arXiv:2603.11720v1 [math.GT] 12 Mar 2026

纯粹装饰性手术与 Casson–Walker–Lescop 不变量

KAZUHIRO ICHIHARA、IN DAE JONG 和 YASUYOSHI T SUTSUMI

Abstract. 利用 3-球面中链环的 Casson–Walker–Lescop 不变量的有理手术公式，我们证明，有理同调球中的任意零同调结至多允许两对整数纯粹余切手术。我们还给出了某些第一贝蒂数为一或二的三维流形中零同调结允许纯粹余切手术的约束。作为另一项应用，我们证明，对于包括 $S^2 \times S^1$ 在内的某些三维流形中的零同调结，至多存在两个与给定结不等价、但其外部与给定结的外部保向同胚的结。

1. Introduction

本文延续了第一作者和第二作者在 [8]中对有理同调球面中纽结的装饰性手术所做的研究。

设 M 是一个闭可定向三维流形， K 是 M中的一个纽结。从 M 出发，通过 $\cup_f (D^2 \times S^1)$构造新的三维流形（$M - \mathrm{int} N(K)$)的操作称为对 K进行*Dehn* 手术，其中 $N(K)$表示 K的一个正则邻域。粘合映射f 由 $\partial N(K)$上一个环路的同痕类决定，该环路与附着实心环面的子午线相识别。因此，该环路的同痕类称为手术斜率。众所周知，对于3-球面 S^3中的纽结，此类手术斜率由 $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$参数化，其中 $1/0$ 对应于子午斜率。链环上的 Dehn 手术定义方式相同。

一般而言，对纽结沿不同斜率进行 Dehn 手术会得到不同的流形，但并非总是如此。在带边界的流形中的纽结上进行此类手术，以及得到反向定向流形的手术，已有一些例子。参见 [2]中的例子。鉴于此，如果一对纽结上的 Dehn 手术所得的三维流形是保向同胚的，则称其为纯粹余切手术。有人猜想，在闭的可定向三维流形中，非平凡纽结不可能沿不同的手术斜率进行纯粹余切手术。关于更多背景，参见[5, 2] 和 [10,问题1.81A]。

本文研究第一贝蒂数不超过二的三维流形中纽结的纯粹余切手术。我们的主要工具是文献 [11]中给出的 Casson–Walker–Lescop不变量 λ的有理手术公式。Lescop [11] 将不变量 λ 作为 Casson–Walker不变量 [15]的推广加以引入并研究。

Date: 2026年3月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号57K31，次要分类号57K10。*Key words and phrases.* 美容手术、同调三维球面、Casson–Walker–Lescop 不变量、有理手术公式。 本研究得到 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 JP22K03301 和 JP22K03324。

当第一贝蒂数为零时，若三维流形 M 与 3-球面具有相同的同调群，则称其为整数同调球（或有理同调球</style>）。也就是说，对于所有其他 i， $H_0(M;\mathbb{Z}) = H_3(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 且 $H_i(M;\mathbb{Z}) = \{0\}$（或对于所有其他$i$， $H_0(M;\mathbb{Q}) = H_3(M;\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ 且 $H_i(M;\mathbb{Q}) = \{0\}$ ）。

以下结果是对 [8, 定理 2], 的推广，其中仅考虑通过对 S^3 中的纽结进行 Dehn 手术而得到的有理同调球。这里，如果子午线与手术斜率的一个代表元的几何交数为 1，则称该 Dehn 手术为整数型 手术。

定理 1.1。 有理同调球中的零同调结至多允许两对整数型纯粹余切手术。

最近，文献 [7]已证明纽结上纯粹余切手术的数量有限。

与此相关，余美手术问题与纽结补空间问题密切相关。我们猜想，若闭定向 3-流形 M 中的两个纽结 K_1 和 K_2 的补空间[1] 之间存在保定向同胚，则这两个纽结等价，即存在一个从 M 到自身的保定向同胚，将 K_1 映到 K_2。在第 2 节中，作为计算 Casson–Walker–Lescop 不变量的方法的应用，我们为该猜想提供了一些支持性证据。特别是，以下推论可视为对该猜想的部分回答。例如，对于通过对 S^3中的纽结进行 Dehn 手术而得到的三维流形中的零同调结，我们得到如下结果。

推论1.2. 设 M 是对S^3中的一个纽结施行 *Dehn* 手术所得到的3-流形。则对 M中任意零同调结 K ，在 M 中至多有两个纽结与 K 不等价，但其外部与 K的外部保向同胚。特别地，对$S^2 \times S^1$ 或透镜空间中的任意零同调结，同样成立。

S^3 中的链环若其任意一对分支的链接数为零，则称为代数分裂 。

推论1.3. 设 M 是对 S^3 中的一个代数分裂链环以正手术斜率施行 *Dehn* 手术所得到的有理同调球。则对 M中任意零同调结 K ，在 M 中至多有两个纽结与 K 不等价，但其外部与 K的外部保向同胚。

此外，下一个结果对 [4] 利用 Heegaard Floer 同调得到的结果进行了部分推广，并给出了另一种证明。该结果指出，L-空间中的任意零同调结都由其补空间决定。

推论 1.4. 设 M 是透镜空间 $L(p_i, q_i)$ 的连通和，其中 p_i 与 q_i 为互素正整数，或者是 $S^2 \times S^1$ 与透镜空间 $L(p_i, q_i)$的连通和，其中 p_i 与 q_i 为互素整数。则对 M 中任意零同调结 K ，在 M 中至多存在两个与 K 不等价、但其外部与 K 的外部保向同胚的纽结。

[1]这里，“补空间”一词指纽结的“外部”；也就是说，它指从环境流形中去除纽结的开管状邻域后得到的紧致三维流形。

注意，对于给定的纽结，其外部与该给定纽结的外部同胚的不等价纽结的有限性已在 [13]中得到证明。

接下来，我们考察第一贝蒂数为一或二的三维流形中纽结上的纯粹余切手术。在下文中，$\hat{a}_k(L)$ 表示用于 [11] 中的链环 L 在 S^3 的康威多项式的第 k 个系数。这些系数与通常使用的系数略有不同（例如，[8] 中所用的系数）；详情请参阅本节末尾的说明。此外，对于 S^3 中链环 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 上沿对应于有理数 r_1，……，r_n 的斜率进行的（r_1，……，r_n)-手术（以及对于纽结 K 上沿对应于有理数 r 的斜率进行的 r-手术），我们指的是 Dehn 手术。

定理 1.5。设 K 和 K_1 是 S^3 中的两个纽结，且链环 $K \cup K_1$ 是代数分裂的。令 M 为对 K_1 进行 0-手术所得的三维流形，即沿优选经向斜率进行手术。假设 $\hat{a}_1(K \cup K_1) \neq 0$。将 K 视为 M 中的纽结，则其不允许任何纯粹余切手术。特别地，K 由其在 M 中的补空间确定。

我们指出，条件 $\hat{a}_1(K \cup K_1) \neq 0$ 等价于 $a_3(K \cup K_1) \neq 0$，其中 $a_3(K \cup K_1)$ 表示链环 $K \cup K_1$ 在 S^3中的康威多项式的通常第三系数。参见本节最后一段中的说明。

定理 1.6。设 K、K_1和 K_2 是 S^3 中的纽结，且链环 $K \cup K_1 \cup K_2$代数分裂。设 M_{p_1/q_1} 是对 $K_1 \cup K_2$进行$(p_1/q_1,0)$手术得到的三维流形。假设 $p_1\hat{a}_1(K \cup K_2) + q_1\hat{}a_1(K \cup K_1 \cup K_2) \neq 0$。将 K 视为 M_{p_1/q_1}中的纽结，则其不允许纯粹余切手术。特别地，K 由其在 M_{p_1/q_1}中的补空间唯一确定。

定理 1.7. 设 K、K_1 与 K_2 为 S^3 中的纽结，使得链环 $K \cup K_1 \cup K_2$ 代数分裂。设 M_{00} 为对 $K_1 \cup K_2$ 施行 $(0, 0)$-手术所得的三维流形。假设 $\hat{a}_1(K \cup K_1 \cup K_2) \neq 0$。则作为 M_{00} 中的纽结，K 不存在纯粹余切手术。特别地，K 由M_{00}中的补空间所决定。

定理 1.5–1.7 可视为将 [8, 定理 4] 推广到某些第一贝蒂数为一或二的三维流形。例如，在定理 1.5 中，当 K_1 为平凡结时，流形 M 即为 $S^2 \times S^1$。在最后一节中，我们给出若干例子。我们指出，上述结果在某种意义上是最佳可能的，因为当 L 代数分裂时，对满足 $\sharp L' \geq 4$ 的 $L' \subset L$，$\hat{a}_1(L') = 0$ 成立 [6, 引理 1.5]。

