[G]$ 中成立，因为 $M[G]$ 对 κ-序列于 $V[G]$中封闭，以及 $\mathbb{Q}_\kappa$ 要么是 κ^+-链条件，要么 κ^+-闭于 $M[G]$，此依我们的假设。

最后，$M[G*g*H]$ 对 κ-序列于 $V[G*g]$ 中封闭这一事实，直接由 $M[G*g]$ 对 κ-序列于 $V[G*g]$中封闭这一事实得出。□

在结束这一预备部分时，我们提及两个将对我们的强迫分析起关键作用的定理。第一个是 Laver 的基模型可定义性定理，第二个是 Hamkins 的间隙力迫定理。

定理 2.6（Laver 地基模型可定义性定理 [33]）。设 $\mathbb{P}\in V$ 是一个强迫概念，且 $G\subseteq\mathbb{P}$ 在 V 上是泛型的。那么，V 是 $V[G]$ 的一个可定义类，其参数来自 V。

定理2.7（Hamkins 间隙强迫定理 [22]）。设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，它在某个基数 δ 处具有间隙；也就是说，$\mathbb{P}$ 可以分解为 $\mathbb{P}=\mathbb{P}_0*\mathbb{P}_1$ 的形式，其中 $\mathbb{P}_0$ 是非平凡的，$|\mathbb{P}_0|<\delta$，且 $\Vdash_{\mathbb{P}_0}$“$\mathbb{P}_1$ 是（$\delta+1$）策略闭的。”令 $G\subseteq\mathbb{P}$ 在 V 上是泛型的，并假设$j^*\colon\ V[G]\to M^*$ 是一个临界点为 $\kappa>\delta$ 的初等嵌入，使得 $M^*\subseteq V[G]$，并且M^* 对属于 $V[G]$ 的其元素的 δ-序列封闭。那么：

(1) M^*具有 $M[H]$ 的形式，其中 $M\subseteq V$ 和 $H=j^*(G)$ 在 M 上是 $j^*(\mathbb{P})$-泛型。此外，$M=V\cap M[H]$。*(2)* 如果 j^* 可由参数在 $V[G]$ 中定义，那么 $j=j^*\restriction V\colon\ V\to M$ 可由参数在 V 中定义。

2.2. **分裂强迫**。 本节概述一种分裂强迫的变体，以备后用；该变体由第二位作者在 [28].

在本节余下部分中，我们固定一个可测基数 κ，并对每个 $\eta < \kappa^+$，令 $f_\eta\colon \kappa \to \kappa$ 为第 η 个典范函数。[13] 为简化记号，我们也用 f_{κ^+} 表示函数 $f_{\kappa^+}\colon \alpha \mapsto |\alpha|^+$。

固定一个序数 $\tau < \kappa^+$ 和一个由不可达基数组成的平稳集 $I \subseteq \kappa$。定义一个I-间隔的非平稳支撑迭代

$$\mathbb{P}^{\tau,I} = \langle \mathbb{P}^\tau_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}^\tau_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle,$$

其中，对每个 $\alpha < \kappa$，我们区分以下几种情况：

- 若 $\alpha \in I$，则 $\mathbb{P}^\tau_\alpha$ 强迫 $\mathbb{Q}^\tau_\alpha$ 是形如以下形式的原子强迫

$$\{\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\alpha}\} \cup f_\tau(\alpha),$$

  其中，$f_\tau(\alpha)$ 中的序数被指定为 $\mathbb{Q}^\tau_\alpha$ 中的一个反链。
- 否则，$\mathbb{Q}^\tau_\alpha$ 被 $\mathbb{P}^\tau_\alpha$ 力迫为平凡的。

给定在 V上泛型的 $G \subseteq \mathbb{P}^{\tau,I}$，$\bigcup G$ 自然定义了 $\prod_{\alpha<\kappa} f_\tau(\alpha)$中的一个函数，它将每个 $\alpha < \kappa$ 映射到条件 $p \in G$ 所对应的唯一公共值 $p(\alpha) \in f_\tau(\alpha)$，其中 $\alpha \in \mathrm{supp}(p)$。注意，$\mathbb{P}^{\tau,\,I}$ 满足引理 2.2 的 (1)–(3)。特别地，只要给出一个适当的扩张子超幂 $j\colon V \to M$，引理 2.5 就适用于 $\mathbb{P}^{\tau,\,I}$。此外，$\mathbb{P}^{\tau,\,I}$在任何足够大的、位于 κ以下的不可达基数的后继基数处都有间隙。

下面的定理是 [28]的一项主要结果的变体。

定理 2.8。 假设 κ 是一个可测基数，且 $I \subseteq \kappa$ 是一个不可达基数的平稳集。令 $\tau \leq \kappa^+$ 和 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\tau,\,I}$ 为上述力迫。则有以下结论：

(1) $\mathbb{P}$ 同时保持 κ 和 κ^+ 为基数，并且还保持 κ的可测性。假设 广义连续统假设，$\mathbb{P}$保持基数。*(2)* 对于每个定义在 κ上的正规测度 $U \in V$，*(a)* 若 $I \in U$，则存在 τ个不同的将 U提升为 $V[G]$中定义在 κ上的正规测度的方式，$\langle U^*_\eta\colon \eta < \tau\rangle$，其中，对于每个 $\eta < \kappa$，U^*_η在 $V[G]$ 中由 $U \cup \{S_\eta\}$生成，其中

$$S_\eta = \{\alpha < \kappa\colon \left(\bigcup G\right)(\alpha) = f_\eta(\alpha)\}.$$

(b) 若 $I \notin U$，则 U在 $V[G]$中生成一个定义在 κ上的正规测度 $U^* \in V[G]$。

(3) 对于每个定义在 κ上的正规测度 $W \in V[G]$，

(a) 若 $I \in W$，则存在 $U \in V$满足 $I \in U$，以及某个 $\eta < \tau$，使得 $W = U^*_\eta$。*(b)* 若 $I \notin W$，则存在 $U \in V$，使得 $I \notin U$且 $W = U^*$。

注记 2.9. 一个特别值得关注的情形是，当 I 为 κ之下所有不可达基数的集合时。在这种情况下，分裂强迫产生一个泛型扩张，其中 κ上的每一个正规测度都具有形式 U^*_η，其中 $U \in V$是 κ上的某个正规测度，并且 $\eta < \tau$。特别地，如果基模型在 κ 上带有唯一正规测度（例如，基模型为 $L[U]$），则该泛型扩张在 κ上恰好有 τ 个正规测度。这为Friedman-Magidor定理（[14]）提供了另一种证明，表明：从可测基数出发可以一致地得到，对每一个 $\tau \leq \kappa^{++}$，都存在一个带有 τ 个正规测度的可测基数 κ。[14]

引理 2.10. 设 $j\colon V \to M$ 是满足引理 *2.5*之假设的初等嵌入。假设 $\tau \leq \kappa^+$，并令 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\tau,I}$。假设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 相对于 V是泛型的。则：

(1) 如果 $\kappa \in j(I)$，j 恰好有 τ 种方式提升到 $V[G]$。也就是说，*(a)* 对每个 $\eta < \tau$，都存在一个在 M 上泛型的 $H_\eta \subseteq j(\mathbb{P})$，以及一个初等嵌入$j^*_\eta\colon V[G] \to M[H_\eta]$，它扩展了 j。

[13]关于 $\langle f_\eta$的显式定义：$\eta < \kappa^+\rangle$ 我们请读者参阅 [25, 引理24.5]。[14]情形 $\tau = \kappa^{++}$ 由 Kunen-Paris定理得出（见 [31]）。

(b) 每个扩展 j 的初等嵌入 $j'\colon V[G]\to M'$ 都具有 j^*_η 的形式，其中 $\eta<\tau$（特别地，$M'=M[H_\eta]$）。

(2) 如果 $\kappa\notin j(I)$，则 j 可唯一提升至 $V[G]$。也就是说，*(a)* 存在 $H\subseteq j(\mathbb{P})$，其在 M 上是泛型的，以及一个初等嵌入 $j^*_\eta\colon V[G]\to M[H]$，它扩展了 j。*(b)* 每个扩展 j 的初等嵌入 $j'\colon V[G]\to M'$ 都等于 j^*（特别地，$M'=M[H]$）。

证明。我们依次验证所有条款。

(1a)：每个 $\eta<\tau$ 都定义了偏序集 $\mathbb{Q}_\kappa=j(\langle\mathbb{Q}_\alpha\colon\alpha<\kappa\rangle)(\kappa)$上的 $V[G]$-泛集 g_η。因此，根据引理 2.5，j 可提升至 $j^*_\tau\colon V[G]\to M[H_\eta]$，其中 $H_\eta=G*g_\eta*(j[G]\setminus\kappa+1)$。

(1b)：根据 Laver 地基模型可定义性定理（定理 2.6），$H=j'(G)$在 $j'(V)$和 $j[G]\subseteq H$上是 $j(\mathbb{P})$-泛型的。

这里，$j'(V)$指的是在 M' 中可定义的类：使用与在$V[G]$内部定义 V相同的公式，并将 j' 应用于公式中出现的参数。我们证明 $j'(V)=M$。给定一个序数 $\alpha\in\mathrm{Im}(j)$，写作 $\alpha=j(\beta)=j'(\beta)$，其中 β是某个序数，并注意到$(V_\alpha)^{j'(V)}=j'(V_\beta)$，因为 V_β 是基模型 V中 $V[G]$的第 β个秩初始片段。由于 $j'\supseteq j$，$(V_\alpha)^{j'(V)}=j(V_\beta)$。由此可得

$$j'(V)=\bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}}(V_\alpha)^{j'(V)}=\bigcup_{\beta\in\mathrm{Ord}}j(V_\beta)=M.\text{[15]}$$

最后，设 $\eta=j'(G)(\kappa)$。那么 $\eta<j(f_\tau)(\kappa)=\tau$，且 $H_\eta\subseteq H$。因此，根据泛型滤子的极大性，$H=H_\eta$。所以，$j'=j^*_\eta$。

(2a)：注意，当 $\kappa\notin j(I)$时，$\mathbb{Q}_\kappa=j(\langle\mathbb{Q}_\alpha\colon\alpha<\kappa\rangle)(\kappa)$是平凡力迫。特别地，根据引理 2.5，$j[G]$ 生成一个在 M上泛型于 $j(\mathbb{P})$的 $H\subseteq j(\mathbb{P})$集，且 j 提升到$j^*\colon V[G]\to M[H]$。

(2b)：与条款 (1b) 的证明一样，$j'(G)$ 是 $j'(V)$ 上的 $j(\mathbb{P})$-泛型，且包含 $j[G]$。由于 $j[G]$ 已经在 M 上生成了一个泛型 $H\subseteq j(\mathbb{P})$，我们可以推得 $j'(G)=H$、$M'=M[H]$和 $j'=j^*$。□

现在我们可以证明定理 2.8：

定理 *2.8* 的证明。我们依次证明各条款：

(1). 这已在引理 2.3 中证明——请注意，证明 κ 和 κ^+ 仍为基数，完全不依赖任何广义连续统假设。

(2). 给定 κ 上的一个正规测度 $U\in V$，令 $\langle j^*_\eta\colon\eta<\tau\rangle$ 为引理 2.10 中 j_{U_0} 的所有提升。对每个 $\eta<\tau$，令 U^*_η 为使用 κ 作为种子、由 j^*_η 导出的 κ 上的正规测度。于是每个 U^*_η 都是扩张 $U\cup\{S_\eta\}$ 的 κ 上的正规测度，其中

$$S_\eta=\{\alpha<\kappa\colon G(\alpha)=f_\eta(\alpha)\}.$$

事实上，对于每个 $\eta<\tau$，$U\cup\{S_\eta\}$在 $V[G]$中生成 U^*_η。确实，给定 $X\in U^*_\eta$，令 X为它的一个 $\mathbb{P}$-名称。由于 $X\in U^*_\eta$，存在 $q\in H_\eta$（其中 H_η如引理 2.10 中的记号所示），使得$q\Vdash\check\kappa\in j_{U_0}(X)$。然而，由于 $H_\eta=G*g_\eta*(j_{U_0}[G]\setminus\kappa+1)$，存在 $p\in G$ 使得

$$p^\frown\{\langle\kappa,\eta\rangle\}^\frown(j_{U_0}(p)\setminus\kappa+1)\Vdash\check\kappa\in j_{U_0}(\dot X).$$

特别地，

$$B=\{\alpha<\kappa\colon p\restriction\alpha^\frown\{\langle\alpha,f_\eta(\alpha)\rangle\}^\frown(p\setminus\alpha+1)\Vdash\check\alpha\in\dot X\}\in U.$$

因此，在 $V[G]$中，$B\cap S_\eta\subseteq X$。

(3). 现在我们来论证，每个正规测度 $W\in V[G]$ 都具有如下形式：U^*_η，其中$U\in V$和 $\eta<\tau$ 都是正规 W。给定这样的 j_W，记 $V[G]\to M^*$ 为它的超幂嵌入。由

[15]这里我们用到 j''序数类 Ord 是 Ord 的无界子类。

Hamkins 间隙强迫定理，$j_W \restriction V$ 在 V 中是可定义的，因为 $\mathbb{P}$ 在 κ 以下有一个间隙。记作 $U = W \cap V$。那么 $U \in V$，因为在 V 中，$U = \{X \subseteq \kappa\colon\ \kappa \in (j_W \restriction V)(X)\}$。接下来，记 $\eta = j_W(G)(\kappa)$。于是，由 W 的正规性，$\eta < \tau$ 且 $S_\eta \in W$。由此可得 $U \cup \{S_\eta\} \subseteq W$；又因为 U^*_η 由 $U \cup \{S_\eta\}$ 生成，所以 $W = U^*_\eta$。□

最后，我们论证分裂强迫保持 Mitchell 序。

引理2.11 (Mitchell序的保持)。设 $I \subseteq \kappa$、$\tau < \kappa^+$ 和 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\tau,\ I}$ 如定理 *2.8* 中所述。设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 在 V 上是泛型的。

(1) 假设 U_0、U_1 是 V 中 κ 上的正规测度。设 W_0、$W_1 \in V[G]$ 是 κ 上满足 $U_0 \subseteq W_0$ 和 $U_1 \subseteq W_1$ 的正规测度。那么，

$$V \vDash U_0 \lhd U_1 \iff V[G] \vDash W_0 \lhd W_1.$$

(2) 对于 κ、$U \in V$ 和 $W \in V[G]$ 上的正规测度，若 $U \subseteq W$，

$$(o(W))^{V[G]} = (o(U))^V.$$[16]

证明。子句（2）直接由子句（1）以及以下事实得出：V 中 κ 上的每个正规测度都提升为 $V[G]$ 中 κ 上的正规测度，而 $V[G]$ 中 κ 上的每个正规测度都是 V 中 κ 上某个正规测度的提升。因此，我们集中证明子句（1）。设 U_0，U_1，W_0，W_1 如上所述。我们首先论证

$$V \vDash U_0 \lhd U_1 \Longrightarrow V[G] \vDash W_0 \lhd W_1.$$

首先假设 $I \in U_0$，即 $W_0 = (U_0)^*_\eta$ 对于某个 $\eta < \tau$。由于 G 在 M_{U_1}上是 $\mathbb{P}$-泛型的，并且 $U_0 \in M_{U_1}$，$U_0 \cup \{S_\eta\}$ 在 $M_{U_1}[G]$中生成了一个正规测度 $\left((U_0)^*_\eta\right)^{M_{U_1}[G]}$。只需论证 $(U_0)^*_\eta = \left((U_0)^*_\eta\right)^{M_{U_1}[G]}$。为此，只需证明

$$(\mathcal{P}(\kappa))^{V[G]} = (\mathcal{P}(\kappa))^{M_{U_1}[G]}$$

因为这两个测度的基相同。

假设 $\dot{X} \in V[G]$ 是 κ的子集，并为其固定一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{X} \in V$。根据融合引理 2.2，我们可以找到 $p \in G$ 和一个闭无界集 $C \subseteq \kappa$，使得对于每个 $\alpha \in C$，

$$p \restriction (\alpha+1) \Vdash \exists X_\alpha \subseteq \alpha \left(p \setminus (\alpha+1) \Vdash \dot{X} \cap \alpha = X_\alpha\right).$$

特别地，对于每个 $\alpha \in C$，都存在一个作为见证的 $\mathbb{P}_{\alpha+1}$-名称 $X_\alpha \in V_\kappa$。由于 C，$\langle X_\alpha\colon\ \alpha \in C\rangle \in M_{U_1}$ 并且 $p \in G$，我们可以在 $M_{U_1}[G]$中重构 $\dot{X}$，即 $\dot{X}_G = \bigcup_{\alpha \in C} \left(\dot{X}_\alpha\right)_G$。

