arXiv:2603.11753v1 [math.AG] 12 Mar 2026

动机同伦理论的比较

Tianjian Tan

摘要

我们构造了一个比较函子，它从动机同伦范畴 $\mathcal{SH}$ 的对偶范畴映射到 Blumberg、Gepner 和 Tabuada 意义下的 $\mathbb{A}^1$-不变局部化动机范畴 $\mathrm{Mot}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$（施加了 $\mathbb{A}^1$-不变性）。我们还构造了它的非-$\mathbb{A}^1$-不变类似物：一个从 Annala-Iwasa-Hoyois 的非-$\mathbb{A}^1$-不变动机同伦范畴 $\mathcal{MS}$ 的对偶范畴映射到 $\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$ 的函子。经过 Barr-Beck 论证后，这些函子因子化为 K-理论谱 $\mathrm{KGL}_{(\mathbb{A}^1)}$（$\mathbb{A}^1$-不变）的对偶版本上的模范畴。对于允许奇点消解的域，我们证明 $\mathbb{A}^1$-不变的因子化函子是全忠实的，而非-$\mathbb{A}^1$-不变的函子一般而言并非如此。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **4**
2.1 范畴论预备知识 . 5
2.1.1 对象的形式反演 . 5
2.1.2 可对偶对象 8
2.1.3 对偶运算与形式求逆的相容性结果 10
2.1.4 伴随对经由模范畴的分解 12
2.2 动机范畴 . 14
2.2.1 稳定同伦范畴.14 2.2.2 $\mathcal{MS}$ .16 2.2.3 动机范畴$_{\mathrm{loc}}$ .17

3 动机同伦理论比较函子的构造 1 **9**
3.1 稳定同伦范畴与动机范畴的比较 $\mathbb{A}^1$ $_{\mathrm{loc}}$ .19 3.1.1 稳定同伦范畴的计算 稳定同伦范畴$(S)^\vee$ .21 3.1.2 扩张函子 ϕ .24 3.2 比较$\mathcal{MS}^\vee$ 与动机范畴$_{\mathrm{loc}}$ .28 3.2.1 MS的计算 $\mathcal{MS}^\vee$ .28 扩张函子 ψ .29

4 分解函子的全忠实性 3 **0**
4.1 因子化函子的全忠实性，$\mathbb{A}$-不变情形 .30 4.2 因子化函子的全忠实性，非$\mathbb{A}^1$-不变情形 33

1 引言

在这篇论文中，我们想要比较动机同伦理论与 [BGT13]意义下的非交换动机。具体来说，我们比较四种动机范畴

- 非$\mathbb{A}^1$不变动机同伦范畴 $\mathcal{MS}$ Annala、Iwasa 和 Hoyois 的 [AI22] [AHI25]；
- $\mathbb{A}^1$不变动机同伦范畴稳定同伦范畴 Morel 和 Voevodsky 的；
- 局部化动机范畴$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$ Blumberg、Gepner 和 Tabuada 的 [BGT13]；
- 范畴 $\mathbb{A}^1$不变局部化动机 $\mathrm{Mot}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$

前两个范畴之间以及后两个范畴之间的比较，由关于所有投影 $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ 的局部化给出。因此，我们着重研究第一个与第三个范畴之间的比较，以及第二个与第四个范畴之间的 $\mathbb{A}^1$-不变类似情形。至少在将动机同伦范畴限制到有限表现光滑概形的范畴时，存在一个自然的候选比较函子，可用于稳定同伦范畴 与 $\mathrm{Mot}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$之间（以及 $\mathcal{MS}$ 与 $\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$ 之间）的比较，也就是说，

$$\begin{aligned}(Sm^{\mathrm{fp}})^{op} &\to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}^{\mathbb{A}^1} \\ X &\mapsto \mathrm{L}_{\mathbb{A}^1}\mathcal{U}(\mathrm{perf}_X).\end{aligned}$$

分别

$$\begin{aligned}(Sm^{\mathrm{fp}})^{op} &\to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}} \\ X &\mapsto \mathcal{U}(\mathrm{perf}_X).\end{aligned}$$

上文的函子 $\mathcal{U}$ 是 [BGT13]中构造的万有局部化不变量。这一函子性启发我们将定义域扩展到某种 稳定同伦范畴 （分别是 $\mathcal{MS}$）的对偶范畴。事实证明，这里所需的对偶概念，是稳定可表范畴的对称幺半范畴 $\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$中的对偶对象，我们将其记作 $(-)^\vee$。一个简单的例子是，对于小范畴 $\mathcal{C}$，谱值预层范畴的对偶就是 $\mathcal{P}sh(\mathcal{C}^{op})$，即 $\mathcal{C}^{op}$上的预层范畴。这种对偶性的研究和应用广泛见于 Clausen-Scholze [CP20], Efimov [Efi24], 等人的工作中。

要将上述自然候选扩展为一个函子

$$\mathcal{SH}^\vee \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}^{\mathbb{A}^1},$$

分别

$$\mathcal{MS}^\vee \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}},$$

我们需要一个刻画从 稳定同伦范畴$^\vee$ （分别从 $\mathcal{MS}^\vee$）出发的函子的泛性质。事实证明，正如 稳定同伦范畴 （分别为 $\mathcal{MS}$）是先对预层范畴施加局部化以满足特定的下降条件，再将塔特圆 $\mathbb{P}^1$求逆而定义的那样，对偶范畴稳定同伦范畴$^\vee$ （分别为 $\mathcal{MS}^\vee$）也有一种对偶描述：

命题 1.1. 稳定同伦范畴$^\vee$ （相应地，$\mathcal{MS}^\vee$）等价于由谱值预层范畴 $\mathcal{P}sh((Sm^{\mathrm{fp}})^{op})$ 构造的范畴：先相对于某些余下降条件将其局部化，然后形式地求逆 $\mathbb{P}^1$ 的一个对偶版本。

为了推出上述命题，我们针对一般的形式求逆 $\mathcal{C}[X^{-1}]$ 计算了对偶范畴，其中 $\mathcal{C}$ 是稳定的、可表现对称幺半的紧生成范畴，且 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个紧对象：

命题 1.2 （命题2.14）。 设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定、紧生成的可呈对称幺半范畴。设 $X \in \mathcal{C}$ 是一个紧对象。则有范畴的典范等价

$$\mathcal{C}^{\vee}[(X^{dual})^{-1}] \simeq \mathcal{C}[X^{-1}]^{\vee}.$$

此外，对称幺半结构彼此相容。

将 $\mathcal{SH}^{\vee}$ （分别为 $\mathcal{MS}^{\vee}$）刻画为余层范畴的形式反演，带有具有所需形式的自然泛性质（命题 3.12）：

命题 1.3。 复合 $\mathrm{L}_{(\mathbb{P}^1)^{dual}} \circ \mathrm{L}_{\mathrm{coNis},\ \mathrm{co}\,\mathbb{A}^1} \circ j$ 对每个可呈现的稳定范畴 D 诱导出一个全忠实函子

$$\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{SH}(S)^{\vee}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathcal{D})$$

其本质像由 $\mathbb{A}^1$-不变函子 F 所张成；这些函子保持终对象，将 *Nisnevich* 方格映射为推出，并将.....的纤维映射为

$$fib(F(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{F(\infty)} F(S))$$

一个可逆对象。

此外，由于对称幺半结构彼此相容，这一结论对对称幺半范畴 D 和对称幺半函子仍然成立。

特别地，我们有

$$\mathrm{Fun}^{L,\otimes}(\mathcal{SH}(S)^{\vee}, \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}) \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1,\mathbb{P}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}})$$

我们还有一个非$\mathbb{A}^1$不变版本（命题 3.19）：

命题 1.4。 复合 $\mathrm{L}_{(\mathbb{P}^1)^{dual}} \circ \mathrm{L}_{\mathrm{coNis,coebu}} \circ j$ 对每个可呈现稳定范畴 D 诱导一个全忠实函子

$$\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{MS}(S)^{\vee}, \mathcal{D}) \to \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathcal{D})$$

其本质像由满足以下条件的函子 F 张成：保持终对象，将 *Nisnevich* 方形和初等爆破方块映为推出，并将.....的纤维

$$fib(F(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{F(\infty)} F(S))$$

映为可逆对象。

此外，由于对称幺半结构彼此兼容，该结论对于对称幺半范畴 D 和对称幺半函子仍然成立。

特别地，我们有

$$\mathrm{Fun}^{L,\otimes}(\mathcal{MS}(S)^{\vee}, \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}}) \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}_{\mathrm{Nis,ebu},\mathbb{P}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}})$$

我们验证自然函子 $(Sm^{\mathrm{fp}})^{op} \to \mathrm{Mot}_{(\mathbb{A}^1)\ \mathrm{loc}}$ 满足上述条件，因此定义了比较函子。

我们的泛性质的一个推论是，比较函子自动是强幺半左伴随函子；此类函子形式上经由模范畴 $\mathrm{Mod}_{\Phi_*(1)}$(稳定同伦范畴$^\vee$)（相应地，$\mathrm{Mod}_{\Psi_*(1)}(\mathcal{MS}^\vee)$）进行因子分解，其中我们用 Φ_*（相应地，Ψ_*）表示相应的右伴随函子。我们关心该因子化函子的全忠实性

$$\mathrm{Mod}_{\Phi_*(1)}(\mathcal{SH}^\vee) \to \mathrm{Mot}^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}},$$

相应地

$$\mathrm{Mod}_{\Psi_*(1)}(\mathcal{MS}^\vee) \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}\,.$$

事实上，当限制在具有足够好的可对偶性的概形 X 上时，两个函子都是全忠实的。当我们考虑定义域的刚性生成时，会出现一个关键差异：在允许奇点消解的域 k 上工作时，稳定同伦范畴$(k)^\vee$ 是刚性生成的，即它具有一组可对偶紧生成元。因此，这种限制意义下的全忠实性给出了完整的全忠实性：

命题 1.5 （命题4.2）。 在域 k 上，并在对指数特征取逆之后 e，函子

$$\widetilde{\Phi} : \mathrm{Mod}_{\Phi_*(1)}(\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^\vee) \to \mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}[\frac{1}{e}]$$

在映射谱层面上是全忠实的。

而在非$\mathbb{A}^1$-不变的情形下，$\mathcal{MS}(k)^\vee$ 并非由刚性对象生成，我们还给出了一个例子，说明在这种情形下全忠实性的失效。这里有两个关键要素：其一，根据 Efimov 的一个定理（[Efi25，定理 9。1], 另见第4.2节），$_{\mathrm{loc}}$ 中某些（紧）对象之间的映射谱是不可数的；其二，在一般情况下，$\mathcal{MS}(k)$中紧对象之间的映射谱是可数的：

命题 1.6 (命题4.3)。设 k 是一个可数域，并设 e 是 k的指数特征。那么$\mathcal{MS}(k)[\frac{1}{e}]^\vee$ 中由紧对象张成的全子范畴是可数的，其含义是所有映射谱的 π_0^- 都是可数的。

1.1 致谢

这是我在索邦大学攻读的硕士论文，由 Vova Sosnilo 指导。我要向他表达深深的谢意，感谢他提出论文主题，与我分享他的想法，回答我无尽的问题，并对本论文的早期版本提出反馈。此外，我还要诚挚地感谢他，让我度过了一个美好的夏天，一起思考并讨论这些美妙的数学。

我也非常感谢 Marc Hoyois 和 Maxime Ramzi 指出了几处错误，并提供了有益的意见。

2 预备知识

论文中提到的每个范畴默认都是一个 ∞-范畴。

2.1 范畴论预备知识

2.1.1 对象的形式反演

本节将回顾在对称幺半范畴中形式地对对象进行求逆的相关技术。在 ∞-范畴的语境下，这归功于 Robalo 的工作，见 [Rob13]。对于一个可呈对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 和一个对象 X in $\mathcal{C}$，我们希望以一种普适的方式对 X 进行形式求逆。更准确地说，我们希望找到一个对称幺半范畴 $\mathcal{C}[X^{-1}]$以及一个强幺半函子

$$\mathrm{L}_X^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[X^{-1}],$$

使得 $\mathrm{L}_X^{\mathcal{C}}$ 将 X 送到一个可逆对象，并且在所有此类函子中是初始的。

谱范畴是这一构造的一个例子：它是带基点的 anima 范畴 An_* 关于 $(\mathbb{S}^1,1)$ 的形式反演。回想一下，除了泛性质刻画之外，谱范畴还具有一个显式模型

$$\mathrm{Sp} = colim(\cdots \xrightarrow{-\otimes\mathbb{S}^1} \mathrm{An}_* \xrightarrow{-\otimes\mathbb{S}^1} \mathrm{An}_* \xrightarrow{-\otimes\mathbb{S}^1} \mathrm{An}_*),$$

其中余极限是在Pr^{L}中计算的。由于这一显式模型在若干方面会很有用，我们也希望为一般的形式反演配备同类模型。结果表明，若对被反演对象附加额外的对称性假设 X，则该模型可以以与上文谱范畴 类似的方式描述，我们称之为望远镜模型。而对于更一般的 X，该模型归功于 Annala 与 Iwasa，见 [AI22], ，且更为微妙。

我们从如下情形开始：$\mathcal{C}$ 是一个小对称幺半范畴。这与范畴交换代数(Cat)中的一个对象是同一组数据，其中Cat 配备了笛卡尔幺半结构。回想一下，我们有一个范畴等价（见 [Rob13，命题 3.16]）

