arXiv:2603.11785v1 [math.GT] 12 Mar 2026

带锥点的紧双曲曲面模空间体积的递推公式

HAOYANG JIANG 和 LIXIN LIU

ABSTRACT. 设 $V_{g,m,n}(\vec{L},\vec{\theta})$ 表示亏格为 g、具有 m 个长度为 $\vec{L}=(\ell_1,...,\ell_m)$ 的测地边界分支和 n 个角度为 $\vec{\theta}=(\theta_1,...\theta_n)$ 的锥点的双曲曲面的模空间的Weil-Petersson体积。利用广义 McShane 恒等式，我们证明 $V_{g,m,n}(\vec{L},\vec{\theta})$ 是关于 $(\ell_1,...,\ell_n,i\theta_1,...,i\theta_m)$ 的多项式。并由此得到 $V_{g,m,n}(\vec{L},\vec{\theta})$ 的递推公式，这是对米尔扎哈尼结果的推广。

关键词：McShane恒等式、体积多项式、递推公式、Mirza-Khani 理论

1. INTRODUCTION

将亏格为 g、具有 m 条测地边界分支和 n 个锥点的紧双曲曲面记为$S_{g,m,n}$。将 $S_{g,m,n}$ 的模空间记为 $\mathcal{M}_{g,m,n}$，将 $S_{g,m,n}$ 的映射类群记为 $Mod_{g,m,n}$，并将 $S_{g,m,n}$ 的 Teichm¨uller 空间记为 $\mathcal{T}_{g,m,n}$。给定 m 条测地边界的长度 $\vec{L}=(\ell_1,\cdots,\ell_m)$ 以及 n 个锥点的角度 $\vec{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_n)$，将该曲面记为 $S_{g,m,n}(\vec{L},\vec{\theta})$，将该曲面的模空间记为 $\mathcal{M}_{g,m,n}(\vec{L},\vec{\theta})$，将模空间的体积记为 $V_{g,m,n}(\vec{L},\vec{\theta})$。

米尔扎哈尼[11] 基于带边界双曲曲面的麦克沙恩恒等式，建立了一种在模空间上积分的方法。利用该方法，她证明了带边界双曲曲面的模空间体积是该双曲曲面测地边界长度的多项式。此外，她得到了带边界双曲曲面模空间体积的递推公式。一个流传已久的说法是，米尔扎哈尼的结果对于所有锥角均属于$(0,\pi]$的带锥点紧双曲曲面仍然成立。我们将给出这一说法的证明。

本文证明以下结果：

日期：2026年3月13日。

定理 1.1. 给定一个紧双曲曲面 $S_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$，其所有锥点的角度均属于 $(0, \pi]$，则存在一个递推公式，用于计算体积 $V_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$，该公式依据 $S_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$ 的分裂。

递推公式的细节见第 4 节。众所周知，对于锥点角度均属于 (0，π] [17] 的带锥点紧双曲曲面，均存在裤子分解。但对于具有角度为 $\pi < \theta < 2\pi$ 的锥点的紧双曲曲面，裤子分解可能不存在，这一点已在 [2] 的附录中证明。由于米尔扎哈尼的方法依赖于双曲曲面的裤子分解，本文讨论的所有带锥点紧双曲曲面，其锥点角度均属于 (0，π]。关于带锥点双曲曲面模空间体积的更多研究，请参阅[1] [2] 和 [5]。Do 和 Norbury [5] 在 $\theta \longrightarrow 2\pi$ 时得到了递推公式。Anagnostou 和 Norbury [2] 提出了一种方法，将 $\mathcal{M}_{g,\ n}(\overrightarrow{\theta})$ 的 Deligne-Mumford 紧化与 $\mathcal{M}_{g,\ n}$ 的 Deligne-Mumford 紧化之间的同胚加以推广。利用这一方法，他们将 $\mathcal{M}_{g,\ n}(\overrightarrow{L})$ 的体积多项式推广至 $\mathcal{M}_{g,\ n}(\overrightarrow{\theta})$（见 [2] 中的定理 1.2）。该结果研究的是具有锥点且没有测地边界分支的曲面$\mathcal{S}_{g,\ n}(\theta)$。而在我们的结果中，曲面同时具有锥点和测地边界，并得到了相应的递推公式。对于装饰曲面的模空间，Goncharov 和 Zhe Sun 定义了指数体积，这是 Weil-Petersson 体积形式下体积的推广；他们还得到了一个递推公式。[7]

2. Results

2.1. **McShane恒等式**。

McShane 证明了以下恒等式：

定理 2.1 (McShane [9])。 对于单穿孔双曲环面 T，

$$\sum_{\gamma} \frac{1}{1+\exp|\gamma|} = \frac{1}{2},$$

其中求和遍及 T 上的所有简单闭测地线，$|\gamma|$ 表示 T上 γ 的双曲长度。

随后，McShane 将上述恒等式推广到了更一般的双曲曲面：

定理 2.2 （麦克沙恩 [10]）。 在具有尖点且无边界的有限面积双曲曲面 M 上，

$$\sum \frac{1}{1+\exp\frac{1}{2}(|\alpha|+|\beta|)} = \frac{1}{2},$$

其中求和遍及所有无序对的简单闭测地线 $\{\alpha,\ \beta\}$（其中 α或 β 可能是一个尖点，并将其视为长度为 *0* 的简单闭测地线），这些测地线在 M上与一个指定的尖点共同围成一个嵌入的裤子。

McShane恒等式有各种推广形式。更多详情请参阅综述论文 [3]。

定义2.3。 设 $S_{g,\ n,\ m}$ 为一个亏格为 g 、具有 n 个边界分支和 m个标记点的定向紧致曲面，且满足 $2g-n-m>0$。根据定义，双曲曲面是指 $S_{g,\ n,\ m}$ 上的双曲度量，其具有 n 个测地边界分支，并在标记点处有 m个锥形奇点。

Tan、Wang 和 Zhang 将 McShane恒等式推广到了带锥点的紧双曲曲面。他们在 [13] 的定理1.5中得到了以下结果:

定理2.4。 （广义*McShane*恒等式）

设 M 为一紧双曲曲面，它或者带有一个锥角为 $\theta\in$ （0、 π] 的单个锥点，或者带有一个长度为 $\ell>0$的单个边界分支。则分别有

$$\sum 2\tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\exp(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2})}\right)=\frac{\theta}{2},$$

$$\sum 2\tanh^{-1}\left(\frac{\sinh\frac{\ell}{2}}{\cosh\frac{\ell}{2}+\exp(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2})}\right)=\frac{\ell}{2},$$

其中，两种情形下的求和均遍历 *M* 上所有无序的简单闭测地线对；每一对都与锥点（分别与边界测地线）围成一个嵌入的裤子。

此外，这些结果可用于计算带锥点的紧双曲曲面模空间的体积。

此外，Yi Huang 和 Zhe Sun 将 McShane恒等式推广到了高阶 Teichmüller 理论。[8]

2.2. **Fenchel-Nielsen 坐标**。曲面 S 可作裤子分解 $\mathcal{P}=\{P_i\mid i=1,2,\cdots,q\}$，其中每个 P_i都是广义裤子，也就是一个具有三个孔洞的拓扑球面，其中孔洞可以是一个被移除的点，也可以是一个被移除的开圆盘。

固定曲面 S 的一个裤子分解 $\mathcal{P}=\{P_i\mid i=1,2,\cdots,q\}$。令 $\mathcal{L}$ 为 P_i, $i=1$，2，$\cdots$， q 的边界曲线集合。对于 S 上的双曲度量 H，我们为每个曲线同伦类 $C_i\in\mathcal{L}$ 关联一个长度参数和一个扭转参数。对于 H ， C_i 的长度参数 $l_H(C_i)$ 是在双曲度量 H 下，与 C_i 同伦的曲线中测地线的长度。具体的