现在假设 $I \notin U_0$。在这种情况下，W_0 由 U_0 在 $V[G]$中生成。由于 $U_0 \in M_{U_1}$，只需证明 $(U_0)^* = ((U_0)^*)^{M_{U_1}[G]}$，而这再次由以下事实推出：$(\mathcal{P}(\kappa))^{V[G]} = (\mathcal{P}(\kappa))^{M_{U_1}[G]}$。

现在我们继续证明，对于引理表述中的每个 U_0、U_1、W_0、W_1，

$$V[G] \vDash W_0 \lhd W_1 \Longrightarrow V \vDash U_0 \lhd U_1.$$

根据定理 2.8 的证明中的分析，$\mathrm{Ult}(V[G],\ W_1)$ 具有如下形式：$M_{U_1}[H]$ 对于 $H \subseteq j_{U_1}(\mathbb{P})$-泛型[17]，它在 M_{U_1} 之上，且满足 $H \cap \mathbb{P} = G$。由于 $j_{U_1}(\mathbb{P}) \setminus \kappa$ 是充分闭的，$W_0 \in M_{U_1}[G]$。最后，$\mathbb{P}$ 在 κ以下有一个间隙，因此 $U_0 = W_0 \cap M_{U_1} \in M_{U_1}$，正如所需。□

[16]注意，这是一个序数之间的等式；无论 $V[G]$ 中是否有基数塌缩，该等式都成立。[17]事实上，我们证明了以下两种情况之一：$W_1 = (U_1)^*_\eta$（如果 $I \in U_1$，对于某个 $\eta < \tau$），或者 $W_1 = (U_1)^*$（如果 $I \notin U_1$）。在每种情况下，与 W 相关联的超幂嵌入都是一个嵌入 $j^*\colon\ V[G] \to M_{U_1}[H]$ 对于某个 $H \subseteq j_{U_1}(\mathbb{P})$，正如定理 2.8 中所证明的。

推论 2.12. 设 λ 是一个超紧基数，并用 $\kappa < \lambda$ 表示最小可测基数。假设 κ 有唯一正规测度。[18] 固定 $\tau \leq \kappa^+$。那么，在一个力迫扩张中，λ 是超紧的， κ是一个可测基数，并且它恰好承载 τ 个正规测度。

证明。 令 I 为 κ以下所有不可达基数的集合，并令 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\tau,\ I}$ 为分裂强迫（定义为长度为 κ的迭代力）。由于相对于 λ而言， $\mathbb{P}$ 很小，因此对于在 V上泛型的 $G \subseteq \mathbb{P}$， λ 在 $V[G]$中仍然是超紧的。由定理 2.8， κ 在$V[G]$中恰好有 τ个正规测度。□

为供后续使用（例如，见定理 3.1），我们证明以下技术引理，说明通过适当选择 I，分裂强迫 $\mathbb{P}^{\tau,\ I}$ 能够保持超紧基数：

引理 2.13。 假设广义连续统假设。设 κ 为一个超紧基数，并固定 $\kappa_0 < \kappa$。令 I 为(κ_0, κ) 中所有作为强基数极限的不可达基数所构成的集合。固定 $\tau \leq \kappa^+$。记 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\tau,\ I}$。那么

(1) $\mathbb{P}$ 是$(\kappa_0)^+$-有向闭的，并且 $\mathbb{P}$ 保持基数和广义连续统假设。*(2)* $\mathbb{P}$保持 κ的超紧性。*(3)* 设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是在 V上泛型的。那么， κ 上的每个正规测度 $U \in V$ 都能以 τ 种方式提升为 $V[G]$中 κ上的测度 $\langle U^*_\eta\colon\ \ \eta < \tau\rangle$。此外， κ上的每个正规测度 $W \in V[G]$ 都是这样提升得到的。

证明。 显然， $\mathbb{P}$ 是 $(\kappa_0)^+$-有向闭的。 $\mathbb{P}$ 保持基数与广义连续统假设这一事实由引理 2.3 得出。我们接着处理子句（2）。

设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 为一个 V-泛型。对任意满足余终数$(\lambda) > \kappa$ 的奇异强极限基数 $\lambda > \kappa$，我们证明 κ 在 $V[G]$ 中是 λ-超紧的。事实上，设 $j\colon V \to M$ 为由 $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上米切尔序为序数 0 的细正规测度导出的超幂嵌入；特别地， κ 在 M 中不是 λ-超紧的。

由于 λ 是强极限基数，由此可得 κ 在 M 中是 $< \lambda$-超紧的。特别地，在 M 中，区间 (κ, λ) 内不存在强基数，因为若在 M 中存在满足 $\kappa < \mu < \lambda$ 的强基数 μ，则 κ 在 M 中将是 μ-超紧的，从而在其中是完全超紧的，这就与我们对测度 U 的选取相矛盾。

这一观察确保了力迫 $j(\mathbb{P}) \restriction (\kappa,\ \lambda]$ 在 M 中是平凡的。
我们通过在 M 上构造一个 $j(\mathbb{P})$ 的泛型，来提升 j。注意，

$$j(\mathbb{P}) \restriction (\kappa + 1) = \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}_\kappa,$$

其中 $\dot{\mathbb{Q}}_\kappa$ 被迫是一个原子强迫，它选取一个序数 $\eta < \tau$。此外， $j(\mathbb{P}) \setminus (\kappa + 1)$ 是 λ^+-有向闭的，因为区间 $(\kappa,\ \lambda]$ 中不存在作为强基数极限的不可达基数。

固定某个 $\eta < \tau$（比如说 $\eta = 0$），令 $G * g_\eta$ 为相应的 $j(\mathbb{P}) \restriction (\kappa + 1)$-泛集，它是 M 上的泛集。由于 M 在 V 和 $|\mathbb{P}| < \lambda$ 中对 λ 序列封闭， $M[G] = M[G * g_\eta]$ 在 $V[G]$ 中对 λ- 序列封闭。注意，由于 $j \restriction \mathbb{P} \in M$，$j[G] \in M[G]$。令

$$s = \bigcup j[G] \setminus (\kappa + 1) = \bigcup \{j(p) \setminus (\kappa + 1)\colon p \in G\}.$$

于是， $s \in j(\mathbb{P}) \setminus (\kappa + 1)$ 是一个主条件。在 $V[G]$ 中构造一个泛型 $H \subseteq j(\mathbb{P}) \setminus (\kappa + 1)$，使得 $s \in H$。这一构造之所以可行，是因为 $V[G]$ 有一个序型为 $|j(\kappa)^{++}$ 的列表，其中包含 $j(\mathbb{P}) \setminus (\kappa + 1)$ 的所有稠密子集，$^M| = \lambda^+$；而且 $j(\mathbb{P}) \setminus (\kappa + 1)$ 在 $V[G]$ 中是 λ^+-闭的。由此可知， $V \to M\colon\ j$ 提升到 $V[G] \to M[G * g_\tau * H]\colon\ j^*$，并且 $M[G * g_\tau * H]$ 在 $V[G]$ 内对 λ-序列封闭。因此， j^* 证明了 κ 在 $V[G]$ 中是 λ-超紧的。由于 λ 可以任意取高，κ 在 $V[G]$ 中是完全超紧的。

子句（3）由定理 2.8 的子句（2）以及以下事实得出：

---

[18]例如，这可以由米切尔序的线性性推出。[19]这里我们用到了广义连续统假设以及 cf$(\lambda) > \kappa$ 这一事实。

(1) 每个正规测度 $U \in V$ 在 κ 上集中于 I（这是因为 κ 在 V中是超紧的，特别是强基数的不可达极限）。(2) 每个正规测度 $W \in V[G]$ 也集中于 I（这是因为 κ 在 $V[G]$ 中是超紧的，并且 $\mathbb{P}$ 在 κ以下有一个间隙，因此 κ 在 $V[G]$ 中足够大的每个强基数，在 V中原本就是强基数。另见（[22, 推论 13]）。

这就完成了该引理的证明。 □

最后，我们希望将引理 2.13 调整到 $\tau = \kappa^{++}$ 的情形。

引理 2.14。假设广义连续统假设成立。设 κ 是一个超紧基数，并固定 $\kappa_0 < \kappa$。设 I 为 (κ_0, κ) 中所有作为强基数极限的不可达基数组成的集合。设 $\tau = \kappa^{++}$。设 $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\tau,I}$ 为 I-间隔的非平稳支撑迭代[20] $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha : \alpha \leq \kappa \rangle$，其中对每个 $\alpha \in I \cup \{\kappa\}$，$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha = (Add(\alpha, 1))^{V^{\mathbb{P}_\alpha}}$（注意，力迫是在 κ 上进行的）。那么：

(1) $\mathbb{P}$ 是 $(\kappa_0)^+$-有向闭的，并且 $\mathbb{P}$ 保持基数和广义连续统假设。*(2)* $\mathbb{P}$ 保持 κ 的超紧性。*(3)* 设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是在 V 上的泛型。每个 $U \in V$ 都以 κ^{++} 种方式提升为 $V[G]$ 中关于 κ 的正规测度。此外，每个正规测度 $W \in V[G]$ 都是这样一种提升。

证明。（略） $\mathbb{P}$ 是（κ_0）$^+$-有向闭的、保基数且保广义连续统假设等事实，可由引理 2.13 得出。证明 $\mathbb{P}$ 保持 κ 的超紧性，也与引理 2.13 中的证明十分相似：对于 $\lambda > \kappa$ 这个强极限基数，先将 λ-超紧嵌入 $j : V \to M$ 提升为 $j^* : V[G_{<\kappa}] \to M[G * H]$，其中 $G = G_{<\kappa} * G$（κ）是 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型，而 $H \subseteq j$（$\mathbb{P}$）$\setminus$（$\kappa+1$）是包含一个合适主条件 s 的、在 $M[G]$ 上的泛型，如引理 2.13 所示。主要区别在于，现在我们需要构造一个在 $M[G * H]$ 上的 j（$\mathbb{P}$）（j（κ））-泛型 $h \in V[G]$，且满足 $j^*[G$（κ）$] \subseteq h$。为此，我们将 $\bigcup g \in M[G * H]$ 视为主条件，并任取一个在 $M[G * H]$ 上的（Add（j（κ），1））$^{M[G*H]}$-泛型 $h \in V[G]$，且满足 $h \restriction \kappa = g$。这确保 j^* 可提升为 $j^{**} : V[G] \to M[G * H * h]$，从而见证 κ 在 $V[G]$ 中的 λ-超紧性。

最后，转而对 κ in $V[G]$ 上的正规测度进行分类。由于 $\mathbb{P}$ has a gap belowκ，每个定义在 κ 上的正规测度 $W \in V[G]$ 都扩张了定义在 κ 上的正规测度 $U \in V$。通过将 $j_U : V \to M_U$ 提升为 $j^* : V[G] \to M[G * H * h]$，即可得到 U lifts in κ^{++}-many ways 这一事实，其中：

- $H = j_U[G_{<\kappa}] \setminus (\kappa + 1)$.• $h \subseteq Add(j(\kappa), 1)$ 在 $M[G * H]$ 上是泛型，且具有 $h \restriction \kappa = g$。

标准论证（见 [13, 命题 8.1]）表明，存在 $2^{\kappa^+} = \kappa^{++}$ 个这样的泛型h，它们都在 $M[G * H]$ 上。每个 h 都诱导出 M_U 的一个提升 $j_h^* : V[G] \to M_U[G * H * h]$。如上所述，正规测度 $\langle U_h^* : h \rangle$ 是 U 的两两不同的提升，因为每个测度都会产生不同的超幂嵌入 j_h^*。因此，U 可以通过 κ^{++} 种方式提升。[21] □

2.3. **通过非平稳支撑迭代实现拉弗不可毁性**。接下来，我们证明拉弗定理的一个版本：使超紧基数在某个力迫类（[32]）下不可破坏。这里的特殊之处在于，预备强迫是一个 I间隔的非平稳支撑迭代，而不是 Easton 支撑迭代。这使我们能够在所得泛型扩张中，对 κ 上的某些正规测度进行更加精细的控制。

假设 κ 是一个超紧基数。令 $\ell : \kappa \to V_\kappa$ 为 κ的 Laver函数。回忆一下，这意味着对于每个 $\lambda \geq \kappa$ 和 $x \in H_{\lambda^+}$，都存在 $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$上的细正规超滤 $\mathcal{U}$，使得 $j_{\mathcal{U}}(\ell)(\kappa) = x$。

定理 2.15 (拉弗不可摧毁性)。假设 广义连续统假设成立，且令 κ 为一个超紧基数。存在偏序集 $\mathbb{P} \in V_{\kappa+2}$，使得只要 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是 V上的泛型：

[20]这里也可以使用 Easton 支撑。[21]我们指出，还存在其他提升，因为 $G(\kappa)$ 不必取作在 $M[G]$ 上的 $Add(\kappa, 1)^{M[G]}$-泛型。

(1) κ 在 $V[G]$中是超紧的，且其超紧性在 κ^+-有向闭力迫下不可摧毁。[22]*(2)* 每个定义在 κ 上的米切尔序小于序数 0 的正规测度 $U \in V$，都会生成一个定义在 κ 上的米切尔序为 *0* 的正规测度 $U^* \in V[G]$。此外，每个定义在 κ 上的米切尔序小于序数 0 的正规测度 $W \in V[G]$，都具有形式 U^*，其中 $U \in V$ 是定义在 κ 上的、米切尔序为 0的某个正规测度。

证明。 我们的证明遵循 [13,定理 24。12]。

令 $I \subseteq \kappa$ 为由下式给出的平稳集

$$\{\alpha < \kappa \colon \alpha \text{ is measurable and } \forall \beta < \alpha\, (\exists \gamma < \kappa\, \exists x \in V_\gamma\ \ (\ell(\beta) = (\gamma, x)) \to \gamma < \alpha)\}$$

我们定义一个 I-间隔的非平稳支撑迭代

$$\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle$$

使得对每个 $\alpha < \kappa$:

- 若 α 是不可达基数，则 $\mathbb{P}_\alpha$ 是该迭代 $\langle \mathbb{P}_\beta \colon \beta < \alpha \rangle$的非平稳支撑极限。否则，$\mathbb{P}_\beta$ 是 $\langle \mathbb{P}_\beta \colon \beta < \alpha \rangle$的逆极限。• $\mathbb{Q}_\alpha$ 被迫为平凡的，除非 $\alpha \in I$ 且 $\ell(\alpha)$ 是一个有序对 $(\gamma,\ x)$，满足：$-$ $\gamma < \min(I \setminus (\alpha + 1))$。$-$ $x \in V_\gamma$ 是一个 $\mathbb{P}_\alpha$- 名称，用于一个 α^+- 有向闭偏序集。 在这种情况下，$\mathbb{P}_\alpha$ 迫使 $\mathbb{Q}_\alpha$ 就是偏序集 x。

令 $\mathbb{P}$ 为力迫 $\langle \mathbb{P}_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle$的非平稳支撑极限。

(1) 设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 在 V 上是泛型。设 $\mathbb{Q} \in V[G]$ 是一个 κ^+-有向闭偏序集，且 $g \subseteq \mathbb{Q}$ 在 $V[G]$ 上是泛型。我们论证 κ 在 $V[G * g]$ 中是超紧的（特别地，取 $\mathbb{Q} = \{1\!\!1\}$ 可得 κ 在 $V[G]$ 中是超紧的）。

