arXiv:2603.11786v1 [math.QA] 12 Mar 2026

量子不可约旗流形的爱因斯坦条件

MARCO MATASSA

摘要。我们证明，任意量子不可约旗流形都满足爱因斯坦条件的一种类比，即里奇张量与度量成比例；这一结论至少在量子化参数经典值附近的一个小开区间内成立。为此，我们利用了与这些代数相关的各种典范构造，例如微分演算和双模联络；这些构造此前已由多位作者提出。

1. 引言

在微分几何中，如果一个黎曼流形的里奇张量与度量成比例，就称其满足爱因斯坦条件。这类流形是纯引力且具有宇宙学常数时爱因斯坦场方程解的黎曼对应物。关于这一主题的数学结果，请参阅 [Bes07]。

也可以在非交换几何的背景下研究爱因斯坦条件的一种类比。在这一背景下，空间由非交换代数取代，这些代数可视为由量子空间上的“函数”构成。更具体地说，我们将采用量子黎曼几何的框架，具体内容见 [BeMa20] （关于谱三元组的另一种方法， [Con94], , 例如参见 [MeRe24]）。我们的目标是为一类特定的量子空间确立爱因斯坦条件的量子类比；我们将在下文介绍这类空间，即量子不可约旗流形。

首先，对于任意复半单李代数 $\mathfrak{g}$ ，我们都可以关联相应的量子包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$，例如 [KlSc97]中对此已有描述。这里的 q 是一个实数，我们称之为量子化参数。当 $q = 1$ 取该值时，我们便可（在适当意义下）恢复底层的经典对象，即包络代数 $U(\mathfrak{g})$。对偶地，我们可以引入量子化坐标环 $\mathcal{O}_q(G)$，它是一种非交换代数，用于量子化李群 G上的函数。在这一框架下，量子齐性空间可以通过关于 $U_q(\mathfrak{g})$的各种子代数（或更一般地说，余理想）的不变性来进行自然定义。其中一个重要类别是量子不可约旗流形$\mathcal{O}_q(U/K_S)$，它们具有一些特殊性质，下面将对此进行描述。

给定一个非交换代数 A，我们可以引入其上的微分演算，即A一个具有各种性质的微分分次代数$\Omega^\bullet$ 。一般而言，对于任意代数，这并非一个规范定义。然而，对于任意量子不可约旗流形，都存在一个规范选择；Heckenberger 和 Kolb 已在论文 [HeKo04、HeKo06] 中对其进行了描述。以下记作*Heckenberger–Kolb* 微分演算的这些微分演算$\Omega_q^\bullet$ 相对于自然的量子群作用具有协变性，并且具有经典分次维数。因此，带有其微分演算的量子不可约旗流形类，为在非交换几何背景下发展相关思想提供了天然的试验场。更具体地说，正如 [ÓBu17], 中所引入并在 [Mat19]中所示，它们属于非交换凯勒几何的框架。

一旦我们固定了代数$\Omega^\bullet$上的一个微分演算A，量子度量是一个元素$g \in \Omega^1 \otimes_A \Omega^1$，满足适当的可逆性条件。在量子不可约旗流形的情形下，在一些自然的附加条件（例如协变性、对称性和实性）下，BGKÓ [已对这类量子度量进行了分类24] 。这项研究的结果是，存在一个唯一的（相差一个标量因子）量子度量，而这正是研究该背景下爱因斯坦条件的规范选择。

接下来，我们可以针对固定选择的微分演算，在适当的A-双模上引入联络$\Omega^\bullet$。在一些理想情形下，这些联络恰好是双模联络，具有更好的性质（在交换情形下，任意联络都会自动属于此类）。例如，我们可以对这类联络取张量积，从而得到新的双模联络；这一性质可用于表述与量子度量的相容性。 [BGKÓ24] 的主要结果是，对于任意量子不可约旗流形，都存在唯一一个 联络 ∇ ，它与固定的量子度量相容且无挠。这是经典情形中 *Levi-Civita* 联络的对应物，而后者在黎曼几何中至关重要。

至此，我们已经介绍了在非交换情形下表述爱因斯坦条件所需的大部分要素。最后一个要素是里奇张量，它在 [BeMa20第 8 节中定义1] 为一个特定元素 $\mathrm{Ricci}_\ell \in \Omega^1 \otimes_A \Omega^1$，其定义依赖于给定的联络 ∇。这里 ℓ 表示为该微分演算选取的提升映射；在量子情形下，要使这一定义有意义，还需要这一额外要素。