度量 H 下， C_i 的扭转参数 $\theta_H(C_i)$ 的定义可见定理 4.6.23 的 [14], ，此处省略细节。对于裤子分解 $\mathcal{P} = \{P_i \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$，双曲度量 H 的 Fenchel-Nielsen 坐标为 $\{l_H(C_1)\ \theta_H(C_1)\ l_H(C_2)\ \theta_H(C_2)\ \cdots,\ l_H(C_n)\ \theta_H(C_n)\ \cdots\}$，其中 $C_i \in \mathcal{L}$。

令 $S_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$ 为一带锥点的紧双曲曲面，其中 $\overrightarrow{L} = (\ell_1, \cdots, \ell_m)$ $\overrightarrow{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$。令 $\mathcal{T}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$ 为 $S_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$ 的 Teichmüller 空间。我们可以使用来自 Fenchel-Nielsen 坐标的 $6g - 6 + 2n + 2m$ 个实参数来描述 Teichmüller 空间 $\mathcal{T}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$，它由测地边界的长度以及用于粘合各部分的扭转参数组成。

我们有一个同构 [4]

$$\mathcal{T}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta}) \cong \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{P}}$$

由映射给出

$$X \longrightarrow (\ell_{\alpha_i}(X), \tau_{\alpha_i}(x)).$$

根据Goldman [6]和Wolpert [15], 的研究，Teichm¨uller 空间的魏尔-彼得森辛结构用 Fenchel-Nielsen坐标表示时具有简单的形式：

定理 2.5. 魏尔-彼得森辛形式为

$$\omega_{wp} = \sum_{i=1}^{k} d\ell_{\alpha_i} \bigwedge d\tau_{\alpha_i}.$$

为了将米尔扎哈尼的结果推广到带锥点的紧双曲曲面，我们需要对上述定理进行推广。这建立在带锥点的紧双曲曲面存在裤子分解这一事实之上，其中所有锥点的 $\in (0, \pi]$。定理 1 的推广证明见 [12]第 3246 页：

定理 2.6. 对于所有锥点$\in (0, \pi]$的带锥点紧双曲曲面，其 *Teichm¨uller* 空间的魏尔-彼得森辛形式为

$$\omega_{wp} = \sum_{i=1}^{k} d\ell_{\alpha_i} \bigwedge d\tau_{\alpha_i}.$$

根据 [12], 中的定理 2.2，我们知道 ω_{wp} 在映射类群的作用下保持不变。因此，它具有一个在映射类群作用下保持不变的体积形式，其定义如下：

$$v_{wp} = \frac{1}{(3g - 3 + n)!} \omega_{wp} \wedge \cdots \wedge \omega_{wp}.$$

2.3. 扭转。给定 $X \in \mathcal{T}_g$ 上的一条简单闭测地线 $\alpha_{,\ m,\ n}(\overrightarrow{L},\ \overrightarrow{\theta})$ 和 $t \in \mathbb{R}$，我们如下定义 X 的扭转变形 tw_α^t。

沿着 α切割曲面 X，将 α 的左侧向正方向旋转距离 t 后再重新粘合，我们得到了一个新的曲面。新曲面记为 $tw_\alpha^t(X)$。当 t 连续变化时，在Teichm¨uller空间$X \in \mathcal{T}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$中得到的连续路径称为沿$\alpha$对 X进行的Fenchel-Nielsen变形。对于 $t = \ell_\alpha(X)$，我们有：

$$tw_\alpha^t(X) = \phi_\alpha(X),$$

其中 ϕ_α 是关于 α的右德恩扭转。

由于对于每个 $t \in [0, \ell_\alpha]$，都有 $\ell_\alpha(tw_\alpha^t(X)) = \ell_\alpha X$，因此，由绕 α 扭转生成的向量场Y与1-形式 $d\ell_\alpha$ $symplectically\ dual$，这意味着 $\omega_{wp}(Y, .) = d\ell_\alpha$。注意，$\omega_{wp}$在映射类群的作用下是不变的。因此，等值集$\mathcal{M}_{g,m,n}^{\gamma}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta}, x) = \ell_\alpha^{-1}(x)$带有一个自然的体积形式 v_x.

2.4. 分解。复数 $\gamma = \sum_{i=1}^k c_i\gamma_i$ $(c_i \in \mathbb{R}_+)$ 称为 $S_{g,m,n}$ 上的一条多曲线，如果 γ_i 彼此不相交，且都是本质的、非周边的简单闭曲线，并且彼此不同伦。给定长度向量为 $\overrightarrow{L} = (\ell_1, \cdots, \ell_m)$ 的 γ_i，我们可以研究沿 $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ 切割 $S_{g,m,n}$ 后得到的曲面 $S_{g,m,n}(\gamma)$。那么 $S_{g,m,n}(\gamma)$ 是一个（可能不连通的）曲面，具有 $m+2k$ 个边界分支和 s (γ) 个连通分支。每个连通分支都产生两个边界分支，γ_i^1 和 γ_i^2 位于 $S_{g,m,n}(\gamma)$ 上。并且我们有：

$$\partial(S_{g,m,n}(\gamma)) = \{\beta_1, \cdots, \beta_m,\ \theta_1, \cdots, \theta_n\} \bigcup \{\gamma_1^1, \gamma_1^2 \cdots, \gamma_k^1, \gamma_k^2\},$$

其中 β 是 $S_{g,m,n}$ 的边界分支。给定 $\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$、$\overrightarrow{L} = (\ell_1, \cdots, \ell_k)$、$\overrightarrow{\beta} = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ 和 $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$，我们考虑模空间

$$\mathcal{M}(S_{g,m,n}(\gamma),\ \ell_\Gamma = \overrightarrow{x},\ \ell_{\overrightarrow{\beta}} = \overrightarrow{L})$$

与$S_{g,m,n}(\gamma)$同胚的双曲黎曼曲面。

我们定义$V_{g,m,n}(\Gamma, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{L})$如下，

$$V_{g,m,n}(\Gamma,\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{\beta},\ \overrightarrow{L}) = \mathrm{Vol}(\mathcal{M}(S_{g,m,n}(\gamma),\ \ell_\Gamma = \overrightarrow{x},\ \ell_{\overrightarrow{\beta}} = \overrightarrow{L})),$$

这是 $\mathcal{M}(S_{g、\ m、\ n}(\gamma)\ \ \ell_\Gamma = \overrightarrow{x}、\ \ \ell_\beta = \overrightarrow{L})$的体积。如果 $S_{g、\ m、\ n}(\gamma)$ 被划分为 s 个连通分支，我们可以将其写成以下这些较简单曲面的并集：

$$S_{g,m,n}(\gamma) = \bigcup_{i=1}^{s} S_{g_i,m_i,n_i},\ A_i = \partial S_{g_i,m_i,n_i} \in \partial(S_{g,m,n}(\gamma)), \tag{1}$$

其中 $\sum_i^s m_i = m + 2k$、 $\sum_i^s n_i = n$. 我们有:

$$\mathcal{M}(S_{g,m,n}(\gamma),\ \ell_\Gamma = \overrightarrow{x},\ \ell_{\overrightarrow{\beta}} = \overrightarrow{L}) \cong \prod_{i=1}^{s} \mathcal{M}_{g_i,m_i,n_i}(\ell_{A_i}). \tag{2}$$

于是我们有:

$$V_{g,m,n}(\Gamma,\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{\beta},\ \overrightarrow{L}) = \prod_{i=1}^{s} V_{g_i,m_i,n_i}(\ell_{A_i}). \tag{3}$$