假设在 V 中的某个 $\lambda > \kappa$ 的情况下，我们论证 κ 在 $V[G*g]$中是 λ-超紧的。令 $\mu = 2^{2^\lambda}$，并令 $\mathcal{U}$ 是定义在 $\mathcal{P}_\kappa(\mu)$ 上的超紧致测度，满足 $j_{\mathcal{U}}(\ell)(\kappa) = \left(\mu,\ \dot{\mathbb{Q}}\right)$。特别地，属于 $M_{\mathcal{U}}$，$\mathbb{Q} = j_{U_0}(\langle \mathbb{Q}_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle)(\kappa)$，且 $G * g$ 在 $M_{\mathcal{U}}$ 上是 $j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P}) \restriction (\kappa + 1)$-泛型。此外，$\min(j_{\mathcal{U}}(I) \setminus (\kappa + 1)) > \mu$，因此 $M_{\mathcal{U}}[G * g]$ 中的力迫 $j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P}) \setminus (\kappa + 1)$ 是 μ^+-有向闭的。由于 $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ 是 μ-链条件，$V[G*g] \vDash {}^{\mu}M_{\mathcal{U}}[G*g] \subseteq M_{\mathcal{U}}[G*g]$。因此，$j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P}) \setminus (\kappa+1)$ 在 $V[G*g]$ 中也是 μ^+-有向闭的。由于集合 $j_{\mathcal{U}}[G]$ 属于 $M_{\mathcal{U}}[G]$，我们可以找到一个主条件 $q^* \in j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P})$，使得对每个 $p \in G$，$q \leq j_{\mathcal{U}}(p)$ 且 $\kappa \notin$ 支撑 q_0。令 $H \subseteq j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P}) \setminus (\kappa + 1)$ 在 $V[G*g]$ 上是泛型的，并满足 $q^* \setminus (\kappa+1) \in H$。由于 $j_{\mathcal{U}}[G] \subseteq G * g * H$，我们可以将嵌入 $j_{\mathcal{U}} \colon V \to M_{\mathcal{U}}$ 提升为 $j' \colon V[G] \to M_{\mathcal{U}}[G*g*H]$，其中 j' 在 $V[G*g]$ 中是可定义的。最后，由于 $j'(\mathbb{Q})$ 是 $j_{\mathcal{U}}(\kappa^+)$-有向闭的，且 $j'[g]$ 的大小至多为 $\mu \leq j_{\mathcal{U}}(\kappa^+)$，并且属于 $M_{\mathcal{U}}[G*g*H]$，我们可以找到一个主条件 $r \in j'(\mathbb{Q})$，使得对每个 $s \in g$，$r \leq j'(s)$。令 $h \in V[G*g*H]$ 在 $M_{\mathcal{U}}[G*g*H]$上是 $j'(\mathbb{Q})$-泛型的。在 $V[G*g*H*h]$中，将 j' 提升为 $j^* \colon V[G] \to M_{\mathcal{U}}[G*g*H*h]$；这是可行的，因为 $j'[g] \subseteq h$。

令 $\mathcal{W} \in V[G*g*H*h]$ 为由 j^*以 $j^*[\lambda]$ 为种子导出的 $(\mathcal{P}_\kappa(\lambda))^{V[G*g*H*h]}$ 上的细正规测度。由于 $j_{\mathcal{U}}(\kappa^+) > \mu$，力迫 $j'(\mathbb{Q})$ 不会添加 2^{2^λ} 的新子集。结合 $j_{\mathcal{U}}(\mathbb{P}) \setminus (\kappa+1)$ 在 $V[G*g]$ 中是 μ^+-有向闭这一事实，可知 $\mathcal{W}$已经属于 $V[G*g]$，因此在 $V[G*g]$ 中存在 $(\mathcal{P}_\kappa(\lambda))^{V[G*g]}$ 上的细正规测度。由于 λ任意大，κ 在 $V[G*g]$ 中仍然是超紧的。

（2）我们通过以下两个断言来证明：

命题 2.15.1。 在 κ 上，$U \in V$ 中的每个米切尔序为 序数 0 的正规测度，都会在 $V[G]$ 中生成一个 κ 上的正规测度。

[22]不可毁性定理的标准版本（其中不可毁性是在 κ-有向闭力迫下成立的）也可以证明，但它不满足上文的条款（2）。

命题证明。 设 $U \in V$ 是 κ 上序数为 0 的正规测度， $j_{U_0}\colon V \to M_U$ 是其超幂嵌入。注意到 $\kappa \notin j_{U_0}(I)$，因为 I 由可测基数组成，且 U 的米切尔序为 0。因此， $j_{U_0}(\langle \mathbb{Q}_\alpha\colon \alpha < \kappa\rangle)(\kappa)$ 被 $j_{U_0}(\mathbb{P})_\kappa = \mathbb{P}$ 力迫为平凡力迫。由引理 2.5， j_{U_0} 在 $V[G]$ 中提升为一个初等嵌入

$$j^*\colon V[G] \to M_U[j_{U_0}[G]]$$

见证了 κ 在 $V[G]$ 中的可测性。

令 U^* 为使用 κ 作为种子从 j^* 导出的正规测度。[23] 也就是说，

$$U^* = \left\{ X \in (\mathcal{P}(\kappa))^{V[G][H]}\colon \exists p \in G \left(j_{U_0}(p) \Vdash \check{\kappa} \in j_{U_0}(\dot{X}) \right) \right\}.$$

给定 $X \in U^*$，存在一个 $\mathbb{P}$-名称 X，它表示 X，以及一个条件 $p \in G$，使得 $j_U(p) \Vdash \check{\kappa} \in j_U(X)$。特别地，集合 $A = \{\alpha < \kappa\colon p \Vdash \check{\alpha} \in X\}$ 属于 U，且由于 $p \in G$， $A \subseteq X$。因此，U^* 由 U 在 $V[G]$ 中生成。□

断言2.15.2。 *Mitchell* 序为 序数 0 的 κ 上的每个正规测度 $W \in V[G]$ ，都由 *Mitchell* 序为 序数 0的 κ 上的一个正规测度 $U \in V$ 生成。

断言的证明。 假设 $W \in V[G]$ 是 $V[G]$ 中 κ 上一个 Mitchell 序为 0 的正规测度。记与 W 相关联的超幂嵌入为

$$j_W^{V[G]}\colon V[G] \to M[H].$$

这是一个初等嵌入，其中 $H = j_W(G)$ 是在某个基模型 M 上的 $j_W(\mathbb{P})$-泛型。

由于 $\mathbb{P}$ 在 κ 以下存在间隙，Hamkins 间隙强迫定理（定理2.7）确保 $U = W \cap V$ 属于 V 和 $M \subseteq V$。只需证明 U 在 V 中的米切尔序为 0；这样便可完成证明，因为此时 W 必须等于由 U 在 $V[G]$ 中生成的测度 U^*。事实上，假设 U 在 V 中的米切尔序不为 0。那么 U 集中于 I。特别地，$I \in W$。我们将证明每个基数 $\beta \in I$ 在 $V[G]$ 中仍然是可测的，从而导出矛盾，因为这与 W 在 $V[G]$ 中的米切尔序为 0 相矛盾。事实上，固定 $\beta \in I$。重复命题 2.15.1 中的论证，每个在 β 上、米切尔序为 0 的正规测度 $U_\beta \in V$ 都会在 $V[G_\beta]$ 中生成 β 上的正规测度。由于 $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ 被强迫为 β^+-有向闭的，力迫 $\mathbb{P} \setminus \beta$ 不会向 β 添加新的子集，因此 β 在 $V[G]$ 中仍然是可测的，如所需。□

这就完成了定理 2.15 的证明。 □

类似的论证可以得到一个在保持广义连续统假设的力迫下成立的不可毁性定理版本。

定理 2.16（具有广义连续统假设和基数保持的拉弗不可摧毁性）。 假设 广义连续统假设成立，并令 κ 为超紧基数。存在偏序集 $\mathbb{P} \in V_{\kappa+2}$ ，使得当 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是 V上的泛型时：

（*1*） κ 在 $V[G]$中是超紧基数，并且其超紧性在 κ^+-有向闭且保持基数和广义连续统假设的力迫下不可毁性。（2） κ 上的每个米切尔序为序数 0 的正规测度 $U \in V$ 都会生成 κ 上的一个米切尔序为序数 0 的正规测度 $U^* \in V[G]$。此外， κ 中每个米切尔序为序数 0 的正规测度 $W \in V[G]$ 都具有 U^* 的形式，其中 $U \in V$ 是 κ 上的米切尔序为序数 0 的正规测度。（3） 广义连续统假设在 $V[G]$ 中成立，且 V 的每个基数在 $V[G]$ 中仍然是基数。

证明。 令 $\mathbb{P}$ 为一个偏序集，与定理 2.15 的证明中所用的偏序集类似，只要求当$\alpha \in I$ 且 $\ell(\alpha)$ 是一个有序对 $(\gamma,\ x)$ 时， $\mathbb{Q}_\alpha = x$，条件如下：

- $\gamma < \min(I \setminus (\alpha + 1))$.- $x \in V_\gamma$ 一个保持基数和广义连续统假设的 α^+-有向闭偏序集的 $\mathbb{P}_\alpha$-名称。

[23]不难证明，这个扩展嵌入就是超幂嵌入 $j_{U^*}^{V[G]}$，其中 $U^* \in V[G]$ 是利用 κ 作为种子从该嵌入导出的正规测度。

否则， $\mathbb{Q}_\alpha$ 是平凡的。由于 $\mathbb{P}$ 现在是由基数保持且保持广义连续统假设的偏序集构成的非平稳支撑迭代，因此除了定理 2.15 的结论外， V 中也成立广义连续统假设。□

记号 2.17。 固定以下记号，以表示本节中引入的不可摧毁性预备的变体：

(1) 令 κ 为超紧基数，令 $\rho < \kappa$ 为正则基数。 $\mathbb{L}(\kappa, \rho)$ 是非平稳支撑预备的 ρ-有向闭版本，它使 κ 的超紧性在保持基数和广义连续统假设的 κ^+-有向闭迫下不可破坏。(2) 令 κ 为强基数，令 $\rho < \kappa$ 为正则基数。 $\mathbb{GS}(\kappa, \rho)$ 是使 ρ的强性在 κ^+-有向闭力迫下不可破坏的偏序集的 κ -有向闭版本。Gitik 和 Shelah 证明了此类偏序集的存在性（见 [18]）。[24]

通过修改定理 2.16 和 Gitik-Shelah 的不可摧毁性预备的证明，使得对每个 $\alpha < \rho$ 都迫使 $\mathbb{Q}_\alpha$ 为平凡的，可以很容易地证明此类力迫的存在性，该修改源自 [18] 。

2.4. 强迫非反射平稳集。 对于每个 Mahlo 基数 α，我们用 $\mathbb{NR}(\alpha)$表示向 α添加非反射平稳集的强迫概念。我们采用标准强迫的一种变体，其中对于每个正则基数 $\gamma < \alpha$，都存在一个稠密子集 $\mathbb{NR}_\gamma(\alpha) \subseteq \mathbb{NR}(\alpha)$，它是 γ-有向闭的。该强迫定义如下：

- $\mathbb{NR}(\alpha)$由函数 q: $\beta \to 2$形式的条件组成，其中 $0 < \beta < \alpha$，并满足：– 对于每个具有不可数共尾性的基数 $\lambda \leq \beta$ ，都存在一个闭无界集 $C \subseteq \lambda$ ，使得 $q \restriction C$ 恒等于 0。– 对于每个不可达基数 $\lambda < \beta$，集合 $\{\alpha < \beta : \alpha \geq \lambda \wedge q(\alpha) = 1\}$ 由共尾性至少为 λ的序数组成。给定 p, $q \in \mathbb{NR}(\alpha)$，若 q 以 p 为端延伸，则称 q 延伸 p 。• 给定正则基数 $\gamma < \alpha$， $\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$由满足 $\gamma <$dom(q)的条件 $q \in \mathbb{NR}(\alpha)$组成。

基模型 V 上的泛型 $G \subseteq \mathbb{NR}(\alpha)$诱导出 α的一个非反射平稳子集（见下文引理 2.19）。

引理 2.18. 设 α 为马洛基数，且 $\gamma < \alpha$ 为正则基数。则 $\mathbb{NR}(\alpha)$ 与$\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$均为 α-策略闭。

证明. 我们描述玩家 II 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{NR}(\alpha))$中的必胜策略（对 $\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$可给出类似论证）。假设 $i < \alpha$ 为偶数阶段，且双方迄今已构造出条件的下降序列 $\langle p_j : j < i \rangle \subseteq \mathbb{NR}(\alpha)$。由归纳假设下列性质：

- 对每个偶数 $j < i$，dom(p_j)是形如 $\beta_j + 1$的序数，且$p_j(\beta_j) = 0$。• $\langle \beta_j : j < i$ 为偶数$\rangle$ 是一个递增的连续序列。

若 i 是一个极限序数，令 $\beta_i = \sup_{j<i} \beta_j$。 令 $p_i^* = \bigcup_{j<i} p_j$。 于是，玩家 II 在阶段 i 的行动将是条件 $p_i = p_i^* \cup \{\langle \beta_i, 0 \rangle\}$。

若 $i = i' + 1$ 是一个后继序数，且 $p_{i'}$ 是玩家 I 在最近阶段所使用的条件，则玩家 II 在阶段 i选择一个严格大于 dom($p_{i'}$) 的序数 β_i ，并使用条件p_i进行操作： $\beta_i + 1 \to 2$ ，使得 $p_i \restriction \text{dom}(p_{i'}) = p_{i'}$ ，且 $p_i \restriction ((\beta_i + 1) \setminus \text{dom}(p_{i'}))$ 恒等于 0。□

引理 2.19。 假设 α 是 *Mahlo*。令 $G \subseteq \mathbb{NR}(\alpha)$ 是泛型的，且相对于 V。令 $S_G = \{\beta <\alpha : \exists p \in G\, (\beta \in \text{dom}(p) \wedge p(\beta) = 1)\}$。则 S_G 是 α的非反射平稳子集。

证明。根据 $\mathbb{NR}(\alpha)$的定义， S_G 是非反射的；事实上，对每一个具有不可数余finality的 $\lambda < \alpha$ ，在 λ 中都存在一个与 S_G不相交的地模型闭集。因此，我们集中证明 S_G 是平稳的。

[24]事实上，Gitik–Shelah 不可破坏性准备适用于直接扩张序足够闭的 Prikry 型强迫；更多详情请参见 [18] 。我们还要指出，Gitik–Shelah 不可破坏性准备存在一种非平稳支撑变体，但本文不需要用到它。

设 C 是一个 $\mathbb{NR}(\alpha)$-名称，被某个条件 $p \in \mathbb{NR}(\alpha)$力迫为 α中的一个闭无界集。固定玩家 II在博弈 $G_\alpha(\mathbb{NR}(\alpha))$中的一个必胜策略 τ（由引理 2.18，这样的策略存在）。设 N 是某个足够大的 χ的 H_χ 的一个初等子结构，使得：

(1) $|N| < \alpha$。(2) $\beta^* = \sup(N \cap \alpha)$ 是小于 α 的不可达基数。(3) N 对其元素构成的 $< \beta^*$-序列封闭。(4) α, $\mathbb{NR}(\alpha)$ p, τ, $C \in N$。

利用 α 是 Mahlo 这一事实，可以通过标准论证构造出这样的 N 和 β^*。接下来，我们来构造序列：

- $\langle p_i : i < \beta^* \rangle \subseteq \mathbb{NR}(\alpha) \cap N$，一个条件的递减序列。
- $\langle \beta_i : i < \beta^* \rangle \subseteq N \cap \alpha$ 一个递增的序数序列，在 β^* 中无界，并且对每个 $i < \beta^*$,

$$p_{i+1} \Vdash \exists \delta \in (\beta_i, \beta_{i+1}) \cap \dot{C}.$$

我们进行构造，使得上述序列的每个严格前段都属于 N（尽管序列本身位于 V 中）。我们还维持归纳假设：对每个 $i < \beta^*$，序列 $\langle p_j : j < i \rangle$ 是博弈 $G_\alpha(\mathbb{NR}(\alpha))$ 中由玩家 II 走出的步所构成的序列；玩家 II 遵循其必胜策略 τ，并且到目前为止双方选取的所有条件都属于 N。

令 $p_0 = p$ 和 $\beta_0 = 0$。假设 $i < \beta^*$，并且 $\langle p_j, \beta_j : j < i \rangle$ 已经构造完成。由于 N对其元素构成的 $< \beta^*$-序列封闭，$\langle p_j : j < i \rangle \in N$，且它是根据 τ在 $G_\alpha(\mathbb{NR}(\alpha))$ 中由玩家 II 进行的行动序列。

若 i 是极限，玩家 II 可以遵循 τ，选取 $\langle p_j : j < i \rangle$的下界 $p_i \in N$。令$\beta_i = \sup_{j<i} \beta_j$。

假设 $i = i' + 1$ 是后继。令 $q \leq p_{i'}$ 属于 N，使得 q 决定 $\min\left(\dot{C} \setminus (\beta_{i'} + 1)\right)$。由初等性可知，所决定的值属于 N。令 $\beta_i \in N \cap \alpha$ 为一个大于所决定的值以及 $\max(\mathrm{dom}(q), \beta_{i'})$ 的正则基数。[25] 将 q进一步延伸为一个定义域为 $\beta_i + 1$ 的条件 q^*，使得：

- $q^* \restriction \mathrm{dom}(q) = q$.
- $q^* \restriction [\mathrm{dom}(q), \beta_i) = 0$.
- $q^*(\beta_i) = 1$.