具备这些要素后，我们将称代数 A 配备量子度量 g满足爱因斯坦条件，若 $\mathrm{Ricci}_\ell = \lambda g$ 对某个标量 λ 成立（当然，这是相对于固定的数据——微分演算 $\Omega^\bullet$、联络 ∇以及所选的提升映射 ℓ而言）。简要介绍了我们的研究框架后，现在可以陈述本文的主要结果。

定理。 设 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$是一个量子不可约旗流形，其量子度量 g如上所述。则存在一个提升映射 ℓ，使得 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$ 在经典值 $q = 1$附近的一个开区间内满足爱因斯坦条件。

这拓展了此前在这一框架下得到的结果，例如文献2-球面上的结果 [BeMa20，第 8.2 节。3] 以及文献 [Mat22]中对所有量子射影空间所得结果的推广。然而需要指出的是，所引结果对 q 的任意可容许取值均成立，而不仅限于经典值 $q = 1$附近。因此，是否所有量子不可约旗流形也都具有这一性质，仍是一个开放问题（最后一节将讨论这一问题及更多相关问题）。

本文内容安排如下。在第2节中，我们将更详细地介绍上述设定，并回顾所需的一些预备结果。在第3节中，我们回顾 [BGKÓ24] 关于量子不可约旗流形上的量子度量与联络的结果，并证明关于这类联络曲率的一项结果。在第4节中，我们为 Heckenberger–Kolb 微积分构造满足各种性质的提升映射。在第5节中，我们利用这些结果推导里奇张量的各种性质，并最终证明关于爱因斯坦条件的结果。最后，在第6节中，我们将进一步讨论这一结果以及相关的开放问题。

致谢 。 我们要感谢 Réamonn Ó Buachalla 提出的意见 s.

2. 预备知识

在这 本节回顾与具有对称性的量子空间相关的各种概念 .

2.1. 量子不可约旗流形。 （广义）旗流形 是如下形式的齐性空间 G/P_S，其中 G 是复半单李群， P_S 是与单根子集 $S \subset \Pi$ 对应的抛物子群 。作为实流形，它也可表述为 $G/P_S \cong U/K_S$，其中 U 是 G 的紧实形式，且 $K_S = P_S \cap U$。此外，我们有 $K_S = L_S \cap U$，其中 L_S 是与 S 对应的*Levi*子群 ，也就是说， K_S 是它的紧实形式。若 $S = \Pi \backslash \{\alpha_s\}$ 且单根 α_s 在 $\mathfrak{g}$ 的最高根中的系数为 1，则称该旗流形为不可约 。

设 $\mathfrak{g}$ 是秩为 r 的复半单李代数。量子包络代数 $U_q(\mathfrak{g})$ 是一个 Hopf 代数，其生成元为 $\{K_i, E_i, F_i\}_{i=1}^r$ ，关系如 [KlSc97] 中所述（未作解释的概念请参阅该文献）。这里， q 是量子化参数，我们取其为实数 $q > 0$ （不过请注意，处理经典值 $q = 1$ 时需要格外谨慎）。考虑与紧实形式相对应的 $*$-结构时，我们将其记作 $U_q(\mathfrak{u})$。对偶地，我们有量子化坐标环 $\mathcal{O}_q(G)$，它是根据 $U_q(\mathfrak{g})$ 的受限对偶定义的 Hopf 代数（更确切地说，它由 $U_q(\mathfrak{g})$ 的有限维1型表示的矩阵系数组成）。同上，考虑相应的 $*$-结构时，我们将其记作 $\mathcal{O}_q(U)$。

Hopf 代数 $\mathcal{O}_q(G)$ 自然地是一个 $U_q(\mathfrak{g})$-双模，其作用定义如下:

$$(Y \triangleright a \triangleleft Z)(X) := a(ZXY),$$

其中 $a \in \mathcal{O}_q(G)$ 和 X、Y、$Z \in U_q(\mathfrak{g})$。右作用 $\triangleleft$ 可借助反 antipode 转化为左作用 $\blacktriangleright$，即令 $(Z \blacktriangleright a)(X) = a(S(Z)X)$。

注 2.1。 我们提及这一（看似不必要的）细节，是因为左作用 $\blacktriangleright$出现在许多由 [HeKo06] 构造的结构中（尽管其中并未使用这一记号）。还值得指出的是，采用这一选择后，我们得到模代数关系

$$X \blacktriangleright (ab) = (X_{(2)} \blacktriangleright a)(X_{(1)} \blacktriangleright b),$$