注。这里我们对康威多项式的系数作一说明，具体来说，是通常的系数与 ` Lescop[11]定义的系数之间的区别。链环 L 在 S^3中的康威多项式 $\nabla_L(z)$满足通常的 skein 关系：

$$\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z).$$

k 次项系数记为 $a_k(L)$，其中 $\nabla_L(z)$。Lescop 的著作 [11]，中，康威多项式及其系数的记号与上文略有不同。本文用 $\nabla_L(z)$ 表示 [11], 中采用的康威多项式，它满足以下纽结 skein 关系：

$$\hat{\nabla}_{L_+}(z) - \hat{\nabla}_{L_-}(z) = -z\hat{\nabla}_{L_0}(z).$$

若 L 是一个具有 μ 个分支的链环，则 $\hat{\nabla}_L(z)$ 具有如下形式

$$\hat{\nabla}_L(z) = z^{\mu-1}\left(\hat{a}_0(L) + \hat{a}_1(L)z^2 + \cdots\right).$$

注意，$\nabla_{L^*}(z) = \hat{\nabla}_L(z)$，其中 L^* 表示 L的镜像。另外注意，$\nabla_{L^*}(z) = (-1)^{\mu-1}\nabla_L(z)$。因此我们有

$$\hat{a}_k(L) = (-1)^{\mu-1}a_{\mu+2k-1}(L).$$

特别地，对于纽结 K，$\hat{a}_k(K) = a_{2k}(K)$成立。

2. Purely cosmetic surgeries on knots in rational homology spheres

1985 年，Casson 定义了一个针对定向整同调球面的整数值不变量，该不变量源自其基本群到 $SU(2)$ 的表示（见 [1]）。在 [15], ，Walker 将其推广到定向有理同调球面。随后，在 [11], ，Lescop 给出了根据带框架链环表示计算该不变量的公式，并证明该不变量可以推广到所有定向闭三维流形。我们称这个不变量为 Casson–Walker–Lescop 不变量，并将其记作 $\lambda(M)$，其中 M 是一个定向闭三维流形。

本节首先回顾 Casson–Walker–Lescop 不变量的手术公式，并给出证明本文结果所需的一个引理。随后我们将证明定理 1.1 和推论1.2–1.4。

2.1. 手术公式 λ。设 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 是 S^3中的一个定向链环，并设 M是对 L进行（p_1/q_1，……，p_n/q_n）手术所得的三维流形，其中p_1/q_1，……，p_n/q_n 为有理数。集合（K_i，p_i/q_i）$_{1\le i\le n}$ 称为 M的一个手术表示，记作 $\mathbb{L}$。除非另有说明，本文始终假设手术斜率 q_1，……，q_n 的分母为正数。于是，根据 [11, 命题 1.7。8], 我们得到 Casson–Walker–Lescop 不变量的如下手术公式。

$$\begin{aligned}\lambda(M) = {} & (-1)^{b_-(\mathbb{L})}\left(\prod_{i=1}^n q_i\right)\sum_{J\neq\emptyset, J\subset N}\det(E(\mathbb{L}_{N-J};J))\,\hat{a}_1(L_J)\\ & + (-1)^{b_-(\mathbb{L})}\left(\prod_{i=1}^n q_i\right)\sum_{J\neq\emptyset, J\subset N}\frac{\det(E(\mathbb{L}_{N-J}))(-1)^{\sharp J}\theta(\mathbb{L}_J)}{24}\\ & + \left(\prod_{i=1}^n q_i\right)|\det(E(\mathbb{L}))|\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8} + \sum_{i=1}^n\frac{s(p_i,q_i)}{2}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

此处，上述公式中所用术语定义如下。

- 令 $N = \{1,\ldots,n\}$。
- $l_{ij} = \begin{cases}\mathrm{lk}(K_i,K_j), & \text{若 } i\neq j, p_i/q_i \\ & i=j \text{ 若}, \text{且 } E(\mathbb{L}) = (l_{ij})_{1\le i,j\le n}。\end{cases}$

  此处 $\mathrm{lk}(K_i,K_j)$ 表示 K_i 与 K_j 在 S^3中的链接数。回顾可知，$\mathrm{lk}(K_i,K_j) = \mathrm{lk}(K_j,K_i)$。
- $b_-(\mathbb{L})$ 与 $\sigma(E(\mathbb{L}))$ 分别表示 $E(\mathbb{L})$ 的负特征值个数与符号差。
- 对 $I\subset N$ 令 $L_I = \cup_{i\in I}K_i$，当 $I\subsetneq N$ 令 $\mathbb{L}_I = (K_i, p_i/q_i)_{i\in I}$。
- 令 $E(\mathbb{L}_{N-J};J) = (l_{ij})_{i,\ j\in N-J}$ 当 $l_{ijJ} = \begin{cases}l_{ij}, & \text{时 } i\neq j,\\ p_i/q_i + \sum_{k\in J}l_{ki} & i=j.\end{cases}$ 当

- $s(p,\ q)$ 表示一对互质整数 $(p,\ q)$ 的 Dedekind 和（$q \neq 0$），即：

$$s(p,q) = \sum_{i=1}^{|q|} \left(\left(\frac{i}{q}\right)\right)\left(\left(\frac{ip}{q}\right)\right)$$

with

$$((x)) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathbb{Z}, \\ x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} & \text{if } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

根据定义，我们有

$$s(1,q) = \frac{(q-1)(q-2)}{12q} \quad \text{and} \quad s(-1,q) = -\frac{(q-1)(q-2)}{12q}. \tag{2}$$

一般情况下，我们不列出 $\theta(\mathbb{L}_J)$ 的精确计算，因为我们只需要计算存在一个分支 K_i 使得 $\mathrm{lk}(K_i,\ K_j) = 0$ for $j \neq i$时的 $\theta(\mathbb{L}_J)$。在这种情况下，我们有

$$\theta(\mathbb{L}_J) = \begin{cases} \frac{p_j^2+q_j^2+1}{q_j^2} & \text{if } J = \{j\}, \\ 0 & \text{if } \sharp J \geq 2. \end{cases}$$

详情请参见 [11] 。

我们指出，空矩阵的行列式定义为 1（见 [11]）。特别地，若 $J = N$，则可得 $\det(E(\mathbb{L}_{N-J})) = \det(E(\mathbb{L}_{N-J};\ J)) = 1$。

现在，令 $N = \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$A_N = (l_{ij}) = \begin{pmatrix} p_1/q_1 & \mathrm{lk}(K_1,K_2) & \cdots & \mathrm{lk}(K_1,K_n) \\ \mathrm{lk}(K_2,K_1) & p_2/q_2 & \cdots & \mathrm{lk}(K_2,K_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{lk}(K_n,K_1) & \mathrm{lk}(K_n,K_2) & \cdots & p_n/q_n \end{pmatrix},$$

$A_{N-J} = (l_{ij})_{i,j\in N-J}$，以及 $B_{N-J} = (b_{ij})_{i,j\in N-J}$ 与

$$b_{ij} = \begin{cases} l_{ij} & \text{if } i \neq j, \\ l_{ii} + \sum_{k\in J} l_{ki} & \text{if } i = j. \end{cases}$$

接下来的引理计算了 Casson-Walker-Lescop 不变量，在我们结果的证明中起着基础性作用。

引理 2.1. 设 $L = K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 是 S^3 中一个满足 $\mathrm{lk}(K_0, K_j) = 0$ （其中 $j \neq 0$）的$(n+1)$分支链环。设 M 是由以下方式得到的闭可定向3维流形：

从 S^3 对 L 进行$(p_0/q_0, p_1/q_1, \dots, p_n/q_n)$手术。则有如下结论。

$$\begin{aligned}\lambda(M) = (-1)^{b-(\mathbb{L})} \prod_{i=0}^{n} q_i \Bigg(& \sum_{J \subset N, J \neq \emptyset} \frac{p_0}{q_0} \det B_{N-J} \hat{a}_1(L_J) \\ & + \sum_{J' \subset N, J = J' \cup \{0\}} \det B_{N-J'} \hat{a}_1(L_J) \Bigg) \\ + \frac{(-1)^{b-(\mathbb{L})} \prod_{i=0}^{n} q_i}{24} \Bigg(& \sum_{J \subset N, J \neq \emptyset} \frac{p_0}{q_0} \det A_{N-J} (-1)^{\sharp J} \theta(\mathbb{L}_J) \\ & - \det A_N \left(\frac{p_0^2 + q_0^2 + 1}{q_0^2} \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_0}{q_0} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2} \right) \Bigg) \\ + \prod_{i=1}^{n} q_i \left| \det A_N \right| |p_0| & \left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8} + \frac{\sum_{i=0}^{n} s(p_i, q_i)}{2} \right).\end{aligned}$$

证明。 $\mathbb{L}$ 的链接矩阵表示为

$$E(\mathbb{L}) = \begin{pmatrix} p_0/q_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1/q_1 & \mathrm{lk}(K_1, K_2) & \cdots & \mathrm{lk}(K_1, K_n) \\ 0 & \mathrm{lk}(K_2, K_1) & p_2/q_2 & \cdots & \mathrm{lk}(K_2, K_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{lk}(K_n, K_1) & \mathrm{lk}(K_n, K_2) & \cdots & p_n/q_n \end{pmatrix}.$$