注意，$q^* \in N$ 是一个合法的条件，因为 β_i 是正则基数，因此对于每个不可达基数 $\lambda < \beta_i$，q^* 只在共尾性为 $\geq \lambda$的序数上取值“1”。最后，让玩家 I 在博弈 $G_\alpha(\mathbb{NR}(\alpha))$中选择 q^* 作为下一步，并令 $p_i \in N$ 为玩家 II 按照 τ进行博弈时的应答。

归纳构造至此完成。由于 $\langle p_i : i < \beta^* \rangle \in V$由按照 τ进行的博弈 $G_\alpha(\mathbb{NR}(\alpha))$的一次进行中的前 β^* 轮组成，存在一个条件扩展每个条件 $\langle p_i : i < \beta^* \rangle$。特别地，$p^* = \bigcup_{i<\beta^*} p_i$ 是 $\mathbb{NR}(\alpha)$中的一个条件。根据我们的构造，p^* 强迫 β^* 是 C的一个极限点。令 $p^{**} = p^* \cup \{(\beta^*, 1)\}$。那么 $p^{**} \in \mathbb{NR}(\alpha)$，因为 β^* 是正则的，p^{**} 扩展了 p，并且 $p^{**} \Vdash \beta^* \in C \cap S_{\dot{G}}$。□

有用的是，$\mathbb{NR}(\alpha)$具有任意闭的稠密子集，这一事实在 [1]中也曾被观察到。

引理 2.20. 设 $\gamma < \alpha$ 为一个正则基数。则 $\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$ 是 $\mathbb{NR}(\alpha)$的一个 γ-有向闭稠密开子集。

证明。 $\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$ 是 $\mathbb{NR}(\alpha)$ 的稠密开子集，这一事实是显然的。我们来论证 $\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$ 是 γ-有向闭的。假设 $\delta < \gamma$ 且 $\langle q_i : i < \delta \rangle$ 是 $\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$ 中条件的一个有向集。令$q^* = \bigcup_{i<\delta} q_i$。我们论证 $q^* \in \mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$，由此可知 q^* 延拓每一个

[25]根据初等性，N 满足：每个小于 α 的序数与 α之间都存在一个正则基数，因此这样的 β_i 存在。

对 $i<\delta$ 的条件 q_i。令 $\beta=\sup_{i<\delta}\mathrm{dom}(q_i)$。显然， q^*: $\beta\to 2$ 是一个良定义函数，其对 $S^{\beta}_{<\gamma}\setminus\gamma$ 的限制恒为 0。尚需验证，对每一个具有不可数余finality的基数 $\lambda\le\beta$，存在一个闭无界集 $C\subseteq\lambda$，使得 $q^*\restriction C$ 恒为 0。若对某个 $i<\delta$ 有 $\lambda\le\mathrm{dom}(q_i)$，则这是显然的。因此，尚需检验如下情形： $\lambda=\beta$ 且对所有 $i<\delta$ 有 $\mathrm{dom}(q_i)<\lambda$。特别地， $\lambda>\gamma$ 且余终数(λ) $\le\delta$。由于 $\delta<\gamma$，我们可以找到一个闭无界集 $C\subseteq\lambda$，它由高于γ且共尾性严格小于 γ 的序数组成。由力迫的定义， $q^*\restriction C$ 恒为 0。总而言之，这证明了 $q^*\in\mathbb{NR}_\gamma(\alpha)$，正如所求。□

记号 2.21。 假设 $\kappa_0<\kappa$ 和 κ 是 Mahlo。令 $\mathbb{NR}(\kappa_0,\ \kappa)$ 为非平稳支撑迭代力迫 $\langle\mathbb{P}_\alpha,\ \dot{\mathbb{Q}}_\alpha:\ \alpha<\kappa\rangle$，其中对于 $\alpha<\kappa$，

(1) 如果 $\alpha\le\kappa_0$ 或 α 在 V中不是可测的，则 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 被迫为平凡的。(2) 否则， $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 被迫为 $(\mathbb{NR}(\alpha))^{V^{\mathbb{P}_\alpha}}$。

下面总结力迫 $\mathbb{NR}(\kappa_0,\ \kappa)$ 的基本性质:

引理 2.22。 记 $\mathbb{P}=\mathbb{NR}(\kappa_0,\ \kappa)$。则:

(1) $\mathbb{P}$ 是 μ-策略闭的，因为它是高于 κ_0的第一个可测基数。*(2)* $\mathbb{P}$有一个 κ_0-有向闭稠密子集。*(3)* 假设广义连续统假设， $\mathbb{P}$ 保基数并保持广义连续统假设。

证明。 条款（1）f 由引理 2.18 可通过一个简单论证得出。子句（2）由这一事实得出:

$$D=\{p\in\mathbb{NR}(\kappa_0,\kappa):\forall\alpha\in\mathrm{supp}(p)\ \Big(p\restriction\alpha\Vdash p(\alpha)\in\dot{\mathbb{NR}}_{\kappa_0}(\alpha)\Big)\}$$

根据引理 2.20， γ 是有向闭的。[26] 子句（3）由引理 2.3 得出。 □

下面这个技术性引理将在定理 2.24 的证明中发挥作用。它给出了一个融合论证的例子，类似于引理 2.2 中的论证，其中稠密集 $\langle d(\alpha):\ \alpha<\kappa\rangle$ 不一定是开集。

引理 2.23。 记作 $\mathbb{P}=\mathbb{NR}(\kappa_0,\kappa)$。令 $D\subseteq\mathbb{P}$ 为满足以下条件的条件 $p\in\mathbb{P}$ 的集合：存在一个闭无界集 $C\subseteq\kappa$，使得对每个 $\alpha\in C$ 以及每个 $\beta\in$ 支撑(p) $\setminus(\alpha+1)$，

$$p\restriction\beta\Vdash p(\beta)\in\dot{\mathbb{NR}}_{\alpha^{++}}(\beta).$$

则 D 是 $\mathbb{P}$ 的稠密子集。

证明。 该证明是对引理 2.2 的一个修改并简化后的版本。[27] 固定一个条件 $p\in\mathbb{P}$。令$C\subseteq\kappa$ 为一个与 supp(p) 不相交的 κ 中的闭无界集。我们来构造以下序列:

- $\langle p_i:\ i<\kappa\rangle$ 一个由 $\mathbb{P}$ 中的条件组成的递减序列。
- $\langle\alpha_i:\ i<\kappa\rangle$ 一个 κ 中连续递增且共尾的序列，使得每个 α_i 都属于 C。

构造方式使得以下性质成立:

- 对每个 $i<\kappa$， supp(p_i) =supp(p)。
- 对每个 $i<j<\kappa$， $p_i\restriction\alpha_i+1=p_j\restriction\alpha_i+1$。
- 对每个 $i<\kappa$ 和 $\beta\in$，若 supp(p) $\setminus(\alpha_i+1)$，则 $p_i\restriction\beta$ 强制: $\dot{-}$ $p_i(\beta)\in\mathbb{NR}_{(\alpha_i)^{++}}(\beta)$。
- 存在 $\gamma_i(\beta)\in(\alpha_i,\ \beta)$，使得 $\mathrm{dom}(p_i(\beta))=\gamma_i(\beta)+1$，且 $p_i(\beta)(\gamma_i(\beta))=0$。

通过令 $p_0=p$, $\alpha_0=\min(C)$ 开始构造。假设对于某个 $i<\kappa$， p_i,α_i 已经构造完成。令 $\alpha_{i+1}=\min(C\setminus\alpha_i+1)$。不难构造出 $p_{i+1}\le p_i$，使得:

- $\mathrm{supp}(p_{i+1})=\mathrm{supp}(p)$.

[26]注意， D 不是开集，因为扩展条件时可以向支撑中添加坐标。[27]若试图直接从引理 2.2 推导这一点，一个简单的做法是将引理应用于稠密集 $d(\alpha)\subseteq\mathbb{P}$，这些稠密集由满足如下条件的条件 p 组成：对每个 $\beta\in\mathrm{supp}(p)\setminus(\alpha+1)$, $p\restriction\beta\Vdash p(\beta)\in\dot{\mathbb{NR}}_{\alpha^{++}}(\beta)$。然而，这些集合 $d(\alpha)$ 不是开集。

• $p_{i+1} \restriction (\alpha_{i+1}+1) = p_i \restriction (\alpha_{i+1}+1)$。• 对于每个 $\beta \in \mathrm{supp}(p) \setminus (\alpha_{i+1}+1)$，$p_{i+1} \restriction \beta$ 强制：$\dot{-}$ $p_{i+1}(\beta) \in \dot{\mathbb{NR}}_{(\alpha_{i+1})^{++}}(\beta)$。– 存在 $\gamma_{i+1}(\beta) \in (\alpha_{i+1}, \beta)$，使得 $\mathrm{dom}(p_{i+1}(\beta)) = \gamma_{i+1}(\beta)+1$，且 $p_{i+1}(\beta)(\gamma_{i+1}(\beta)) = 0$。

接下来，考虑极限情形。假设对每个 $j < i$，都已构造出 $i < \kappa$ 和 p_j，α_j。令$\alpha_i = \sup^{j<i} \alpha_j$。定义 p_i，使得：

• $\mathrm{supp}(p_i) = \mathrm{supp}(p)$。• $p_i \restriction \alpha_i = \bigcup_{j<i} p_j \restriction \alpha_j$。• $p_i \restriction (\alpha_i+1)$ 强制 $p_i \setminus (\alpha_i+1)$ 扩展所有条件 $\langle p_j \setminus (\alpha_i+1) : j < i \rangle$。• 对于每个 $\beta \in \mathrm{supp}(p) \setminus (\alpha_i+1)$，$p_i \restriction \beta$ 强制：$\dot{-}$ $p_i(\beta) \in \dot{\mathbb{NR}}_{(\alpha_i)^{++}}(\beta)$。– 存在一个序数 $\gamma_i(\beta) \in (\alpha_i, \beta)$，使得 $\mathrm{dom}(p_i(\beta)) = \gamma_i(\beta)+1$ 且 $p_i(\beta)(\gamma_i(\beta)) = 0$。

为 i 极限构造 p_i 并不像后继步骤中那样平凡，因此让我们说明为何能找到这样的条件$p_i \in \mathbb{P}$。注意 $p_i \restriction \alpha_i$ 已经完全确定，且 α_i 本身位于 p_i的支集之外。因此，我们集中于构造 $p_i \setminus (\alpha_i+1)$。假设 $\beta \in$ 支撑$(p) \setminus (\alpha_i+1)$与$p_i \restriction \beta$ 已经构造完成。在将 $p_i \restriction \beta$ 包含于泛型中的泛型扩张 $V^{\mathbb{P}_\beta}$ 中进行工作，并在其中构造 $p_i(\beta)$。首先注意，条件序列 $\langle p_j(\beta) : j < i \rangle$在 $\mathbb{NR}(\beta)$中有一个自然下界，

$$x = \bigcup_{j<i} p_j(\beta).$$

我们论证 x 是 $\mathbb{NR}(\beta)$中的合法条件。记 $\gamma^* := \mathrm{dom}(x) = \sup^{j<i} \gamma_i(\beta)$。只需证明，对每个具有不可数余finality的正则基数 $\lambda \leq \gamma^*$，存在闭无界集 $D \subseteq \lambda$使得 $x \restriction D$ 恒为0。事实上，若 $\lambda < \gamma^*$则这是显然的；而若 γ^* 本身是正则的且 $\lambda = \gamma^*$，则 $\langle \gamma_j(\beta) : j < i \rangle$ 是 γ^* 中的一个闭无界集，在其上 x 消失。

总体而言，$x \in \mathbb{NR}(\beta)$，并且通过在 $\mathbb{NR}(\beta)$ 内进一步延拓 x，我们可以确保 $x \in \dot{\mathbb{NR}}_{(\alpha_i)^{++}}(\beta)$ 且 $\mathrm{dom}(x) = \gamma_i(\beta)+1$ 对某个 $\gamma_i(\beta) \in (\alpha_i, \beta)$ 成立，其中 $p_i(\beta)(\gamma_i(\beta)) = 0$。令 $p(\beta)$ 被 $p \restriction \beta$ 强制为上面所构造的条件 x。

至此归纳构造结束。最后，令

$$q = \bigcup_{i<\kappa} p_i \restriction \alpha_i \in \mathbb{P}.$$

注意，支撑$(q) =$ 支撑(p)，并且 q 延拓了每一个条件 $\langle p_i : i < \kappa \rangle$。此外，对每一个 $i < \kappa$ 以及 $\beta \in$ 支撑$(q) \setminus (\alpha_i+1)$，

$$q \restriction \beta \Vdash q(\beta) \leq p_i(\beta) \in \dot{\mathbb{NR}}_{(\alpha_i)^{++}}(\beta).$$

因此，q 即为所求，由闭无界集 $\{\alpha_i : i < \kappa\}$ 所见证。 □

定理 2.24. 假设广义连续统假设。假设 κ 是一个超紧基数，$\kappa_0 < \kappa$，并令 $\mathbb{P} = \mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$。设 $\lambda > \kappa$ 是一个可测基数，且在区间 (κ, λ) 中没有可测基数。则：

(1) 经由 $\mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$ 力迫后，κ 是 λ-强紧的。*(2)* 经由 $\mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$ 力迫后，(κ_0, κ) 中不存在可测基数。*(3)* 如果 λ 是强紧的，那么经由 $\mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$ 力迫后，κ 仍然如此。

为了证明定理 2.24 的子句（3），我们将使用 Ketonen 对强紧基数的刻画，内容如下：

定理 2.25 (Ketonen [29]; Usuba [41, 引理 2.2 和 2.12])**.** 设 κ 是一个正则不可数基数，并设 $\lambda > \kappa$ 是一个不可达基数。则以下命题等价：

(1) κ是 λ-强紧。

(2) 对于每个 对于正则基数 $\mu \in [\kappa, \lambda]$，存在一个 κ-完备一致超滤子[28]，其定义在 μ上 .

定理 *2.24* 的证明。我们先证明条款（1）。设 W 是$\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$上的细正规测度。固定正规测度 U_0，其定义在 κ 上，以及正规测度 U_1，其定义在 λ上，二者的米切尔序均为序数 0。

先对测度 U_0进行相应的迭代超幂，接着取 U_1的像，再取 W的像。更正式地说，令：

- $j_{U_0}: \ V \to M_0 \simeq \mathrm{Ult}(V, U_0)$ 是与 U_0对应的超幂嵌入。记作$\kappa^* = j_{U_0}(\kappa)$。
- $j_{j_{U_0}(U_1)}^{M_0}$: $M_U \to M_1 \simeq \mathrm{Ult}(M_0, j_{U_0}(U_1))$ 是由 $j_{U_0}(U_1)$在M_0上给出的超幂嵌入。[29] 记作$\lambda^* = j_{j_{U_0}(U_1)}^{M_0}(\lambda)$。
- $j_1 = j_{j_{U_0}(U_1)}^{M_0} \circ j_{U_0}$: $V \to M_1$.
- $i = j_{j_1}^{M_1}(W)$: $M_1 \to M \simeq \mathrm{Ult}(M_1, j_1(W))$ 是与 $j_1(W)$在 M_1 上对应的超幂嵌入。
- $j = i \circ j_1$: $V \to M$。

我们的目标是证明，在用 $\mathbb{P} := \mathbb{NR}(\kappa_0, \ \kappa)$ 力迫之后， j 可以提升为一个初等嵌入，从而见证 κ 在 $V[G]$ 中具有 λ-强紧致性，其中 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是 V-泛型。由于在 V 中，区间 $(\kappa, \ \lambda)$ 内没有可测基数，因此在 M 中，力迫 $j(\mathbb{P})$ 可分解如下：

$$j(\mathbb{P}) = j(\mathbb{P})_{\kappa^*} * \mathbb{NR}(\kappa^*) * \mathbb{NR}(\lambda^*) * \mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa)).$$

我们将为每个因子构造泛对象。

从 $j(\mathbb{P})_{\kappa^*}$ 开始。根据引理 2.5， j_{U_0}: $V \to M_0$ 可在 $V[G]$ 内提升为

$$j_{U_0} : V[G] \to M_0[G * (j_{U_0}[G] \setminus \kappa + 1)].$$

（注意，在 $j_{U_0}(\mathbb{P})$ 的第 κ 阶段所用的力迫是平凡的，因为假设 U 具有平凡Mitchell秩。这就是我们能够得到上述提升的原因。）

记 $H := G * (j_{U_0}[G] \setminus \kappa + 1)$。显然， H 是在 M_1 上以及在 M 上的 $j(\mathbb{P})_{\kappa^*}$-泛型。$M_1[H]$ 和 $M[H]$ 在 $M_0[H]$ 内都对其元素构成的 λ-序列封闭，而 $M[H]$ 在 $M_1[H]$ 中对 λ^*-序列封闭。