3. Integration over the moduli space

3.1. 积分公式。 米尔扎哈尼 [11] 得到了关于带测地边界的双曲曲面模空间上的积分公式。我们将把她的结果推广到带锥点的紧双曲曲面。对于给定的一组简单闭曲线同伦类 A ，在 $S_{g,m,n}$, 上，Stab(A) 定义为:

$$\mathrm{A} = \{h \in Mod_{g,m,n} | h \cdot A = A\} \subset Mod_{g,m,n}.$$

对于多曲线 $\gamma = \sum_{i=1}^k c_i\gamma_i$ ，在 $S_{g,m,n}$ 上，我们将 γ,$Sym(\gamma)$ 的对称群定义为

$$Sym(\gamma)/\cap_{i=1}^k (\gamma_i).$$

我们将 γ 在 $\mathcal{M}_{g,m,n}$ 上的长度函数记为

$$\ell_\gamma(X) = \sum_{i=1}^{k} c_i \ell_{\gamma_i}(X),$$

其中 $\ell_{\gamma_i}(X)$ 是 γ_i 在 $X \in \mathcal{M}_{g,m,n}$ 上的长度。

给定一个函数 $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$,

$$f_\gamma(X) = \sum_{[\alpha]\in\mathcal{O}_\gamma} f(\ell_\alpha(X)),$$

现在，我们可以定义一个函数 f_γ:

$$f_\gamma : \mathcal{M}_{g,m,n} \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$

现在，我们回顾一下米尔扎哈尼关于 $\mathcal{M}_{g,n}(\overrightarrow{L})$ 的积分公式。

定理 3.1。 [11, 定理 7。1] 对于任意多曲线 $\gamma = \sum_{i=1}^k c_i\gamma_i$，相对于 *Weil-Petersson* 体积形式，f_γ 在$\mathcal{M}_{g,\ n}$（$\overrightarrow{L}$） 上的积分为

$$\int_{\mathcal{M}_{g,n}(\overrightarrow{L})} f_\gamma(X)dX = \frac{2^{-M(\Gamma)}}{|Sym(\gamma)|} \int_{x\in\mathbb{R}_+^k} f(|x|)V_{g,n}(\Gamma, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{L})\overrightarrow{x} \cdot d\overrightarrow{x},$$

其中 $\Gamma=(\gamma_1、\ldots\ldots、\gamma_k)$， $|\overrightarrow{x}|=\sum_{i=1}^k c_i x_i$、 $\overrightarrow{x}\cdot d\overrightarrow{x}=x_1\ldots x_k\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$和 $M(\Gamma):=|\{i|\gamma_i$ 从 $S_{g,\ n}\}|$中分离出一个单柄，

且 $V_{g,\ n}(\Gamma、\ \overrightarrow{x}、\ \overrightarrow{\beta}、\ \overrightarrow{L})$定义为

$$V_{g,n}(\Gamma,\overrightarrow{x},\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{L}):=\mathrm{Vol}\left(\mathcal{M}\left(S_{g,n}(\gamma),\ell_\Gamma=\overrightarrow{x},\ell_{\overrightarrow{\beta}}=\overrightarrow{L}\right)\right)=\prod_{i=1}^s V_{g_i,n_i}(\ell_{A_i}).$$

基于曲面的裤子分解，我们可以将米尔扎哈尼文章中的定理 7.1 [11] 推广到锥面的情形。我们首先将其表述如下:

引理 3.2。 对于任意多重曲线 $\gamma=\sum_{i=1}^k c_i\ell_{\gamma_i}(X)$， f_γ 关于 *Weil-Petersson* 体积形式在 $\mathcal{M}_{g、\ m、\ n}$上的积分为:

$$\int_{\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})} f_\gamma(X)dX=\frac{2^{-M(\Gamma)}}{|Sym(\gamma)|}\int_{\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}_+^k} f(|\overrightarrow{x}|)V_{g,m,n}(\Gamma,\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{\beta},\ \overrightarrow{L})\overrightarrow{x}d\overrightarrow{x},$$

其中 $\Gamma=(\gamma_1、\ \cdots、\ \gamma_k)$， $|\overrightarrow{x}|=\sum_{i=1}^k c_i$、 $\overrightarrow{x}\cdot d\overrightarrow{x}=x_1\cdots x_k\cdot dx_1\bigwedge\cdots\bigwedge dx_k$以及

$$M(\Gamma)=|\{i|\gamma_i\ separates\ off\ a\ one\text{-}handle\ from\ S_{g,m,n}\}|.$$

此外，

$$V_{g,m,n}(\Gamma,\overrightarrow{x},\overrightarrow{\beta},\overrightarrow{L}):=\mathrm{Vol}\left(\mathcal{M}\left(S_{g,m,n}(\gamma),\ell_\Gamma=\overrightarrow{x},\ell_{\overrightarrow{\beta}}=\overrightarrow{L}\right)\right)=\prod_{i=1}^s V_{g_i,m_i,n_i}(\ell_{A_i}),$$

其中

$$S_{g,m,n}(\gamma)=\bigcup_{i=1}^s S_i.$$

$S_i\cong S_{g_i,\ n_i}$， 以及 $A_i=\partial S_i$。

现在我们概述如何将上述公式推广到锥面模空间上。

在 $S_{g,\ m,\ n}$ 上固定一条多曲线 $\gamma=\sum_{i=1}^k c_i\gamma_i(c_i\in\mathbb{R}_+)$。我们记 $\Gamma=(\gamma_1,\ \cdots,\ \gamma_k)$。对于一个元素 $h\in Mod_{g,\ m,\ n}$， 它作用于 Γ 的方式为

$$h\cdot\Gamma=(h\cdot\gamma_1,\cdots,h\cdot\gamma_k).$$

令 $\mathcal{O}_\Gamma$ 为 $Mod_{g,\ m,\ n}\cdot\Gamma$ 中元素的同伦类集合。并令 $\mathcal{M}$ 为以下集合:

$$\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})^\Gamma=\{(X,\eta)|X\in\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta}),\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_k)\in\mathcal{O}_\Gamma\}.$$

因此，我们得到:

$$\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})^\Gamma=\mathcal{T}_{g,n}(\overrightarrow{L})/G_\Gamma,$$

其中 $G_\Gamma = \bigcap_{i=1}^k Stab(\gamma_i) \subset Mod_{g,\ m,\ n}$。

现在我们定义覆盖映射 $\pi^\Gamma : \mathcal{M}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^\Gamma \longrightarrow \mathcal{M}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$, 其中

$$\pi^\Gamma(X, \eta) := X.$$

接下来我们考虑 Γ. 上的扭转。令 $\ell_\Gamma : \mathcal{T}_{g,\ m,\ n} \longrightarrow \mathbb{R}_+^k$ 为:

$$\ell_\Gamma(X) = (\ell_{\gamma_1}(X), \cdots, \ell_{\gamma_k}(X)).$$

给定 $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$，Weil-Petersson体积形式在 $\mathcal{M}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^\Gamma[\overrightarrow{x}] = \ell_\Gamma^{-1}(\overrightarrow{x})$，上诱导出自然体积形式；对于 ω_{wp}，该形式在映射类群作用下保持不变。

设 $\phi_{\gamma_i}^t$ 为沿 γ_i 、长度为 t的扭转变形，它由$\phi_{\gamma_i}^t(X) = tw^{t \cdot \ell_{\gamma_i}(X)\ \gamma_i}$ 给出。于是我们可以如下定义 Γ 上的扭转

$$\phi_\gamma^{(t_1, t_2, \cdots, t_k)} := \prod_{i=1}^k \phi_{\gamma_i}^{t_i},$$

它是从$\mathcal{T}_{g,m,n}$ 到$\mathcal{T}_{g,m,n}$ 的双射，并保持魏尔-彼得森辛形式 ω_{wp}.