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Cat})) \simeq \mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})_{\mathcal{C}/}.$$

我们将 $\mathsf{CAlg(Cat)}_{\mathcal{C}/}$ 中由把 X 送到可逆对象的函子所张成的子范畴记为 $\mathsf{CAlg(Cat)}^X_{\mathcal{C}/}$。这个子范畴可以理解为局部对象范畴。事实上，回忆一下伴随

$$\mathrm{Free} : \mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Cat}) \rightleftarrows \mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})_{\mathcal{C}/} : \mathrm{U}\,.$$

令 $\mathcal{S}_X$ 为 $\mathsf{CAlg(Cat)}_{\mathcal{C}/}$ 中由单个映射组成的态射集

$$\mathrm{Free}(X \otimes -) : \mathrm{Free}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Free}(\mathcal{C}).$$

我们有

引理 2.1. *([Rob13，命题 4。1])* 由 $\mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})_{\mathcal{C}/}$ 中的 $\mathcal{S}_X$-局部对象所张成的子范畴，按 *[Lur09，定义 5.5.4。1]*, 的含义，与 $\mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})^X_{\mathcal{C}/}$ 等价。包含映射

$$\mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})^X_{\mathcal{C}/} \hookrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})_{\mathcal{C}/}$$

存在一个左伴随（相对于 $\mathcal{S}_X$ 的 *Bousfield* 局部化），我们也将其记为$(-)[X^{-1}]$。

我们称上述局部化的单位元 $\mathrm{L}_X(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}[X^{-1}]$ 为$\mathcal{D}$中对X 的形式反演，并且它具有所需的泛性质：

引理 2.2。 *([Rob13, 命题 4。2])* $\mathrm{L}_X(\mathcal{C})$ 诱导出代数范畴之间的全忠实映射

$$\mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})_{\mathcal{C}[X^{-1}]/} \hookrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})_{\mathcal{C}/}$$

其本质像恰好是 $\mathrm{CAlg}(\mathsf{Cat})^{X}_{\mathcal{C}/}$。

随后，我们进行略微修改，以适应可呈现情形。

定义 2.3。 令 $free(*)$ 表示由 $\{*\}$生成的自由小对称幺半范畴（=Cat 中的自由交换代数$^{\times}$）。令 $\mathcal{C}$ 为可呈对称幺半范畴，且令 X 为 $\mathcal{C}$中的一个对象。 X 在 $\mathcal{C}$ 中的形式反演是由以下推出定义的可呈对称幺半范畴 $\mathcal{C}[X^{-1}]$

$$\begin{array}{ccc} Psh(free(*)) & \xrightarrow{\mathrm{Lan}(j \circ \mathrm{L}_*)} & Psh(free(*)[*^{-1}]) \\ \downarrow{\scriptstyle X} & & \downarrow \\ \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}[X^{-1}] \end{array}$$

在 $\mathsf{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}})$ 中，其中左箭头本质上由预层范畴作为可呈对称幺半范畴的泛性质诱导。

这个可呈版本具有以下泛性质：

引理 2.4。 （命题 *4.10 [Rob]*）包含映射 交换代数$(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}})_{\mathcal{C}[X^{-1}]/}$,→交换代数$(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}})_{\mathcal{C}/}$ 是全忠实的，其本质像为 交换代数$(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}})^{X}_{\mathcal{C}/}$。

一般而言，对于一个可呈对称幺半范畴$\mathcal{C}$ 和 X 一个对象，其形式反演 $\mathcal{C}[X^{-1}]$ 可由一种 $\mathcal{C}^{\otimes}$-模来建模，该模型称为 c-谱，定义并研究于[AI22] , , 我们将其记为 谱范畴$_X(\mathcal{C})$。在回顾其构造之前，我们想指出，在特殊情形下，当 X 具有对称性，即$X \otimes X \otimes X$的循环置换同伦于 $\mathrm{id}_{X \otimes X \otimes X}$时，c-谱模型退化为经典的望远镜模型。

命题 2.5。 （*[Rob13, 命题 4。21], [AI22, 命题 1.6。3]*）设 $\mathcal{C}$ 是一个可呈对称幺半范畴，且 X 是一个对称对象。我们有一个定义良好的$\mathcal{C}$-模：

$$Tel_X(\mathcal{C}) := colim(\cdots \to \mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathcal{C}),$$

其中余极限是在$\mathrm{Mod}_{\mathcal{C}}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}})$中计算的。此外，

$$\mathcal{C}[X^{-1}] \simeq Tel_X(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Sp}_X(\mathcal{C})$$

作为 $\mathcal{C}$-模。

现在我们回顾 c-谱的构造，主要遵循 [AI22第 1 节。3]。

设$\mathcal{C}$ 是一个可呈对称幺半范畴，并令 $B\Sigma_{\mathbb{N}}$ 为 Anima 中由单个生成元 e生成的自由交换幺半群。我们考虑松对称幺半函子

$$(-)^{\Sigma} := \mathrm{Fun}(B\Sigma_{\mathbb{N}}, -).$$

那么$\mathcal{C}^{\Sigma}$ 是一个由 Day 卷积给出的可呈对称幺半范畴。我们考虑这些伴随

- 左伴随函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\Sigma}$ 由交换幺半群态射 $* \to B\Sigma_{\mathbb{N}}$ 沿其左 Kan 延拓所诱导。我们将其右伴随记为 U;
- 左伴随函子 $s_+ : \mathcal{C}^{\Sigma} \to \mathcal{C}^{\Sigma}$ 由 $B\Sigma_{\mathbb{N}}$-模态射 $e : B\Sigma_{\mathbb{N}} \to B\Sigma_{\mathbb{N}}$ 沿其左 Kan 延拓所诱导。我们将其右伴随记为 s_-。

定义 2.6. 令 S_c 为$\mathcal{C}^{\Sigma}$ 中由 $s_+ \circ F(c)$ 生成的自由交换代数。我们定义

$$\mathrm{Sp}_c^{lax}(\mathcal{C}) := \mathrm{Mod}_{S_c}(\mathcal{C}^{\Sigma}),$$

并称其为$\mathcal{C}$中的松弛 c-谱范畴

我们考虑上述伴随的 S_c-线性版本，记号略有滥用。

- 左伴随函子 $F : \mathcal{C} \to$ 谱范畴$_c^{lax}(\mathcal{C})$ 由将上述 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\Sigma}$ 与 S_c 作张量积所诱导。我们将其右伴随记为 U;
- 左伴随函子 $s_+ :$ 谱范畴$_c^{lax}(\mathcal{C}) \to$ 谱范畴$_c^{lax}(\mathcal{C})$ 由上述 $s_+ : \mathcal{C}^{\Sigma} \to \mathcal{C}^{\Sigma}$ 所诱导。我们将其右伴随记为 s_-。

定义 2.7。 ([AI22，引理 1.3.6，构造 1.3.7，定义 1.3。8]) $\mathcal{C}$ 中的 c-谱是一个松弛 c-谱 E，它位于 $\mathcal{C}$ 中，并满足其伴随

$$\sigma_E^{\sharp} : E \to (s_- E)^c$$

由乘以 $s_+ \circ F(c)$ 所诱导的映射

$$\sigma_E : s_+(c \otimes E) \to E$$

是一个等价。

我们将由 c-谱张成的谱范畴$_c(\mathcal{C})$ 全子范畴记为谱范畴$_c^{lax}(\mathcal{C})$。

这一构造确实给出了形式反演的一个模型。准确地说，存在一个$\mathcal{C}$-线性等价 $\mathcal{C}[c^{-1}] \simeq \mathrm{Sp}_c(\mathcal{C})$。参见 [AI22，命题 1.3。14]。

在论文接下来的部分中，我们主要关注稳定可呈范畴情形。这些显式模型的一个推论是，我们可以看到，如果输入一个稳定的可呈对称幺半范畴，那么输出的形式反演会自动稳定，并在稳定范畴的范畴中具有所需的泛性质：

引理 2.8。 设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定的可呈对称幺半范畴， X 是 $\mathcal{C}$中的一个对象。那么，定义 *2.3* 中定义的形式反演 $\mathcal{C}[X^{-1}]$ 再次稳定。此外，这会对引理 *2.4* 中的全忠实嵌入施加限制，即存在一个全忠实函子

$$\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st})_{\mathcal{C}[X^{-1}]/} \hookrightarrow \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st})_{\mathcal{C}/}$$

本质像为交换代数$(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st})^{X}_{\mathcal{C}/}$。

证明。 由于 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$ 上的对称幺半结构与 Pr^{L}上的结构相容，因此只需证明 $\mathcal{C}[X^{-1}]$ 落在$\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$中。我们考虑 c-谱模型。松弛 c-谱的范畴 $\mathrm{Sp}^{lax}_{c}(\mathcal{C})$ 当 $\mathcal{C}$ 稳定时也是稳定的。由 [AI22，引理 1.39] 可知，$\mathcal{C}[X^{-1}]$ 是 $\mathrm{Sp}^{lax}_{c}(\mathcal{C})$ 的可达局部化，且函子 s_+ 和$-\otimes-$ 都是正合的。

□

2.1.2 可对偶对象

回忆一下，在对称幺半范畴$\mathcal{C}$ 中，对象 X 是可对偶化的，若存在某个 $X^\vee \in\mathcal{C}$ 以及（余）评价态射

$$ev : X^\vee \otimes X \to 1_{\mathcal{C}} \quad coev : 1_{\mathcal{C}} \to X^\vee \otimes X$$

满足三角恒等式。更准确地说，这意味着以下复合

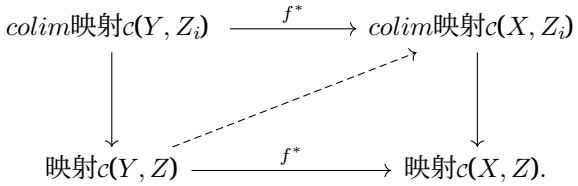
$$X \xrightarrow{\text{coev}\otimes id} X \otimes X^\vee \otimes X \xrightarrow{\text{id}\otimes\text{ev}} X$$
$$X^\vee \xrightarrow{\text{id}\otimes\text{coev}} X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \xrightarrow{\text{ev}\otimes\text{id}} X^\vee$$

与恒等映射同伦。

若环境对称幺半范畴$\mathcal{C}$ 是闭的，且 X 是$\mathcal{C}$中的可对偶对象，那么评价映射唯一确定这些结构映射，因此可将内 Hom Hom(X,1)视为 X的一个对偶对象。而且，当对偶对象存在时，它是唯一的。在整篇论文中，我们主要研究 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$ 中由稳定范畴和正合函子张成的子范畴 Pr^{L} 中的可对偶对象（并继承 Lurie 张量积）。特别地，若$\mathcal{C}\in\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$是可对偶的，则其对偶为 $\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{C},$谱范畴)。

Lurie 的一个定理给出了 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$中可对偶对象的完整刻画。在陈述结果之前，我们先回顾紧生成装配范畴的定义。

定义 2.9. 设$\mathcal{C}$ 为一个范畴。若对任意滤余极限 $Z = colim Z_i$，态射 $f\colon X \to Y$都存在一个提升，使下图交换（至同伦）：



定义 2.10. 设$\mathcal{C}$ 为一个范畴，且 $X\in\mathcal{C}$。若 X 可写成一个序列余极限，则称其为强紧生成

$$X = colim(X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots)$$

其中所有转移映射 $X_i \to X_{i+1}$ 都是强紧态射。

定义 2.11. 若一个可呈范畴 $\mathcal{C}$ 由强紧穷竭对象在余极限下生成，则称其为紧生成装配的。

命题 2.12. *([Lur18, 命题 D.7.3。1])* 设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定且可呈的范畴，以下条件等价

- $\mathcal{C}$ 在 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$ 中是可对偶化的；
- $\mathcal{C}$ 是紧生成装配的；
- $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$ 中某个紧生成范畴的收缩。

紧生成装配的范畴之间的函子的恰当概念是紧生成装配的函子。在稳定情形中，它们可以刻画为

- 强左伴随函子，也就是其右伴随还进一步容许一个右伴随的左伴随函子，或者，
- 保持强紧态射的函子。

在稳定的紧生成情形下，上述等价条件还等价于

- 保持紧性的函子。

我们用$\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca}$ 表示$\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$ 的（非满）子范畴，其对象为稳定的紧生成装配范畴，态射为它们之间的紧生成装配函子。这个范畴实际上继承了$\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$的对称幺半结构；由于它并非全子范畴，这一点稍微有些微妙。关于详细论述，请参见 [KNP24第 2 节。9]

用 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg}$ 表示由紧生成范畴构成的 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca}$ 的全子范畴，用 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 表示由稳定的幂等完备范畴及正合函子构成的范畴。我们有以下众所周知的结果：

引理 2.13。*Ind*-完备化函子

$$\mathrm{Ind} : \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$$

诱导出 Cat^{perf} 与 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg}$之间的等价，其逆函子为

$$\begin{aligned}(-)^{\omega} : \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg} &\to \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \\ \mathcal{C} &\mapsto \mathcal{C}^{\omega}.\end{aligned}$$