这对应于对 $U_q(\mathfrak{g})$ 使用反余乘法。

接下来，对于单根的任意子集 S ，我们定义量子*Levi*因子 如下:

$$U_q(\mathfrak{l}_S) := \langle K_i, E_j, F_j : i = 1, \dots, r,\ j \in S \rangle \subseteq U_q(\mathfrak{g}).$$

对于任意 S 的选择，它都是 $U_q(\mathfrak{g})$ 的 Hopf子代数。当考虑来自 $U_q(\mathfrak{u})$ 的相应 $*$-结构时，我们将其记为 $U_q(\mathfrak{k}_S)$。最后，我们定义

$$\mathcal{O}_q(G/L_S) := \{a \in \mathcal{O}_q(G) : X \triangleright a = \varepsilon(X)a,\ \forall X \in U_q(\mathfrak{l}_S)\}.$$

考虑到 $*$-结构，我们将其记作 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$，并称之为量子旗流形 （关于这一记号的选择，见下一条注释）。

注释 2.2。 空间 G/L_S 可视为旗流形 G/P_S 的复化 ，因为 $(G/L_S) \cap U = U/K_S$。通过 $\mathcal{O}(G/L_S)$，可以将 G/P_S 中的点恢复为关于源自紧实形式的对合的实点 。

转到量子情形，这意味着 $*$-结构对于将$\mathcal{O}_q(G/L_S)$解释为量子旗流形 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$至关重要。因此，任何涉及该代数的构造都必须与 $*$-结构相容，才能将其解释为量子旗流形的构造。为此，我们将坚持使用上文为相关对象的紧实形式引入的记号。

在下文中，我们还将采用简写记号

$$\mathcal{B} := \mathcal{O}_q(U/K_S).$$

在结束本节之前，我们指出，迄今为止的所有定义都不要求量子旗流形 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$ 满足不可约性条件。然而，要在该代数上定义典范微分演算，这一条件将是必要的，我们将在下文讨论。

2.2. 微分演算。本节中未作说明的记号，请参见 [ÓBu16]。代数 A 上的微分演算 $(\Omega^\bullet, \wedge, \mathrm{d})$ 是一个微分分次代数 $\Omega^\bullet$，满足 $\Omega^0 = A$，且 $\Omega^\bullet$ 由 A 和 $\mathrm{d}A$ 作为代数生成。如果 A 是一个 $*$- 代数，那么若 $\Omega^\bullet$ 上存在适当的共轭线性对合，我们就有一个微分 $*$- 演算。

代数 $*$ 上微分 $*$-演算$\Omega^\bullet$ 的复结构是一个 $\mathbb{N}_0^2$-代数分次 $\Omega^{(\bullet,\bullet)}$，满足以下条件

$$\Omega^k = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{(p,q)}, \quad \left(\Omega^{(p,q)}\right)^* = \Omega^{(q,p)}, \quad \mathrm{d}\Omega^{(p,q)} \subseteq \Omega^{(p+1,q)} \oplus \Omega^{(p,q+1)}.$$

我们也可以考虑量子对称性，这对应于 Hopf 代数 H 对 A 施加余作用的情形（例如从左侧作用）。如果左余作用扩展为与微分相容的余模代数映射 $\Omega^\bullet \to H \otimes \Omega^\bullet$，则称 $\Omega^\bullet$ 是左 H协变的。

需要指出的是，对于一般的非交换代数 A，并不存在上述微分演算的规范选择。然而，对于量子不可约旗流形，我们有以下由 Heckenberger 和 Kolb 得出的重要结果。

定理 2.3。 在 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$ 上存在唯一的微分 $*$-演算 $(\Omega_q^\bullet, \wedge, \mathrm{d})$，它是左 $\mathcal{O}_q(U)$-协变的，且具有与经典情形相同的分次维数。