另一方面，沿 $\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$, 切割 $X \in \ell_\Gamma^{-1}(x_1, \cdots, x_k)$，我们得到一个具有测地边界分支的曲面 $s_\gamma(X) \in \mathcal{T}(S_{g,m,n}(\gamma)\ \ell_\Gamma = \overrightarrow{x}, \ell_\beta = \overrightarrow{L})$，如(1)中所示。注意，对任意$(t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{R}_+^k$, 我们有:

$$s_\gamma(X) = s_\gamma(\phi_\gamma^{(t_1, \cdots, t_k)}(X)). \tag{4}$$

然后我们考虑商空间:

$$\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^{\Gamma *}[\overrightarrow{x}] = \mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})[\overrightarrow{x}]^\Gamma / (T^k), \tag{5}$$

其中 $T^k = \prod_{i=1}^k S^1$继承了$\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$的辛结构。由公式(4)可知， $s_\gamma(X)$在扭转变形 $\phi_\gamma^{(t_1, \cdots, t_k)}$下不变。由于映射 s_γ 是映射类群等变的（这意味着对任意$h \in Mod_{g,m,n}$, 我们有 $s_\gamma(h(X)) = h(s_\gamma(X))$），它在$\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^\Gamma$ 上诱导如下映射。对$(X, \eta) \in \mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^{\Gamma *}[a]$， 令

$$s((X, \eta)) = s_\gamma(X) \in \mathcal{M}(S_{g,m,n}(\gamma), \ell_\Gamma = \overrightarrow{x}, L_\beta = \overrightarrow{L}).$$

现在如公式（2）所示，令

$$S_{g,m,n}(\gamma) = \bigcup_{i=1}^s S_{g_i,m_i,n_i},\ A_i = \partial S_{g_i,m_i,n_i} \in \partial(S_{g,m,n}(\gamma)).$$

因此，由公式 (3) 和公式 (5)，我们得到以下引理:

引理 3.3. 对于任意多曲线 γ，典范同构：

$$s : \mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^{\Gamma*}[x] \longrightarrow \mathcal{M}(S_{g,m,n}(\gamma), \ell_\Gamma = \overrightarrow{x}, L_\beta = \overrightarrow{L}) \cong \prod_{i=1}^{s} \mathcal{M}_{g_i,m_i,n_i}(\ell_{A_i})$$

是一个辛同胚。

辛同胚意味着，$\mathcal{M}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L},\ \overrightarrow{\theta})^{\Gamma*}[a]$ 继承自$\mathcal{M}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L},\ \overrightarrow{\theta})$的辛形式，等于$\prod_{i=1}^{s} \mathcal{M}_{g_i,\ m_i,\ n_i}(\ell_{A_i})$上的 Weil–Petersson 辛形式的拉回。

于是，我们可以得到覆盖空间$\mathcal{M}_{g,\ m,\ n}$(上的积分公式 $\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^{\Gamma}$。

引理 3.4。 对于任意函数 F： $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 和 $\Gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k)$，定义 F_Γ： $\mathcal{M}_{g,\ m,\ n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 为

$$F_\Gamma(Y) = F(\ell_\Gamma(Y)).$$

那么， F_Γ 在$\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})$上的积分为

$$\int_{\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})} F_\Gamma(Y)dY = 2^{-M(\Gamma)} \int_{\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}_+^k} F(\overrightarrow{x}) V_{g,m,n}(\Gamma,\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{\beta},\ \overrightarrow{L}) \overrightarrow{x} d\overrightarrow{x},$$

其中， $\overrightarrow{x} \cdot d\overrightarrow{x} = x_1 \ldots x_k \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$和 $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_k)$，并且

$$M(\Gamma) := |\{i | \gamma_i \textit{ separates off a one-handle from } S_{g,n}\}|.$$

关于 $M(\Gamma)$的定义，讨论与 [11], 第 214 页相同，因此略去，并采用 [11]中定理 7.1 的定义。

证明。 固定 $x \in \mathbb{R}_+^k$，考虑集合 $\ell_\Gamma^{-1}(\overrightarrow{x})$，其中函数 $F_\Gamma = F(\ell_\Gamma(X))$在该集合上为常数。对于 $x \in \mathbb{R}_+$，令：

$$I(\overrightarrow{x}) = \int_{\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})^\Gamma[\overrightarrow{x}]} F(\ell_\Gamma(Y))dY.$$

由定理 2.6,

$$\int_{\mathcal{M}^\Gamma_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})} F_\Gamma(Y)dY = \int_{\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}_+^k} I(\overrightarrow{x})d\overrightarrow{x}.$$

为计算 $I(\overrightarrow{x})$，我们需要证明：

$$\mathrm{Vol}(l_\Gamma^{-1}(\overrightarrow{x})) = 2^{-M(\Gamma)} x_1 \cdots x_k V_{g,m,n}(\Gamma,\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{\beta},\ \overrightarrow{L}).$$

我们考虑投影映射：

$$\pi : \mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})[\overrightarrow{x}]^\Gamma \longrightarrow \mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L}, \overrightarrow{\theta})^{\Gamma*}[\overrightarrow{x}].$$

结合第 页中关于开集„(,) 上

$M\ \Gamma\qquad 214\quad [11],\qquad U \subset (\,)$ 的讨论，我们得到：

$\mathcal{M}_{g\,m\,n}\ \overrightarrow{L}\ \overrightarrow{\theta}\ ^{\Gamma*}[\overrightarrow{x}]$

$$\mathrm{Vol}(\pi^{-1}(U)) = 2^{-M(\Gamma)}\,\mathrm{Vol}(U)\cdot x_1\cdots x_k.$$

因此，由引理 3.3 可得：

$$I(\overrightarrow{x}) = 2^{-M(\Gamma)}\cdot F(\overrightarrow{x})x_1\cdots x_k\cdot V_{g,m,n}(\Gamma,\ \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{\beta},\ \overrightarrow{L}).$$

□

将 $\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})^{\Gamma}$ 视为 $\mathcal{M}_{g,m,n}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta})$ 的覆盖空间，其覆盖次数为 $|Sym(\gamma)|$，即可得到引理 3.2。

3.2. ,$_{0,1}(\theta)$的体积在本节中，我们考虑具有一个锥点、亏格为一且无边界的紧双曲曲面的模空间体积。记该曲面为 $S_{1,0,1}(\theta)$，其模空间记为$\mathcal{M}_{1,0,1}(\theta)$。模空间$\mathcal{M}_{1,0,1}(\theta)$的体积记为$V_{1,0,1}(\theta)$。

对 $\mathcal{M}_{1,0,1}(\theta)$ 进行积分的主要思路，是沿曲面上的一条简单闭曲线 γ 进行分解。在这种情况下，我们可以将曲面分割成更简单的曲面。原曲面的模空间可以表示为这些较简单曲面的模空间的乘积。沿简单闭曲线 γ切割曲面 $S_{1,0,1}(\theta)$后，我们得到一个具有一个锥点和两个测地边界的裤子。我们将 $\mathcal{M}(S_{0,2,1}, \ell_\gamma = t, \theta)$ 定义为与 $S_{0,2,1}(\gamma,\theta)$ 同胚的黎曼曲面模空间，其中对应于 γ 的两个边界分支长度均为 t。