证明。 这基本上可由 [Lur09，引理 5.3.2 得出。9]。我们取 $\kappa = \omega$ 该引理中的对象，并将两边限制到稳定范畴。 □

注意，在 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$ 中可对偶化的对象 $\mathcal{C}$ （即 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca}$ 中的对象）未必在 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca}$ 中也是可对偶化对象，因为结构映射 ev 和 $coev$ 可能不是紧生成映射。在论文的下文中，我们称范畴 $\mathcal{C}$ 为可对偶化的，是指它是 $\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$ 中的可对偶对象；当 $coev$ （分别为 ev）恰好是紧生成的时，我们称这样的范畴 $\mathcal{C}$ 为光滑（分别为适当）。若一个范畴既光滑又适当，则称其为饱和的。

2.1.3 对偶运算与形式反演的相容性结果

设 $\mathcal{C}$ $\in$交换代数($\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca}$) 以及 $X \in \mathcal{C}^{\omega}$。本节的主要目标是证明，对偶运算与形式反演可交换。首先注意，结合上一节最后一个引理以及 [KNP24，构造 2.9，我们得到以下交换图。21]

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}} & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Ind}(-)} & \mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg} & \hookrightarrow & \mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca} \\
\downarrow{\scriptstyle (-)^{op}} & & \downarrow{\scriptstyle \sim (-)^{\vee}} & & \downarrow{\scriptstyle \sim (-)^{\vee}} \\
\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}} & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Ind}(-)} & \mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg} & \hookrightarrow & \mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca},
\end{array}$$

其中所有函子都是对称幺半的。对于紧组装范畴 $\mathcal{C}$，垂直函子 $(-)^{\vee}$ 将其映至 $\mathcal{C}^{\vee} \simeq \mathrm{Fun}^{L}$($\mathcal{C}$,谱范畴)，而对于强左伴随函子$L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，

$$L^{\vee} : \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{C}, \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{D}, \mathrm{Sp})$$

它由与右伴随 R of L 的前合成给出。等价地，它是由与 L 前合成所给函子的左伴随。特别地，对于 $\mathcal{C}$ $\in\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca}$ 且 $X \in \mathcal{C}$ 紧的情形，保余极限函子

$$\mathrm{Sp} \xrightarrow{X} \mathcal{C}$$

是强左伴随的，因此取对偶后得到一个函子

$$\mathrm{Sp}^{\vee} \to \mathcal{C}^{\vee}.$$

由于 $\mathrm{Sp} \simeq \mathrm{Sp}^{\vee}$，我们将它与上面的函子进行前合成，而复合

$$\mathrm{Sp} \to \mathrm{Sp}^{\vee} \to \mathcal{C}^{\vee}$$

由$\mathcal{C}^{\vee}$中的单个元素确定，我们将其记为 X^{dual}。

第一个观察是：紧生成装配的（相应地，紧生成的）范畴关于一个紧对象的形式反演仍然是紧生成装配的（相应地，紧生成的）。我们可以从形式反演的 c-谱模型看出这一点。事实上，只需证明局部化函子 L 保持弱紧可穷竭对象（相应地，紧对象）。这是成立的，因为右伴随保持滤过余极限，正如 [AI22，引理 1.5。2]。

综合迄今为止的所有讨论，取对偶是否与形式反演交换这一问题是有意义的。我们给出肯定的回答:

命题 2.14. 设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定的、紧生成装配的可呈对称幺半范畴。设 $X \in \mathcal{C}$ 是一个紧对象。则

$$\mathcal{C}^{\vee}[(X^{dual})^{-1}] \simeq \mathcal{C}[X^{-1}]^{\vee}$$

在交换代数($\mathcal{P}r^{L}_{ca}$)$_{\mathcal{C}^{\vee}[(X^{dual})^{-1}]/}$中成立。更进一步，它们与可呈对称幺半范畴相同。

证明。 首先注意，$\mathcal{C}[X^{-1}]^{\vee}$ 是一个$\mathcal{C}^{\vee}$ 交换代数，其结构由典范幺半函子$\mathrm{L}^{\mathcal{C}}_{X}:\mathcal{C}\ \to \mathcal{C}[X^{-1}]$ 的对偶给出。同样，$\mathrm{L}^{\mathcal{C}}_{X}$ 由 [AI22，引理 1.5，2]可知是强左伴随。这个环映射通过下一个引理和形式反演的泛性质分解，因而可经由$\mathcal{C}^{\vee}[(X^{dual})^{-1}]$ 。另一方面，由于$\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca}$ 上的对称幺半结构是从$\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}$限制而来的，引理2.8 在紧生成装配的范畴中仍然成立。因此可应用米田引理:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})_{\mathcal{C}^{\vee}[(X^{dual})^{-1}]/}(\mathcal{C}^{\vee}[(X^{dual})^{-1}],\mathcal{D}) &\simeq \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})_{\mathcal{C}^{\vee}/}(\mathcal{C}^{\vee},\mathcal{D})\\
&\simeq \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})_{\mathcal{C}/}(\mathcal{C},\mathcal{D}^{\vee})\\
&\simeq \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})_{\mathcal{C}[X^{-1}]/}(\mathcal{C}[X^{-1}],\mathcal{D}^{\vee})\\
&\simeq \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})^{X}_{\mathcal{C}/}(\mathcal{C}[X^{-1}],\mathcal{D}^{\vee})\\
&\simeq \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})^{X^{dual}}_{\mathcal{C}^{\vee}/}(\mathcal{C}[X^{-1}]^{\vee},\mathcal{D})\\
&\simeq \mathrm{CAlg}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})_{\mathcal{C}^{\vee}[(X^{dual})^{-1}]/}(\mathcal{C}[X^{-1}]^{\vee},\mathcal{D}),
\end{aligned}$$

其中，第三个和第五个同构再次由下一个引理得出。 □

引理 2.15. 设 $\mathcal{C}\ \in$交换代数$(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})$，其中 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个紧对象。设 $E\ \in$ 交换代数$(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{ca})_{\mathcal{C}/}$。那么 $-\otimes X:E\ \to E$ 取对偶为 $-\otimes X^{dual}:E^{\vee}\to E^{\vee}$.

证明。 由于 X 是紧的， $-\otimes X$ 保紧态射，因此是强左伴随。

对于可呈范畴 $\mathcal{D}$，我们将 $-\boxtimes-$记作从 $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$到 $\mathcal{D}\otimes\mathcal{D}$的自然映射。我们考虑如下交换图表

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}^{\vee} & \xrightarrow{\mathrm{id}\boxtimes X^{dual}} & \mathcal{E}^{\vee}\otimes\mathcal{E}^{\vee} & \xrightarrow{mult^{\vee}} & \mathcal{E}^{\vee}\\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow\\
\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{E},\mathrm{Sp}) & \underset{(\mathrm{id}\boxtimes X)^{*}}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} & \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E},\mathrm{Sp}) & \underset{mult^{*}}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} & \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{E},\mathrm{Sp}),
\end{array}$$

其中， $mult^{\vee}$ 是 $\mathcal{E}^{\vee}$ 上的幺半结构映射，由 $\mathcal{E}$上的幺半结构诱导。或者，它是函子的左伴随

$$-\circ mult:\mathcal{E}^{\vee}\simeq\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{E},\mathrm{Sp})\to\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E},\mathrm{Sp})\simeq(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E})^{\vee}\simeq\mathcal{E}^{\vee}\otimes\mathcal{E}^{\vee}.$$

于是显然，上方的函子复合后得到 $-\otimes X^{dual}$。

另一方面，我们声称 $-\otimes X^{dual}$ 是 $-\otimes X$的对偶。事实上，根据 X^{dual} 和 $mult^{\vee}$ 的定义可知，它们恰好分别是与 $\mathsf{id}\boxtimes X$ 和幺半结构映射 $mult$ 进行前合成的左伴随。但

$$(\mathrm{id}\boxtimes X)^{*}\circ mult^{*}\simeq(-\otimes X)^{*}$$

根据函子 $(-)^{\vee}$ 的定义，它的左伴随是 $-\otimes X$ 的对偶。 □

注 2.16。 我们还提到，对于紧生成、可呈现的稳定范畴 $\mathcal{C}$，以及其中的 X 紧对象$\mathcal{C}$，所诱导的 $X^{dual} \in \mathcal{C}^\vee$ 通过等价与 $j(X)$ 相识别

$$\mathcal{C}^\vee \simeq \mathrm{Ind}((\mathcal{C}^\omega)^{op})$$
$$X^{dual} \leftrightsquigarrow j(X)$$

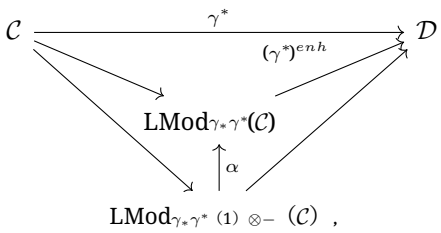
这显而易见，因为 X^{dual} 与一个左伴随函子所包含的数据相同

$$\mathcal{C} \to \mathrm{Sp}$$
$$Y \mapsto \mathrm{Map}(X, Y).$$

但这是在 $(\mathcal{C}^\omega)^{op}$ 上的谱 Yoneda 嵌入。

2.1.4 伴随对经由模范畴的分解

本节承接 [EK20]。设 $\gamma^* : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \gamma_*$ 是对称幺半范畴之间的一个伴随，并假设左伴随函子 γ^* 是强对称幺半的，则该伴随对可分解为经过以下交换图的形式，



其中记号 LMod 表示单子上的模范畴。上面的每个箭头都容许一个右伴随，并且若将所有箭头替换为其右伴随，该图表仍然交换。在本节的后续部分，我们解释该图表，并给出 $(\gamma^*)^{enh}$, α 成为等价的条件。

即使没有任何对称幺半结构，通过 $\mathrm{LMod}_{\gamma_*\gamma^*}(\mathcal{C})$ 的分解仍然成立。其想法是，单子 $\gamma_*\gamma^*$ 的泛性质给出一个分解

$$\mathcal{D} \xrightarrow{(\gamma_*)^{enh}} \mathrm{LMod}_{\gamma_*\gamma^*}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathrm{U}} \mathcal{C}.$$

非正式地说，$(\gamma_*)^{enh}$ 把 $d \in \mathcal{D}$ 映到 $\gamma_*(d)$，并且单子 $\gamma_*\gamma^*$ 作用于 $\gamma_*(d)$，其作用经由伴随的余单位。我们参阅 [Lur12，命题 4.7.3。3]以获得详细讨论。此外，上面涉及的两个映射都是右伴随。并且我们用 $(\gamma^*)^{enh}$表示第一个函子的左伴随。Lurie-Barr-Beck 定理给出 $(\gamma^*)^{enh}$ 成为等价的充要条件：

引理 2.17. *([Lur12, 定理 4.7.3。5])* 设 $\gamma^* : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \gamma_*$ 是一个伴随。以下条件等价：

1. 函子$(\gamma_*)^{enh}$ 与$(\gamma^*)^{enh}$ 互为逆函子。
2. 函子 γ_* 满足以下条件：

- $(\gamma_*)^{enh}$ 是保守的；
- 对于 D 中所有 γ_*-分裂单纯对象， X 在 D 中存在余极限。此外，γ_* 保持并反映 X-指标化余极限。

经过 $\mathrm{LMod}_{\gamma_*\gamma^*(1)\otimes -}(\mathcal{C})$ 的分解由一个单子映射诱导

$$a : \gamma_*\gamma^*(1) \otimes - \to \gamma_*\gamma^*.$$

更准确地说， a 是以下单子映射的复合：

$$\begin{aligned}\gamma_*\gamma^*(1) \otimes - &\simeq \gamma_*\gamma^*(1) \otimes \mathrm{id}(-)\\ &\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} \gamma_*\gamma^*(1) \otimes \gamma_*\gamma^*(-)\\ &\xrightarrow{\mu} \gamma_*(\gamma^*(1) \otimes \gamma^*(-))\\ &\simeq \gamma_*\gamma^*,\end{aligned}$$

其中， μ 由 γ_* 上的松单体结构给出。该 a 诱导出一个函子 $\alpha_* : \mathrm{LMod}_{\gamma_*\gamma^*}(\mathcal{C}) \to \mathrm{LMod}_{\gamma_*\gamma^*(1)\otimes -}(\mathcal{C})$，根据伴随函子定理，它是一个右伴随。其左伴随就是所需的 α；由于三角形中所有箭头的右伴随都是遗忘函子，因此它符合左侧的交换三角形。现在我们将说明，在某些刚性生成条件下， α 会成为一个等价。

定义 2.18. 设 $\mathcal{C}$ 是一个稳定、紧生成、可呈幺半范畴。若$\mathcal{C}$ 由（一个小集合中的）紧可对偶化对象在滤过余极限下生成，则称$\mathcal{C}$ 是刚性生成的。

引理 2.19. 设 $\gamma^* : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : \gamma_*$ 是对称幺半范畴之间的一个伴随。假设 γ^* 是幺半的，$\mathcal{C}$ 是刚性生成的，$\mathcal{D}$ 的单位元是紧的，并且余极限与 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 中的张量积相容，则 α 是全忠实的。此外，若 γ_* 是保守的，则 α 是一个等价。

证明。 我们给出证明的概要。思路源自 [BHS20，附录 A]。只需证明投影公式成立。也就是说，对所有 X 和 Y，

$$p : \gamma_*Y \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} \gamma_*Y \otimes \gamma_*\gamma^*X \xrightarrow{\mu} \gamma_*(Y \otimes \gamma^*X)$$

i是一个同构。对于可对偶化的 X，这显然成立，因为根据米田引理，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(Z, \gamma_*Y \otimes X) &\simeq \mathcal{C}(Z \otimes X^\vee, \gamma_*Y)\\ &\simeq \mathcal{D}(\gamma^*Z \otimes \gamma^*(X^\vee), Y)\\ &\simeq \mathcal{D}(\gamma^*Z \otimes (\gamma^*X)^\vee, Y)\\ &\simeq \mathcal{D}(\gamma^*Z, Y \otimes \gamma^*X)\\ &\simeq \mathcal{C}(Z, \gamma_*(Y \otimes \gamma^*X)).\end{aligned}$$

此外，通过图追踪可知，上述同构恰好由p诱导。为证明一般情形，注意到$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 中的余极限与张量积可交换，且$\mathcal{C}$由刚性对象生成，因此只需证明 γ_* 保余极限。但这成立，因为根据$\mathcal{D}$中单位元的紧性， γ^*将紧的可对偶化对象（它们构成一个生成元族）映射为紧对象。

□

最后，我们得到一个一般等价：某种代数的模范畴与特定形式的单子的模范畴等价：

引理 2.20。设 C 是一个对称幺半范畴，且 A 是 C 中的一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数。若以 模$_A(C)$ 表示 A上的模范畴，则有一个等价

$$\beta : \mathrm{Mod}_A(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mod}_{A\otimes -}(\mathcal{C}).$$

证明。将 [Lur12，定理 4.7.3。5] 应用于遗忘函子 模$_A(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$。 □

2.2 动机范畴

2.2.1 稳定同伦范畴

本节回顾 Morel-Voevodsky 对稳定动机同伦范畴 稳定同伦范畴 的构造。我们尤其强调 稳定同伦范畴 上的对称幺半结构以及 稳定同伦范畴 的紧生成。我们采用比 [Hoy15，附录 C].