由此，结合 A_N、 A_{N-J} 和 B_{N-J} 的定义，我们得到如下结论。

$$\begin{aligned}& \sum_{J \subset N \cup \{0\}, J \neq \emptyset} \det(E(\mathbb{L}_{N-J}; J))\ \hat{a}_1(L_J) \\ & \quad = \sum_{J \subset N, J \neq \emptyset} \frac{p_0}{q_0} \det B_{N-J} \hat{a}_1(L_J) + \sum_{J' \subset N, J = J' \cup \{0\}} \det B_{N-J'} \hat{a}_1(L_J),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \prod_{i=0}^{n} q_i \sum_{J \neq \emptyset, J \subset N \cup \{0\}} \frac{\det(E(\mathbb{L}_{N-J}))(-1)^{\sharp J} \theta(\mathbb{L}_J)}{24} \\ & = \frac{\prod_{i=0}^{n} q_i}{24} \Bigg(\sum_{J \subset N, J \neq \emptyset} \frac{p_0}{q_0} \det A_{N-J} (-1)^{\sharp J} \theta(\mathbb{L}_J) \\ & \qquad - \det A_N \left(\frac{p_0^2 + q_0^2 + 1}{q_0^2} \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_0}{q_0} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2} \right) \Bigg),\end{aligned}$$

and

$$\left(\prod_{i=0}^{n} q_i \right) |\det(E(\mathbb{L}))| = \prod_{i=1}^{n} q_i \left| \det A_N \right| |p_0|.$$

因此，由 Lescop 手术公式（1）可得结论。 □

2.2. **定理 1.1 的证明**。 众所周知，任何闭可定向三维流形，尤其是任何有理同调球，都可以通过对 S^3 [12, 16] 中的链环进行 Dehn 手术得到。我们注意到，在通过对 S^3 中的链环进行 Dehn 手术得到的三维流形 M 中，任何零同调结都可以经同伦变形，使其在 M 中界定一个与对偶链环不相交的塞弗特曲面；例如参见 [8, 定理 2]，的证明。还需注意，出于同调方面的原因，对零同调结进行的整数纯粹余切手术，其斜率必为 $\pm p$ ，其中 p 是某个正整数。由这些事实可知，定理 1.1 可由下面的定理推出。

定理 2.2。 设 $L = K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 为一个S^3 中的 $(n+1)$-分支链环，满足 $n \geq 1$ 且对于 $j \neq 0$有 $\mathrm{lk}(K_0, K_j) = 0$。假设对 $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 进行 $(p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$-手术所得的是一个有理同调球。那么，至多存在两个正整数 p ，使得沿斜率 $(p/1, p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$ 和 $(-p/1, p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$ 对 L进行 ***Dehn*** 手术所得的三维流形保持定向同胚。

证明。 对 K_i, K_j，令 $\mathrm{lk}(K_i, K_j) = l_{ij}$，其中 $i \neq j$。令 M（分别为 M'）表示从 S^3对 L 进行（$(p/1, p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$ -手术（分别为（$(-p/1, p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$ -手术）所得的三维流形。

令 $\mathbb{L}$（分别地， $\mathbb{L}'$）为由 L 给出的手术表示，其参数为（$p/1$， p_1/q_1， …， p_n/q_n）（分别地，参数为（$-p/1$， p_1/q_1， …， p_n/q_n））。于是，我们有

$$(-1)^{b_-(\mathbb{L})} = -(-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \text{ and } \sigma(E(\mathbb{L})) - 2 = \sigma(E(\mathbb{L}')).$$

此外，由引理 2.1，我们得到如下结论。

$$\lambda(M) - \lambda(M') = 2(-1)^{b_-(\mathbb{L})} \prod_{i=1}^{n} q_i \sum_{J' \subset N, J = J' \cup \{0\}} \det B_{N-J'} \hat{a}_1(L_J) - \frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L})} \prod_{i=1}^{n} q_i}{12} \det A_N (p^2 + 2) + \frac{\prod_{i=1}^{n} q_i |\det A_N|}{4} p.$$

根据假设，对 $K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 进行（$(p_1/q_1$， …， p_n/q_n）-手术所得的三维流形是有理同调球，我们可知 $\det A_N \neq 0$。这表明上述等式右边并非恒等于零，因此它是关于 p 的二次多项式。

因此，至多有两个正整数 p 满足 M 与 M' 保向同胚。□

2.3. **有理同调球中的纽结补空间问题**。余位手术问题与纽结补空间问题通过以下命题密切相关。尽管这是一个众所周知的事实，我们仍给出证明。

命题 2.3. 设 K 是闭可定向3维流形 M 中的一个纽结。假设至多存在 k 个互不相同的非子午斜率 $r_1, \ldots, r_k$，使得对 K 进行每个 r_i-手术后得到的流形都与 M 保向同胚。那么， M 中至多存在 k 个与 K 不等价、但其外部与 K 的外部保向同胚的不同纽结。

证明。 假设至多存在 k 个不同的非子午斜率 $r_1, \ldots, r_k$，使得沿每个 r_i 对 K 进行手术所得的流形都与 M 保定向同胚。对于每个 $i = 1, \ldots, k$，令 K_i 为沿 r_i 对 K 进行手术时附着实心环面的核心（对偶结）。那么，对于每个 i， K_i 和 K 的外部保定向同胚。此外，每个 K_i 都是流形中的一个纽结

该流形由 r_i-手术得到，并根据假设与 M 保定向同胚。假设存在另一个纽结 K'，位于 M 中，且存在一个保定向同胚 h，将 K' 的外部映射到 K 的外部，但 K' 和 K 在 M 中是不等价纽结。那么，由 $h(\mu_{K'})$ 为 K' 的子午线 $\mu_{K'}$ 所确定的 $\partial N(K)$ 上的斜率 r 满足：r 是非子午斜率，且沿 r 对 K 进行手术所得的流形与 M 保定向同胚。然而，根据假设，对于 K，这样的斜率只有 $r_1, \dots, r_k$，因此对于某个 i，有 $r = r_i$。这意味着 K' 等价于纽结 K_i 之一。因此，M 中至多存在 k 个不同的纽结，它们与 K 不等价，但其外部与 K 的外部保定向同胚。□

我们使用引理 2.1 来考察纽结补空间问题，并得到如下结果。

定理2.4。设 $L = K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 是一个 $(n+1)$ 分支链环，位于 S^3 中，其 $n \geq 1$ 满足 $\mathrm{lk}(K_0, K_j) = 0$，其中 $j \neq 0$。对于给定的有理数 p_1/q_1、……、p_n/q_n，假设以下两个条件中至少有一个成立：

$$\sum_{i=1}^{n} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2} \right) \neq 0, \qquad (-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \det A_N - |\det A_N| \neq 0.$$

这里，$\mathbb{L}'$ 表示由 $L' = L - K_0$ 给出的手术表示，其斜率为 $(p_1/q_1$、……、$p_n/q_n)$。于是，至多存在四个正整数 q，使得对 L 进行 $(1/q, p_1/q_1$、……、$p_n/q_n)$ 手术或 $(-1/q, p_1/q_1$、……、$p_n/q_n)$ 手术所得的 3 维流形，与对 L' 进行 $(p_1/q_1$、……、$p_n/q_n)$ 手术所得的流形保向同胚。

证明。令 $M_\pm$ 分别表示对 L进行（$\pm 1/q$，p_1/q_1，…，p_n/q_n）手术所得的三维流形，其中 q 为正整数。令 M 表示对 L'进行（p_1/q_1，…，p_n/q_n）手术所得的三维流形。令 $\mathbb{L}_\pm$（分别地，$\mathbb{L}'$）表示由 L给出的手术描述，其中参数为（$\pm 1/q$，p_1/q_1，…，p_n/q_n）（分别地，由 L' 给出，参数为（p_1/q_1，…，p_n/q_n））。于是，由于对任意 $j \neq 0$，$\mathrm{lk}(K_0, K_j) = 0$，我们有

$$(-1)^{b_-(\mathbb{L}_+)} = -(-1)^{b_-(\mathbb{L}_-)} = (-1)^{b_-(\mathbb{L}')},$$

and

$$\sigma(E(\mathbb{L}_+)) - 1 = \sigma(E(\mathbb{L}_-)) + 1 = \sigma(E(\mathbb{L}')).$$

然后，仿照前面的做法，由引理 2.1 和方程 (2) 可得以下结果。

$$\begin{aligned}
\lambda(M_+) - \lambda(M) = &\left((-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \prod_{i=1}^{n} q_i \sum_{J' \subset N, J = J' \cup \{0\}} \det B_{N-J'} \hat{a}_1(L_J) \right) q \\
&- \frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \prod_{i=1}^{n} q_i}{24} \det A_N \left(\frac{q^2+2}{q} \right) \\
&- \frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \prod_{i=1}^{n} q_i}{24} \sum_{i=1}^{n} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2} \right) \\
&+ \frac{\prod_{i=1}^{n} q_i}{24} |\det A_N| \left(\frac{q^2+2}{q} \right).
\end{aligned}$$