根据第 3.1 节的讨论，我们建立了关于$\mathcal{M}_{1,\ 0,\ 1}(\theta)$的以下积分引理：

引理 3.5. 对于任意函数 $F:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ 和一条闭测地线 γ，定义F_γ：$\mathcal{M}_{1,\ 0,\ 1}(\theta)\longrightarrow\mathbb{R}$ 为

$$F_\gamma(Y) = F(\ell_\gamma(Y)).$$

F_γ 在$\mathcal{M}_{1,\ 0,\ 1}(\theta)$ 上的积分由下式给出

$$\int_{\mathcal{M}_{1,0,1}(\theta)} F_\gamma(Y)dY = \int_0^\infty F(x)\,\mathrm{Vol}(\mathcal{M}(S_{0,2,1}(\gamma),\theta,\ell_\gamma = x)xdx.$$

特别地，体积$(\mathcal{M}(S_{0,\ 2,\ 1}(\gamma)\ \theta, \ell_\gamma = x)\ = 1.$

因此我们可以计算$V_{1,\ 0,\ 1}(\theta)$。

定理 3.6。

$$V_{1,0,1}(\theta) = -\frac{\theta^2}{48} + \frac{\pi^2}{12}.$$

证明。我们通过 g=n=1 的一个例子，详细说明计算 $V_{g,m,n}$ 的主要思路。

我们需要使用定理2.4中的广义McShane恒等式。即

$$\sum 2\tan^{-1}(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+exp^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}}})=\frac{\theta}{2}.$$

众所周知

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i},\ \tan\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{ie^{i\theta}+ie^{-i\theta}},\ \tan^{-1}z=\frac{\ln\frac{i-z}{i+z}}{2i}.$$

我们有:

$$\tan^{-1}(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+exp(\frac{y+z}{2})})=\frac{1}{2i}\ln\frac{i(\exp(\frac{y+z}{2})+\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{-i\theta}{2}}}{2})-\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{-i\theta}{2}}}{2i}}{i(\exp(\frac{y+z}{2})+\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{-i\theta}{2}}}{2})+\frac{e^{\frac{-i\theta}{2}}-e^{\frac{-i\theta}{2}}}{2i}}.$$

这意味着:

$$\sum\frac{1}{i}\ln\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{y+z}{2}}}{e^{\frac{-i\theta}{2}}+e^{\frac{y+z}{2}}}=\frac{\theta}{2},$$

其中 $y,\ x$ 是 M 上与锥点共同围成一个嵌入的裤子的简单闭测地线的长度。将上述恒等式的左侧记为 $\mathcal{D}(\theta,y,x)$。于是我们可以计算 $\mathcal{D}(\theta,y,x)$. 的偏导数。

在这种情况下， $y=z$。于是我们有:

$$2\frac{\partial\mathcal{D}(\theta,x,x)}{\partial\theta}=\frac{1}{1+e^{x-\frac{i\theta}{2}}}+\frac{1}{1+e^{x+\frac{i\theta}{2}}}.$$

对.....积分 对上述广义McShane恒等式在$\mathcal{M}_{1,\ 0,\ 1}(\theta)$上积分，得到 :

$$\theta\cdot V_{1,0,1}(\theta)=\int_0^\infty x\mathcal{D}(\theta,x,x)dx.$$

因此我们有:

$$\frac{\partial(\theta\cdot V_{1,0,1}(\theta))}{\partial\theta}=\frac{1}{2}\int_0^\infty x(\frac{1}{1+e^{x-\frac{i\theta}{2}}}+\frac{1}{1+e^{x+\frac{i\theta}{2}}})dx.$$

为了计算这个积分，我们需要在复平面$\mathbb{C}$上进行积分。令 $y_1=x+\frac{i\theta}{2}$，$y_2=x-\frac{i\theta}{2}$，可得: $\quad -\qquad\qquad -$

$$\int_0^\infty x(\frac{1}{1+e^{x-\frac{i\theta}{2}}}+\frac{1}{1+e^{x+\frac{i\theta}{2}}})dx=\int_{0+\frac{i\theta}{2}}^{\infty+\frac{i\theta}{2}}(y_1-\frac{i\theta}{2})\frac{1}{1+e^{y_1}}+\int_{0-\frac{i\theta}{2}}^{\infty-\frac{i\theta}{2}}(y_2+\frac{i\theta}{2})\frac{1}{1+e^{y_2}}.$$

由于 $\theta < \pi$，根据留数定理可得：

$$\begin{aligned}
&\int_{0+\frac{i\theta}{2}}^{\infty+\frac{i\theta}{2}} (y_1 - \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_1}} dy_1 \\
&= \int_0^{\infty} (y_1 - \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_1}} dy_1 + \int_{\frac{i\theta}{2}}^{0} (y_1 - \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_1}} dy_1 \\
&+ \int_{\infty}^{\infty+\frac{i\theta}{2}} (y_1 - \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_1}} dy_1.
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{0-\frac{i\theta}{2}}^{\infty-\frac{i\theta}{2}} (y_2 + \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_2}} dy_2 \\
&= \int_0^{\infty} (y_2 + \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_2}} dy_2 + \int_{-\frac{i\theta}{2}}^{0} (y_2 + \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_2}} dy_2 \\
&+ \int_{\infty}^{\infty-\frac{i\theta}{2}} (y_2 + \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_2}} dy_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

在这两个公式中，最后几项可以由 ϵ 控制。因此，当 $y \longrightarrow \infty$ 时，它们将趋于 0。接下来我们只需计算前两项。将方程 (6) 与方程 (7) 相加，得到：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x(\frac{1}{1+e^{x-\frac{i\theta}{2}}} + \frac{1}{1+e^{x+\frac{i\theta}{2}}}) dx \\
&= \int_{\frac{i\theta}{2}}^{0} (y_1 - \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_1}} dy_1 + \int_{-\frac{i\theta}{2}}^{0} (y_2 + \frac{i\theta}{2}) \frac{1}{1+e^{y_2}} dy_2 \\
&+ 2\int_0^{\infty} y_2 \frac{1}{1+e^{y_2}} dy_2.
\end{aligned}$$

根据 [16]，第 6 页中的特例 $Li_2(-1)$，我们知道：

$$2\int_0^{\infty} y_2 \frac{1}{1+e^{y_2}} dy_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

为了计算前两项，我们令 $y_1 = ix_1,\ y_2 = ix_2$。然后我们得 t:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x(\frac{1}{1+e^{x-\frac{i\theta}{2}}}+\frac{1}{1+e^{x+\frac{i\theta}{2}}})dx\\ =&\frac{\pi^2}{6}-\int_{-\frac{\theta}{2}}^0(x_2+\frac{\theta}{2})\frac{1}{1+e^{ix_2}}dx_2-\int_{\frac{\theta}{2}}^0(x_1-\frac{\theta}{2})\frac{1}{1+e^{ix_1}}dx_1\\ =&\frac{\pi^2}{6}-\int_{\frac{\theta}{2}}^0(x-\frac{\theta}{2})(\frac{1}{1+e^{ix}}+\frac{1}{1+e^{-ix}})dx.\end{aligned}$$

由于我们有

$$\frac{1}{1+e^{ix}}+\frac{1}{1+e^{-ix}}=1.$$

因此，我们有:

$$V_{1,1}(\theta)=\frac{1}{2}(-\frac{\theta^2}{24}+\frac{\pi^2}{6})=-\frac{\theta^2}{48}+\frac{\pi^2}{12},$$

这就是 [11] 第 207 页中，$n=1$ 的米尔扎哈尼多项式 $i\theta$ 的求值。□

4. The recursion of the volume polynomials体积多项式的递推

讨论是在紧双曲曲面 M 上进行的，其中所有锥点都位于 $(0,\ \pi]$。根据 [13], 第 83–85 页中的定义，固定 γ 为角度为 θ 的锥点，或长度为 L 的测地边界分量，我们可以定义不同情形下的 Gap函数:

情形 1。α 和 β 都是 M的几何内部中的简单闭测地线，并与 γ围成一条裤子。在这种情况下:

$$\mathrm{Gap}_1(\gamma;\alpha,\beta))=2\tanh^{-1}\left(\frac{\sinh\frac{|\gamma|}{2}}{\cosh\frac{|\gamma|}{2}+\exp\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}}\right).$$

情形 2。α 是边界测地线，β 是 M的几何内部中的简单闭测地线。在这种情况下:

$$\mathrm{Gap}_2(\gamma;\alpha,\beta))=|\frac{|\gamma|}{2}|-\tanh^{-1}\left(\frac{\sinh\frac{|\gamma|}{2}\sinh\frac{|\beta|}{2}}{\cosh\frac{|\alpha|}{2}+\cosh\frac{|\gamma|}{2}\cosh\frac{|\beta|}{2}}\right).$$

情况 3。α 是角度为 ϕ 的锥点，β 是 M的几何内部中的简单闭测地线。在这种情况下:

$$\mathrm{Gap}_3(\gamma;\alpha,\beta))=|\frac{|\gamma|}{2}|-\tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{|\gamma|}{2}\sinh\frac{|\beta|}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}+\cos\frac{|\gamma|}{2}\cosh\frac{|\beta|}{2}}\right).$$

情况 4。 α 是一个尖点， β 是 M 的几何内部中的一条简单闭测地线。在这种情况下：

$$\mathrm{Gap}_4(\theta;\alpha,\beta)) = |\frac{|\gamma|}{2}| - \tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\sinh\frac{|\beta|}{2}}{1+\cos\frac{\gamma}{2}\cosh\frac{|\beta|}{2}}\right).$$

如果 γ 是长度为 L 的测地边界分量，那么 $|\gamma| = L$；如果 γ 是角度为 θ 的锥点，那么 $|\gamma| = i\theta$。根据 [13], 中的定理1.8，我们有：

定理4.1。对于紧双曲曲面 $S_{g,\ m,\ n}$ ，固定一个锥点 θ，我们有：

$$\sum_{\alpha,\beta}\mathrm{Gap}(\theta;\alpha,\beta) = \frac{\theta}{2},$$

其中 α、 β 满足：

1. α、 β 是简单测地线、尖点或锥点。*2.* α、 β 与 θ 一起围成 M 上的一个嵌入的裤子。

由于 Gap函数满足第 3.1 节中 f_γ 的定义，因此根据引理 3.2，我们可以在模空间上对函数 Gap_1 和 Gap_2 的偏导数进行积分。因此，我们可以在 $S_{g,\ m,\ n}$ 的模空间上对 McShane恒等式两边进行积分。若将锥点视为长度为 $i\theta$ 的测地边界，这些公式就是引理 3.1 [11] 中米尔扎哈尼函数 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{D}$ 的推广。由于存在裤子分解，我们可以将米尔扎哈尼递推公式推广到带锥点的紧双曲曲面。我们将在后文阐明这一推广。

在计算$V_{1,\ 0,\ 1}(\theta)$时，我们已经运用了上述思路。我们的讨论与米尔扎哈尼的讨论之间唯一的区别在于 Gap函数。

于是我们得到以下定理：

定理4.2。 对于带有锥点的紧双曲曲面 $S_{g,\ m,\ n}(L, i\theta)$ ，当所有锥点的角度均属于$(0,\pi]$时，存在一个递推公式，用于计算 $V_g(\ell_1,\cdots,\ell_m,$

$i\theta_1, \cdots, i\theta_n)$。即：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\frac{1}{2}\theta_1 V_{g,m,n}(\ell_1,\cdots,\ell_m,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n))}{\partial\theta_1}\\
=&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1(\theta_1,x,y)}{\partial\theta_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g-1,m+2,n-1)}}\cdot V_{g-1,m+1,n-1}(x,y,\ell_1,\cdots,\ell_m,\\
&\theta_2,\cdots,\theta_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1(\theta_1,x,y)}{\partial\theta_1}\sum_{a\in I_{g,n,m}} V(a,x,y,\ell_1,\cdots,\ell_m,\theta_2,\cdots,\theta_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_2(\theta_1,x,y)}{\partial\theta_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,n-1)}}\sum_{j=1}^{m} V_{g,m,n-1}(x,\ell_1,\cdots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\cdots,\ell_m,\\
&\theta_2,\cdots\theta_n)dx\\
+&\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_3(\theta_1,x,\ell_j)}{\partial\theta_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,m+1,n-2)}}\sum_{j=1}^{m} V_{g,m+1,n-2}(x,\ell_1,\cdots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\cdots,\ell_m,\\
&\theta_2,\cdots\theta_n)dx.
\end{aligned}
$$

并且我们有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\frac{1}{2}\ell_{m+1} V_{g,m+1,n-1}(\ell_1,\cdots\ell_{m+1},\theta_2,\cdots,\theta_n))}{\partial\ell_{m+1}}\\
=&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1(\ell_1,x,y)}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g-1,m+2,n-1)}}\cdot V_{g-1,m+2,n-1}(x,y,\ell_1,\cdots,\ell_m,\\
&\theta_2,\cdots,\theta_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1(\ell_1,x,y)}{\partial\ell_1}\sum_{a\in I_{g,m+1,n-1}} V(a,x,y,\ell_1,\cdots,\ell_m,\theta_2,\cdots,\theta_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_2(\ell_1,x,\ell_j)}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,m,n-1)}}\sum_{j=2}^{m} V_{g,m,n-1}(x,\ell_1,\cdots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\cdots,\ell_m,\\
&\theta_2,\cdots\theta_n)dx\\
+&\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_3(\ell_1,\theta_1,\theta_j)}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,m+1,n-2)}}\sum_{i=1}^{n} V_{g,m+1,n-2}(x,\ell_1,\cdots,\ell_m,\\
&\theta_2,\cdots,\theta_{i-1},\theta_{i+1}\cdots,\theta_n)dx,
\end{aligned}
$$

其中 $\delta(g,\ m,\ n)\ =0$ 除非 $g=1,\ m=1,\ n=0$. 当 $g=1,\ m=1,\ n=0$时，我们有 $\delta(g,\ m,\ n)\ =1$.

证明。 我们将通过归纳法阐明 [11] 中定理8.1对米尔扎哈尼递推公式的推广。首先，我们考虑曲面 $S_{g,\ m,\ 1}(\overrightarrow{L},\ \theta)$。若将锥点替换为长度为 ℓ_1 的测地边界（这意味着我们考虑曲面 $S_{g,\ m+1}(\ell_1,\ \overrightarrow{L})$），则有以下公式，该公式见 [11] 第218页的定理8.1。 [11] 中定理8.1所涉及的三个函数的定义见 [11], 第204–205页，我们在此直接采用这三个函数的表达式:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\frac{1}{2}\ell_1 V_g(\ell_1,\cdots,\ell_n))}{\partial\ell_1}\\
=&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}(\ell_1,x,y)}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g-1,n+1)}}\cdot V_{g-1,n+1}(x,y,\ell_2,\cdots,\ell_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1(\ell_1,x,y)}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,n-1)}}\sum_{a\in I_{g,n}} V(a,x,y,\ell_2,\cdots,\ell_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_2(\ell_1,\ell_j,x)}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,n-1)}}\sum_{j=2}^{n} V_{g,n-1}(x,\ell_2,\cdots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\cdots,\ell_n)dx.
\end{aligned}$$