现在继续进行 $\mathbb{NR}(\kappa^*)$。我们来构造 $h_0 \in V[G]$，使其在模型 $M_0[H]$、$M_1[H]$ 和 $M[H]$ 上是 $\mathbb{NR}(\kappa^*)$-泛型。注意

$$(\mathbb{NR}(\kappa^*))^{M_0[H]} = (\mathbb{NR}(\kappa^*))^{M_1[H]} = (\mathbb{NR}(\kappa^*))^{M[H]}$$

因为 $M_1[H]$ 和 $M[H]$ 在 $M_0[H]$中对 λ-序列封闭。

对于每个 $p \in G$，初等性表明， $j(\mathrm{supp}(p))$ 在 $j(\kappa)$ 以下处处非平稳。特别地， $j(\mathrm{supp}(p)) \cap \kappa^*$在 κ^* 中是非平稳的，这意味着 $\kappa^* \notin j(\mathrm{supp}(p))$。[30]这一观察表明，无需在主条件下构造 h_0；换言之，任何在 $M[H]$ 上泛型的 $h_0 \in V[G]$ 都可用于提升。此外，我们注意到，由于 $M_1[H]$ 和 $M[H]$ 在 $M_0[H]$ 中都对 λ-序列封闭，因此只需找到这样一个在 $M_0[H]$ 上泛型的 $h_0 \in V[G]$。我们按如下方式构造 h_0：回想一下， $M_0[H]$ 在 $V[G]$ 内对 κ-序列封闭，因此根据引理 2.18，$(\mathbb{NR}(\kappa^*))^{M_0[H]}$ 在 $V[G]$ 中是 κ^+-策略闭的。此外， $V[G]$ 按序型 κ^+ 列出了模型 $M_0[H]$ 内所有属于 $(\mathbb{NR}(\kappa^*))^{M_0[H]}$ 的稠密子集。因此，可以通过逐一满足所有这些稠密集来构造 $h_0 \in V[G]$：在博弈 $G_{\kappa^+}(\mathbb{NR}(\kappa^*))$ 的一次进行中，玩家 II 按照其必胜策略行棋。注意， $M_1[H * h_0]$ 和 $M[H * h_0]$ 在 $M_0[H * h_0]$ 内仍对 λ-序列封闭，而 $M[H * h_0]$ 在 $M_1[H * h_0]$ 中仍对 λ^*-序列封闭。

---

[28]正则基数 μ 上的超滤子 U 是一致的，如果 U 中的每个集合都具有大小 μ。[29]$\lambda = j_{U_0}(\lambda)$，因为 $\lambda > \kappa$ 是不可达基数。因此，$j_{U_0}(U_1)$是 M_0中 λ 上的一个测度。[30]事实上，设 $C \subseteq \kappa^*$ 是一个与 $j(\mathrm{supp}(p)) \cap \kappa^* = \mathrm{supp}(p)$不相交的闭无界集。由于 $C \subseteq j(C)$，且 $j(C)$是 $j(\kappa^*)$上的闭无界集，因此可得 $\kappa^* \in j(C)$。由于 $j(C)$与 $j(\mathrm{supp}(p))$不相交，我们便得到了所需结论。

接下来，转到 $\mathbb{NR}(\lambda^*)$。我们来构造一个 $\mathbb{NR}(\lambda^*)$-泛型的 $h_1 \in M_0[H * h_0]$，使其同时对 $M_1[H * h_0]$ 和 $M[H * h_0]$ 泛型。再次注意，

$$(\mathbb{NR}(\lambda^*))^{M_1[H*h_0]} = (\mathbb{NR}(\lambda^*))^{M[H*h_0]}$$

因为 $M[H * h_0]$ 在 $M_1[H * h_0]$ 中对 λ^*-序列封闭。

构造的这一部分还有一个附加注意事项：对于条件 $p \in G$，$\lambda^* \notin \text{supp}(j(p))$ 已不再成立。因此，为了在构造结束时应用 Silver提升准则，我们需要确保选择泛型 h_1，使得 $j[G] \restriction (\lambda^* + 1) \subseteq H * h_0 * h_1$。我们通过构造一个合适的主条件来实现这一点。主要障碍在于，力迫 $\mathbb{NR}(\lambda^*)$ 并非充分有向闭；根据引理 2.20，它有一个稠密的 ζ-有向闭子集，其中 $\zeta < \lambda^*$ 可以任意大，但不清楚对于 $q \in H$，形如 $i(q)(\lambda^*)$ 的条件是否属于相关的稠密有向闭子集。我们通过找出一个稠密子集 $D \subseteq j_1(\mathbb{P})$ 来克服这一问题；该子集中的条件经由 i 转移到 $j(\mathbb{P})$ 的一个充分有向闭稠密子集中。

由引理 2.23，存在一个稠密子集 $D \subseteq j_1(\mathbb{P})$，它由所有这样的条件 $q \in j_1(\mathbb{P})$ 组成：存在一个闭无界集 $C \subseteq \kappa^*$，使得对每个 $\alpha \in C$ 以及对每个 $\beta \in \text{支撑}(q) \setminus (\alpha + 1)$，

$$q \restriction \beta \Vdash q(\beta) \in \dot{\mathbb{NR}}_{\alpha^{++},M_1}(\beta).$$

给定 $q \in H \cap D$，令 $C \subseteq \kappa^*$ 为见证 $q \in D$ 这一事实的闭无界集。由于 $\text{crit}(i) = \kappa^*$，$\kappa^* \in i(C)$。因此，若 $\lambda^* \in \text{支撑}(i(q))$，则

$$q \restriction \lambda^* \Vdash q(\lambda^*) \in \dot{\mathbb{NR}}_{(\kappa^*)^{++},M}(\lambda^*).$$

在 $M[H * h_0]$ 中，考虑集合

$$A = \{i(q)(\lambda^*) \colon q \in (H \cap D) \wedge \lambda^* \in \text{supp}(i(q))\}.$$

由于 $i \restriction j_1(\mathbb{P}) \in M$，$A \in M[H * h_0]$。此外 $A \subseteq \mathbb{NR}_{(\kappa^*)^{++}}(\lambda^*)$ 且 $|A| = (\kappa^*)^+$。由于 A 是一个由条件构成的有向集，且 $\mathbb{NR}_{(\kappa^*)^{++}}(\lambda^*)$ 是一个 $(\kappa^*)^{++}$-有向闭偏序集，故在 $M[H * h_0]$ 中存在 A 中所有条件的一个下界 $t \in \mathbb{NR}(\lambda^*)$。特别地，由 D 的稠密性，t 是 $\{i(q)(\lambda^*)$ 中所有条件的一个下界：$q \in H\}$。由于 H 由形如 $j_1(p)$[31]（对 $p \in G$）的条件生成，我们推出 t 对所有 $p \in G$ 都延拓 $j(p)(\lambda_*)$。最后，我们构造$h_1 \in M_0[G * h_0]$，它在 $t \in h_1$ 的条件下对 $M_1[H * h_0]$ 和 $M[H * h_0]$ 都是 $\mathbb{NR}(\lambda^*)$-泛型的。为此，注意到 $\mathbb{NR}(\lambda^*)$ 在 $M_0[H * h_0]$ 的意义下是 λ^+，^{M_0}-策略闭的，因为 $M_1[H * h_0]$和 $M[H * h_0]$ 在 $M_0[H * h_0]$ 中对 λ-序列封闭。此外，$M_0[H * h_0]$ 拥有 $\mathbb{NR}(\lambda^*)$ 的所有稠密子集的一个序型为 λ^+，^{M_0} 的列表。因此，$h_1 \in M_0[H * h_0]$ 可以通过在博弈 G_{λ^+}，$_{M_0}(\mathbb{NR}(\lambda^*))$ 的一次进行中逐一满足所有这些稠密子集来构造，其中玩家 II 按其必胜策略出招，而玩家 I 通过选取条件t来开局。

根据标准论证，$M[H * h_0 * h_1]$ 在 $M_1[H * h_0 * h_1]$中对 λ^*-序列保持封闭。

最后，我们来处理迭代的最后一部分，$\mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$。让我们在 $M[H * h_0 * h_1]$ 上构造一个合适的泛集 $H^* \subseteq \mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$，使得 $i[H] \setminus (\lambda^* + 1) \subseteq H^*$，其中，照例

$$i[H] \setminus (\lambda^* + 1) := \{i(q) \setminus (\lambda^* + 1) \colon q \in H\}.$$

为了构造 H^*，我们首先需要构造一个合适的主条件 $s \in \mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$，使得 s 扩展 $i[H] \setminus (\lambda^* + 1)$ 中的所有条件。我们使用与上述构造 t 相同的技巧来完成这一步。令 $D \subseteq j_1(\mathbb{P})$ 为与上文相同的稠密集。给定 $q \in H \cap D$，令 $C \subseteq \kappa^*$ 为证明 $q \in D$ 成立的闭无界集。与上文一样，$\kappa^* \in i(C)$，因此对每个 $\beta \in \text{supp}(i(q))$，都有 $\setminus(\kappa^* + 1)$，

$$i(q) \restriction \beta \Vdash i(q)(\beta) \in \dot{\mathbb{NR}}_{(\kappa^*)^{++}}(\beta).$$

[31] H 由形如 $j_{U_0}(p)$的条件生成。然而，$j_{U_0(U_1)}$ 的临界点远高于 $j_{U_0}(\mathbb{P})$的秩，因此 $H = \{j_1(p) \mid p \in G\}$ 也是泛型的。

特别地， $B = \{i(q) \setminus (\lambda^* + 1) \colon q \in H \cap D\}$ 包含在 $\mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$ 的一个 $(\kappa^*)^{++,M}$-有向闭子集中。由于 $|H| = (\kappa^*)^{+,M}$，存在 B 的一个下界 $s \in \mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$。同一个条件 s 也是 $i[H] \setminus (\lambda^* + 1)$ 的下界，因为 D 在 $j_1(\mathbb{P})$ 中稠密。因此，接下来只需构造 $H^* \in M_1[H * h_0 * h_1]$，使得 $H^* \subseteq \mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$ 在 $M[H * h_0 * h_1]$ 和 $s \in H^*$ 上是泛型的。由于 $M[H * h_0 * h_1]$ 在 $M_1[H * h_0 * h_1]$ 内对 λ^*-序列封闭， $\mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$ 在 $M_1[H * h_0 * h_1]$ 中是 $(\lambda^*)^{+,M_1}$-策略闭的。此外， $M_1[H * h_0 * h_1]$ 有一个序型为 $(\lambda^*)^{+,M_1}$ 的枚举，其中包含 $\mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa))$ 的所有稠密子集。因此，可以通过在博弈 $G_{(\lambda^*)^{+,M_1}}(\mathbb{NR}(\lambda^*, j(\kappa)))$ 的一次进行中逐一满足所有这些稠密集来构造泛型 $H^* \in M_1[H * h_0 * h_1]$；在这次博弈中，玩家 II 按照其必胜策略行动，玩家 I 则以选取条件 s 开始博弈。最后，请注意， $M[H * h_0 * h_1 * H^*]$ 在 $M_1[H * h_0 * h_1]$ 中仍对 λ^*-序列封闭。

至此，我们完成了在 $V[G]$内部构造泛型扩张 $M[H * h_0 * h_1 * H^*]$。请注意，我们在构造过程中确保了

$$j[G] \subseteq H * h_0 * h_1 * H^*.$$

因此，根据 Silver提升准则， j 可提升为一个嵌入

$$j^* \colon V[G] \to M[H * h_0 * h_1 * H^*].$$

剩下要证明的是， j^* 见证了 κ 在 $V[G]$中的 λ-强紧致性。事实上，这可由以下事实综合得出：

- $M[H * h_0 * h_1 * H^*]$ 对 κ-序列封闭，且这些序列属于 $V[G]$。
- $j(\kappa) > \lambda$。
- $j[\lambda]$ 被集合 S 覆盖：$= i[j_1(\lambda)] = i[\lambda^*] \in M[H * h_0 * h_1 * H^*]$，并且 $|S|^{M[H * h_0 * h_1 * H^*]} = \lambda^* < j(\kappa)$。

对于定理的子句（2），注意，若一个基数承载着一个非反射平稳子集，它就不是可测基数。因此，区间（κ_0, κ）中的每个 V-可测基数，在通过 $\mathbb{P}$ 进行力迫后都不再是可测基数。此外， $V[G]$ 中的任何可测基数，在 V 中必定已经是可测基数（事实上， $\mathbb{P}$ 在最小的 V-可测基数处有一个间隙，且在其下方是平凡的，因此它不可能产生新的可测基数）。因此，在 $V[G]$ 中，区间（κ_0, κ）不包含可测基数。

最后，让我们证明定理的子句（3）。根据定理 2.25，只需证明在 $V[G]$ 中，每个正则基数 $\mu \geq \kappa$ 都有一个 κ- 完备的一致超滤子。根据条款（1）， κ 在 $V[G]$ 中是 λ- 强紧的，因此根据定理 2.25，每个正则基数 $\mu \in [\kappa, \lambda]$ 在 $V[G]$ 中都带有一个 κ-完备的一致超滤子。因此，剩下的就是处理大于 λ 的正则基数。由于 λ 在 V 中是强紧的，每个正则基数 $\mu > \lambda$ 都带有一个一致的、 λ-完备的超滤子 $U_\mu \in V$。由于 $|\mathbb{P}| = \kappa^+$，同一个超滤子在 $V[G]$ 中的 μ 上生成一个一致的、 λ-完备的超滤子 U^*_μ，[32]，正如所需。□

不存在大于 κ 的可测基数这一情形对我们也很重要，而且可以用与上述相同的技巧证明。事实上，证明更简单，因为无需在 λ 上再取一个具有序数 0 阶正规测度的超幂。

定理 2.26. 假设 广义连续统假设成立。假设 κ 是一个超紧基数， $\kappa_0 < \kappa$，并令 $\mathbb{P} = \mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$。假设 κ 以上不存在可测基数。那么，在通过 $\mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$ 进行力迫后， κ 是强紧的。此外，在通过 $\mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$ 进行力迫后，区间 (κ_0, κ) 内不存在可测基数。

[32]事实上，对每一个 $\eta < \lambda$ 以及 $V[G]$中的序列 $\langle A_i \colon i < \eta \rangle \subseteq U^*_\mu$，找出 $V[G]$ 中的序列 $\langle B_i \colon i < \eta \rangle \subseteq U_\mu$，使得对所有 i都有 $B_i \subseteq A_i$。设 $S \in V$、 $S \subseteq U_\mu$、 $|S| < \lambda$ 是覆盖 $\{B_i \colon i < \eta\}$的一个集合。于是$\bigcap S \subseteq \bigcap_{i<\eta} A_i$ 且 $\bigcap S \in U_\mu$，故 $\bigcap_{i<\eta} A_i \in U^*_\mu$。

证明。 取一个强极限基数 $\lambda > \kappa$，使得 cf(λ) $> \kappa$。取 $\mathcal{P}_\kappa(\lambda)$ 上的一个细正规测度 W。令 U 为 κ 上的一个米切尔序为序数 0 的正规测度。考虑迭代超幂，先使用U，再使用 W的像，即

$$j = j^{M_U}_{j_U(W)} \circ j_U \colon V \to M.$$

注意，在定理的假设下，$\lambda = j_U(\lambda)$ 不可测，因此无需在 λ 上取序数 0 正规测度的超幂。记 $\kappa^* = j_U(\kappa)$, 并分解

$$j(\mathbb{P}) = j(\mathbb{P})_{\kappa^*} * \dot{\mathbb{NR}}(\kappa^*) * \dot{\mathbb{NR}}(\lambda, j(\kappa)).$$

现在仿照定理 2.24 的证明，找到合适的泛型 $H * h_0 * H^*$，使其对应于 M 上的 $j(\mathbb{P})$，并将 j 提升至 $j^* \colon V[G] \to M[H * h_0 * H^*]$，从而见证 κ 在 $V[G]$ 中具有 λ-强紧致性。这里省略细节，因为它们与定理 2.24 的证明完全相同。

由于 λ 可以任意大，κ 在 $V[G]$ 中是完全强紧的。 □

我们通过刻画 本小节，来结束对在用 $\mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$ 进行力迫之后，κ 上正规测度的讨论。 .