如果 $\lambda(M_+) - \lambda(M) = 0$，那么我们得到一个关于 q 的二次方程

$$c_2 q^2 + c_1 q + c_0 = 0$$

with

$$\begin{aligned} c_2 &= (-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \sum_{J' \subset N, J = J' \cup \{0\}} \det B_{N-J'} \hat{a}_1(L_J) \\ &\quad - \frac{1}{24}\left((-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \det A_N - |\det A_N|\right), \\ c_1 &= -\frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L}')}}{24} \sum_{i=1}^{n} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2}\right), \\ c_0 &= -\frac{1}{12}\left((-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \det A_N - |\det A_N|\right). \end{aligned}$$

因此，如果下面两个条件中至少有一个成立，则上述二次方程不恒等于零。

$$\sum_{i=1}^{n} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2}\right) \neq 0, \qquad (-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \det A_N - |\det A_N| \neq 0.$$

这意味着，$\lambda(M_+) - \lambda(M) = 0$ 至多对两个正整数 q 成立。这意味着，如果上述两个条件中至少有一个成立，则至多有两个正整数 q 满足 M_+ 与 M 保向同胚。

同理，我们有

$$\begin{aligned} \lambda(M_-) - \lambda(M) = &- \left((-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \prod_{i=1}^{n} q_i \sum_{J' \subset N, J = J' \cup \{0\}} \det B_{N-J'} \hat{a}_1(L_J)\right) q \\ &+ \frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \prod_{i=1}^{n} q_i}{24} \det A_N \left(\frac{q^2 + 2}{q}\right) \\ &- \frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \prod_{i=1}^{n} q_i}{24} \sum_{i=1}^{n} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2}\right) \\ &- \frac{\prod_{i=1}^{n} q_i}{24} |\det A_N| \left(\frac{q^2 + 2}{q}\right). \end{aligned}$$

如果 $\lambda(M_-) - \lambda(M) = 0$，则我们得到关于 q 的一个二次方程

$$-c_2 q^2 + c_1 q - c_0 = 0.$$

然后，与上面相同，可以证明：如果上述两个条件中至少有一个成立，则至多有两个正整数 q 满足 M_- 与 M 保向同胚。

因此，如果以下两个条件中至少有一个成立，则满足 M_+ 或 M_-与 M 保向同胚的正整数 q 至多有四个：

$$\sum_{i=1}^{n} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2}\right) \neq 0, \qquad (-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \det A_N - |\det A_N| \neq 0. \quad \square$$

根据定理2.4的证明，我们得到以下推论，由此可推出推论1.3。

推论 2.5. 设 $L = K_0 \cup K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 是 S^3 中一个具有 $n \geq 1$ 且满足 $L' = K_1 \cup \cdots \cup K_n$ 的 $n+1$ 分支代数分裂链环。则对于给定的正有理数 p_1/q_1, $\ldots, p_n/q_n$，满足以下条件的正整数 q 至多有两个：对 L 进行 $(1/q, p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$ 手术或 $(-1/q, p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$ 手术所得的三维流形，与对 L' 进行 $(p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$ 手术所得的三维流形保向同胚。

证明。 我们采用定理2.4证明中的相同设定。进一步假设 L 是一个代数分裂链环，且 $p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n$ 是正有理数。那么，对于 $\mathbb{L}'$，即 L' 与 $(p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n)$，链接矩阵 $E(\mathbb{L}')$是一个对角矩阵，因此我们看到

$$(-1)^{b_-(\mathbb{L}')} \det A_N = |\det A_N|.$$

这意味着定理2.4的证明中的 c_0 始终为0。

另一方面，由于 L 是代数分裂的，且 $p_1/q_1, \ldots, p_n/q_n$ 均为正数，因此我们有

$$\sum_{i=1}^{n} \det A_{N-\{i\}} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2 + 1}{q_i^2} \right) > 0,$$

也就是说， $c_1 \neq 0$。

这意味着 $\lambda(M_+) - \lambda(M) = 0$ 至多对一个正整数 q成立， $\lambda(M_-) - \lambda(M) = 0$也至多对一个正整数成立。因此，满足 $M_\pm$ 且 M 保向同胚的正整数至多有两个。□

接下来，我们考虑定理2.4中 $n = 1$ 的情形。在这种情况下，定理2.4的第一个条件成立，因为空矩阵的行列式定义为1。至于第二个条件，我们注意到

$$\begin{cases} (-1)^{b_-(\mathbb{L}')} = 1, \quad \det A_N = |\det A_N| & \text{if } \frac{p_1}{q_1} > 0, \\ (-1)^{b_-(\mathbb{L}')} = 1, \quad \det A_N = |\det A_N| = 0 & \text{if } \frac{p_1}{q_1} = 0, \\ (-1)^{b_-(\mathbb{L}')} = -1, \quad \det A_N = -|\det A_N| & \text{if } \frac{p_1}{q_1} < 0. \end{cases}$$

因此，在所有情形下，该条件的左边都等于零。所以，按照推论 2.5证明中的相同方法推理，我们得到推论1.2。

同理，考虑定理2.4中 $n \geq 2$、 $p_1/q_1 = 0/1$和 $p_i/q_i \neq 0$对 $i = 2$的情形，3，.....， n。特别地，如果 L'是代数分裂的，那么按照推论 2.5证明中的相同方法推理，可知 $c_0 = 0$。至于 c_1，由于空矩阵的行列式定义为1，因此左边等于2（故不等于1）。注意，与推论 2.5不同， p_i/q_i 的符号不必相同。利用这一观察，例如可以得到以下结论。

推论 2.6. 设 M 是 $S^2 \times S^1$ 与透镜空间 $L(p_i, q_i)$的连通和，其中 p_i 和 q_i 是互素整数。那么，对于 M中的任意零同调结 K，在 M 中至多有两个与 K不等价、但其外部与 K的外部保向同胚的纽结。

结合这一点与推论 2.5，由于透镜空间的连通和是通过对平凡链环施行 Dehn 手术得到的，推论 1.4 随之成立。

3. Constraints on knots in a 3-manifold with the Betti number 1 or 2

本节我们将给出定理 1.5–1.7 的证明。

3.1. 定理 1.5 的证明。 对于由二分量链环给出的手术表示，我们由 Lescop 公式（1）得到如下有理手术公式。

设 $K_0 \cup K_1$ 是一个满足 $\mathrm{lk}(K_0,\ K_1) = l$ 的二分量链环。设 M 是通过对 $K_0 \cup K_1$ 进行 $(p_0/q_0,\ p_1/q_1)$ 手术得到的三维流形，即

$$\mathbb{L} = \{\,(K_0, p_0/q_0), (K_1, p_1/q_1)\,\}$$

是 M 的一个手术表示。这里， p_0 和 q_0 是互质整数，满足 $p_0 \neq 0$ 和 $q_0 > 0$。类似地， p_1 和 q_1 是互质整数，满足 $q_1 > 0$。必要时取镜像后，不妨设 $p_1 \geq 0$。在此情形下， $\mathbb{L}$ 的链接矩阵为

$$E(\mathbb{L}) = \begin{pmatrix} p_0/q_0 & l \\ l & p_1/q_1 \end{pmatrix},$$

满足行列式 $E(\mathbb{L}) = (p_0/q_0)\cdot(p_1/q_1) - l^2$ 以及迹 $E(\mathbb{L}) = p_0/q_0 + p_1/q_1$。由此可得

$$b_-(\mathbb{L}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) \geq 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) > 0, \\ 1 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) < 0, \text{ or } \det E(\mathbb{L}) = 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) < 0, \\ 2 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) > 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) < 0, \end{cases}$$

$$(-1)^{b_-(\mathbb{L})} = \begin{cases} 1 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) > 0, \text{ or } \det E(\mathbb{L}) = 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) > 0, \\ -1 & \text{otherwise }, \end{cases}$$

and

$$\sigma(E(\mathbb{L})) = \begin{cases} 2 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) > 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) > 0, \\ 1 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) = 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) > 0, \\ 0 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) < 0, \\ -1 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) = 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) < 0, \\ -2 & \text{if } \det E(\mathbb{L}) > 0 \text{ and } \mathrm{tr}E(\mathbb{L}) < 0. \end{cases}$$

令 $N_0 = \{0,1\}$，并考虑 $J \subset N_0$。当 $J = \{0\} \subset N_0$时，我们看到

$$\det(E(\mathbb{L}_{N_0-J})) = \frac{p_1}{q_1}, \quad \det(E(\mathbb{L}_{N_0-J}; J)) = \frac{p_1}{q_1} + l.$$

当 $J = \{1\} \subset N_0$时，我们看到

$$\det(E(\mathbb{L}_{N_0-J})) = \frac{p_0}{q_0}, \quad \det(E(\mathbb{L}_{N_0-J}; J)) = \frac{p_0}{q_0} + l.$$