我们先回顾一些拓扑斯理论。设 C 是一个范畴。C 上的拟拓扑 τ 为每个 $X \in$ C 指定一个筛的集合 $\tau(X)$，其中筛是定义在 X上的，并满足对每个 $f:\ Y \to X$,$f^*\tau(X) \subset \tau($ $Y)$。C 上的预层 F若相对于所有 R,$\to X$ 都是局部的，则称其为 τ-层，其中$R \in \tau(X)$。令 τ 为包含 τ, [的最粗格罗滕迪克拓扑。Hoy15 的推论 C.2] 表明， τ- 层范畴与 τ- 层范畴相同，后者采用经典意义下的定义。下文将这一等价范畴记为Shv_τ(C)。

设 S 为一个概形。我们用 $Sm(S)$ 表示光滑 S-概形的范畴，并用$Sm^{\mathrm{fp}}(S)$ 表示有限表示的光滑 S-概形的子范畴。我们将 $Sm(S)$（相应地， $Sm^{\mathrm{fp}}(S)$）上的 Nisnevich 拓扑视为包含 Nisnevich 拟拓扑的最粗格罗滕迪克拓扑：Nis $=$Zar $\cup$Nis^{qc}（相应地，Nis $=$ Nis$^{\mathrm{fp}}_{\mathrm{qc}}$），其中 Zar 表示通常的 Zariski 覆盖筛，而 Nis^{qc} （相应地，Nis$^{\mathrm{fp}}_{\mathrm{qc}}$）由如下筛组成：

- $\emptyset$ 上的空筛；
- 对每个 Nisnevich 方形（相应地，有限表示 Nisnevich 方形），即 a 概形的笛卡尔方形

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{\ j\ } & X, \end{array}$$

其中 j 是开浸入， p 是 étale 的，并且存在闭浸入 $Z \hookrightarrow X$作为 U 的补，使得 p 诱导同构 $V \times_X Z \simeq Z$ （相应地，此外，j 与 p 是有限表示的），由 $\{j, p\}$ 生成的筛。

如果且唯如果满足以下条件，我们称预层 F on $Sm(S)$（分别为 $Sm^{\mathrm{fp}}(S)$）满足 Nisnevich 切除：

- $F(\emptyset) \simeq *$;

- 对于每个 Nisnevich 方形 Q （分别地，对于有限表示 Nisnevich 方形）， $F(Q)$ 都是笛卡尔方形。

引理 2.21. *(命题 C.5.(2) [Hoy])* 设 S 是任意基概形，则：

- 在 $Sm(S)$ 上的预层是 *Nisnevich* 层，当且仅当它满足 *Zariski* 下降和 *Nisnevich* 切除。

如果 S 还是准紧准分离的，则：

- 在 $Sm(S)$ 上的预层 F 是 *Nisnevich* 层，当且仅当它是 $Sm_{\mathrm{fp}}(S)$上某个 *Nisnevich* 层的右 *Kan* 延拓。特别地， $Shv_{\mathrm{Nis}}(Sm(S)) \simeq Shv_{\mathrm{Nis}}(Sm_{\mathrm{fp}}(S))$。
- 在 $Sm_{\mathrm{fp}}(S)$ 上的预层是 *Nisnevich* 层，当且仅当它满足 *Nisnevich* 切除。

现在我们可以定义不稳定动机同伦范畴 $\mathrm{H}(S)$。若一个预层F在 $Sm(S)$上是 $\mathbb{A}^1$-不变的，是指对于每个 $X \in Sm(S)$，投影 $\mathbb{A}^1 \times X \to X$诱导一个等价 $F(X) \simeq F\left(\mathbb{A}^1 \times X\right)$。我们用 $\mathrm{H}(S)$ 表示 $Psh(Sm(S))$ 的全子范畴，该子范畴由 $\mathbb{A}^1$-不变的 Nisnevich 层构成。当 S是准紧准分离的时，由上面的引理可知 $\mathrm{H}(S)$ 是可呈现的，并且包含函子 $\mathrm{H}(S) \to Psh(Sm(S))$ 存在一个左伴随 $\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis}}$（对于一般基概形 S，这仍然成立，见 [Hoy15，命题 C.5.(1)]）。从现在起，我们固定 S 为准紧准分离的。

注意，由 $\mathbb{A}^1$-不变预层及满足 Nisnevich 切除的预层所张成的 $Psh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 的子范畴对滤过余极限封闭，因为它们由有限极限检测。因此，$\mathcal{H}(S)$ 作为 $Psh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 的子范畴，对滤过余极限封闭。特别地，每个 $X \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$ 都是 $\mathcal{H}(S)$ 中的紧对象。每个预层都是可表对象的余极限，因而是可表对象的有限余极限的滤过余极限。由于右伴随 $\mathcal{H}(S) \to Psh(Sm(S))$ 保持滤过余极限，$\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis}}$ 保持紧性。因此，每个对象 $F \in \mathcal{H}(S)$ 都具有如下形式

$$F \simeq fil.colim.(\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{Nis}}(fin.colim.(X_i))),$$

其中 $X_i \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$，且有限余极限是在预层范畴中计算的。这表明$\mathcal{H}(S)$ 是紧生成的。

由于 $\mathcal{H}(S)$ 是笛卡尔的，我们赋予它一个对称幺半结构，其中张量积由笛卡尔积给出。由一般事实可知，带基点范畴 $\mathcal{H}_*(S)$ 具有唯一的对称幺半结构 $\wedge$ ，该结构与余极限相容，且函子 $(-)_+ : \mathcal{H}(S) \to \mathcal{H}_*(S)$ 是对称幺半函子。

我们接着定义 $\mathcal{SH}(S)$ 为 $\mathcal{H}_*(S)$ 关于 $(\mathbb{P}^1, \infty)$的形式反演，它自动成为对称幺半的。由于 $\mathbb{P}^1$ 在动机空间中是对称的（[Voe98，定理 4.3，引理 4.4]），因此望远镜模型适用。这给出了 $\mathcal{SH}(S)$的紧生成。

引理 2.22。 *([Hoy15，命题 C.12])* 设 $\Sigma^\infty_+ : \mathcal{H}(S) \to \mathcal{SH}(S)$ 为添加一个点和形式求逆函子的复合。假设基概形 S 是准紧准分离的，则以下结论成立：

1. 稳定同伦范畴(S) 在余极限下由形如 $\Sigma^{-n}_{\mathbb{P}^1}\Sigma^\infty_+ X$ 的对象生成，其中 $X \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$且 $n \geq 0$。

2. $\Sigma^\infty_+ X$ 对于 $X \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$是紧的。

3. 稳定同伦范畴(S) 是紧生成的。

证明。 首先注意到$\mathcal{H}_*(S)$由 X_+ 紧生成，其中 $X \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$。

1. 回顾望远镜模型：

$$\mathcal{SH}(S) \simeq colim(\cdots \mathcal{H}_*(S) \xrightarrow{\Sigma_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{H}_*(S) \xrightarrow{\Sigma_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{H}_*(S))$$
$$\simeq lim(\cdots \mathcal{H}_*(S) \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{H}_*(S) \xrightarrow{\Omega_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{H}_*(S)).$$

对于每个 $E \in$稳定同伦范畴(S)，在它的第二种表示中，若将第 n个分量记为 by E_n，根据 [Lur12，引理 6.3.3。6], 我们有

$$E \simeq colim_{\mathbb{N}} \Sigma^{-n}_{\mathbb{P}^1} \Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} E_n,$$

以及每个 $E_n \in \mathcal{H}_*(S)$，因此具有形式 $colim X_+$。通过交换这些余极限，我们得到所需的形式。

2. 由于这样的 X_+ 在 $\mathcal{H}_*(S)$ 中是紧的，只需证明 Σ^∞ 保紧对象；或者等价地，证明其右伴随 Ω^∞ 保滤余极限。同样，根据第二个望远镜构造，只需证明 $\Omega_{\mathbb{P}^1}$ 保滤余极限。由于 $(\mathbb{P}^1, \infty)$ 是紧的，这一点成立。

3. 综合 (1) 和 (2)。

□

2.2.2 $\mathcal{MS}$

我们回顾 Annala-Iwasa 构造的稳定、非$\mathbb{A}^1$不变动机同伦范畴$\mathcal{MS}$ 。本节内容取自 [AHI25] 和 [AI22]。

本节及后续各节中，在讨论非$\mathbb{A}^1$不变动机同伦理论时，默认将概形理解为导出概形，并将（导出）光滑 ∞概形的 S-范畴记作 $Sm(S)$。我们先允许基概形 S任意，然后将范围限制为准紧准分离基概形，以确保动机同伦范畴紧生成且 $\mathbb{P}^1$是紧的。我们首先回顾光滑（分别为初等）胀开切除的概念。关于在拟光滑闭子概形处对导出概形进行胀开的概念，请参阅 [KR25]。

定义 2.23. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，且 $F\colon Sm(S)^{op} \to \mathcal{C}$ 是一个取值于 $\mathcal{C}$ 的预层 f.

1. 若 $F(\emptyset)$ 是 $\mathcal{C}$ 中的终对象，并且对于 $Sm(S)$ 中的每个闭浸入 $i\colon Z \hookrightarrow X$， F 都将爆破方块映为

$$\begin{array}{ccc} E & \hookrightarrow & Bl_Z X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

到一个笛卡尔方形。

2. 闭浸入 $i\colon Z, \to X$ 称为初等的，如果在 X 上按扎里斯基局部来看，它是某个 $n \geq 0$ 和某个 Y 的 $\mathbb{A}^n_Z \sqcup Y$零截面。我们称 F满足初等爆破切除，如果每当 i 是初等的时，(1) 都成立。

我们将满足相应切除条件的 $Psh(Sm(S))$ 预层的全子范畴记为 $Psh_{\mathrm{sbu}}(Sm(S))$ 和 $\subset Psh_{\mathrm{ebu}}(Sm(S))$，并将相应的局部化函子记为 $\mathrm{L}_{\mathrm{sbu}}$ 和 $\mathrm{L}_{\mathrm{ebu}}$；它们保持有限积。

对于谱的 Nisnevich 层，初等爆破切除与光滑爆破切除并无区别：

引理 2.24. *([AHI25, 命题 2.2])* 假设 $\mathcal{C}$ 是稳定的，且 $F : Sm(S)^{op} \to \mathcal{C}$ 满足 *Nisnevich* 下降和初等爆破切除。则 F 满足光滑爆破切除。

对于每个概形 S，我们将由满足 Nisnevich 下降和初等爆破切除的预层所张成的谱值预层范畴的子范畴记为 $\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm(S))$。与 $\mathbb{A}^1$-不变的情形类似，基于形式上的理由，该子范畴继承了对称幺半结构。

于是，我们将稳定的非-$\mathbb{A}^1$-不变动机同伦范畴 $\mathcal{MS}(S)$ 定义为关于 $\mathbb{P}^1$ 的形式反演。也就是说，

$$\mathcal{MS}(S) := \mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm(S))[(\mathbb{P}^1)^{-1}].$$

注 2.25. 构造 $\mathcal{MS}$ 时，我们从谱值预层范畴出发，而非从 anima 值预层范畴出发。原因之一是，放弃 $\mathbb{A}^1$-不变性后，$\mathbb{P}^1$ 不再是 $\mathbb{S}^1$ 与 $\mathbb{G}_m$的张量积，因此我们需要手动稳定化该范畴。