引理 2.27. 设 κ 是一个可测基数，且 $\kappa_0 < \kappa$。记 $\mathbb{P} = \mathbb{NR}(\kappa_0, \kappa)$。设 $G \subseteq \mathbb{P}$ 在 V 上泛型的。那么 κ 在 $V[G]$ 中仍然是可测的。此外：

(1) 对于 κ 上 *Mitchell* 序为序数 0的每个正规测度 $U \in V$，U 生成 κ 上的一个正规测度 $U^* \in V[G]$。*(2)* κ 上的每个正规测度 $W \in V[G]$ 都具有 U^* 的形式，其中 $U \in V$ 是 κ 上 *Mitchell* 序为序数 0 的某个正规测度。

证明. 设 κ 上序数 0 阶的一个正规测度为 $U \in V$。注意，在 $M_U \simeq \mathrm{Ult}(V, U)$ 中，κ 不是可测的。因此，由引理 2.5，j_{U_0} 可提升为嵌入 $j^* \colon V[G] \to M[G * (j_{U_0}[G] \setminus (\kappa + 1))]$。定义 $U^* = \{X \subseteq \kappa \colon \kappa \in j^*(X)\}$。于是，$U^*$ 是 $V[G]$ 中 κ 上的一个正规测度。不难验证，j^* 是与 U^* 关联的超幂嵌入。下面说明 U 在 $V[G]$ 中生成 U^*。假设 $X \in V[G]$ 是 U^* 中 κ 的一个子集。设 X 是 X 的一个 $\mathbb{P}$-名称。那么，对某个 $p \in G$，有 $j_{U_0}(p) \Vdash \kappa \in j_{U_0}(X)$。由此可得 $A = \{\alpha < \kappa \colon p \Vdash \alpha \in X\} \in U$，且 $A \subseteq X$。

反之，假设 $W \in V[G]$ 是 κ上的一个正规测度。由Hamkins 间隙强迫定理（定理2.7），我们有 $U := W \cap V \in V$。容易验证 $U \in V$是 κ上的一个正规测度。我们断言 U 的米切尔序必须为序数 0。设 $\Delta \subseteq \kappa$ 表示 V中可测基数的集合，并假设为了推出矛盾而有 $\Delta \in U$。于是特别地有 $\Delta \in W$。回想 Δ 中没有任何基数在 $V[G]$中仍保持可测，因为 $\mathbb{P}$ 对每个这样的基数都添加了一个非反射平稳子集。由于 W 是正规的且 $\Delta \in W$，由此可得 $\kappa \in j_W(\Delta)$。因此，在$\mathrm{Ult}(V[G], W)$中，存在一个非反射平稳子集 $S \subseteq \kappa$。然而，$V[G]$ 与$\mathrm{Ult}(V[G], W)$在 κ 的子集及其平稳性上是一致的。因此，S是 $V[G]$中 κ 的一个非反射平稳子集，这与 κ 在 $V[G]$中的可测性相矛盾。

由此可知，U 的米切尔序为序数 0。最后，由于 $U \subseteq W$ 和 U 生成了一个超滤子$U^* \in V[G]$，我们推得 $W = U^*$，正如所需。□

3. The main theorems

本节将应用目前为止所发展的理论来证明本文的主要定理。总体主题（如引言中所述）是构造这样的模型：超出当前内模型计划处理范围的可测基数（例如，可测极限超紧基数等）携带任意预先指定数量的正规测度。我们的所有结果均在以下假设下得到证明：在基模型中，每个相关的可测基数恰好携带一个米切尔序为序数 0 的正规测度。

3.1. 最前面的有限多个可测基数。 我们开始证明 Kimchi 和 Magidor（未发表）的经典定理的一个变体。该定理指出，对于每个 $n < \omega$，最前面的 n个可测基数都可以是强紧基数，并且每个基数都具有任意指定数量的正规测度。

定理 3.1。 假设广义连续统假设 成立，存在 $n<\omega$ 个超紧基数 $\langle\kappa_i\colon\ \ i<n\rangle$，在 κ_{n-1}之上不存在可测基数，并且每个 κ_i 都有一个米切尔序为0的唯一正规测度。对于每个 $i<n$，令$\tau_i\leq\kappa_i^{++}$为一个基数。那么存在一个泛型扩张，使得广义连续统假设 成立，$\langle\kappa_i\colon\ \ i<n\rangle$ 是最前面的 n 个强紧基数，也是最前面的 n 个可测基数，并且每个 κ_i恰好具有 τ_i 个正规测度。

证明。 我们首先使超紧基数 κ_0，……，κ_{n-1} 在足够有向闭、且保持基数与广义连续统假设的力迫下不可破坏。同时，我们确保对每个 $i<n$， κ_i 都具有唯一的米切尔序为 0 的正规测度。为此，对每个 $i<n$， $\rho_i:=(\kappa_{i-1})^+$ （若 $i=0$， $\rho_0:=0$），并定义一个有限迭代力迫

$$\mathbb{L}=\langle\mathbb{L}_i,\dot{\mathbb{L}}(\kappa_i,\rho_i)\colon i<n\rangle$$

其中 $\mathbb{L}(\kappa_i,\ \rho_i)$ 是规范的 $\mathbb{L}_i$-名称，表示使 κ_i 的超紧性在 $(\kappa_i)^+$-有向闭力迫下不可破坏，同时保持 κ_i 上米切尔序为 0 的正规测度数量与 $V^{\mathbb{L}_i}$ 中相同的 ρ_i-有向闭力迫（参见记号 2.17）。

断言 3.1.1。 $\mathbb{L}$ 保持基数、广义连续统假设以及每个 κ_i 的超紧性。此外，在通过 $\mathbb{L}$ 进行力迫后，每个κ_i 仍在 $(\kappa_i)^+$-有向闭力迫下不可破坏，且具有唯一的米切尔序为 0 的正规测度。

断言的证明。 $\mathbb{L}$ 保持基数和广义连续统假设这一事实，是因为它是由具有这些性质的力迫组成的有限迭代。因此，我们着重考察每个 κ_i的超紧性和不可毁性。

设 $G\subseteq\mathbb{L}$ 是 V上的泛型。固定 $i<n$。我们验证 κ_i 在 $V[G]$中仍然是超紧的。将力迫分解为 $\mathbb{L}=\mathbb{L}_i*\mathbb{L}(\kappa_{i+1},\ \rho_{i+1})*\mathbb{L}\setminus(i+1)$。由于 $\mathbb{L}_i\in H(\kappa_i)$，用 $\mathbb{L}_i$ 进行力迫不会影响 κ_i的超紧性，因此 κ_i 在 $V[G_i]$中仍然是超紧的。此外，由于 κ_i 在 V 中具有一个米切尔序为序数 0 的唯一正规测度，这在 $V[G_i]$中也同样成立。由于广义连续统假设在 $V[G_i]$中仍成立，定理 2.16 适用。由此可知，在 $V[G_{i+1}]$中，基数 κ_i 是超紧的，具有一个米切尔序为序数 0 的唯一正规测度，并且在 $(\kappa_i)^+$-有向闭力迫下不可破坏。

现在注意到，尾部力迫 $\mathbb{L}\setminus(i+1)$ 是 $(\kappa_i)^+$-有向闭的。根据不可毁性， κ_i因此在 $V[G]$ 中仍然是超紧的。此外，没有新增关于 κ_i 的正规测度，因此它在 $V[G]$ 中恰好具有与在 $V[G_{i+1}]$ 中相同的正规测度；特别是，它仍然具有一个米切尔序为序数 0 的唯一正规测度。

接下来需要验证 κ_i 在 $V[G]$ 中是不可毁的。设 $\mathbb{Q}\in V[G]$ 是一个 $(\kappa_i)^+$-有向闭偏序集。那么两步力迫 $\mathbb{L}\setminus(i+1)*\dot{\mathbb{Q}}$ 本身是 $(\kappa_i)^+$-有向闭的。由于 κ_i 在 $V[G_i]$ 中已经能抵御这类力迫而保持不可毁，因此在 $V[G]$ 上使用 $\mathbb{Q}$ 进行力迫会保留 κ_i 的超紧性。由此便证明了该断言。□

为简化记号，假设 V 已经是由 $\mathbb{L}$ 得到的泛型扩张，也就是说，假设广义连续统假设在 V 中成立， κ_0，……，κ_{n-1} 是超紧基数，且每个 κ_i 在 $(\kappa_i)^+$-有向闭力迫下都是不可破坏的，并且每个 κ_i 都带有一个米切尔序为序数 0 的唯一正规测度。考虑乘积力迫

$$\mathbb{R}=\prod_{i<n}(\dot{\mathbb{P}}^{\tau_i,I_i}*\dot{\mathbb{NR}}(\kappa_{i-1},\kappa_i))$$

其中

- I_i 是（κ_{i-1},κ_i）中作为强基数之极限的不可达基数的集合（此处及下文，我们令 $\kappa_{i-1}=0$ 表示 $i=0$）。
- 若 $\tau_i\leq$（κ_i）$^+$，则 $\mathbb{P}^{\tau_i,I_i}$ 是引理 2.13 中的间隔分裂力迫。
- 若 $\tau_i=$（κ_i）$^{++}$，则 $\mathbb{P}^{\tau_i,I_i}$ 是引理 2.14 中的力迫。
- $\mathbb{NR}$（κ_{i-1},κ_i）是非平稳支撑迭代力迫，它向区间（κ_{i-1},κ_i）中的每一个可测基数添加一个非反射平稳子集，其定义见第 2.4 节。

我们论证：在 $V^{\mathbb{R}}$中，基数 $\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1}$ 是强紧的，不存在其他可测基数，并且每个 κ_i 恰好承载 τ_i 个正规测度。这将在下面的断言中得到证明，该断言完成了本定理的证明：

断言 3.1.2. 设 $i < n-1$。对 V进行力迫后，

$$\mathbb{R}_{\geq i} = \prod_{j \geq i} (\dot{\mathbb{P}}^{\tau_j, I_j} * \dot{\mathbb{N}}\mathbb{R}(\kappa_{j-1}, \kappa_j)),$$

所有基数 $\kappa_i, \dots, \kappa_{n-1}$ 都是强紧的，κ_{i-1}以上没有其他可测基数，并且对于每个 $j \geq i$，基数 κ_j 恰好携带 τ_i 个正规测度。

断言的证明。 按照 Apter–Cummings 的证明 [2], ，我们进行向下归纳。首先证明断言对 $i = n-1$成立；归纳步骤则是在假设断言对 $i+1$成立的基础上，证明断言对i成立。定理由 $i = 0$的情形得出。

我们先处理 κ_{n-1} （κ_{n-1} 是顶端基数）。考虑对其进行的力迫 g

$$\mathbb{R}_{\geq n-1} = \dot{\mathbb{P}}^{\tau_{n-1}, I_{n-1}} * \dot{\mathbb{N}}\mathbb{R}(\kappa_{n-1}, \kappa_n)$$

。根据引理 2.13 和 2.11，在 $V^{\dot{\mathbb{P}}^{\tau_{n-1}}, I_{n-1}}$ 中，广义连续统假设成立，κ_{n-1} 仍然是超紧基数，并且恰好携带 τ 个序数 0 的正规测度。由于在 $V^{\dot{\mathbb{P}}^{\tau_{n-1}}, I_{n-1}}$ 中，κ_{n-1} 以上没有可测基数，我们可以应用定理 2.26，推得在 $V^{\mathbb{R}_{\geq n-1}}$ 中，κ_{n-1} 是一个强紧基数。根据引理 2.27，κ_{n-1} 在 $V^{\mathbb{R}}$ 中恰好携带 τ_{n-1} 个正规测度。

接下来，我们处理 κ_i 关于 $i < n-1$ 的情形。考虑力迫

$$\mathbb{R}_{\geq i} = \prod_{j > i} (\dot{\mathbb{P}}^{\tau_j, I_j} * \dot{\mathbb{N}}\mathbb{R}(\kappa_{j-1}, \kappa_j)),$$

并将其分解为如下形式

$$\mathbb{R}_{\geq i} = \mathbb{R}_{>i} \times \left(\dot{\mathbb{P}}^{\tau_i, I_i} * \dot{\mathbb{N}}\mathbb{R}(\kappa_{i-1}, \kappa_i) \right).$$

在用 $\mathbb{R}_{>i}$ 对 V 进行力迫之后，以下性质成立：

- κ_i 是超紧的，因为 κ_i 在 V 中对 $(\kappa_i)^+$-有向闭力迫是不可破坏的，而 $\mathbb{R}_{>i}$ 正是这种力迫。
- $\kappa_{i+1}, \dots, \kappa_{n-1}$ 是强紧基数；在 κ_i 以上没有其他可测基数，并且每个 κ_j （对于 $j > i$）都恰有 τ_j 个正规测度。这由归纳假设可知。
- 满足广义连续统假设，因为 $\mathbb{R}_{>i}$ 是保广义连续统假设的力迫的有限积，因此保持广义连续统假设。
- κ_i 具有唯一的序数 0 米切尔序正规测度，因为这在 V 中成立，且 $\mathbb{R}_{>i}$ 是一个 $(\kappa_i)^{++}$-闭偏序集。

根据定理 2.13，除最后一点外，以上所有列出的性质都会延续到 $V^{\mathbb{R}_{>i} \times \dot{\mathbb{P}}^{\tau_i}, I_i}$。最后一点现在改为：$\kappa_i$ 恰有 τ_i 个米切尔序为序数 0 的正规测度。最后，根据定理 2.24，在 $V^{\mathbb{R}_{\geq i}} = V^{\mathbb{R}_{>i} \times (\dot{\mathbb{P}}^{\tau_i, I_i} * \dot{\mathbb{N}}\mathbb{R}(\kappa_{i-1}, \kappa_i)}$ 中，κ_i 成为强紧基数，并且是 κ_{i-1} 以上最小的可测基数。此外，根据引理 2.27，κ_i 恰有 τ_i 个正规测度。力迫 $\mathbb{P}^{\tau_i, I_i} * \dot{\mathbb{N}}\mathbb{R}(\kappa_{i-1}, \kappa_i)$ 相对于基数 $\kappa_{i+1}, \dots, \kappa_{n-1}$ 是小的。因此，它们的强紧性、它们是 κ_i 以上仅有的可测基数这一事实，以及它们所具有的正规测度数量，都与 $V^{\mathbb{R}_{>i}}$ 中的情况保持不变。总之，我们得到：用 $\mathbb{R}_{\geq i}$ 进行力迫之后，以下性质成立：$\kappa_i, \kappa_{i+1}, \dots, \kappa_{n-1}$ 是强紧基数；在 κ_{i-1} 以上没有可测基数；并且每个 κ_j （对于 $j \geq i$）都恰有 τ_j 个正规测度。至此，归纳论证完成。□

证明到此结束。 □

由三步迭代组成：(1) 偏序集 $\mathbb{L}_i$，使 κ_i 的超紧性在 $(2^{\kappa_i})^+$-有向闭迫下不可破坏；(2) 第 12 页的分裂偏序集 $\mathbb{P}^{\tau_i}$，从 $(2^{\kappa_i})^+$ 之后开始迭代；(3) 非平稳支撑迭代，它会在 (κ_{i-1}, κ_i) 中的每个可测基数上添加一个没有固定共尾数的非反射平稳集。

3.2. **超紧基数之上的第一个可测基数**。 现在我们转而讨论超紧基数之上的最小可测基数。Friedman–Magidor 技术 [14] 无法控制此类基数上的正规测度数量，因为该技术是在$L[U]$上进行的。[33] 不过，可以利用分裂强迫来控制不可破坏的超紧基数之上的最小可测基数上的正规测度数量。

定理3.2。 假设广义连续统假设 成立， κ 是一个超紧基数，而 λ 是大于 κ的第一个可测基数。此外，假设 λ 有唯一正规测度。那么，对于每个基数$\tau \leq \lambda^{++}$，都存在一个力迫扩张，使得以下条件成立：

(1) κ是超紧基数；*(2)* λ是可测基数；
(3) λ恰好承载 τ 个正规测度。

证明。 令 $\mathbb{L}$ 为Laver预备，使 κ 的超紧性在 κ-有向闭力迫下不可破坏（这里可以使用定理 2.15，也可以使用Laver在 [32],中的原始构造，因为我们并不关心控制 κ上的测度。此外，若还希望在使用 $\mathbb{L}$进行力迫后保留基数和广义连续统假设——这一性质本身或许也值得关注——则可以改用定理 2.16）。令 $G \subseteq \mathbb{L}$ 为 V上的泛型。根据L´evy–Solovay定理（见[34]）， λ 在 $V[G]$ 中仍然是可测基数，并且承载唯一正规测度 U，其米切尔秩必为平凡。

若 $\tau = (\lambda^{++})^{V[G]}$，则使用 Easton 支撑迭代，在区间（$\kappa$， λ] ）内的每个不可达基数上添加一个 Cohen 子集（或者，应用引理 2.14，将引理陈述中的（κ_0， κ）替换为（κ， λ））。这会使 λ 上的正规测度数量增至（ λ^{++} ） $^{V[G]}$，同时保留 κ 的超紧性。