这项结果在两篇论文中有详细阐述，分别是 [HeKo04、HeKo06]，，但其中未涉及 $*$-结构的存在性，该结构由 [Mat19] 引入。

我们将$\Omega_q^\bullet$ 称为 *Heckenberger–Kolb* 微分演算，其作用于 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$。它具有自然的复结构 $\Omega_q^{(\bullet,\bullet)}$，如 [BGKÓ24 的命题 6 所述。4]，这对应于经典情形下这些空间是复流形这一事实。在下文中，我们还将记

$$\Omega_q^+ := \Omega_q^{(1,0)}, \qquad \Omega_q^- := \Omega_q^{(0,1)}.$$

2.3. **Takeuchi 等价**。 现在我们简要回顾 Takeuchi 提出的一个著名范畴等价 [Tak79]，，我们称之为 *Takeuchi* 等价。关于这一结果及其对量子齐性空间研究的意义，更详细的介绍请参见 [ÓBu16，第 2] 节以及 [BGKÓ24，第2节。2]。虽然这一等价对于推导所引论文中的许多结果至关重要，但在本文中只起次要作用（具体而言，仅用于证明 命题 4.4），因此快速阅读时可以跳过本节。

在陈述结果之前，我们需要先介绍一些记号。设 A和 H 是 Hopf 代数，且存在满射 Hopf代数同态 $\pi : A \to H$。那么，我们用 $B = A^{\mathrm{co}(H)}$表示 A 中关于右侧 H-余作用 $(\mathrm{id} \otimes \pi) \circ \Delta$的 H-余不变元。在此情形下，若 A 作为右 B-模是忠实平坦的，则称其为一个量子齐性空间（已知代数 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$满足这一条件，因此我们不再赘述）。

采用上述记号，我们定义如下两个范畴。第一个是相对Hopf模的范畴${}^A_B\mathbf{Mod}_B$，其中的对象是左 A-余模和 B-双模，并满足某种相容性条件。接下来，我们有范畴 ${}^A\mathbf{Mod}_B$，其对象是左 H-余模和右 B-模，并满足另一种相容性条件。存在一个函子

$$\Phi : {}^A_B\mathbf{Mod}_B \to {}^A\mathbf{Mod}_B$$

它在对象上的定义为 $\Phi(M) = M/B^+M$ （其中 B^+ 是余单位的核），在态射上则给出商空间之间相应的映射。另有一个方向相反的函子 Ψ，其具体细节在下文中用不到。

定理 2.4 ([Tak79]). 范畴 ${}^A_B\mathbf{Mod}_B$ 与 ${}^A\mathbf{Mod}_B$ 之间存在幺半范畴等价，由函子 Φ 和 Ψ 给出（并配有适当的自然变换）。

注 2.5. 在经典情形下，这一结果可表述为：齐性空间 G/H 上的 G-等变向量丛完全由单位陪集处各向同性子群 H 的表示确定。

这一结果还有一个变体，适用于 ${}^A_B\mathbf{Mod}_B$的一个全子范畴。该子范畴记为 ${}^A_B\mathbf{mod}_0$，由对象 M 构成；这些对象作为左 B-模是有限生成的，并满足 $MB^+ = B^+M$。类似地，将有限维左 ^{H}**模** 余模构成的范畴记为H-余模。于是有如下结果（见 [BGKÓ24，定理 2.6]）。

推论 2。 **6.** ***Takeuchi*** 等价限制为 ${}^A_B$**模**$_0$ 与 ^{H}**模** 之间的一个等价 .

在本文的设定中，A 将是量子化坐标环 $\mathcal{O}_q(U)$，B 量子不可约旗流形 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$，以及 H 通过对偶化单射而得到的 Hopf 代数 ι_S： $U_q(\mathfrak{k}_S) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{u})$，如 [BGKÓ24，第6节。2]。

与其处理 A 与 H 如上所述的余作用，我们将它们对偶化为各自受限对偶的作用。这样做会把左 A-余模转化为（有理）右 A°-模，例如参见 [DNR00，定理 2.2。5]。在我们的设定中，$A = \mathcal{O}_q(U)$ 的受限对偶是 $A^\circ = U_q(\mathfrak{u})$，而 H （如上所述）的对偶是 $H^\circ = U_q(\mathfrak{k}_S)$。

总结以上讨论，我们将考虑以下等价关系

$$\mathcal{O}_q(U/K_S)\mathbf{mod}_{U_q(\mathfrak{u})} \simeq \mathbf{mod}_{U_q(\mathfrak{k}_S)}. \tag{2.1}$$

这里，为了简化记号，我们省略了第一个范畴中的下标零。最后，我们指出，可以利用反 antipode 将右作用转化为左作用；对于 $\mathcal{O}_q(U)$，这会将 $U_q(\mathfrak{u})$ 的右作用 $\triangleright$ $\blacktriangleright$转化为前面提到的...