注 2.26. （$\mathbb{P}^1$，∞）在命题 2.5 意义下的对称性 $\mathbb{A}^1$不变性。因此，范畴 $\mathcal{MS}$ 一般而言不具有经典望远镜表示。这也是 Annala-Iwasa 引入 c-谱概念的原因之一。

在准紧准分离底 S 上，$\mathcal{MS}(S)$ 由形如$\Sigma^{-n}\Sigma^\infty_+ X$的紧对象在余极限下生成。这可由与 $\mathcal{SH}(S)$ 的紧生成类似的论证得到。

2.2.3 动机$_{\mathrm{loc}}$

本节回顾$\mathcal{E}$-线性局部化动机的范畴以及 K-理论的余表示性。本节内容主要依据 [BGT13] 以及 [HSS17] 的第 5 节。

在本节中，我们固定一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数 $\mathcal{E}$，它属于 $\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}$，且其中每个对象都可对偶化。接下来我们考虑 $\mathcal{E}$-线性范畴

$$\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}) := \mathrm{Mod}_{\mathcal{E}}(\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}),$$
$$\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}(\mathcal{E}) := \mathrm{Mod}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{E})}(\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}_{st}).$$

例 2.27. 有限谱范畴 Sp^ω 是 $\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 上对称幺半结构的单位元。因此，Sp^ω-线性范畴如下：

$$\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{Sp}^\omega) = \mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}},$$
$$\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Sp}^\omega) = \mathsf{Pr}^{\mathrm{L}}.$$

特别地，在这种情况下，$\mathcal{E}$-线性局部化动机范畴按照 [BGT13]的意义，归结为经典情形。

注 2.28。 第2.1.3 节中的第一个交换图表$\mathcal{E}$-线性版本仍然成立，只需将每个范畴都替换为其 $\mathcal{E}$ 版本。不过，这依赖于我们的假设： [HSS17，命题 4.9、命题 4。10] 给出了证明。

记号 2.29。 注意，$\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})$ 根据 [BGT13，推论 4。25]是一个紧生成范畴。我们记

$$\psi : \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}) \to \mathcal{P}sh(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega})$$

Yoneda 嵌入到谱值预层范畴的 Kan 延拓

$$\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega} \xrightarrow{j} Psh(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega}) \xrightarrow{\Sigma^{\infty}_{+}} \mathcal{P}sh(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega}).$$

我们称 Cat 中的序列 $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ 为 Karoubi 序列，若它既是纤维序列也是余纤维序列。换言之， f 是全忠实的，且诱导映射 $\mathcal{B}/\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 是幂等完备化。我们称 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})$ 中的序列 $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ 为 Karoubi（正合）序列，若遗忘函子 $\mathrm{U} : \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 将该序列映为 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 中的 Karoubi 序列。

设$\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}$ 为$\mathcal{P}sh(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega})$中具有如下形式的态射集

$$0 \to \Sigma^{n}\psi(0),$$
$$\Sigma^{n}(\psi(\mathcal{B})/\psi(\mathcal{A})) \to \Sigma^{n}\psi(\mathcal{C}),$$

其中$\mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})$ 中的一条 Karoubi 序列，且 $n \leq 0$。局部化动机范畴 $\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 定义为$\mathcal{P}sh(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega})$ 中由$\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}$-局部对象张成的全子范畴。$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 实际上是一个可呈范畴：

引理 2.30. （*[HSS17，命题 5.15]*）存在一个小的态射集 $\mathcal{S}'_{\mathrm{loc}}$ 生成$\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}$ （在滤过余极限下）。因此，$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$（$\mathcal{E}$）是 $\mathcal{P}sh$（$\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}$（$\mathcal{E}$）$^{\omega}$）的正合可达局部化。特别地，$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$（$\mathcal{E}$）是一个稳定可呈范畴。

我们用$\mathcal{U}$ 表示该复合

$$\mathcal{U} : \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}sh(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega}) \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E}).$$

定义 2.31.（局部化不变量）设$\mathcal{D}$ 为一个稳定可呈范畴，并设 F： $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}) \to \mathcal{D}$ 为一个函子。若下列条件成立，则称 F 为局部化不变量：

1. F 保持滤余极限。
2. F 保持零对象。
3. F 将 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})$ 中的 Karoubi 序列映射为$\mathcal{D}$中的余纤维序列。

We 将取值于 $\mathcal{D}$ 的局部化不变量范畴记为 $\mathrm{Fun}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}),\mathcal{D})$。

根据构造，$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 带有一个与 $\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})$ 相容的对称幺半结构。现在我们给出 $\mathcal{U}$ 作为万有局部化不变量和泛对称幺半局部化不变量的刻画，这直接由构造得出。

引理 2.32。 *([HSS17, 定理 5。17])* 函子 $\mathcal{U}:\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 是万有局部化不变量，具体而言，对于每个可呈稳定范畴 $\mathcal{D}$，函子 $\mathcal{U}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{L}}(\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E}),\mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}),\mathcal{D}).$$

引理 2.33。 *([HSS17, 定理 5。18])* 对称幺半函子 $\mathcal{U}:\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 是泛对称幺半局部化不变量，具体而言，对于每个可呈对称幺半稳定范畴 $\mathcal{D}$，函子 $\mathcal{U}$ 诱导出一个等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{L},\otimes}(\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E}),\mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}_{\mathrm{loc}}(\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E}),\mathcal{D}).$$

我们将使用以下重要定理，它被称为非连通 K-理论的余表示性。在陈述该定理之前，我们指出，这也很大程度上依赖于 $\mathcal{E}$ 由可对偶对象构成这一假设。对于 $\mathcal{E}$ =谱范畴$^{\omega}$，该假设成立，因此这归结为 [BGT13]中的经典情形。

定义 2.34。 令 $\mathcal{E}$ 为 $\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 上的一个 $\mathbb{E}_\infty$-代数，由可对偶对象构成。令$\mathcal{A}$ 为一个$\mathcal{E}$-线性小稳定幂等完备范畴。若 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A})$ 作为紧生成稳定范畴是光滑的（分别为适当的），则称$\mathcal{A}$ 光滑（分别为适当的）。

命题 2.35。 *([HSS17, 定理 5。25])* 设 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$ 是小的、稳定的幂等完备范畴，并假设 $\mathcal{B}$ 光滑且适当。那么存在如下谱的等价:

$$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})(\mathcal{U}(\mathcal{B}),\mathcal{U}(\mathcal{A})) \simeq \mathrm{K}(\mathcal{B}^{op}\otimes_{\mathcal{E}}\mathcal{A}),$$

其中$\mathrm{K}(-)$ 是非连通 K 理论谱。

3 动机同伦理论比较函子的构造

3.1 稳定同伦范畴$\mathcal{SH}^{\vee}$ 与 $\mathrm{Mot}^{\mathbb{A}^1}$ 局部化之间的比较

在本节中，我们固定一个准紧准分离基概形 S。

回忆一下，对于一个其中每个对象都可对偶化的 $\mathbb{E}_\infty$-代数$\mathcal{E}$，局部化动机的$\mathcal{E}$-线性范畴 $\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{E})$ 定义为 $\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}$-局部化的 $\mathcal{P}sh(\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathcal{E})^{\omega})$。为了比较局部化动机与稳定同伦范畴，进一步对 $\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$进行局部化以得到 $\mathbb{A}^1$-不变局部化动机范畴是合理的。在新范畴中，我们有 $\mathbb{A}^1$-同伦 K-理论的余表示性。

首先注意，perf_S 由可对偶对象组成，因为完美复形正是拟凝聚层范畴中的可对偶对象，如在 [TT13], 或

定理 8.3（见 [Sch22]）中所讨论的那样。因此我们令$\mathcal{E}$ =perf$_S$ 如第2.2.3 节所述，并在perf$_S$-线性意义下进行讨论。我们首先考虑自然函子

$$\mathcal{U} \circ \mathrm{perf} : Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op} \to \mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{perf}_S) \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{perf}_S).$$

对于每个 $\mathcal{C}$ $\in$Cat^{perf}(perf$_S$)$^{\omega}$，我们向 $\mathcal{S}_{\mathrm{loc}}$ 添加形如以下形式的态射

$$\psi(\mathcal{C}) \to \psi(\mathrm{perf}_{\mathbb{A}^1} \otimes \mathcal{C}),$$

并将扩大的态射集记为 $\mathcal{S}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$。由于添加的态射仅构成一个小集，关于 $\mathcal{S}^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$ 的局部化存在，且仍然是可呈现的。我们将进一步局部化后的 $\mathcal{U}$(perf$_S$)-线性范畴 Mot$^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$(perf$_S$) 简记为 Mot($S$)$^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$。由引理 2.33 及其构造可直接得出，Mot($S$)$^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变局部化动机的范畴：

引理 3.1. 对称幺半函子 $\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} \circ U : \mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{perf}_S) \to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}$ 是普适的 $\mathbb{A}^1$-不变对称幺半局部化不变量，其含义是：对于每个可呈对称幺半稳定范畴 $\mathcal{D}$，函子 $\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} \circ U$ 诱导一个等价

$$\mathrm{Fun}^{\mathrm{L},\otimes}(\mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}, \mathcal{D}) \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}_{\mathrm{loc},\mathbb{A}^1}(\mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{perf}_S), \mathcal{D}).$$

I在下文中，我们将这个普适的 $\mathbb{A}^1$-不变局部化不变量简记为 U .

我们得到了同伦 K-理论所需的余表示性：

命题 3.2。 设 A 和 B 是 perf$_S$-线性的小、稳定、幂等完备范畴，并假设 B 光滑且适当。那么存在一个谱的等价：

$$\mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}(\mathcal{B}), \mathcal{U}(\mathcal{A})) \simeq \mathrm{KH}(\mathcal{B}^{op} \otimes_{\mathrm{perf}_S} \mathcal{A}),$$

其中 KH$(-)$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变的同伦 K-理论谱。

证明。 记 $\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1}$ 为局部化函子

$$\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} : \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}} \to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}.$$

使用 $\mathbb{A}^1$在《 [Sos24],》1.14.2 中关于有限局部化不变量的局部化公式，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} \circ \mathcal{U}(\mathcal{B}), \mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} \circ \mathcal{U}(\mathcal{A})) &\simeq \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}(\mathcal{B}), \mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} \circ \mathcal{U}(\mathcal{A})) \\
&\simeq \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}(\mathcal{B}), \operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} \mathcal{U}(\mathcal{A} \otimes_{\mathrm{perf}_S} \mathrm{perf}_{\mathbb{A}^n})) \\
&\simeq \mathrm{K}(\mathcal{B}^{op} \otimes_{\mathrm{perf}_S} \operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} \mathcal{A} \otimes_{\mathrm{perf}_S} \mathrm{perf}_{\mathbb{A}^n}) \\
&\simeq \operatorname*{colim}_{[n]\in\Delta^{\mathrm{op}}} \mathrm{K}(\mathcal{B}^{op} \otimes_{\mathrm{perf}_S} \mathcal{A} \otimes_{\mathrm{perf}_S} \mathrm{perf}_{\mathbb{A}^n}) \\
&\simeq \mathrm{KH}(\mathcal{B}^{op} \otimes_{\mathrm{perf}_S} \mathcal{A}).
\end{aligned}$$

□

目标是扩展这个函子

$$\begin{aligned}\phi : Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op} &\to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}} \\ X &\mapsto \mathcal{U}(\mathrm{perf}_X)\end{aligned}$$

到一个左伴随函子

$$\Phi : \mathcal{SH}(S)^{\vee} \to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}.$$

为此，我们将把对偶范畴 稳定同伦范畴$(S)^{\vee}$ 实现为一个余层范畴，并对 $\mathbb{P}^1$进行形式反演。正如我们将看到的，这样的实现自然带有一个泛性质，使我们能够扩张某些函子，包括 ϕ。

3.1.1 稳定同伦范畴$(S)^{\vee}$ 的计算

首先注意，在构造 稳定同伦范畴(S) 时，我们不必从 anima 值预层范畴 $Psh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 开始，也可以从谱值预层范畴 $\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 开始。事实上，记 Σ^{∞}_{+} 为稳定化函子，则有如下交换图表，

$$\begin{array}{ccc}
Psh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) & \xrightarrow{\Sigma^{\infty}_{+}} & \mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{L}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{L}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}} \\
Shv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) & \xrightarrow{\Sigma^{\infty}_{+}} & \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{L}_{\mathbb{P}^1}\circ(-)_+} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{L}_{\mathbb{P}^1}} \\
\mathcal{SH}(S) & \xrightarrow{\Sigma^{\infty}} & \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[(\mathbb{P}^1)^{-1}].
\end{array}$$

此处及下文中，记号 Psh (分别为 Shv) 表示 anima 值预层（分别为层）范畴，而 $\mathcal{P}sh$(分别为 $\mathcal{S}hv$) 表示谱值预层（分别为层）范畴。上方方块的交换性源于 Nis- nevich 切除和 $\mathbb{A}^1$-不变性沿函子 Σ^{∞}_{+}下降。下方方块的交换性则源于两次连续形式反演的交换性，参见[Rob13，注 4。11]另一方面，由于 稳定同伦范畴(S) 已经是稳定的，底部的 Σ^{∞}是一个等价。

根据第 2.1.3 节和第2.2.1节的讨论，图表中出现的每个范畴都是可呈现且紧生成的，并且每个垂直函子都是强左伴随。我们将计算该序列在

$$\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) \xrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}} \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) \xrightarrow{\mathrm{L}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[(\mathbb{P}^1)^{-1}]$$

$\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg}$ 中的像，其中函子为 $(-)^{\vee} : \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg} \to \mathrm{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg}$。

引理 3.3。 $Psh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 的对偶是 $Psh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op})$。

证明。 这可由直接计算得出

$$\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))^{\vee} = \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)), \mathrm{Sp}) = \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S), \mathrm{Sp}) = \mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}).$$

□

引理 3.4. 复合 $\mathrm{L}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1} \circ y :\ Sm^{\mathrm{fp}}(S) \ \to \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 诱导出一个全忠实映射:

$$\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S), \mathrm{Sp}).$$

其本质像恰为由满足 $\mathbb{A}^1$-不变性、将空概形 $\emptyset$ 映至零对象并将 *Nisnevich* 方形映至推出的函子 $F :\ Sm^{\mathrm{fp}}(S) \ \to$ 谱范畴*s* 张成的子范畴。我们将本质像记为 函子$_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)$,谱范畴)。

证明。 回顾一下，预层是否属于 $\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$，完全可由 Nis- nevich 切除和 $\mathbb{A}^1$-不变性检测。另一种说法是，$\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 由 $\mathcal{S}$-局部对象张成，这些对象属于 $\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$，其中 $\mathcal{S}$ 是以下态射的集合

- $0 \to y(\emptyset)$，其中 0 是零对象;
- 对每个 Nisnevich 方形

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X, \end{array}$$

  $y(U) \amalg_{y(W)} y(V) \ \to y(X)$;
- for each $X \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$, $y(X \times \mathbb{A}^1) \to y(X)$.