若 $\tau \leq (\lambda^{+})^{V[G]}$，则使用分裂强迫 $\mathbb{P}^{\tau,\, I}$，其中 $I \subseteq \kappa$ 是大于 λ 的不可达基数集合。根据定理 2.8，若 $H \subseteq \mathbb{P}^{\tau,\, I}$ 是 $V[G]$ 上的泛型，则 λ 上的每个正规测度 $W \in V[G][H]$ 都具有形式 U^*_η，其中 $\eta < \tau$ 是某个对象。□

3.3. **超紧基数的第一个可测极限**。 本节研究最小的、作为超紧基数可测极限的基数上正规测度的数量。首先说明这个基数为何值得关注。

根据 Menas 的一个著名定理，每个作为强紧基数极限的可测基数都是强紧基数（见 [36, 定理 2.21]）。在一项近期具有里程碑意义的结果中，Goldberg 证明，在超幂公理成立的情况下，每个不是超紧基数的强紧基数，都是超紧基数的可测极限（见 [19, 定理 8.3.10]）。由此可知，在超幂公理成立的情况下，Menas 定理实质上是区分强紧基数与超紧基数的唯一途径。

假设超幂公理成立，或米切尔序具有线性性，则 κ最小的超紧基数的可测极限是一个强紧基数，且携带唯一正规测度（因此它不可能是超紧基数）。事实上，如果 κ 携带两个不同的正规测度，那么其中一个的米切尔序非零。因此， κ 是可测基数且为超紧基数极限这一事实，在相应的超幂中仍然成立。特别是，这一性质会反映到一个更小的基数上，从而与 κ的最小性矛盾。

下一个定理说明了如何控制超紧基数的最小可测极限上的正规测度数量。

我们指出，下面的证明技巧同样适用于强基数的最小可测极限。根据 Hamkins 的一个定理（见 [21, 推论 2.7]），作为强基数极限的可测基数都是高基数。关于高基数上正规测度的数量

[33]更准确地说，Friedman–Magidor构造是在任意 GCH模型之上进行的；然而，第一步是进行一次类迫使迭代，通过一个实数对宇宙进行编码，从而将其转移到 $L[U, r]$，其中某个实数为 r。这一过程会摧毁超紧基数。

的研究已相当深入 [3]。定理 3.3 为其中的一些结果提供了另一种证明。

定理 3.3。 假设 广义连续统假设 成立，并设 κ 是超紧（强）基数的第一个可测极限。假设 κ 携有一个米切尔序为 0 的唯一正规测度。令 $\tau \leq \kappa^{++}$ 为一个基数。那么，存在一个泛型扩张，其中 κ 仍然是超紧（强）基数的第一个可测极限，并且 κ 携有恰好 τ 个正规测度。

证明。 令 κ 为超紧（强）基数的第一个可测极限。记 I 为 κ 以下所有作为超紧（强）基数极限的不可达基数的集合。我们的证明通过对两步迭代 $\mathbb{Q} = \text{Add}(\omega, 1) * \dot{\mathbb{P}}$ 进行力迫来展开，其中 $\dot{\mathbb{P}}$ 是一个 I-间隔的非平稳支撑迭代力迫（$\dot{\mathbb{P}}$ 将在下文正式定义），从而 $\mathbb{Q}$ 在 ω_1 处呈现一个间隙。特别地，根据 Hamkins 间隙强迫定理（定理2.7），使用 $\mathbb{Q}$ 进行力迫不会产生新的超紧、强或可测基数。因此，如果 $\dot{\mathbb{P}}$ 保持 κ 是超紧（强）基数的可测极限这一事实，那么它也会保持 κ 是最小的此类基数。

首先假设 $\tau \leq \kappa^+$。令 $\dot{\mathbb{P}} = \langle \dot{\mathbb{P}}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha \colon \alpha < \kappa \rangle$ 为 I-间隔的非平稳支撑迭代，其中对每个 $\alpha \in I$，$\dot{\mathbb{P}}_\alpha$-名称 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 如下取定：

(1) 若 $\alpha \in I$ 是 I的极限点，则 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 是一个 $\dot{\mathbb{P}}_\alpha$-名称，表示原子强迫 $\{\mathbb{1}\} \cup \dot{f}_\tau(\alpha)$（这里 $\dot{f}_\tau$是与 τ相关联的典范函数，而 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 如第 2.2 节分裂强迫的定义中所述）。(2) 若 $\alpha \in I$ 不是 I的极限点，令 λ_α 为严格大于 α的最小超紧（强）基数，并令 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 为记号 2.17 中 Laver预备 $\mathbb{L}(\alpha^+, \lambda_\alpha)$ 的 $\dot{\mathbb{P}}_\alpha$-名称（对于定理的“强”版本，$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 取为记号 2.17 中的 $\mathbb{GS}(\alpha^+, \lambda_\alpha)$）。

令 $G \subseteq \mathbb{Q}$ 在 V上是泛型的。

我们首先论证，κ 在 $V[G]$中仍是超紧（强）基数的极限。只需证明，对于每个不是 I的极限点的基数 $\alpha \in I$，λ_α 在 $V[G]$中仍是超紧（强）基数。事实上，将其分解为

$$\mathbb{Q} = \text{Add}(\omega, 1) * \dot{\mathbb{P}}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha * \dot{\mathbb{P}} \setminus (\alpha + 1)$$

并注意到，$\text{Add}(\omega, 1) * \dot{\mathbb{P}}_\alpha$ 保持 λ_α 的超紧性（强性），因为相对于 λ_α而言，它是一个小型力迫；$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 保持 λ_α 的超紧性（强性），并使其在 $(\lambda_\alpha)^+$-有向闭力迫下不可摧毁；而 $\dot{\mathbb{P}} \setminus (\alpha + 1)$ 是 $(\lambda_\alpha)^+$-有向闭的，因为 $\min(I \setminus (\alpha + 1)) > \lambda_\alpha$。因此，$\lambda_\alpha$ 在 $V[G]$中仍是超紧（强）基数。

接下来，我们论证 κ 在 $V[G]$中仍然可测，并且恰好承载 τ 个正规测度。根据定理前的说明，κ 在 V中承载唯一正规测度 U。现在我们打算运用引理 2.5，将嵌入 $j_U \colon V \to M_U$ 提升至 $V[G]$。在此之前，我们先验证该引理的假设均已满足。对于条款 (⊐)，注意到 κ 是 j_U的唯一生成元，因此被 $j_U(\alpha \mapsto \alpha^+)(\kappa) = \kappa^+$所界定，而后者小于 $\min(j_U(I) \setminus (\kappa+1))$。

由于 $\kappa \in j_U(I)$，引理 2.10 中的同一论证表明，$j_U \colon V \to M_U$ 恰好以 τ 种方式提升到 $V[G]$。更准确地说，扩展 j_U 的嵌入 $j^* \colon V[G] \to M^*$ 具有以下形式

$$j^*_\eta \colon V[G] \to M_U[G * \{\langle \kappa, \eta \rangle\} * (j_U[G] \setminus \kappa + 1)]$$

对于某个 $\eta < \tau$，每个 j^*_η 都会在 $V[G]$ 中诱导出 κ 上一个不同的正规测度 U^*_η。

另一方面，假设 $W \in V[G]$ 是 κ 中任意一个正规测度。根据间隙力迫定理，W 将一个正规测度 $U \in V$ 提升。由于 κ 是 V 中超紧（强）基数的可测极限，$I \in U$。特别地，$I \in W$，因而 $\kappa \in j_W(I)$。按照定理 2.8 证明最后一段中的完全相同的论证，我们得出，对于某个 $\eta < \tau$，$W = U^*_\eta$。因此，κ 在 $V[G]$ 中恰好具有 τ 个正规测度。

至此，关于 $\tau \leq \kappa^+$ 的定理证明结束。若 $\tau = \kappa^{++}$，则将 $\dot{\mathbb{P}}$ 修改为长度为 $\kappa + 1$ 的迭代力，使得对于每个作为 I 极限点的 $\alpha \in I \cup \{\kappa\}$，都能迫使 $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$

成为 $(\mathrm{Add}(\alpha,\ 1))^{V^{\mathbb{P}_\alpha}}$。标准论证表明，$\kappa$ 仍然是可测基数，并且在 $V[G]$ 中携带 κ^{++} 个正规测度。与上文相同的论证表明，κ 是 $V[G]$ 中超紧（强）基数的极限。□

注记3.4。在定理 3.3 中，我们可以通过使用保持广义连续统假设的力迫下的不可毁性定理版本（2.16），在泛型扩张中得到广义连续统假设。

3.4. **戈德堡–伍丁定理的推广**。其中一个主要结果是 [17]证明了：假设超幂公理与一个超紧基数的一致性[34]，则以下情形是一致的：最小可测基数是强紧的，且有唯一正规测度。该证明是在一个满足超幂公理且存在超紧基数、并且该基数之上没有可测基数的模型上进行的（通过在最小超紧基数之上的最小可测基数处截断宇宙，可以实现这一配置）。第一作者曾询问证明中的反大基数部分是否可以省略。在 [17], 之前的一项未发表工作中，戈德堡和伍丁证明了同样的结果，且不依赖任何反大基数假设；其出发点是一个满足超幂公理且存在超紧基数的可测极限的模型。借鉴戈德堡–伍丁的方法，我们证明，在相同假设下，第一个可测基数可以是强紧的，并且具有任意指定数量的正规测度，而证明过程不需要借助反大基数假设。

定理 3.5. 假设广义连续统假设 成立，κ 是超紧基数的可测极限，$\tau \leq \kappa^{++}$，并且 κ 有一个序数 *0* 的唯一正规测度。[35] 那么存在一个泛型扩张，其中 κ是最小可测基数、最小强紧基数，并且 κ 恰好携带 τ 个正规测度。

证明。 由定理 3.3 和注 3.4 可知，我们可以假设广义连续统假设成立，κ是最小的超紧基数的可测极限，并且 κ 有 τ 个正规测度。接下来，进行一次 Magidor 迭代$\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha,\ \mathbb{Q}_\alpha\colon\ \alpha < \kappa\rangle$ 为 κ 以下的任意可测基数添加一个普里克里序列（包括 κ以下的超紧基数）。在所得模型中，κ 是最小可测基数，也是强紧基数（关于普里克里力迫的 Magidor 迭代以及强紧基数的保留，详见 [35] 或 [16] ）。最后，根据 [27, 定理 0.1], κ在该泛型扩张中恰好有 τ 个正规测度。□

4. A comment on Woodin's HOD hypothesis

Woodin 的 HOD假设断言，存在真类的正则基数，它们在 HOD 中不是ω-强可测的。其动机来自 Woodin 著名的 HOD 二分定理：

定理 4.1 (Woodin [44])。 设 κ 是一个可延拓基数。那么以下两种情况恰有一种成立：

(1) HOD 是关于 κ的超紧性的弱扩张子模型。*(2)* 每个正则基数 $\geq \kappa$ 在 HOD 中都是 ω-强可测的。

相关定义请参见 [44]。

在 [20], Goldberg-Poveda 证明了 Woodin 的 HOD 假设与以下情形的一致性：第一个超-紧基数 κ 在 HOD 中是强紧的，但在 HOD 中并非 2^κ-超紧。因此，如果 κ 仅仅是超紧的（而非 Woodin 所要求的 HOD-超紧），那么即便在 HOD 假设成立时，HOD 也可能不是第一个超紧基数 κ 的超紧性的弱扩张子模型。

[34]如上所述，证明只需 UA 的较弱推论。[35]如果 κ 是超紧基数的最小可测极限，且米切尔序是线性的，那么根据其最小性，κ具有一个序数 0 的唯一正规测度。因此，在超幂公理下，超紧基数的最小可测极限满足定理中的假设。

在这一简短章节中，我们通过证明以下情形的一致性，进一步强化了 V 与 HOD 之间的这种分歧：在 HOD 假设成立时，第一个超紧基数在 HOD 中携带唯一正规测度。

我们将需要 [20]中所考虑的自编码迭代族的自然非平稳支撑变体：

定义 4.2。令 θ 为一个序数。非平稳支撑自编码迭代是一个序列

$$\mathbb{P} = \langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{\mathbb{Q}}_\alpha, \dot{A}_\alpha : \alpha < \theta \rangle$$

使得对于每个马洛基数 α，以下条件均成立，其中 t_α 表示$\mathbb{P}_\alpha$ 的传递闭包，而 G_α 表示泛集的标准 $\mathbb{P}_\alpha$-名称：

(1) $\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 是一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，表示一个由平凡条件强制为 $|\mathbb{P}_\beta|$-闭的偏序集，对所有$\beta < \alpha$均成立；(2) $\dot{A}_\alpha$ 是一个 $\mathbb{P}_\alpha$-名称，由平凡条件强制为 $|t_\alpha|^V$ 上的二元关系，其传递坍缩为 $t_\alpha \cup \{G_\alpha\}$；(3) $\mathbb{P}_{\alpha+1} = \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha * \mathrm{Code}(\dot{A}_\alpha, \gamma)$，其中 γ是大于 $|\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{Q}}_\alpha|$ 的第一个不可达基数，而 $\mathrm{Code}(\dot{A}_\alpha, \gamma)$ 是 [20,§2]中的编码偏序集。

照例，在极限阶段 α定义 $\mathbb{P}$ 时，若 α 为不可达基数，则迭代 $\mathbb{P}_\alpha$ 被构造为非平稳支撑极限，否则被构造为逆极限。

下列事实已在 [20, 引理2.21]中针对具有Easton 支撑的自编码迭代得到证明。具有非平稳支撑的自编码迭代的证明与之类似：

事实4.3. 设 θ 是马洛基数，并令 $\vec{\mathbb{P}} = \langle \mathbb{P}_\alpha、\ \dot{A}_\alpha、\ \dot{\mathbb{Q}}_\alpha :\ \alpha < \theta \rangle$ 为一个自编码迭代。若 $G \subseteq \mathbb{P}_\theta$ 在 V上是泛型的，则 G 在结构$(V[G]_\theta,\ V_\theta,\ \mathbb{P})$ 上无需参数即可定义。特别地，若 $V \subseteq \mathrm{HOD}^{V[G]}$ 且 $\vec{\mathbb{P}}$ 在 V_θ 上可定义，则

$$\mathrm{HOD}^{V[G]} = V[G].$$

定理4.4. 假设广义连续统假设 与 V =gHOD 均成立[36]，κ 是超紧基数，κ 之上不存在不可达基数，且 κ 上存在米切尔序为0的唯一正规测度。则下列构型是一致的：

*(1) HOD*假设成立。*(2)* κ是超紧的。*(3)* 在HOD中，κ 是强紧的，并且恰好携带一个正规测度。

证明。固定 $\ell :\ \kappa \to V_\kappa$ 一个Laver函数。我们将 I 记为可测基数 $\alpha < \kappa$的集合，其中的基数是 ℓ的闭包点，即

$$I = \{\alpha < \kappa : \alpha \text{ is measurable } \wedge \forall \beta < \alpha\, (\ell(\beta) \in \mathrm{ORD} \to \ell(\beta) < \alpha)\}.$$

令 $\mathbb{P}_\kappa$ 为长度为 κ 的 I间隔非平稳支撑自编码迭代，使得在每个 $\alpha \in I$处，$\dot{\mathbb{Q}}_\alpha$ 都被力迫为Add(α, 1)。

由事实4.3可知，对每个 $G \subseteq \mathbb{P}_\kappa$ （它是 V 上的泛型），都有

$$V[G] = \mathrm{HOD}^{V[G]}.$$

我们预期的泛型扩张是通过对 $\mathbb{P}_\kappa * \dot{\mathrm{Add}}(\kappa, 1)$进行力迫得到的。令 $G * H \subseteq \mathbb{P}_\kappa *$为在 V上的 Add(κ, 1)泛型。

$$\mathrm{HOD}^{V[G][H]} = V[G]$$

由$\mathrm{Add}(\kappa, 1)^{V[G]}$ 的齐性，以及这种力迫不会扰乱幂集函数模式中的编码（详情见 [20]）

断言4.4.1。 在$\mathrm{HOD}^{V[G][H]}$中，κ 恰好携带一个正规测度。

[36]回想一下，对于每个偏序集 $\mathbb{P} \in V$，$(\Vdash_{\mathbb{P}} \check{x} \in \mathrm{HOD})\}$，都有 gHOD $:= \{x \in V :$。参见 [15]。

证明。根据我们先前的观察，只需在 $V[G]$ 中证明该命题。令 U 为 V 中具有平凡Mitchell秩的唯一正规测度。根据命题 2.15.1 的论证， U 在$V[G]$ 中生成一个正规测度 U^*。