当 $J = \{0,1\} \subset N_0$时，我们看到

$$\det(E(\mathbb{L}_{N_0-J})) = \det(E(\mathbb{L}_{N_0-J}; J)) = 1.$$

此外，还可得到以下结果。详情请参见第 [11, 19] 页。

$$\theta(\mathbb{L}_J) = \begin{cases} \frac{p_0^2+q_0^2+1}{q_0^2} & \text{if } J = \{0\}, \\ \frac{p_1^2+q_1^2+1}{q_1^2} & \text{if } J = \{1\}, \\ 2l^3 + 2l^2\left(\frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}\right) - 2l & \text{if } J = \{0,1\}. \end{cases} \tag{3}$$

因此，我们得到以下结果。

(4)

$$\lambda(M) = (-1)^{b-(\mathbb{L})}\left(q_0q_1\left(\left(\frac{p_1}{q_1}+l\right)\hat{a}_1(K_0)+\left(\frac{p_0}{q_0}+l\right)\hat{a}_1(K_1)+\hat{a}_1(K_0\cup K_1)\right)\right.$$
$$-\frac{q_0q_1}{24}\left(\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_0^2+q_0^2+1}{q_0^2}+\frac{p_0}{q_0}\cdot\frac{p_1^2+q_1^2+1}{q_1^2}-\left(2l^3+2l^2\left(\frac{p_0}{q_0}+\frac{p_1}{q_1}\right)-2l\right)\right)\Bigg)$$
$$+\left|p_0p_1-l^2q_0q_1\right|\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8}+\frac{s(p_0,q_0)}{2}+\frac{s(p_1,q_1)}{2}\right).$$

实际上，以下内容并不需要这个完全一般性的公式。我们在此列出它，以备将来使用。另请参阅附录，将其与 [9, 14] 中给出的已知类似公式进行比较。

于是，根据命题 2.3，可由以下两个命题直接推出定理 1.5。

命题 3.1. 设 $L = K_0 \cup K_1$ 是 S^3 中的一个二分量链环，满足 $\mathrm{lk}(K_0, K_1) = 0$。设 q_0 和 q_0' 是与非零整数 p_0 互质的不同正整数。若 $\hat{a}_1(L) \neq 0$，则对 $p_0' = \pm p_0$，在 L 上进行 $(p_0/q_0, 0)$ 手术和 $(p_0'/q_0', 0)$ 手术会得到不同的流形。

证明。在假设 $p_1 = 0$、$q_1 = 1$ 和 $\mathrm{lk}(K_0, K_1) = 0$ 的情况下，公式（4）的右端可简洁地表示如下。

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}(p_0)\left(q_0\left(\frac{p_0}{q_0}\hat{a}_1(K_1)+\hat{a}_1(K_0\cup K_1)\right)-\frac{q_0}{24}\left(\frac{2p_0}{q_0}\right)\right)\\&=\mathrm{sign}(p_0)\left(p_0\hat{a}_1(K_1)+q_0\hat{a}_1(K_0\cup K_1)-\frac{p_0}{12}\right),\end{aligned}$$

因为在这种情况下，$(-1)^{b-(\mathbb{L})} = \mathrm{sign}(p_0)$，其中若 $p_0 > 0$，则 $\mathrm{sign}(p_0) = +1$（分别为 -1）；若 $p_0 < 0$，则反之。

现在考虑三维流形 N 和 N'，它们分别由对 $L = K_0 \cup K_1$ 进行 $(p_0/q_0, 0)$-手术和 $(p_0'/q_0', 0)$-手术得到，其中 q_0，q_0' 是与正整数 p_0 互质的正整数。注意，在这种情况下 $q_0 \neq q_0'$ 成立。

那么，根据上述结果，若计算 $p_0' = p_0$、$\lambda(N) - \lambda(N')$，则可得如下结果。

$$\begin{aligned}&\mathrm{sign}(p_0)\left(\left(p_0\hat{a}_1(K_1)+q_0\hat{a}_1(L)-\frac{p_0}{12}\right)-\left(p_0'\hat{a}_1(K_1)+q_0'\hat{a}_1(L)-\frac{p_0'}{12}\right)\right)\\&=\mathrm{sign}(p_0)\,(q_0-q_0')\,\hat{a}_1(L).\end{aligned}$$

因此，在假设 $\hat{a}_1(L) \neq 0$ 的情况下，对 L 进行 $(p_0/q_0, 0)$-和 $(p_0'/q_0', 0)$-手术会得到不同的流形。

接下来，我们考虑 $p_0 = -p_0'$ 的情形。不失一般性，我们可以假设 $p_0 > 0$。在这种情况下，我们有

$$\lambda(N) = p_0\hat{a}_1(K_1) + q_0\hat{a}_1(L) - \frac{p_0}{12},$$

and

$$\lambda(N') = -\left((-p_0)\hat{a}_1(K_1) + q_0'\hat{a}_1(L) - \frac{-p_0}{12}\right) = p_0\hat{a}_1(K_1) - q_0'\hat{a}_1(L) - \frac{p_0}{12}.$$

由此可知

$$\lambda(N) - \lambda(N') = (q_0 + q_0')\hat{a}_1(L).$$

因此，在假设 $\hat{a}_1(L) \neq 0$ 的情况下，对L进行 $(p_0/q_0,0)$-和 $(p_0'/q_0',0)$-手术会得到不同的流形。□

命题3.2。设 $L = K_0 \cup K_1$ 是 S^3 中的一个二分量链环，且$\mathrm{lk}(K_0, K_1) = 0$。设 q_0 是与非零整数 p_0互质的正整数。若$\hat{a}_1(L) \neq 0$，则$(\pm 1/q_0, 0)$-手术施于 L，以及0-手术施于 K_1，会得到不同的流形。

证明。我们考虑三维流形 N和 N'。它们分别由对 $L = K_0 \cup K_1$ 施行$(p_0/q_0, 0)$-手术（其中 $p_0 = \pm 1$ 为正整数）以及对纽结 K_1 施行 0- 手术得到。与前面一样，由公式（4）可得如下结果。

$$\begin{aligned}\lambda(N) &= \mathrm{sign}(p_0)\left(q_0\left(\frac{p_0}{q_0}\hat{a}_1(K_1) + \hat{a}_1(K_0 \cup K_1)\right) - \frac{q_0}{24}\left(\frac{2p_0}{q_0}\right)\right) \\ &= \mathrm{sign}(p_0)\left(p_0\hat{a}_1(K_1) + q_0\hat{a}_1(K_0 \cup K_1) - \frac{p_0}{12}\right) \\ &= \hat{a}_1(K_1) + \mathrm{sign}(p_0)q_0\hat{a}_1(K_0 \cup K_1) - \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

我们注意到 $\mathrm{sign}(p_0) = p_0 = \pm 1$。

另一方面，令 $p_1 = 0$ 与 $q_1 = 1$，由 Lescop公式（1）可得如下结果。（另见附录。）

$$\lambda(N') = \hat{a}_1(K) - \frac{1}{12}.$$

由此可得如下结果。

$$\lambda(N) - \lambda(N') = \mathrm{sign}(p_0)q_0\hat{a}_1(L) = \pm q_0\hat{a}_1(L).$$

这表明，在$\hat{a}_1(L) \neq 0$ 的假设下，对 L 做 $(\pm 1/q_0, 0)$-手术与对 K_1 做 0-手术给出不同的流形。□

3.2. 定理 1.6 的证明。与上文类似，为证明定理 1.6，对于具有代数分裂三分量链环的手术表示，我们由 Lescop公式（1）给出如下有理手术公式。

设 M 是在 S^3 中沿 $L = K_0 \cup K_1 \cup K_2$ 进行（$p_0/q_0, p_1/q_1, p_2/q_2$）手术得到的三维流形，其中 L 是一个代数分裂链环。令 $N_0 = \{0, 1, 2\}$ 且 $\mathbb{L} = \{\,(K_i, p_i/q_i)\,\}_{i \in N_0}$，应用公式（1）。链接矩阵 E（$\mathbb{L}$）为

$$E(\mathbb{L}) = \begin{pmatrix} p_0/q_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1/q_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2/q_2 \end{pmatrix},$$

因此，$\det(E(\mathbb{L})) = \frac{p_0p_1p_2}{q_0q_1q_2}$，并且

$$\det(E(\mathbb{L}_{N-J})) = \det(E(\mathbb{L}_{N-J}; J)) = \begin{cases} \dfrac{p_1p_2}{q_1q_2} & \text{if } J = \{0\}, \\ \dfrac{p_0p_2}{q_0q_2} & \text{if } J = \{1\}, \\ \dfrac{p_0p_1}{q_0q_1} & \text{if } J = \{2\}, \\ \dfrac{p_2}{q_2} & \text{if } J = \{0,1\}, \\ \dfrac{p_1}{q_1} & \text{if } J = \{0,2\}, \\ \dfrac{p_0}{q_0} & \text{if } J = \{1,2\}. \end{cases}$$

由于 $\mathrm{lk}(K_i,\ K_j) = 0$ 对于 $i \neq j (0 \leq i,\ j \leq 2)$,

$$\theta(\mathbb{L}_J) = \begin{cases} \frac{p_j^2+q_j^2+1}{q_j^2} & \text{if } J = \{j\} \text{ for } j = 0,1,2, \\ 0 & \text{if } \sharp J \geq 2. \end{cases}$$