对于一个锥点，我们通过分裂曲面得到以下公式。锥面曲面的分裂过程见图1:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\frac{1}{2}\theta V_{g,n-1,1}(\overrightarrow{L},\overrightarrow{\theta}))}{\partial\theta}\\
=&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1(\theta,x,y)}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g-1,n+1)}}\cdot V_{g-1,n+1}(x,y,\ell_2,\cdots,\ell_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1(\theta,x,y)}{\partial\theta}\sum_{a\in I_{g,n}} V(a,x,y,\ell_2,\cdots,\ell_n)dxdy\\
+&\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_2(\theta,\ell_j,x)}{\partial\theta}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,n-1)}}\sum_{j=2}^{n} V_{g,n-1}(x,\ell_2,\cdots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\cdots,\ell_n)dx,
\end{aligned}$$

wh这里的 Gap函数已在本节开头给出。并且我们有 :

$$\frac{\partial \mathrm{Gap}_1}{\partial\theta}(\theta,x,y)=\frac{\partial \mathrm{Gap}_1}{\partial\ell_1}(i\theta,x,y),$$

and

$$\frac{\partial \mathrm{Gap}_2}{\partial\theta}(\theta,x,y)=\frac{\partial \mathrm{Gap}_2}{\partial\ell_1}(i\theta,x,y).$$

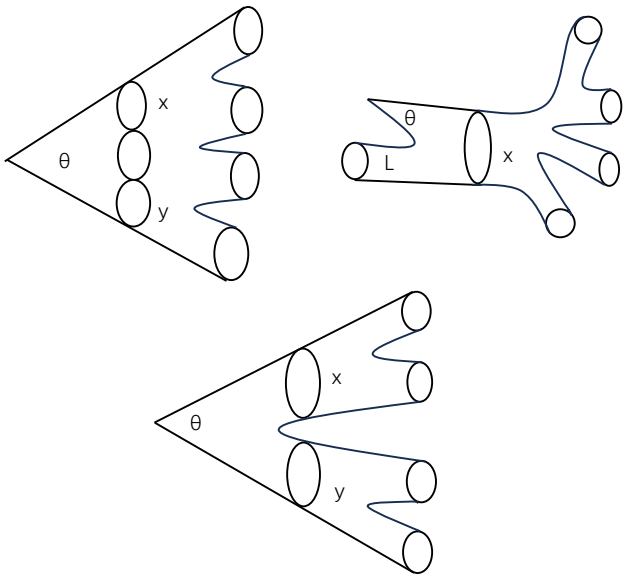


FIGURE 1. n 个锥点的分解

与测地边界情形的公式比较，我们得到只有一个锥点的曲面的公式，它是米尔扎哈尼多项式在 $\ell_n = i\theta$ 处的取值:

$$V_{g,n-1,1}(\ell_1, \cdots, \ell_{n-1}, \theta) = V_{g,n}(\ell_1, \cdots, \ell_n)|_{\ell_n = i\theta},$$

这表明我们的结论在有一个锥点的情形下成立 t.

现在我们考虑具有 n 个锥点的紧双曲曲面情形。我们将通过归纳法证明该结论。

$$Induction$$

假设该公式对于有 k 个锥点的情形 $1 \leq k \leq n-1$ 成立。令 $I_{g,\ m,\ n}$ 为有序对的集合:

$$a = ((g_1, I_1, J_1), (g_2, I_2, J_2)),$$

其中 $I_1,\ I_2 \subset \{1, \cdots, m\},\ J_1,\ J_2 \subset \{2, \cdots, n\}$ 满足:

1. 两个集合 $I_1,\ I_2$ 互不相交，且它们的并集为 $\{1, \cdots, m\}$.

2. 两个集合 J_1, J_2互不相交，且它们的并集为 $\{2,\cdots,n\}$.

3. 数 g_1, $g_2 \geq 0$和 $n_1 = |I_1|$, $n_2 = |I_2|$, $m_1 = |J_1|$, $m_2 = |J_2|$满足:

$$2 \leq 2g_1 + n_1 + m_1,$$
$$2 \leq 2g_2 + n_2 + m_2,$$

and

$$g_1 + g_2 = g.$$

给定

$$a = ((g_1, I_1), (g_2, I_2)) \in I_{g,n,m}.$$

对于 $I = \{i_1, \cdots, i_k\}$, 定义 ℓ_I如下:

$$\ell_I = (\ell_{i_1}, \cdots, \ell_{i_k}).$$

对于 $J = \{j_1, \cdots, j_k\}$, 定义 θ_J如下:

$$\theta_J = (\ell_{j_1}, \cdots, \ell_{j_k}).$$

Let

(8)
$$V(a, x, y, \ell_1, \cdots, \ell_m, \theta_2, \cdots, \theta_m) = \frac{V_{g_1,n_1+1,m_1}(x, \ell_{I_1}, \theta_{J_1}) \times V_{g_2,n_2+1,m_2}(x, \ell_{I_2}, \theta_{J_2})}{2^{\delta(g_1,m_1+1,n_1)} 2^{\delta(g_2,m_2+1,n_2)}}.$$

我们如图2所示将曲面分割。

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\frac{1}{2}\theta_1 V_{g,m,n}(\ell_1, \cdots, \ell_m, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n))}{\partial \theta_1} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1}{\partial \theta_1} \cdot \frac{1}{2^{\delta(g-1,m+2,n-1)}} \cdot V_{g-1,m+2,n-1}(x, y, \ell_1, \cdots, \ell_m, \\
&\theta_2, \cdots, \theta_n) dx dy \\
&+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1}{\partial \theta_1} \sum_{a \in I_{g,n,m}} V(a, x, y, \ell_1, \cdots, \ell_m, \theta_2, \cdots, \theta_n) dx dy \\
&+ \int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_2}{\partial \theta_1} \cdot \frac{1}{2^{\delta(g,n-1)}} \sum_{j=1}^m V_{g,n,m-1}(x, \ell_1, \cdots, \ell_{j-1}, \ell_{j+1}, \cdots, \ell_n, \theta_2, \cdots \theta_n) dx \\
&+ \int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_3}{\partial \theta_1} \cdot \frac{1}{2^{\delta(g,n+1,m-2)}} \sum_{j=1}^m V_{g,n+1,m-2}(x, \ell_1, \cdots, \ell_{j-1}, \ell_{j+1}, \cdots, \ell_n, \\
&\theta_2, \cdots \theta_n) dx.
\end{aligned} \tag{9}$$

将锥点替换为长度为 ℓ_{m+1}的测地边界，这意味着我们考虑黎曼曲面$S_{g,\ m+1,\ n-1}(l_1,\ \cdots,\ l_{m+1},\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n)$, 可得下列方程（10）。该方程见定理8.1; [11], 此情形的分裂如图3所示:

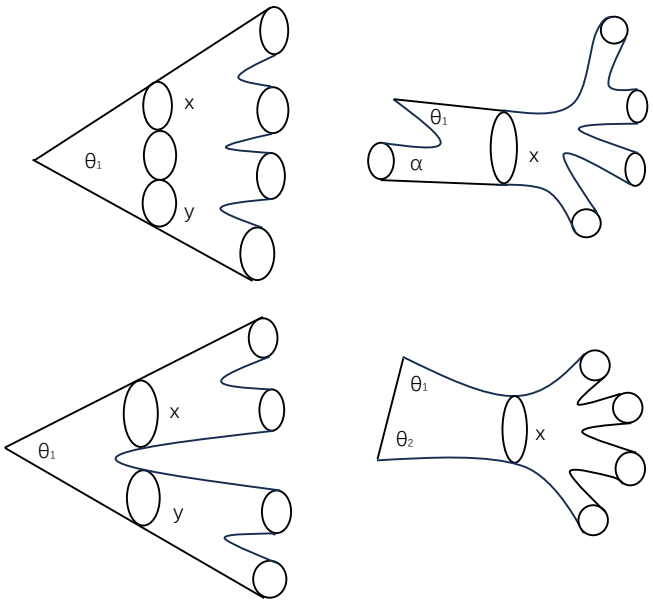


FIGURE 2. 将 n 个锥点分解，并利用 McShane恒等式得到以下方程（9）：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial(\frac{1}{2}\ell_{m+1}V_{g,m+1,n-1}(\ell_1,\cdots\ell_{m+1},\theta_2,\cdots,\theta_n))}{\partial\ell_{m+1}}\\
&=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g-1,m+2,n-1)}}\cdot V_{g-1,m+2,n-1}(x,y,\ell_1,\cdots,\ell_m,\\
&\theta_2,\cdots,\theta_n)dxdy\\
&+\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_1}{\partial\ell_1}\sum_{a\in I_{g,m+1,n-1}} V(a,x,y,\ell_1,\cdots,\ell_m,\theta_2,\cdots,\theta_n)dxdy\\
&+\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_2}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,m,n-1)}}\sum_{j=2}^{m} V_{g,m,n-1}(x,\ell_1,\cdots,\ell_{j-1},\ell_{j+1},\cdots,\ell_m,\theta_2,\cdots\theta_n)dx\\
&+\int_0^\infty \frac{\partial \mathrm{Gap}_3}{\partial\ell_1}\cdot\frac{1}{2^{\delta(g,m+1,n2)}}\sum_{i=1}^{n} V_{g,m+1,n-2}(x,\ell_1,\cdots,\ell_m,\theta_2,\cdots,\theta_{i-1},\\
&\theta_{i+1},\cdots,\theta_n)dx,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

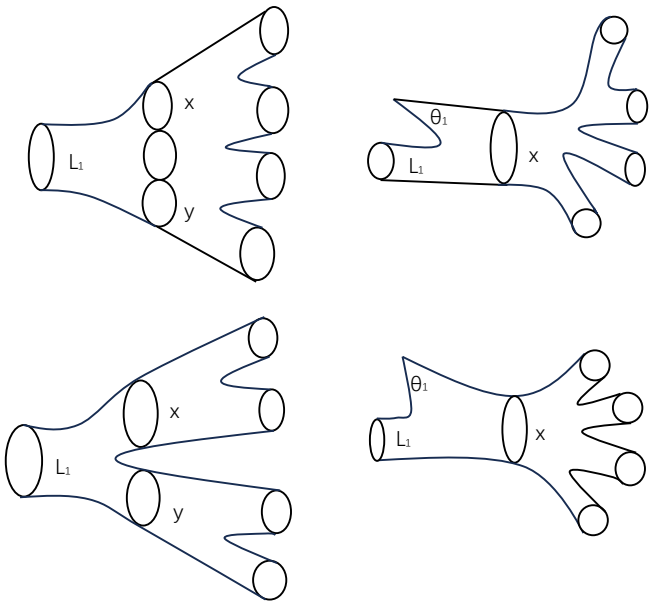


FIGURE 3. 一条测地边界和 n-1 个锥点的分解

其中:

$$\mathrm{Gap}_3(L;\alpha,\beta)) = \frac{L}{2} - \tanh^{-1}\left(\frac{\sinh\frac{L}{2}\sinh\frac{|\beta|}{2}}{\cos\frac{\phi}{2}+\cosh\frac{L}{2}\cosh\frac{|\beta|}{2}}\right).$$

并且我们有以下方程（11）：

$$\frac{\partial Gap_3}{\partial\theta}(\theta,x,y) = \frac{\partial Gap_3}{\partial\ell_1}(i\theta,x,y). \tag{11}$$

由于 δ 取决于 γ所分隔的把手数目，我们有以下方程（12）：

$$\delta(g,n-1,m+1) = \delta(g,n,m). \tag{12}$$

由归纳法可得以下等式（13）：

$$\begin{aligned} &V_{g-1,m+2,n-1}(x,y,\ell_2,\cdots,\ell_{m+1},\theta_2,\cdots,\theta_n) \\ &= V_{g-1,m+n+1}(x,y,\ell_2,\cdots,\ell_{m+1},i\theta_2,\cdots,i\theta_n). \end{aligned} \tag{13}$$

利用（11），（12），（13），可得:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial(\frac{1}{2}\ell_{m+1}V_{g,m+1,n-1})}{\partial\ell_{m+1}}(\ell_1,\cdots,\ell_{m+1}=i\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\\&\quad=\frac{\partial(\frac{1}{2}\theta_1V_{g,m,n})}{\partial\theta_1}(\ell_1,\cdots,\ell_m,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n).\end{aligned}$$

由此通过归纳法可知，具有 n 个锥点的曲面满足递推公式。□

Funding

本研究得到国家自然科学基金委员会 [资助，项目编号为 12271533, 12371076]。

Acknowledgments

我们感谢 Zhe Sun 教授向我们提出关于带锥点的紧双曲曲面模空间体积的问题，并给予诸多帮助。我们感谢 Weixu Su 教授提出的宝贵建议并给予帮助。

References

[1] Lukas Anagnostou、Scott Mullane 和 Paul Norbury。魏尔-彼得森体积、稳定性条件与壁穿越。arXiv:2310.13281，2023。[2] Lukas Anagnostou 和 Paul Norbury。带锥点双曲曲面的模空间体积。arXiv:2212.13701，2024。[3] Martin Bridgeman 和 Ser Peow Tan。双曲流形上的恒等式。载于《Teichm ¨üller 理论手册》第五卷，IRMA数学理论物理讲义第 26 卷，第 19–53 页。欧洲数学会，苏黎¨世，2016。[4] P. Buser。《紧黎曼曲面的几何与谱》。紧黎曼曲面的几何与谱。Birkh¨äuser，1992。[5] Norman Do 和 Paul Norbury。魏尔-彼得森体积与锥面。《几何奉献》，141：93–107，2009。[6] William M. Goldman。曲面基本群的辛结构。《数学进展》，54(2)：200–225，1984。[7] Alexander B. Goncharov 和 Zhe Sun。双曲曲面模空间的指数体积，2024。[8] Yi Huang 和 Zhe Sun。高阶 Teichm ¨üller 理论的 McShane恒等式与 Goncharov-Shen 势。《美国数学会回忆录》，286(1422)：v+116，2023。[9] Greg McShane。关于曲线长度的一个奇妙恒等式。博士论文，华威大学（英国），1991。[10] Greg McShane。简单测地线与 Teichmüller 空间上的一个级数常数。《数学发明》，132(3)：607–632，1998。[11] Maryam Mirzakhani。带边界黎曼曲面模空间中的简单测地线与魏尔-彼得森体积。《数学发明》，167(1)：179–222，2007。[12] Toshihiro Nakanishi 和 Marjatta N¨ä¨ät¨anen。二维模空间的面积。《美国数学会会刊》，129(11)：3241–3252，2001。[13] Ser Peow Tan、Yan Loi Wong 和 Ying Zhang。McShane恒等式在双曲锥面上的推广。《微分几何杂志》，72(1)：73–112，2006。[14] William P. Thurston。三维流形的几何与拓扑。普林斯顿讲义，1979。[15] Scott Wolpert。Fenchel-Nielsen变形。《数学年刊》(2)，115(3)：501–528，1982。[16] Don Zagier。二重对数函数。载于《数论、物理与几何前沿》第二卷，第 3–65 页。施普林格，柏林，2007。[17] Ying Zhang。《双曲锥面、广义Markoff映射、Schottky群与McShane恒等式》。博士论文，新加坡国立大学数学系，新加坡，2004。

School of Mathematics, Sun Yat-Sen University, 510275, Guangzhou, PR China.电子邮箱地址：jianghaoyang@zsdx.wecom.work

School of Mathematics, Sun Yat-Sen University, 510275, Guangzhou, PR China.电子邮箱地址：mcsllx@mail.sysu.edu.cn