反设 W 是 $V[G]$ 中与 U^*不同的 κ 上的正规测度。于是，根据间隙力迫定理， $W = W \cap V$属于 V，并且在W 下对 $V[G]$ 取超幂所得的 M_W 具有如下形式： $M_W = M[j_W(G)]$，其中 $M = M_W \cap V$。

关键的是， $M = M_{\bar{W}}$。为证明这一点，令 k： $M_{\bar{W}} \to M$为如下定义的映射：

$$k([f]_{\bar{W}}) := [f]_W.$$

不难验证， k 是初等的，且 $j_W \restriction V = k \circ j_{\bar{W}}$。为完成等式的证明，只需说明 k 是恒等函数。反之，设其并记$\mu = \mathrm{crit}(k)$。由于 $\bar{W}$， W是正规测度， $\mu \geq (\kappa^{++})^{M_{\bar{W}}}$。设 $\mu = [f]_W$在 $V[G]$中为某个 f： $\kappa \to \mathrm{Ord}$。根据引理 2.4，存在 $F \in V$ 以及 V中的一个闭无界集 $C \subseteq \kappa$，使得对每个 $\alpha \in C$，都有 $f(\alpha) \in F(\alpha)$，且 $|F(\alpha)| \leq |\mathbb{P}_{\alpha+1}|^V = \alpha^+$。特别地，由 W 的正规性可知， $\kappa \in j_W(C)$，因此

$$\mu = j_W(f)(\kappa) \in j_W(F)(\kappa) = k(j_{\bar{W}}(F))(\kappa) = k(j_{\bar{W}}(F)(\kappa)) = k[j_{\bar{W}}(F)(\kappa)]$$

在倒数第二个等式中，我们用到了 $\mathrm{crit}(k) > \kappa$ 这一事实；在最后一个等式中，我们用到了 $|j_{\bar{W}}(F)(\kappa)| \leq \kappa^+ < \mathrm{crit}(k$这一事实。总之，我们证明了 $\mu \in \mathrm{Im}(k)$，这与 $\mu = \mathrm{crit}(k)$ 这一事实矛盾。

注意，由于我们假设 $W \neq U^*$，因此 $W = U$ 不可能成立。因此，根据我们在 V 中的假设，测度 W 在 V 中的 Mitchell 阶必须为 ≥ 1。于是我们有一个初等嵌入 j_W： $V[G] \to M_{\bar{W}}[j_W(G)]$，其中 $M_{\bar{W}} \models$ “κ 是可测的”。特别是，这意味着 $j_W(\mathbb{P}_\kappa)$ 在 $M_{\bar{W}}[j_W(G) \cap j_W(\mathbb{P}_\kappa)_\kappa] = M_{\bar{W}}[G]$ 的第 κ 阶段加入了一个 Cohen子集。接下来，我们论证这个 κ 的 Cohen子集必须是 $V[G]$-泛型，从而得到所要的矛盾，与 $W \neq U^*$ 矛盾。

首先，由于根据命题 2.5.1， $M_{\bar{W}}[G]$ 是一个对其元素的 κ-序列封闭的 $V[G]$ 内模型，因此 $\mathrm{Add}(\kappa, 1)^{V[G]} = \mathrm{Add}(\kappa, 1)^{M_{\bar{W}}[G]}$。其次，$(\mathrm{Add}(\kappa,1)^{V[G]}$中的任意极大反链 $A \in V[G]$ 都是 $V[G]_\kappa$的子集，因此再次根据命题 2.5.1， $A \in M_{\bar{W}}[G]$。[37] 因此，$\mathrm{Add}(\kappa,1)^{V[G]}$ 的任意 $M_{\bar{W}}[G]$-泛型都是 $V[G]$上的泛型。□

一个比定理 2.24 证明中所给论证更简单的论证表明， κ 在 $V[G]$中仍然是强紧的。[38]

断言 4.4.2。 在 $V[G]$中， κ 是强紧的。

证明。 设 $\lambda > \kappa$ 为正则， U_0 为 κ 上具有平凡Mitchell秩的唯一正规测度，并设$F \in M_{U_0}$ 为$\mathcal{P}_{j_{U_0}(\kappa)}(j_{U_0}(\lambda))$上的正规细超滤子，使得 $j_F(j_{U_0}(\ell))(j_{U_0}(\kappa)) = j_{U_0}(\lambda)$。 我们将提升该嵌入

$$j = j_F \circ j_{U_0} \colon V \to M \simeq \mathrm{Ult}(M_{U_0}, F).$$

首先， since $\mathbb{P}_\kappa$ 具有非平稳支撑，且 U_0 具有平凡的米切尔序， j_{U_0} 提升t o

$$j_{U_0} \colon V[G] \to M_{U_0}[G * j_{U_0}[G] \setminus \kappa + 1] = M_{U_0}[j_{U_0}[G]].$$

其次，由初等性以及 $\mathbb{P}_\kappa$的定义， $j(\mathbb{P}_\kappa)$可分解为

$$j_{U_0}(\mathbb{P}_\kappa) * \dot{\mathrm{Add}}(j_{U_0}(\kappa), 1) * \dot{\mathbb{Q}},$$

其中，后一个偏序集被力迫为 $j_{U_0}(\lambda)^{+M_U[j_{U_0}(G)]}$-有向闭。

---

[37]事实上， A 可以编码为一个 κ-序列 $\vec{X} = \langle A \cap (V_\beta)^{V[G]} \colon \beta < \kappa \rangle$，并且，由于对每个$\beta < \kappa$都有 $A \cap (V_\beta)^{V[G]} \in M_{\bar{W}}[G]$， $\vec{X} \in M_{\bar{W}}[G]$。 [38]其简单性来自于这一次我们的迭代用科恩强迫代替了 $\mathbb{NR}(\alpha)$；也就是说，现在每个阶段 α 处的力迫是 α-有向闭的，而此前，力迫 $\mathbb{NR}(\alpha)$仅具有任意高的稠密有向闭子集。

令 $g \in V[G]$ 为 $\mathrm{Add}(j_{U_0}(\kappa),1)^{M[j_{U_0}[G]]}$ 的一个 $M[j_{U_0}(G)]$-泛型滤子。在 $V[G]$ 中构造这样的 g 是可能的，因为 $(\mathrm{Add}(j_{U_0}(\kappa),1))^{M[j_{U_0}[G]]}$ 是一个 κ^+-闭力迫，其在$M[j_{U_0}[G]]$ 中的稠密开集可以在 $V[G]$ 中按序型 κ^+ 枚举。

由于 $\dot{\mathbb{Q}}$ 是充分有向闭的，集合

$$\{j(p) \setminus j_{U_0}(\kappa) : p \in G\} = \{\{\mathbb{1}\}^\frown j(p) \setminus j_{U_0}(\kappa) + 1 : p \in G\}$$

存在一个下界 $q \in j(\mathbb{P}) \setminus j_{U_0}(\kappa)$，使得 $q(j_{U_0}(\kappa)) = \mathbb{1}$。以 q 作为主条件，我们可以构造 $L \in M_U[j_{U_0}(G) * g]$ a $j(\mathbb{P}) \setminus (j_{U_0}(\kappa) + 1)$-泛型，使其位于 $M[j_{U_0}[G] * g]$ 之上，并满足 $q \in g * L$。因此， $j\colon V \to M$ lifts to

$$j : V[G] \to M[j_{U_0}(G) * g * L]$$

这是一个 a λ-强紧嵌入。 □

断言 4.4.3. 在 $V[G]$中， κ 不是 2^κ-超紧的。

证明。 反设结论不成立，并令 $j\colon V[G] \to M$为 $V[G]$中的一个见证嵌入。于是， κ 在 M中是 ¯ ¯可测的。根据间隙强迫定理 2.7， $M = M[H]$ 对于某个子类 $M \subseteq V$ 以及其上的一个_$j(\mathbb{P}_\kappa)$-泛型 H， M。

根据间隙强迫定理 2.7，用 $j(\mathbb{P}_\kappa)$进行力迫不会产生新的可测基数。¯因此， κ 在 M 中也是可测的。此外， κ 是 $j(\ell)$的一个闭包点，因此综上，$\kappa \in j(I)$。这意味着在阶段 κ，迭代 $j(\mathbb{P}_\kappa)$选择了用 $\mathrm{Add}(\kappa,1)$进行力迫。运用断言4.4.1中给出的完全相同的论证，可以证明这个科恩强迫实际上在 $V[G]$上是泛型的，由此得到所需的矛盾。

□

用 $H \subseteq \mathrm{Add}(\kappa,1)^{V[G]}$ 进行力迫后， κ的超紧性得以恢复：事实上，在 $M[G]$中，阶段 κ所用的力迫具有 $\mathrm{Add}(\kappa,1)^{V[G]} * \mathrm{Code}(A_\kappa,\gamma)^{M[G]}$ 的形式，其中 γ是高于 κ的第一个$M[G]$-不可达基数。由于我们假设不存在大于 κ的不可达基数，因此大于 κ 的第一个 $M[G]$-不可达基数必定高于 λ。因此，利用标准论证，我们可以在 $V[G*H]$中为 $\mathrm{Code}(A_\kappa,\gamma)^{M[G]}$ 定义一个 $M[G]$-泛型滤子。结合这些考量与 Silver 的标准论证（参见 [13, 定理 12.6]），最终可知 κ 在 $V[G*H]$中是超紧的。□

References

[1] Arthur W. Apter. 强紧致性、可测性与超紧基数类. *Fundamenta Mathematicae* 167 1 65 78, 2001

, ( ): – . [2] Arthur W. Apter 与 James Cummings. 恒等危机与强紧致性. *The Journal of Symbolic Logic*, 65 4 1895 1910, 2000 ( ): – . [3] Arthur W. Apter 与 James Cummings. 高基数上的正规测度. *The Journal of Symbolic Logic*, 84 1 178 204, 2019 ( ): – . [4] Arthur W. Apter 与 James Cummings. 大基数上的正规测度 . *Transactions of the American Mathematical Society Series B* 10 04 129 154, 2023

,, ( ): – . [5] Arthur W. Apter、James Cummings 与 Joel Hamkins. 具有少量测度的大基数. *Proceedings of the American Mathematical Society* 135 7 2291 2300, 2007

, ( ): – . [6] Arthur W. Apter 与 Saharon Shelah. 论超紧性与强紧致性之间的强等同性. *Transactions of the American Mathematical Society*, 349(1):103–128, 1997. [7] Omer Ben-Neria. 在低于 $0^\P$的核心模型上力迫 Magidor 迭代. *Archive for Mathematical Logic*, 53 3 367 384, 2014 ( ): – . [8] Omer Ben-Neria. 米切尔序的结构–II. *Annals of Pure and Applied Logic* 166 12 1407 1432, , ( ): – .[9] 2015 Omer Ben-Neria. 米切尔序的结构—I. *Israel Journal of Mathematics*, 214(2):945–982, 2016. [10] Omer Ben-Neria 与 Eyal Kaplan. 一个连续统假设发生关键性失效的 Kunen型模型. *arXiv preprint arXiv:2412.05493*, 2024. [11] Omer Ben-Neria 与 Spencer Unger. 余终性的齐次变化及其对 HOD 的应用. *Journal of Mathematical Logic* 17 02 1750007, 2017

, ( ): . [12] Omer Ben Ben Neria 与 Moti Gitik. 一个在 κ 与 $2^\kappa = \kappa^{++}$ 上具有唯一正规测度且基于最优假设的模型. 2017.

[13] James Cummings. 迭代力与初等嵌入. *Handbook of set theory*, 第775–883页, 2010. [14] Sy-David Friedman 与 Menachem Magidor. 正规测度的数目. *The Journal of Symbolic Logic*, 74 3 1069 1080, 2009 ( ): – . [15] Gunter Fuchs、Joel David Hamkins 与 Jonas Reitz. 集合论地质学. *Annals of Pure and Applied Logic*, 166 4 464 501, 2015 ( ): – . [16] Moti Gitik. Prikry 型强迫. 载于 *Handbook of set theory. Vols. 1*, 2, 3, 第1351–1447页. 施普林格, 多德雷赫特, 2010.[17] Moti Gitik 与 Eyal Kaplan. 论超滤子从泛型扩张到基模型的限制. *The Journal of Symbolic Logic* 88 1 169 190, 2023 , ( ): – . [18] Moti Gitik 与 Saharon Shelah. 论强基数的某种不可毁性及 Hajnal 的一个问题. *Archive for Mathematical Logic* 28 1 35 42, 1989 , ( ): – . [19] Gabriel Goldberg. *The ultrapower axiom*, 第10卷. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2022. [20] Gabriel Goldberg、Jonathan Osinski 与 Alejandro Poveda. 论 HOD 二分法的最优性. *arXiv preprint arXiv:2411.03558* 2024 , . [21] Joel D Hamkins. 高基数. *Mathematical Logic Quarterly*, 55(1):68–86, 2009. [22] Joel David Hamkins. 间隙强迫. *Israel Journal of Mathematics*, 125(1):237–252, 2001. [23] Yair Hayut 与 Alejandro Poveda. 粘合性质. *Journal of Mathematical Logic*, 第2450030页, 2024. [24] Yair Hayut 与 Alejandro Poveda. Rudin–Keisler 序在可测基数处的有向性. 2026. [25] Thomas Jech. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. 施普林格, 2003. [26] Akihiro Kanamori. *The higher infinite*. 施普林格数学专著. 施普林格出版社, 柏林, 第二版, 2009. 集合论中的大基数自其起源起, 2003年版平装重印本. [27] Eyal Kaplan. Magidor 迭代与超幂到基模型的限制. *Israel Journal of Mathematics* 265 2 605 660, 2025 , ( ): – . [28] Eyal Kaplan. 正规测度的数目再探. *arXiv preprint arXiv:2507.20466*, 2025. [29] Jussi Ketonen. 强紧致性及其他基数之罪. *Annals of Mathematical Logic*, 5(1):47–76, 1972. [30] Kenneth Kunen. 迭代超幂在集合论中的若干应用. *Annals of Mathematical Logic*, 1(2):179– 227, 1970. [31] Kenneth Kunen 与 Jeff B Paris. 布尔扩张与可测基数. *Annals of Mathematical Logic*, 2 4 359 377, 1971 ( ): – . [32] Richard Laver. 使 κ κ *Israel Journal* 的超紧性在-定向 *of Mathematics* 29 4 385 388, 1978 闭力迫下不可破坏. , ( ): – . [33] Richard Laver. 某些极大基数不会在小强迫扩张中产生. *Annals of Pure and Applied Logic* 149 1 3 1 6, 2007 , (-): – . [34] Azriel L´ *Israel Journal of Mathematics* 5 4 234 248, 1967 evy 与 Robert M Solovay. 可测基数与连续统假设. , ( ): – . [35] Menachem Magidor. 第一个强紧基数有多大? 或关于恒等危机的研究. *Annals of Mathematical Logic* 10 1 33 57, 1976 , ( ): – . [36] Telis K Menas. 论强紧致性与超紧性. *Ann. Math. Logic*, 7(327-359):75, 1974. [37] William J Mitchell. 测度序列的核心模型. i. 载于 *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 95, 229 260 1984 , volume 第 – 页. 剑桥大学出版社, . [38] William J Mitchell. 内模型理论入门. 载于 *Handbook of set theory*, 第1449–1495页. 施普林格, 2009. [39] Ralf Schindler. 核心模型的迭代. *The Journal of Symbolic Logic*, 71(1):241–251, 2006. [40] Stanislaw Marcin Ulam. *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*. 大学, 数学研讨班, 1930. [41] Toshimichi Usuba. 关于 δ-强紧基数的注记. *Topology and its Applications*, 301:107538, 2021. [42] Hugh Woodin、Jacob Davis 与 Daniel Rodr´ıguez. HOD 二分法. *arXiv preprint arXiv:1605.00613*, 2016. [43] W Hugh Woodin. 合适的延伸子模型 i. *Journal of Mathematical Logic*, 10(01n02):101–339, 2010. [44] W Hugh Woodin. 探寻 Ultimate-L：第19届数学讲座. *Bulletin of symbolic logic*, 23 1 1( ): –109, 2017.

(APTER) Department of Mathematics Baruch College of CUNY New York, New York 10010
Email address: awapter@alum.mit.edu

(KAPLAN) Department of Mathematics, UC Berkeley, CA 94720, USA, https://eyalkpl.github.io/website/.
Email address: eyalkaplan@berkeley.edu

(POVEDA) Universitat de Barcelona, Departament de Matemàtiques i Informàtica, Barcelona 08007, Catalonia Spain , , https://alejandropovedaruzafa.com/.*Email address*: alejandro.poveda@ub.edu