由此，我们得到以下结论。

$$\begin{aligned} \lambda(M) = (-1)^{b-(\mathbb{L})}\Big(& q_0p_1p_2\hat{a}_1(K_0) + p_0q_1p_2\hat{a}_1(K_1) + p_0p_1q_2\hat{a}_1(K_2) \\ & + q_0q_1p_2\hat{a}_1(K_0 \cup K_1) + q_0p_1q_2\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) + p_0q_1q_2\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) \\ & + q_0q_1q_2\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2)\Big) \\ & + \frac{(-1)^{b-(\mathbb{L})}}{24}\left(-\frac{p_1p_2}{q_0}\left(p_0^2+q_0^2+1\right) - \frac{p_0p_2}{q_1}\left(p_1^2+q_1^2+1\right)\right. \\ & \left. - \frac{p_0p_1}{q_2}\left(p_2^2+q_2^2+1\right)\right) \\ & + |p_0p_1p_2|\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8} + \frac{s(p_0,q_0)}{2} + \frac{s(p_1,q_1)}{2} + \frac{s(p_2,q_2)}{2}\right). \end{aligned}$$

接下来，我们考虑上述公式中 $p_2 = 0$ 和 $q_2 = 1$ 的情形。设 M_0 是通过对 L 进行 $(p_0/q_0,\ p_1/q_1,\ 0/1)$-手术得到的三维流形。那么，其 Casson–Walker–Lescop 不变量可计算如下。

$$\begin{aligned} \lambda(M_0) = (-1)^{b-(\mathbb{L})}\Big(& p_0p_1\hat{a}_1(K_2) + q_0p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) \\ & + p_0q_1\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + q_0q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) - \frac{p_0p_1}{12}\Big). \end{aligned} \tag{5}$$

现在，定理 1.6 可由接下来的两个命题推出。

命题 3.3。设 $L = K_0 \cup K_1 \cup K_2$ 是 S^3 中一个代数分裂的三分支链环。设 q_0 和 q_0' 是与非零整数 p_0 互质的不同正整数，并令 $p_0' = \pm p_0$。对于非零有理数 p_1/q_1，若 $p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) + q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) \neq 0$，则对 L 进行 $(p_0/q_0, p_1/q_1, 0/1)$ 手术和 $(p_0'/q_0', p_1/q_1, 0/1)$ 手术所得的流形不同。

证明。 分别设 N 和 N' 为对 L 进行 $(p_0/q_0, p_1/q_1, 0/1)$ 手术和 $(p_0'/q_0', p_1/q_1, 0/1)$ 手术所得的三维流形，假设 $p_0' = \pm p_0$ 和 $p_1/q_1 \neq 0$。必要时取镜像，我们可以假设 $p_1 > 0$。

首先，假设 $p_0' = p_0$。由于在此情况下为 $(-1)^{b-(\mathbb{L})} = \text{sign}(p_0)$，我们得到如下结论。

$$\begin{aligned}\lambda(N) - \lambda(N') = \ & \text{sign}(p_0)\Bigg(\Big(p_0p_1\hat{a}_1(K_2) + q_0p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) \\ & + p_0q_1\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + q_0q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) - \frac{p_0p_1}{12}\Big) \\ & - \Big(p_0p_1\hat{a}_1(K_2) + q_0'p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) + p_0q_1\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) \\ & + q_0'q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) - \frac{p_0p_1}{12}\Big)\Bigg) \\ = \ & \text{sign}(p_0)(q_0 - q_0')\left(p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) + q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2)\right).\end{aligned}$$

接下来假设 $p_0' = -p_0$。不失一般性，我们可以假设$p_0 > 0$。于是，我们得到如下结论。

$$\begin{aligned}\lambda(N) - \lambda(N') = \ & \Big(p_0p_1\hat{a}_1(K_2) + q_0p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) \\ & + p_0q_1\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + q_0q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) - \frac{p_0p_1}{12}\Big) \\ & - (-1)\Big((-p_0)p_1\hat{a}_1(K_2) + q_0'p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) \\ & + (-p_0)q_1\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + q_0'q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) - \frac{(-p_0)p_1}{12}\Big) \\ = \ & (q_0 + q_0')\left(p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) + q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2)\right).\end{aligned}$$

这意味着，在这两种情况下，对 L进行 $(p_0/q_0, p_1/q_1, 0/1)$-手术和 $(p_0'/q_0', p_1/q_1, 0/1)$-手术，在 $p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) + q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) \neq 0$时会得到不同的流形。□

命题3.4。 设 $L = K_0 \cup K_1 \cup K_2$ 是嵌入 S^3中的代数分裂三分支链环。对于非零有理数 p_1/q_1 和正整数 q_0，若$p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) + q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) \neq 0$，则对 L 进行$(\pm 1/q_0, p_1/q_1, 0/1)$手术，并对 $K_1 \cup K_2$ 进行$(p_1/q_1, 0/1)$手术，可得到不同的流形。

证明。 设 N 和 N' 分别是对L 进行 $(p_0/q_0, p_1/q_1, 0/1)$ 手术以及对 $K_1 \cup K_2$进行 $(p_1/q_1, 0/1)$ 手术所得的三维流形，并假设 $p_0 = \pm 1$ 和$p_1/q_1 \neq 0$。必要时取镜像，我们可以假设 $p_1 > 0$。

对于 N，由于 $(-1)^{b-(\mathbb{L})} =$ 符号$(p_0) = p_0$，由公式（5）可得：

$$\begin{aligned}\lambda(N) = \ & p_0\Big(p_0p_1\hat{a}_1(K_2) + q_0p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) \\ & + p_0q_1\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + q_0q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) - \frac{p_0p_1}{12}\Big) \\ = \ & p_1\hat{a}_1(K_2) + p_0q_0p_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_2) \\ & + q_1\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + p_0q_0q_1\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) - \frac{p_1}{12}.\end{aligned}$$

对于 N'，由公式（4）可得:

$$\begin{aligned}\lambda(N') &= q_1q_2\left(\frac{p_2}{q_2}\hat{a}_1(K_1)+\frac{p_1}{q_1}\hat{a}_1(K_2)+\hat{a}_1(K_1\cup K_2)\right)\\ &\quad-\frac{q_1q_2}{24}\left(\frac{p_2}{q_2}\cdot\frac{p_1^2+q_1^2+1}{q_1^2}+\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2^2+q_2^2+1}{q_2^2}\right)\\ &\quad+|p_1p_2|\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8}+\frac{s(p_1,q_1)}{2}+\frac{s(p_2,q_2)}{2}\right)\\ &= q_1\left(\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\hat{a}_1(K_2)+\hat{a}_1(K_1\cup K_2)\right)-\frac{q_1}{24}\left(2\frac{p_1}{q_1}\right)\\ &= p_1\hat{a}_1(K_2)+q_1\hat{a}_1(K_1\cup K_2)-\frac{p_1}{12}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\lambda(N)-\lambda(N')=p_0q_0\left(p_1\hat{a}_1(K_0\cup K_2)+q_1\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\right).$$

因此，若 $p_1\hat{a}_1(K_0\cup K_2)+q_1\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\neq 0$，则对 L 施行 $(\pm 1/q_0, p_1/q_1, 0/1)$-手术与对 $K_1\cup K_2$ 施行 $(p_1/q_1, 0/1)$-手术给出不同的流形。□

3.3. **定理 1.7 的证明**。接下来我们考虑公式（5）中 $p_1=0$ 与 $q_1=1$ 的情形。设 M_{00} 是通过对L施行 $(p_0/q_0, 0/1, 0/1)$-手术得到的三维流形。于是，其 Casson–Walker–Lescop 不变量计算如下。

$$\lambda(M_{00})=(-1)^{b_-(\mathbb{L})}\left(p_0\hat{a}_1(K_1\cup K_2)+q_0\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\right)$$

于是定理 1.7 由以下两个命题得出。

命题 3.5. 设 $L=K_0\cup K_1\cup K_2$ 是 S^3 中一个代数分裂三分量链环。设 q_0 和 q_0' 是与非零整数 p_0 互质的不同正整数，并令 $p_0'=\pm p_0$。若 $\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\neq 0$，则对 L 进行 $(p_0/q_0, 0, 0)$- 和 $(p_0'/q_0', 0, 0)$- 手术可得到不同的流形。

证明。设 N 和 N' 分别为对 L 进行 $(p_0/q_0, , 0, 0)$- 和 $(p_0'/q_0', 0, 0)$- 手术所得的三维流形，并假设 $p_0'=\pm p_0$。那么，在此情形下，$(-1)^{b_-(\mathbb{L})}=\mathrm{sign}(p_0)$ 成立。

若 $p_0'=p_0$，则有

$$\begin{aligned}\lambda(N)-\lambda(N') &= \mathrm{sign}(p_0)\Big((p_0\hat{a}_1(K_1\cup K_2)+q_0\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2))\\ &\quad-(p_0\hat{a}_1(K_1\cup K_2)+q_0'\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2))\Big)\\ &= \mathrm{sign}(p_0)(q_0-q_0')\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\end{aligned}$$