...。

注 2.7. 如上所述，以作用替代余作用，这一做法也在论文 [DKÓ+21] 和 [BGKÓ24], 中多次出现，不过其中并未清楚阐述具体细节。

3. Quantum metrics and connections

本节回顾 [BGKÓ24] 中关于量子不可约旗流形上的量子度量与 Levi-Civita联络的主要结果。我们还将证明一个关于此类联络曲率的结果，该结果对下文至关重要。

3.1. **量子度量。** 我们首先回顾 [BeMa20定义 1 中的量子度量概念，15], 其中固定选取一种微分演算。

定义 3.1. 设 $(\Omega^\bullet, \wedge, \mathrm{d})$ 是代数 A 上的微分演算。那么，量子度量 是一个元素 $g \in \Omega^1 \otimes_A \Omega^1$，它在以下意义下可逆：存在一个$A$-双模映射 $(\cdot,\cdot) : \Omega^1 \otimes_A \Omega^1 \to A$，称为逆度量，使得

$$((\omega, \cdot) \otimes \mathrm{id})(g) = \omega = (\mathrm{id} \otimes (\cdot, \omega))(g)$$

对所有 $\omega \in \Omega^1$ 均成立。若 g 满足 $\wedge(g) = 0$，则称其为对称的。

度量还有一种称为实的概念，相关内容请参阅所引书籍。在此情形下，我们有以下结果，该结果证明于 [BGKÓ24，定理 6 中。12]。

定理 3.2。 设$\Omega_q^\bullet$ 为量子不可约旗流形上的 *Heckenberger–Kolb* 微分演算。则$\Omega_q^1 = \Omega_q^+ \oplus \Omega_q^-$ 上的协变度量构成一个二参数族。存在唯一一个（相差一个标量）协变、对称且实的量子度量。

注记 3.3。 在 [Mat21] 中，存在元素 $g \in \Omega_q^1 \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^1$ 的显式构造，它们是协变、对称且实的。然而，逆度量 $(\cdot,\cdot)$ 的存在性仅在量子射影空间的情形下得到证明。由 定理 3.2 可知，对于任意量子不可约旗流形 $\mathcal{B}$，它们必定是量子度量。

由上述定理可知，所有量子度量都由以下元素张成

$$g_{+-} \in \Omega_q^+ \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^-, \qquad g_{-+} \in \Omega_q^- \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^+,$$

其中两个元素在相差一个标量的意义下均唯一。下文中，我们将以这样的方式选取它们，使得唯一的（相差一个标量的）对称 量子度量具有如下形式

$$g := g_{+-} + g_{-+}.$$

3.2. **联络**。 设 $(\Omega^\bullet, \wedge, \mathrm{d})$ 是代数 A 上的微分演算。那么， A-双模 E 上的左联络 是一个线性映射 $\nabla : E \to \Omega^1 \otimes_A E$，满足莱布尼茨法则$\nabla(ae) = a\nabla(e) + \mathrm{d}a \otimes_A e$，对所有 $e \in E$ 和 $a \in A$ 均成立。若存在一个 A-双模映射 $\sigma : E \otimes_A \Omega^1 \to \Omega^1 \otimes_A E$，使得

$$\nabla(ea) = \nabla(e)a + \sigma(e \otimes_A \mathrm{d}a)$$

对所有 $e \in E$ 和 $a \in A$。在这种情况下，我们可以定义联络 ∇ 与量子度量 g之间的相容性概念，详见 [BeMa20，第 8 节。1]。

现在考虑配备 Heckenberger–Kolb 微分演算 $\mathcal{B}$ 的量子不可约旗流形 $\Omega_q^\bullet$。 [BGKÓ24]的主要结果之一如下。

定理 3.4 ([BGKÓ24，定理 6.14])。 设 $\Omega_q^\bullet$ 是 $\mathcal{B}$上的 *Heckenberger–Kolb* 微分演算。设 g 是定理 *3.2* 中唯一（相差一个标量）的量子度量 g 。则存在唯一的协变双模联络 ∇在 Ω_q^1 上，该联络无挠且与 g相容。

这样的联络称为量子 *Levi-Civita* 联络 （相对于 g）。接下来，我们回顾联络曲率的标准概念。

定义 3.5。 设 $(\Omega^\bullet, \wedge, \mathrm{d})$ 是 A 上的微分演算。设 ∇ 是左 A-模 E 上的左联络。那么它的曲率 是线性映射 $R_\nabla : E \to \Omega^2 \otimes_A E$，定义为

$$R_\nabla := (\mathrm{d} \otimes \mathrm{id} - (\wedge \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \nabla) \circ \nabla.$$