接下来我们考虑这个等价

$$\mathrm{res} : \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)), \mathrm{Sp}) \leftrightarrows \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S), \mathrm{Sp}) : \mathrm{Lan}\,.$$

我们断言，由经由 $\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 分解的函子所张成的 $\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)),\mathrm{Sp})$ 子范畴，对应于引理中所述的本质像。根据 [Lur09, 命题 5.5.4.20], , 左侧的这个子范畴恰由将 S 中所有态射映为等价的保余极限函子所张成。但容易验证，函子 $F : Sm^{\mathrm{fp}}(S) \ \to \mathrm{Sp}$ 是 $\mathbb{A}^1$-不变的、保始对象，并且将 Nisnevich 方形映为推出，当且仅当其左 Kan 延拓 $\mathrm{Lan}\,F$ 将所有 $s \in \mathrm{S}$ 映为等价。

□

我们也将层范畴的对偶称为余层范畴。在这种情况下，我们使用如下记号

$$co\mathcal{S}hv_{\mathrm{coNis},co\text{-}\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) := \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))^{\vee}.$$

注 3.5. 经典地，对于一个可呈范畴 $\mathcal{E}$和一个位点 $(\mathcal{C}\ \tau)$，我们将取值于 $\mathcal{E}$ 的余层范畴定义为取值于$\mathcal{E}^{op}$ 的层范畴的对偶范畴，即,

$$coShv(\mathcal{C};\mathcal{E}) := Shv(\mathcal{C};\mathcal{E}^{op})^{op}.$$

如果取值于 $\mathcal{E}$ 的层范畴可对偶化，那么这种经典的余层范畴概念与我们的定义相同，因为作为预层范畴的子范畴，它们恰好由相同的余下降条件刻画。

引理 3.6。 通过引理 3.3 和引理3.4中的等价，函子

$$\mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S),\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S),\mathrm{Sp})$$

由下式诱导

$$\mathrm{L}^{\vee}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1} : \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)),\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)),\mathrm{Sp})$$

是关于由映射组成的 S 的 *Bousfield* 局部化

- $Sm_{\mathrm{fp}}(S)(\emptyset,-) \to 0$;
- 对每个 *Nisnevich* 方形

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X, \end{array}$$

  $Sm^{\mathrm{fp}}(S)(U,-) \amalg_{Sm^{\mathrm{fp}}(S)(X,-)} Sm^{\mathrm{fp}}(S)(V,-) \to Sm^{\mathrm{fp}}(S)(W,-)$;
- *for each* $X \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$, $Sm^{\mathrm{fp}}(S)(X,-) \to Sm^{\mathrm{fp}}(S)(X \times \mathbb{A}^1,-)$.

证明。 通过类似的论证，我们看到 $\mathrm{Fun}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)$，谱范畴) 确实是由 $\mathcal{S}$-局部对象构成的子范畴。另一方面，右伴随

$$\mathrm{Fun}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S),\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S),\mathrm{Sp})$$

由前复合函子诱导

$$\mathrm{L}^{*}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1} : \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)),\mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)),\mathrm{Sp}).$$

Ap再次应用引理 3.3 和引理 3.4 中的识别，我们看到它是全忠实的。 □

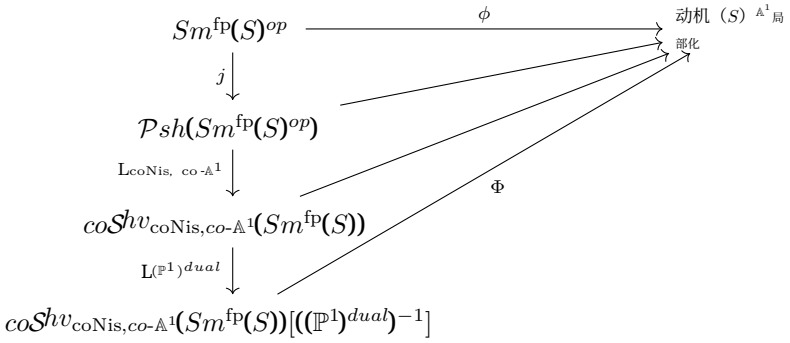
注 3.7。 在上述引理的证明中，重要的是我们处理的是取值于稳定范畴的（余）层，因此一个方块是拉回当且仅当它是推出。本节和下一节所涉及的技术，同样适用于位点上取值于稳定范畴的层，其中该位点由一个 cd-结构生成。粗略地说，尽管我们希望得到形如3.12的泛性质刻画，但余层范畴最自然地具有泛性质的对偶形式。稳定性和由 cd-结构生成这两个假设模糊了这种差异。

最后，由于 $\mathbb{P}^1$ 在 $\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$中是紧的，根据第 2.1.3 节中取对偶与形式反演的相容性，我们有

$$\mathcal{SH}(S)^{\vee} \simeq \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[(\mathbb{P}^1)^{-1}]^{\vee} \simeq co\mathcal{S}hv_{\mathrm{coNis},co\text{-}\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[((\mathbb{P}^1)^{dual})^{-1}].$$

3.1.2 扩展函子 ϕ

在上一节中，我们计算了 $\mathcal{SH}(S)$ 的对偶：它是相对于 $(\mathbb{P}^1)^{dual}$ 的 $\mathcal{P}sh((Sm^{\mathrm{fp}}(S))^{op})$ 中由满足 Nis- nevich 余切除且具有 co-$\mathbb{A}^1$-不变性的函子张成的全子范畴的形式反演。本节中，我们利用上一节计算自然导出的泛性质，将显然的函子 $\phi: Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op} \to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1\text{ loc}}$ 扩展为函子 $\Phi: \mathcal{SH}(S)^{\vee} \to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1\text{ loc}}$。我们逐步沿着以下图表进行：



首先注意到，$\mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1\text{ loc}}$ 是一个可呈稳定范畴。谱 Yoneda 嵌入诱导出一个等价

$$\mathrm{Fun}^L(\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}), \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}) \simeq \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}).$$

正如引理3.6中所讨论的，$co\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\ \mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 是由$\mathcal{S}$-局部对象张成的$\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op})$的子范畴。再次应用上一节中的类似论证，余层范畴的泛性质如下：

引理 3.8. *Yoneda* 嵌入与局部化的复合诱导出函子范畴之间的一个等价

$$\mathrm{Fun}^L(co\mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)), \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}) \simeq \mathrm{Fun}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}),$$

其中，右侧的子范畴由所有保持终对象（或将空概形 $\emptyset$ 送到零对象）并将 *Nisnevich* 方形送到推出的 $\mathbb{A}^1$-不变函子张成。

注 3.9。同样，上述计算本质上依赖于我们处理的是稳定范畴值层。

将引理中所述的泛性质 3.8 推广到形式反演

$$co\mathcal{S}hv_{\mathrm{coNis},co\text{-}\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[((\mathbb{P}^1)^{dual})^{-1}],$$

我们首先注意到 $(\mathbb{P}^1)^{dual}$ 具有如下内在刻画：

引理 3.10. $(\mathbb{P}^1)^{dual} \in co\mathcal{S}hv_{\mathrm{coNis},co\text{-}\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 等同于 $fib(\mathrm{L}\circ j(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\mathrm{L}\circ j(\infty)} \mathrm{L}\circ j(S))$，其中纤维按如下图表诱导：

$$\begin{array}{ccc} Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op} & & S \xrightarrow{\infty} \mathbb{P}^1 \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow \\ \mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}) & & j(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{j(\infty)} j(S) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{L}_{\mathrm{coNis},\mathrm{co}\text{-}\mathbb{A}^1}} & & \downarrow \\ co\mathcal{S}hv_{\mathrm{coNis},co\text{-}\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) & & \mathrm{L}\circ j(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\mathrm{L}\circ j(\infty)} \mathrm{L}\circ j(S). \end{array}$$

证明。 根据定义，对象 $\mathbb{P}^1 \in \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\,\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 对应于一个左伴随函子

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}\circ(\mathbb{P}^1,\infty) : \mathrm{Sp} \to \mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) \to \mathcal{S}hv_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)).$$

另一方面，$(\mathbb{P}^1,\ \infty) \in \mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 等价于下述映射的余纤维

$$j(S) \xrightarrow{j(\infty)} j(\mathbb{P}^1).$$

将它们结合起来，我们得到

$$(\mathbb{P}^1)^{dual} \simeq \mathrm{L}_{\mathrm{coNis},\mathrm{co}\text{-}\mathbb{A}^1}(fib(j(\mathbb{P}^1)^{dual} \to j(S)^{dual})).$$

现在，由于 $\mathrm{L}_{\mathrm{coNis},\ \mathrm{co}\text{-}\mathbb{A}^1}$ 与有限极限交换，结合下一个引理，即可得到该断言。 □

引理 3.11。 设 $\mathcal{C}$ 是一个小的稳定范畴，且 X 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象。我们将 $j(X)$ 记作 X 在 $Psh(\mathcal{C})$ 中的 *Yoneda* 嵌入。由于 $j(X)$ 是紧对象，它对应于对偶范畴中的一个对象 $j(X)^{dual}$。将其视为函子，

$$j(X)^{dual} : \mathcal{C} \to \mathrm{Sp}$$

它正是协变可表函子

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X,-).$$

证明。 根据定义， $j(X)^{dual} \in \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh(\mathcal{C}),$谱范畴$)$ 是该函子的右伴随 r

$$X : \mathrm{Sp} \to \mathcal{P}sh(\mathcal{C}),$$

它是以下对象的左 Kan 延拓的左伴随

$$\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Sp}\,.$$

□

结合引理 3.8和引理 3.10，我们得到稳定同伦范畴$(S)^{\vee}$的所需泛性质。

命题 3.12. 复合 $\mathrm{L}_{(\mathbb{P}^1)^{dual}} \circ \mathrm{L}_{\mathrm{coNis,co}\text{-}\mathbb{A}^1} \circ j$ 对每个可呈现稳定范畴 D 诱导一个全忠实函子

$$\mathrm{Fun}^L(\text{稳定同伦范畴}(S)^\vee, \mathcal{D}) \to \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathcal{D})$$

其本质像由 $\mathbb{A}^1$-不变函子 F 张成，这些函子保持终对象，将 *Nisnevich* 方块送到推出，并将纤维

$$fib(F(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{F(\infty)} F(S))$$

送到一个可逆对象。

此外，由于对称幺半结构相容，该断言对对称幺半范畴 D 与对称幺半函子仍然成立。

特别地，我们有

$$\mathrm{Fun}^{L,\otimes}(\mathcal{SH}(S)^\vee, \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}) \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}_{\mathrm{Nis},\mathbb{A}^1,\mathbb{P}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}})$$

命题 3.13. 该函子

$$\begin{aligned} \phi : Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op} &\to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}} \\ X &\mapsto \mathcal{U}(\mathrm{perf}_X) \end{aligned}$$

满足命题*3.12*中的所有条件。因此，它扩张为一个对称幺半左伴随函子

$$\Phi : \mathcal{SH}(S)^\vee \to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}.$$

证明。• 对称幺半结构的相容性。

这两个 S-线性函子

$$\begin{aligned} \mathrm{perf} &: Sm(S)^{op} \to \mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{perf}_S) \\ \mathcal{U} &: \mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{perf}_S) \to \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}} \end{aligned}$$

都是对称幺半的。因此，它们的复合也是如此。

- Nisnevich 切除。
  显然，空概形被映为 $\mathcal{U}(\mathrm{perf}_\emptyset) = 0$。另一方面，回忆一下函子

$$\mathrm{perf} : Sm(S)^{op} \to \mathsf{Cat}^{\mathrm{perf}}(\mathrm{perf}_S)$$

满足fppf下降。特别地，对任意Nisnevich方

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & X, \end{array}$$

我们有一个拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{perf}_X & \longrightarrow & \mathbf{perf}_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{perf}_V & \longrightarrow & \mathbf{perf}_W. \end{array}$$