若 $p_0'=-p_0$，不妨设 $p_0>0$。于是有

$$\begin{aligned}\lambda(N)-\lambda(N') &= \Big((p_0\hat{a}_1(K_1\cup K_2)+q_0\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2))\\ &\quad-(-1)\left((-p_0)\hat{a}_1(K_1\cup K_2)+q_0'\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\right)\Big)\\ &= (q_0+q_0')\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\end{aligned}$$

因此，在这两种情况下，如果$\hat{a}_1(K_0\cup K_1\cup K_2)\neq 0$，则对 L 进行 $(p_0/q_0,\ 0,\ 0)$- 和 $(p_0'/q_0',\ 0,\ 0)$-手术会得到不同的流形。□

命题 3.6。 设 $L = K_0 \cup K_1 \cup K_2$ 是 S^3 中的一个代数分裂三分量链环。设 q_0 为正整数，并令 $p_0 = \pm 1$。若 $\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) \neq 0$，则对 L 进行 $(p_0/q_0, 0, 0)$-手术，以及对 $K_1 \cup K_2$ 进行 $(0, 0)$- 手术，会得到不同的流形。

证明。 设 N、 N'分别是在 L上进行（p_0/q_0，0，0）手术以及在 $K_1 \cup K_2$上进行（0，0）手术得到的三维流形，假设 $p_0 = \pm 1$。

对于 N，由于（-1）$^{b-(\mathbb{L})}$ = 符号（p_0） $= p_0$，由公式（5）可得如下结果。

$$\begin{aligned}\lambda(N) &= p_0\Big(p_0\hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + q_0\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2)\Big) \\ &= \hat{a}_1(K_1 \cup K_2) + p_0 q_0 \hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2).\end{aligned}$$

对于 N'，由公式（4）可得如下结果。

$$\lambda(N') = \hat{a}_1(K_1 \cup K_2).$$

因此，我们有

$$\lambda(N) - \lambda(N') = p_0 q_0 \hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2).$$

因此，如果$\hat{a}_1(K_0 \cup K_1 \cup K_2) \neq 0$，则对 L 进行 $(\pm 1/q_0, 0, 0)$-手术与对 $K_1 \cup K_2$ 进行 (0,0)- 手术会得到不同的流形。□

4. Examples

我们给出一些关于定理 1.5–1.7 的例子。

例 4.1. 设 W 为图 1 所示的 S^3 中的怀特黑德链环。其康威多项式计算为 $\nabla_W(z) = z^3$，因此$\hat{a}_1(W) = -a_3(W) = -1$。于是，根据定理 1.5， W 的一个分支所对应的 $S^2 \times S^1$中的纽结不存在纯美容手术，因为 $S^2 \times S^1$ 是对 W的另一个分支进行 0-手术得到的。此外，设 L_m 为图 1 所示的链环，其中 m 是一个非零整数。注意， $L_1 = W$，且我们有 $\nabla_{L_m}(z) = mz^3$。于是，根据定理 1.5，图 2 所示的 $S^2 \times S^1$ 中的纽结不存在纯美容手术。

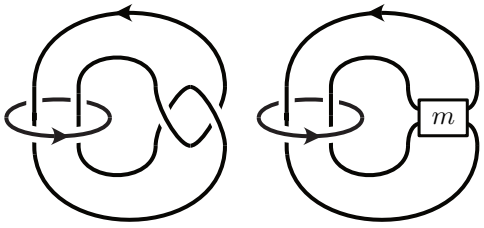


Figure 1. 怀特黑德链环 W 和链环 L_m。标记为m的方框表示 m次整圈扭转。

例 4.2. 接下来我们考察博罗梅恩环 B。其康威多项式计算得为 $\nabla_B(z) = z^4$，因此$\hat{a}_1(B) = a_4(B) = 1$。由定理 1.6 可知，在 $S^2 \times S^1$ 与任意透镜空间的连通和中，由 B 的一个分支得到的纽结没有纯美容手术。此外，由定理 1.7 可知，在两个 $S^2 \times S^1$ 的连通和中，由 B 的一个分支得到的纽结没有纯美容手术。



FIGURE 2. 确定两个2-球面后，我们在 $S^2 \times S^1$中得到一个不承认纯粹余切手术的纽结。

APPENDIX A. CONFIRMING SEVERAL FORMULAE

我们首先从 Lescop公式（1）推导出 Boyer 和 Lines [3] 给出的 Casson 不变量手术公式。

设 M 为对 S^3中的纽结 K 进行 p/q-手术所得的三维流形。为简单起见，假设 p, $q>0$ 。于是，根据Lescop公式（1），我们有如下结果。

$$\begin{aligned}\lambda(M) &= q\hat{a}_1(K) - q\left(\frac{p^2+q^2+1}{24q^2}\right) + q\left|\frac{p}{q}\right|\left(\frac{1}{8}+\frac{s(p,q)}{2}\right)\\ &= q\hat{a}_1(K) - \left(\frac{p^2+q^2+1}{24q}\right) + p\left(\frac{1}{8}+\frac{s(p,q)}{2}\right).\end{aligned}$$

上式右端变换如下。

$$\begin{aligned}&q\hat{a}_1(K) - \left(\frac{p^2+q^2+1}{24q}\right) + p\left(\frac{1}{8}+\frac{s(p,q)}{2}\right)\\ &= qa_2(K) - \frac{p^2+q^2+1}{24q} + \frac{p}{8} + \frac{p}{2}\cdot\frac{p^2+q^2+1-3pq}{12pq} - \frac{p}{2}s(q,p)\\ &= qa_2(K) - \frac{p^2+q^2+1}{24q} + \frac{p}{8} + \frac{p^2+q^2+1-3pq}{24q} - \frac{p}{2}s(q,p)\\ &= qa_2(K) + \frac{-p^2-q^2-1+3pq+p^2+q^2+1-3pq}{24q} - \frac{p}{2}s(q,p)\\ &= qa_2(K) - \frac{p}{2}s(q,p)\end{aligned}$$

这里我们用到了 Dedekind 和的以下互反律。

$$s(p,q)+s(q,p) = \frac{p^2+q^2+1-3pq}{12pq}.$$

因此，我们可以恢复 [3] 中给出的以下公式。

$$\lambda(M) = qa_2(K) - \frac{p}{2}s(q,p).$$

接下来，我们确认 Ito 在 [9, 定理 1.5] 中给出的、适用于 S^3 中 2分量链环的 Casson–Walker 不变量有理手术公式 λ_w 是由方程（1）推导得出的。

设 $L = K_1 \cup K_2$ 是 S^3 中的一个二分支链环，且 $l = \mathrm{lk}(K_1,\ K_2)$。设 M 是一个三维流形，其手术表示为 $\mathbb{L} = \{\,(K_1,\ p_1/q_1),\ (K_2,\ p_2/q_2)\,\}$。假设

满足 $q_1,\ q_2>0$。如 [11, 第13页 T5.0], 所述, M 的 Casson–Walker不变量 λ_w 与 Casson–Walker–Lescop 不变量 λ 之间的关系为

$$\begin{aligned}\lambda(M)&=\frac{|H_1(M)|}{2}\lambda_w(M)\\&=(-1)^{b_-(\mathbb{L})}q_1q_2\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}-l^2\right)\frac{\lambda_w(M)}{2}.\end{aligned}\tag{6}$$

λ_w 的下列公式归功于 Ito [9]。

命题 A.1 ([9, 定理 1.5])**. </style}若有理同调 3-球面 可表示为 (**$K_1, p_1/q_1$**), (**$K_2, p_2/q_2$**) }，则其 *Casson–Walker*不变量 $\lambda_w(M)$*)</style}*由下式给出**

$$\begin{aligned}&\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}-l^2\right)\left(\frac{\lambda_w(M)}{2}-\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8}\right)\\&=a_2(K_1)\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_2}{24q_2}-\frac{p_2}{24q_2q_1^2}+\frac{p_2l^2}{24q_2}+a_2(K_2)\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_1}{24q_1}-\frac{p_1}{24q_1q_2^2}+\frac{p_1l^2}{24q_1}\\&\quad-a_3(L)+(a_2(K_1)+a_2(K_2))l+\frac{1}{12}(l^3-l)\\&\quad+\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}-l^2\right)\left(\frac{s(p_1,q_1)}{2}-\frac{p_1}{24q_1}+\frac{s(p_2,q_2)}{2}-\frac{p_2}{24q_2}\right).\end{aligned}$$

由命题 A.1 可得

$$\begin{aligned}&(-1)^{b_-(\mathbb{L})}q_1q_2\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}-l^2\right)\frac{\lambda_w(M)}{2}\\&=(-1)^{b_-(\mathbb{L})}q_1q_2\Bigg(a_2(K_1)\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_2}{24q_2}-\frac{p_2}{24q_2q_1^2}+\frac{p_2l^2}{24q_2}\\&\qquad+a_2(K_2)\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_1}{24q_1}-\frac{p_1}{24q_1q_2^2}+\frac{p_1l^2}{24q_1}\\&\qquad-a_3(L)+(a_2(K_1)+a_2(K_2))l+\frac{1}{12}(l^3-l)\\&\quad+\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}-l^2\right)\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8}+\frac{s(p_1,q_1)}{2}-\frac{p_1}{24q_1}+\frac{s(p_2,q_2)}{2}-\frac{p_2}{24q_2}\right)\Bigg).\end{aligned}\tag{7}$$