对于开浸入 U , $\to X$，如果我们将 $\mathbf{perf}_{X,\ X-U}$ 记作该纤维

$$\mathrm{perf}_{X,X-U} \to \mathrm{perf}_X \to \mathrm{perf}_U,$$

那么我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{perf}_{X,X-U} & \longrightarrow & \mathrm{perf}_X & \longrightarrow & \mathrm{perf}_U \\ \simeq\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{perf}_{V,V-W} & \longrightarrow & \mathrm{perf}_V & \longrightarrow & \mathrm{perf}_W. \end{array}$$

由于 $\mathcal{U}$ 是普适的局部化不变量，应用 $\mathcal{U}$ 后得到一个交换图，其中水平序列仍然是纤维，最左侧的箭头是一个等价。因此，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}(\mathbf{perf}_X) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathbf{perf}_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{U}(\mathbf{perf}_V) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathbf{perf}_{\ W}) \end{array}$$

是所需的拉回。

- $\mathbb{A}^1$ 不变性。
  这是由施加操作得到的。
- $\mathbb{P}^1$ 可逆性。
  我们有一个余纤维序列：

$$\mathrm{perf}_S \longrightarrow \mathrm{perf}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{\mathrm{perf}_\infty} \mathrm{perf}_S.$$

并且 $\mathcal{U}$ 将其映射为一个既是纤维序列又是余纤维序列的序列。特别是，.....的纤维

$$\phi(\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\infty} S)$$

是单位元，因此可逆。

□

3.2 $\mathcal{MS}^{\vee}$ 与$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$之间的比较

在本节中，我们固定 S 为一个准紧准分离概形。我们将在本节中讲述一个非-$\mathbb{A}^1$-不变的类似理论。也就是说，我们希望计算 $\mathcal{MS}^{\vee}$ ，然后延拓自然函子

$$\begin{aligned}\psi : Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op} &\to \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}} \\ X &\mapsto \mathcal{U}(\mathrm{perf}_X)\end{aligned}$$

到一个函子

$$\Psi : \mathcal{MS}(S)^{\vee} \to \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}}.$$

由于本节中的所有论证均可如上一节作相应调整而适用，我们将主要只陈述本节中的断言。

3.2.1 $\mathcal{MS}^{\vee}$的计算

回顾一下，$\mathcal{MS}(S)$是由谱值预层范畴$\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$先关于Nisnevich切除和初等爆破切除进行局部化，然后再对 $\mathbb{P}^1$取逆而定义的。并且每一步都给出一个紧生成的、可呈现的稳定范畴。我们想要计算该序列的像

$$\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) \xrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{Nis,ebu}}} \mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) \xrightarrow{\mathrm{L}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[(\mathbb{P}^1)^{-1}]$$

在函子$(-)^{\vee} : \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg} \to \mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg}$下于$\mathbf{Pr}^{\mathrm{L}}_{cg}$ 中。

引理 3.14。 $\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 的对偶是 $\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op})$。

引理 3.15。 典范映射 $\mathrm{L}_{\mathrm{Nis,ebu}} \circ y : Sm^{\mathrm{fp}}(S) \to \mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$ 诱导出一个全忠实映射：

$$\mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S), \mathrm{Sp}).$$

本质像恰好是由满足以下条件的函子所张成的子范畴： $F : Sm^{\mathrm{fp}}(S) \to$ 谱范畴将空概形 $\emptyset$ 映到零对象，并将 *Nisnevich* 方形和初等爆破方块映到推出。我们将本质像记为 $\mathrm{Fun}_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)$,谱范畴)。

记号 3.16。 我们也将满足某些切除条件的预层范畴的对偶称为满足相应余切除条件的预层范畴。在这种情况下，我们使用记号

$$co\mathcal{P}sh_{\mathrm{coNis,coebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)) := \mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))^{\vee}.$$

引理 3.17。 通过引理 *3.14* 和引理 *3.15*中的等价，函子

$$\mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S), \mathrm{Sp})$$

由.....诱导

$$\mathrm{L}^{\vee}_{\mathrm{Nis,ebu}} : \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(S)), \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Fun}^{L}(\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)), \mathrm{Sp})$$

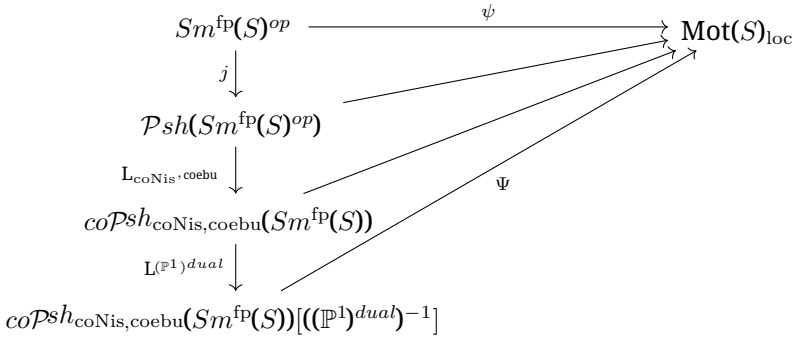
是相对于小映射集 S 的 *Bousfield* 局部化。

引理 3.18。 由于 $\mathbb{P}^1$ 在 $\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis}}$ 中$_{\mathrm{ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))$是紧的，我们有

$$\mathcal{MS}(S)^{\vee} \simeq \mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[(\mathbb{P}^1)^{-1}]^{\vee} \simeq co\mathcal{P}sh_{\mathrm{coNis,coebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(S))[((\mathbb{P}^1)^{dual})^{-1}].$$

3.2.2 扩展函子 ψ

考虑以下图表:



我们有以下非$\mathbb{A}^1$不变版本的命题 3.12 和命题 3.13:

命题 3.19。 复合 $\mathrm{L}^{(\mathbb{P}^1)^{dual}} \circ \mathrm{L}_{\mathrm{coNis},\mathrm{coebu}} \circ j$ 对每个可呈现稳定范畴 D 诱导一个全忠实函子

$$\mathrm{Fun}^L(\mathcal{MS}(S)^\vee, \mathcal{D}) \to \mathrm{Fun}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathcal{D})$$

其本质像由满足以下条件的函子 F 张成：保留终对象，将 *Nisnevich* 方形和初等爆破方块映为推出，并将纤维

$$fib(F(\mathbb{P}^1) \xrightarrow{F(\infty)} F(S))$$

到一个可逆对象。

此外，由于对称幺半结构彼此相容，这一断言对于对称幺半范畴 D 和幺半函子仍然成立。

特别地，我们有

$$\mathrm{Fun}^{L,\otimes}(\mathcal{MS}(S)^\vee, \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}}) \simeq \mathrm{Fun}^{\otimes}_{\mathrm{Nis},\mathrm{ebu},\mathbb{P}^1}(Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op}, \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}})$$

命题 3.20。函子

$$\begin{aligned}\psi : Sm^{\mathrm{fp}}(S)^{op} &\to \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}} \\ X &\mapsto \mathcal{U}(\mathrm{perf}_X)\end{aligned}$$

满足命题 *3.19*中的所有条件。特别地，它可以扩展为一个对称幺半左伴随函子

$$\Psi : \mathcal{MS}(S)^\vee \to \mathrm{Mot}(S)_{\mathrm{loc}}.$$

证明。 函子 ψ 根据 [Kha20，定理 A]满足初等爆破切除。其他条件按照命题 3.13中的方式验证。 □

4 因子化函子的全忠实性

在本节中，我们将第 2.1.4 节介绍的一般策略应用于 Φ 在命题 3.13 中构造的对称幺半左伴随函子，以及 Ψ 在命题 3.20中构造的函子。正如第 2.1.4节所述，有几种模范畴可供选择，我们的比较函子会自动通过这些范畴进行因子化。在这些选择中，我们将重点关注基于交换代数 $G(1)$的范畴，其中 G 是Φ 或 Ψ的右伴随函子。正如我们将看到的，在这两种情况下，因子化函子限制在具有良好可对偶性的对象上时都是全忠实的。这表明，如果我们希望得到全局性的全忠实性结果，就应考虑刚性生成。这里，稳定同伦范畴 与 $\mathcal{MS}$ 之间的一个差异显现出来。

4.1 因子化函子的全忠实性， $\mathbb{A}^1$ 不变情形

我们首先回顾关于范畴 稳定同伦范畴(S) 的刚性生成的定义和结果。我们记

- 稳定同伦范畴$^{\omega}(S)$ 为由 稳定同伦范畴(S) 中的紧对象张成的全子范畴，并且
- 稳定同伦范畴$^{dual}(S)$ 为由 稳定同伦范畴(S) 中的可对偶对象张成的全子范畴。

那么，正如 [Rio05], 中所证明的，存在一个包含映射

$$\mathcal{SH}^{dual}(S) \subset \mathcal{SH}^{\omega}(S).$$

在 $S = \operatorname{Spec} k$ 为某个域 k 的情形下，我们将 k 的指数特征记为 e。于是， [LYZR19 的推论 B.2] 告诉我们，对每个与 e 互素的素数 l ，在 l 处局部化会使上述包含成为等价。特别地，若我们用稳定同伦范畴$(k)[\frac{1}{e}]$表示稳定同伦范畴(k) 中 S-局部对象的全子范畴，其中 S 是对所有 $E \in$稳定同伦范畴(k) 的态射集 $E \xrightarrow{\times e} E$，则我们有

$$\mathcal{SH}^{dual}(k)[\frac{1}{e}] \simeq \mathcal{SH}^{\omega}(k)[\frac{1}{e}].$$

我们观察到，对任意稳定、紧生成的可呈对称幺半范畴 $\mathcal{E}$，$\mathcal{E}^{dual}$ 中的紧对象与可对偶对象分别对应于 $\mathcal{E}$ 中的相应对象。特别地，稳定同伦范畴$(k)[\frac{1}{e}]^{\vee}$ 满足

$$(\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^{\vee})^{dual} \simeq (\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^{\vee})^{\omega}.$$

另一方面，该函子

$$\phi : \mathcal{SH}(k)^{\vee} \to \operatorname{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}$$

自然地诱导出一个 e-可逆函子

$$\phi : \mathcal{SH}(k)^{\vee}[\frac{1}{e}] \to \operatorname{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}[\frac{1}{e}].$$

使 e 可逆的算子与取对偶算子彼此交换

$$\begin{aligned}\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^\vee &\simeq \mathrm{Fun}^L(\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}],\mathrm{Sp})\\ &\simeq \mathrm{Fun}^L(\mathcal{SH}(k),\mathrm{Sp}[\frac{1}{e}])\\ &\simeq \mathrm{Fun}^L(\mathcal{SH}(k),\mathrm{Sp})[\frac{1}{e}]\\ &\simeq \mathcal{SH}(k)^\vee[\frac{1}{e}].\end{aligned}$$

为了看出第二个和第三个同构，我们将两边都视为 Fun^L(稳定同伦范畴(k),谱范畴) 的全子范畴，并检查它们是否限制在同一类函子上。这里的一个关键要素是下面关于求逆一个数 e 的刻画。

引理 4.1. 设 D 是一个具有序列余极限的稳定范畴。那么，$D[\frac{1}{e}]$ 恰好是由满足以下条件的对象 $d \in D$ 张成的 D 的全子范畴：

$$d \xrightarrow{\times e} d$$

是一个等价。

证明。 这是因为乘以一个数 e 与取映射谱可交换。因此，对每个 c 和 d,

$$\mathrm{Map}(c,d) \xrightarrow{\times e} \mathrm{Map}(c,d)$$

将前合成 e 与后复合 e 识别起来。 □

因此，我们得到了一个定义良好的映射

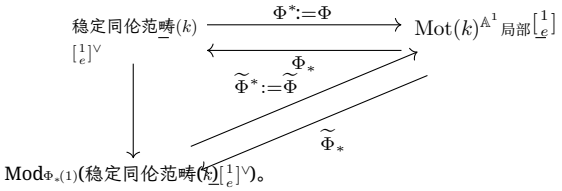
$$\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^\vee \simeq \mathcal{SH}(k)^\vee[\frac{1}{e}] \to \mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}[\frac{1}{e}]$$

wit一个刚性生成定义域。这个函子同样是幺半的左伴随，而 w e den再次用 Φ 表示它，这是符号上的滥用。

我们还注意到，$\mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}[\frac{1}{e}]$ 具有紧单位元。事实上，$\mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}[\frac{1}{e}](\mathbb{1},-)$ 恰好是 $\mathrm{KH}(-)$ 根据命题 3.2，并且 KH 保持滤过余极限。结合上述讨论，由引理 2.19 可得

$$\mathrm{Mod}_{\Phi_*\Phi^*}(\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^\vee) \simeq \mathrm{Mod}_{\Phi_*(1)}(\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^\vee).$$

我们将使用以下记号：



在一般的拟紧拟分离概形 S 上， $\Phi_*(1)$ 在一般情况下表现得像 KGL 的对偶版本$^{\mathbb{A}^1}$ 。事实上，对所有 $X \in Sm^{\mathrm{fp}}(S)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{SH}(S)^\vee((\Sigma^\infty_+ X)^{dual}, \Phi_*(1)) &\simeq \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\Phi^*((\Sigma^\infty_+ X)^{dual}), 1)\\ &\simeq \mathrm{Mot}(S)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}(\mathrm{perf}_X), 1)\\ &\simeq \mathrm{KH}(\mathrm{perf}_X^{op}).\end{aligned}$$

而当稳定同伦范畴 刚性生成时，例如在域 k 上并对指数特征取逆之后 e， $\Phi_*(1)$ 被等同于$\mathrm{KGL}^{\mathbb{A}^1}$ ，经由见证其自对偶性的典范等价（见9.2.1之 [GR19]）

$$\begin{aligned}\dagger : \mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}] &\to \mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^\vee\\ X &\mapsto \mathrm{Map}_{\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]}(1, X \otimes -).\end{aligned}$$

为看出这一点，首先注意，对于光滑射影概形 X， $\Sigma^\infty_+ X$ 在稳定同伦范畴 中是可对偶化的，如 [Rio05], 中所讨论的，因此它在对偶范畴稳定同伦范畴$^\vee$中仍然如此。我们有如下映射谱的等价：

$$\begin{aligned}\mathcal{SH}^\vee((\Sigma^\infty_+ X^{dual})^\vee, \dagger\,\mathrm{KGL}^{\mathbb{A}^1}) &\simeq \mathcal{SH}(\dagger(\Sigma^\infty_+ X^{dual})^\vee, \mathrm{KGL}^{\mathbb{A}^1})\\ &\simeq \mathcal{SH}(\Sigma^\infty_+ X, \mathrm{KGL}^{\mathbb{A}^1})\\ &\simeq \mathrm{KH}(X)\\ &\simeq \mathcal{SH}^\vee((\Sigma^\infty_+ X^{dual})^\vee, \Phi_*(1).\end{aligned}$$

上述第二个同构由注记2.16 与 [GR19的引理9.2相结合而得。4]。由于稳定同伦范畴$^\vee$ 是刚性生成的，它由形如$(\Sigma^\infty_+ X)^{dual}$的对象在悬挂、环、有限余极限与滤过余极限下生成，从而表明$\dagger\mathrm{KGL}^{\mathbb{A}^1} \simeq \Phi_*(1)$ 由米田引理。

~本节的主要结果是 Φ的全忠实性：

命题 4.2. 在域 k 上，并在对指数特征 e取逆之后，函子

$$\widetilde{\Phi} : \mathrm{Mod}_{\Phi_*(1)}(\mathcal{SH}(k)[\frac{1}{e}]^\vee) \to \mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}[\frac{1}{e}]$$

在映射谱的层面上是全忠实的。

证明。 在证明中，当我们使用记号 $\Sigma^\infty_+ X$时，我们实际上指的是对 $\Sigma^\infty_+ X \in$ 稳定同伦范畴(k)作进一步局部化，即对 e 取逆。

我们首先断言，这对于形如 $\Phi_*(1) \otimes (\Sigma^\infty_+ Z)^{dual}$ 且 Z光滑且射影的对象成立。对 Z 的这些假设提供了充分的可对偶化性：

- $(\Sigma^\infty_+ Z)^{dual}$ 在稳定同伦范畴$(k)[\frac{1}{e}]^\vee$中是可对偶化的；
- perf$_Z$ 是饱和的，即在外围对称幺半范畴$\mathsf{Pr}^{\mathrm{L}cg}$ ≃$\mathsf{Cat}_{\mathrm{perf}}$中可对偶化。这由 [Orl16的命题 3 推出。31]: 对于 k-概形 Z （有限型且分离）， perf$_Z$ 是光滑的（相应地，适当的）当且仅当 Z 是光滑的（相应地，适当的）。

于是我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Mod}_{\Phi_*(1)}(\mathcal{SH}(k)[\tfrac{1}{e}]^\vee)(\Phi_*(1)\otimes(\Sigma^\infty_+X)^{dual},\Phi_*(1)\otimes(\Sigma^\infty_+Y)^{dual})\\
\simeq&\mathcal{SH}(k)[\tfrac{1}{e}]^\vee((\Sigma^\infty_+X)^{dual},\Phi_*(1)\otimes(\Sigma^\infty_+Y)^{dual})\\
\simeq&\mathcal{SH}(k)[\tfrac{1}{e}]^\vee((\Sigma^\infty_+X)^{dual}\otimes((\Sigma^\infty_+Y)^{dual})^\vee,\Phi_*(1))\\
\simeq&\,\mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\Phi^*((\Sigma^\infty_+X)^{dual}\otimes((\Sigma^\infty_+Y)^{dual})^\vee),1)[\tfrac{1}{e}]\\
\simeq&\,\mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\Phi^*(\Sigma^\infty_+X)^{dual}\otimes\Phi^*((\Sigma^\infty_+Y)^{dual})^\vee,1)[\tfrac{1}{e}]\\
\simeq&\,\mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}\,\mathrm{perf}_X\otimes\mathcal{U}(\mathrm{perf}_Y^{op}),1)[\tfrac{1}{e}]\\
\simeq&\,\mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U}\,\mathrm{perf}_X,\mathcal{U}\,\mathrm{perf}_Y)[\tfrac{1}{e}].
\end{aligned}$$

另一方面，只需证明这一点。由刚性生成，$\Phi_*(1)\otimes(\Sigma^\infty_+Z)^{dual}$ 在模$\Phi_*(1)$(稳定同伦范畴$(k)[\frac{1}{e}]^\vee$) 中是可对偶化的，并且在悬挂、环、有限余极限和滤过余极限下生成整个范畴。应用 [Rob13，命题 2.7], 归结为~证明 Φ 保持紧对象；由 $\mathrm{Mot}(k)^{\mathbb{A}^1}{}_{\mathrm{loc}}[\frac{1}{e}]$ 中单位元的紧性可知这一点成立。 □

4.2 因子化函子的全忠实性，非-$\mathbb{A}^1$-不变情形

$\mathcal{MS}$ 与稳定同伦范畴的区别之一是，即使在域 k 上且已反转指数特征，$\mathcal{MS}$ 也不能由刚性生成。特别地，模范畴 $\mathrm{Mod}^{\Psi_*\Psi^*}(\mathcal{MS}^\vee)$ 和 $\mathrm{Mod}_{\Psi_*(1)}(\mathcal{MS}^\vee)$ 通常并不相同。

我们将证明函子

$$\widetilde{\Psi}:\mathrm{Mod}_{\Psi_*(1)}(\mathcal{MS}(k)[\tfrac{1}{e}]^\vee)\to\mathrm{Mot}(k)_{\mathrm{loc}}[\tfrac{1}{e}]$$

如第2.1.4 节所诱导的并不总是全忠实的。事实上，我们将看到，在可数域上，π_0（来自仿射直线与任意非零环 R 之间的映射谱）在左侧总是可数的，而在$\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}$中总是不可数的。

命题4.3. 设 k 为可数域，e 为 k的指数特征。则$\mathcal{MS}(k)[\frac{1}{e}]^\vee$ 中由紧对象张成的全子范畴是可数的，意即所有映射谱的 π_0 均为可数。

证明。 只需证明对于 $\mathcal{MS}(k)$。我们首先证明 $\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(k))$ 具有由紧对象构成的可数子范畴。根据 [NS18，定理 I.3.3] 以及 [BGT13，命题 5.6]，我们看到$\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(k))$ 是以下对象的 Verdier商

$$\mathcal{A}\to\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(k)),$$

其中 $\mathcal{A}$ 由所有 Nisnevich 方形和初等爆破方块张成

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X, \end{array}$$

.....的余纤维

$$j(U) \amalg_{j(W)} j(V) \to j(X).$$

此外，$\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(k))$ 中 $\mathrm{L} \circ j(X)$ 与 $\mathrm{L} \circ j(Y)$ 之间的映射谱可计算为

$$colim_{Z \in \mathcal{A}_{/Y}} \mathrm{Map}_{\mathcal{P}sh(Sm^{\mathrm{fp}}(k))}(j(X), \mathrm{cofib}(Z \to j(Y))),$$

因此，它是可数集的可数余极限，故为可数的。

为了转到 $\mathcal{MS}(k)$，我们考虑 c-谱模型。由定义2.6 可直接推出，$\mathrm{Sp}^{lax}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{P}sh_{\mathrm{Nis,ebu}}(Sm^{\mathrm{fp}}(k)))$ 紧对象之间的映射谱是可数的。再次应用[NS18，定理 I.3.3]可得$\mathcal{MS}(k)$ 紧对象之间的映射谱是可数的，正如所需。 □

由于 $\mathrm{Mod}_{\Psi_*(1)}(\mathcal{MS}(k)[\frac{1}{e}]^\vee)$ 中可表对象之间的映射谱是在 $\mathcal{MS}(k)[\frac{1}{e}]^\vee$ 中计算的，只需将目标与 $\Psi_*(1)$-作张量积；而后者作为 KGL 的对偶版本，是一个 ω_1-紧对象，因此我们得出，$\mathrm{Mod}_{\Psi_*(1)}(\mathcal{MS}(k)[\frac{1}{e}]^\vee)$ 中可表对象之间的映射谱是可数集的 ω_1-小余极限，因而是可数的。

另一方面，对于一个非零 k-代数 R， [Efi25定理 9。1]表明

$$\mathbb{W}(R) \simeq \pi_0 \mathrm{Map}_{\mathrm{Mot}_{\mathrm{loc}}}(\mathcal{U} \operatorname{perf}_{k[t]}, \mathcal{U} \operatorname{perf}_R),$$

其中 $\mathbb{W}(R)$是大 Witt 向量环。 $\mathbb{W}(R)$ 的底层集合为 $(1 + tR[[t]])^\times$。特别地，它是不可数的。

参考文献

[AHI25] Toni Annala、Marc Hoyois 和 Ryomei Iwasa。代数余边界与代数 K 理论的 Conner–Floyd 同构。《美国数学会杂志》，38(1):243–289，2025年。[AI22] Toni Annala 和 Ryomei Iwasa。动机谱与 k理论的普适性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2204.03434*，2022年。[BGT13] Andrew J Blumberg、David Gepner 和 Gonçalo Tabuada。高阶代数 K 理论的普适刻画。《几何与拓扑》，17(2):733–838，2013年。[BHS20] Robert Burklund、Jeremy Hahn 和 Andrew Senger。Artin–Tate r-动机谱的伽罗瓦重构。*arXiv* 预印本 *arXiv:2010.10325*，4，2020年。

[CP20] Dustin Clausen 和 Peter Scholze。解析几何讲义。网址：https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf，2020年。[Efi24] Alexander I Efimov。大范畴的 K-理论与局部化不变量。arXiv 预印本 arXiv:2405.12169，2024年。[Efi25] Alexander I Efimov。局部化动机范畴的刚性。arXiv 预印本 arXiv:2510.17010，2025年。[EK20] Elden Elmanto 和 Håkon Kolderup。关于动机环谱上的模。K-理论年刊，5(2):327–355，2020年。[GR19] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum。《导出代数几何研究：第一卷：对应与对偶》，第221卷。美国数学学会，2019年。[Hoy15] Marc Hoyois。格罗滕迪克–莱夫谢茨–韦迪耶迹公式的二次细化。代数与几何拓扑，14(6):3603–3658，2015年。[HSS17] Marc Hoyois、Sarah Scherotzke 和 Nicolo Sibilla。高阶迹、非交换动机与范畴化陈特征。数学进展，309:97–154，2017年。[Kha20] Adeel A Khan。拟光滑胀开与 cdh 下降的代数 K 理论。亨利·勒贝格纪事，3:1091–1116，2020年。[KNP24] Achim Krause、Thomas Nikolaus 和 Phil Pützstück。流形上的层。作者网页提供，2024年。[KR25] Adeel A Khan 和 David Rydh。虚拟嘉当除子与胀开。Selecta Mathematica，31(4):1–28，2025年。[Lur09] Jacob Lurie。高阶拓扑斯理论。普林斯顿大学出版社，2009年。[Lur12] Jacob Lurie。高阶代数，2012年。[Lur18] Jacob Lurie。谱代数几何，2018年。[LYZR19] Marc Levine、Yaping Yang、Gufang Zhao 和 Joël Riou。代数椭圆上同调理论与翻转 I。数学年刊，375(3):1823–1855，2019年。[NS18] Thomas Nikolaus 和 Peter Scholze。关于拓扑循环同调，2018年。[Orl16] Dmitri Orlov。光滑且适当的非交换概形与 dg 范畴的粘合。数学进展，302:59–105，2016年。[Rio05] Joël Riou。代数几何中的 Spanier–Whitehead 对偶。《数学报告》，340(6):431–436，2005年。[Rob13] Marco Robalo。非交换动机 I：从交换动机到非交换动机。arXiv 预印本 arXiv:1206.3645，2013年。[Sch22] Peter Scholze。六函子形式体系。作者网页提供，2022年。

[Sos24] Vladimir Sosnilo。局部化不变量的 A1-不变性。*K*-理论年刊，9(1):89–118，2024年。[TT13] Robert W Thomason 和 Thomas Trobaugh。概形及导出范畴的高阶代数 K 理论。载于格罗滕迪克纪念文集：为纪念亚历山大·格罗滕迪克 *60* 岁生日而撰写的论文集，第 247–435 页。施普林格，2013年。[Voe98] 弗拉基米尔·沃埃沃茨基。$\mathbb{A}^1$-同伦论。载于国际数学家大会论文集，第 1 卷，第 579–604 页。柏林，1998年。