另一方面，将公式（1）应用于 $\mathbb{L} = \{(K_1,\ p_1/q_1),\ (K_2,\ p_2/q_2)\}$，可得

(8)

$$
\begin{aligned}
&\lambda(M)\\
&= (-1)^{b_-(\mathbb{L})} q_1 q_2 \left(\det E(\mathbb{L}_{\{2\}};\{1\})\hat{a}_1(L_{\{1\}}) + \det E(\mathbb{L}_{\{1\}};\{2\})\hat{a}_1(L_{\{2\}}) + \hat{a}_1(K_1 \cup K_2)\right)\\
&\quad + \frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L})} q_1 q_2}{24}\left(-\frac{p_2}{q_2}\left(\frac{p_1^2+q_1^2+1}{q_1^2}\right) - \frac{p_1}{q_1}\left(\frac{p_2^2+q_2^2+1}{q_2^2}\right) + \theta(\mathbb{L}_{\{1,2\}})\right)\\
&\quad + |p_1p_2 - q_1q_2l^2|\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8} + \frac{s(p_1,q_1)}{2} + \frac{s(p_2,q_2)}{2}\right)\\
&= (-1)^{b_-(\mathbb{L})} q_1 q_2 \left(\left(\frac{p_2}{q_2}+l\right)\hat{a}_1(K_1) + \left(\frac{p_1}{q_1}+l\right)\hat{a}_1(K_2) + \hat{a}_1(K_1\cup K_2)\right)\\
&\quad + \frac{(-1)^{b_-(\mathbb{L})} q_1 q_2}{24}\left(-\frac{p_2}{q_2}\left(\frac{p_1^2+q_1^2+1}{q_1^2}\right) - \frac{p_1}{q_1}\left(\frac{p_2^2+q_2^2+1}{q_2^2}\right)\right.\\
&\quad \left. + 2l^2\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right) + 2l^3 - 2l\right) + \left|p_1p_2 - q_1q_2l^2\right|\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8} + \frac{s(p_1,q_1)}{2} + \frac{s(p_2,q_2)}{2}\right)\\
&= (-1)^{b_-(\mathbb{L})} q_1 q_2 \left(\frac{p_2}{q_2}\left(a_2(K_1) - \frac{p_1^2+q_1^2+1}{24q_1^2}\right) + \frac{p_1}{q_1}\left(a_2(K_2) - \frac{p_2^2+q_2^2+1}{24q_2^2}\right)\right.\\
&\quad \left. + l(a_2(K_1)+a_2(K_2)) - a_3(L) + \frac{l^2}{12}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{l(l^2-1)}{12}\right)\\
&\quad + |p_1p_2 - q_1q_2l^2|\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8} + \frac{s(p_1,q_1)}{2} + \frac{s(p_2,q_2)}{2}\right).
\end{aligned}
$$

这里，对于 $E(\mathbb{L}) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1/q_1 & l \\ l & p_2/q_2 \end{pmatrix}$，如方程（3）所述，项 $\theta(\mathbb{L}_{\{1,2\}})$ 的计算方式为

$$
\begin{aligned}
\theta(\mathbb{L}_{\{1,2\}}) &= l_{12}l_{21}l_{11} + l_{11}l_{12}l_{21} + l_{21}l_{12}l_{22} + l_{22}l_{21}l_{12} + l_{12}l_{21}l_{12} + l_{21}l_{12}l_{21} - 2l\\
&= 2l^2p_1/q_1 + 2l^2p_2/q_2 + 2l^3 - 2l.
\end{aligned}
$$

详见 [11, 第 19] 页。注意，由于 $q_1,\ q_2 > 0$,

$$
\operatorname{sign}(p_1p_2 - q_1q_2l^2) = \operatorname{sign}\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2} - l^2\right),
$$

and

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sign}\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2} - l^2\right) &= \operatorname{sign}\left(\det E(\mathbb{L})\right)\\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } b_-(\mathbb{L}) = 0, 2, \\ -1 & \text{if } b_-(\mathbb{L}) = 1 \end{cases}\\
&= (-1)^{b_-(\mathbb{L})}.
\end{aligned}
$$

因此，我们有 $\operatorname{sign}(p_1p_2 - q_1q_2l^2) = (-1)^{b_-(\mathbb{L})}$。于是，方程 (8) 的右端等于

$$(-1)^{b_-(\mathbb{L})}q_1q_2\left(\frac{p_2}{q_2}\left(a_2(K_1) - \frac{p_1^2+q_1^2+1}{24q_1^2}\right) + \frac{p_1}{q_1}\left(a_2(K_2) - \frac{p_2^2+q_2^2+1}{24q_2^2}\right)\right.$$
$$+l(a_2(K_1)+a_2(K_2)) - a_3(L) + \frac{l^2}{12}\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right) + \frac{l(l^2-1)}{12}$$
$$\left.+\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2} - l^2\right)\left(\frac{\sigma(E(\mathbb{L}))}{8} + \frac{s(p_1,q_1)}{2} + \frac{s(p_2,q_2)}{2}\right)\right).$$

于是我们可以看出，方程 (7) 的右端等于 (8) 的右端。

References

1. Selman Akbulut 和 John D. McCarthy, *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres*, Mathematical Notes，第 36 卷，Princeton University Press，Princeton，NJ，1990，综述。MR 1030042 2. Steven A. Bleiler、Craig D. Hodgson 和 Jeffrey R. Weeks, *Cosmetic surgery on knots*, Kirbyfest 论文集（Berkeley，CA，1998），Geom. Topol. Monogr.，第 2 卷，Geom. Topol. Publ.，Coventry，1999，第 23–34 页。MR 1734400 3. Steven Boyer 和 Daniel Lines, *Surgery formulae for Casson's invariant and extensions to homology lens spaces* **405** 1990 181 220 , J. Reine Angew. Math.（），–。MR 1041002 4. Fyodor Gainullin, *Heegaard Floer homology and knots determined by their complements*, Al- gebr. Geom. Topol. **18** 3748239 5 2018 1，69 109（），第 – 期。MR。Cameron McA. Gordon, *Dehn surgery on knots*, 国际数学家大会论文集，第 I、II 卷（Kyoto，1990），Math. Soc. Japan，东京，1991，第 631–642 页。MR 1159250 6. Jim Hoste, *A formula for Casson's invariant* **297** 1986 2, , 547 562 854084 Trans. Amer. Math. Soc.（），第 – 期。MR 7. Kazuhiro Ichihara, *Finiteness of purely cosmetic fillings*, Canadian Mathematical Bulletin（2026），1–8。8. Kazuhiro Ichihara 和 In Dae Jong, *Cosmetic surgeries on knots in homology spheres andthe Casson–Walker invariant*, Geom. Dedicata **219** 2025 6, 87 4983919（），第 9 Paper No. 期。MR。Tetsuya Ito, *Applications of the Casson-Walker invariant to the knot complement and the cosmetic crossing conjectures* **216** 2022 6, 63, 15 4475472 , Geom. 10 Dedicata（），第 Paper No. 期。MR。Rob Kirby（编）, *Problems in low-dimensional topology*, 几何拓扑（Athens，GA，1993），AMS/IP Stud. Adv. Math.，第 2.2 卷，Amer. Math. Soc.，Providence，RI，1997，第 35–473 页。MR 1470751 11. Christine Lescop, *Global surgery formula for the Casson-Walker invariant*, Annals of Mathematics Studies，第 140 卷，Princeton University Press，Princeton，NJ，1996。MR 1372947 12. W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math.（2 151948 13**76** 1962 531 540）（），–。MR。Bruno Martelli, *Dehn surgery on the minimally twisted seven-chain link*, Comm. Anal. Geom. **29** 4429240 14 2021 7, 1597 1641（），第 – 期。MR。Noriko Maruyama, *The CWL invariant and surgeries along 2-component links*, Jour. of Musashino Art University **42** （2012），39–51。15. Kevin Walker, *An extension of Casson's invariant*, Annals of Mathematics Studies，第 126 卷，Princeton University Press，Princeton，NJ，1992 1154798 16。MR。Andrew H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canadian J. Math. **12** （1960），503–528。MR 125588

Department of Mathematics, College of Humanities and Sciences,
Nihon University,3-25-40 Sakurajosui, Setagaya-ku, Tokyo 156-8550, JAPAN
Email address: ichihara.kazuhiro@nihon-u.ac.jpDepartment of Mathematics,
Kindai University, 3-4-1 Kowakae, Higashiosaka City,Osaka 577-0818, Japan
Email address: jong@math.kindai.ac.jpDepartment of Education,
Faculty of Education, Kobe Shinwa University, 7-13-1Suzurandai Kitamachi,
Kobe 651-1111, Japan*Email address*: y-tsutsumi@ecip.kobe-shinwa.ac.jp