若 $\Omega^\bullet$ 带有复结构，通常我们只能说 R_∇ 的第一项属于 Ω^2。然而，在我们的设定中，我们可以给出更具体的描述。

以下结果是 [BeMa20，定理 5，3]以及从 ∇ 构造联络 [BGKÓ24] 的直接推论。它是凯勒流形上 Levi-Civita 联络经典性质的量子类比，例见 [Mor07，第 12]章。

命题 3.6。 设 ∇为 定理 *3.4*中的联络。那么它的曲率满足

$$R_\nabla(\Omega_q^\pm) \subseteq \Omega_q^{(1,1)} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^\pm.$$

证明。 在 [BGKÓ24，定理 6.14] 中，联络 ∇ 被构造为 $\nabla = \nabla_{\mathrm{Ch}} + \nabla_{\mathrm{Ch},\ \mathrm{op}}$。这里， ∇_{Ch} 是 Ω_q^+上的陈联络（定义参见所引文献），而 $\nabla_{\mathrm{Ch},\ \mathrm{op}}$是相对于相反复结构的 Ω_q^- 上的陈联络。

根据 [BeMa20，定理 5。3], 陈联络满足以下重要性质：其曲率的分量 $\Omega_q^{(2,0)}$和 $\Omega_q^{(0,2)}$均为零。（注意，这一结果要求微分演算具有可因子分解性，而 Ω 确实具有这一性质 $\Omega_q^\bullet$。）因此我们得到

$$R_{\nabla_{\mathrm{Ch}}}(\Omega_q^+) \subseteq \Omega_q^{(1,1)} \otimes \Omega_q^+.$$

对于联络 $\nabla_{\mathrm{Ch},\ \mathrm{op}}$，论证类似；该联络通过考虑具有相反复结构的微分演算来定义。具体而言，这意味着分次分量 $\Omega_q^{(a,b)}$与 $\Omega_q^{(b,a)}$互换，而 $\Omega_q^{(1,1)}$保持不变。□

由于这一结果，接下来我们只需在子空间 $\Omega_q^{(1,1)}$上定义一个提升映射 $\Omega_q^2 \to \Omega_q^1 \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^1$。下一节将回顾这一概念。

4. 提升映射的构造

正如引言中所述，在量子情形下，定义里奇张量需要额外给定一个提升映射。我们将为 Heckenberger–Kolb 微分演算构造这类映射，并最终用它们证明爱因斯坦条件。

4.1. 提升映射。我们现在回顾微分演算的提升映射这一概念，稍后将在量子情形下用它来定义里奇张量。

定义 4.1. 设 $(\Omega^\bullet, \wedge, \mathrm{d})$ 是代数 A 上的微分演算。则提升映射 是一个 A-双模映射 $\ell : \Omega^2 \to \Omega^1 \otimes_A \Omega^1$，使得 $\wedge \circ \ell = \mathrm{id}$。

我们有如下基本观察。

引理 4.2. 设 ℓ_1 与 ℓ_2 是提升映射。则 $\ell = c_1\ell_1 + c_2\ell_2$ 是提升映射当且仅当 $c_1 + c_2 = 1$，换言之，当 ℓ 是这两个映射的凸组合时。

证明. 显然 $\ell = c_1\ell_1 + c_2\ell_2$ 是一个 A-双模映射。我们计算

$$\wedge \circ \ell = \wedge \circ (c_1\ell_1 + c_2\ell_2) = (c_1 + c_2)\mathrm{id}.$$

因此 $\wedge \circ \ell = \mathrm{id}$ 当且仅当 $c_1 + c_2 = 1$。 □

下一小节的目标是证明：在量子不可约旗流形上，Heckenberger–Kolb 微分演算 $\Omega_q^\bullet$ 存在某些（等变）提升映射。

4.2. Heckenberger–Kolb 微分演算。 下文将记

$$V^{(a,b)} := \Phi(\Omega_q^{(a,b)}),$$

其中 Φ 是Takeuchi函子。更具体地说，我们有 $V^{(a,b)} = \Omega_q^{(a,b)}/\mathcal{B}^+\Omega_q^{(a,b)}$。这些（有限维）向量空间都是量子Levi因子 $U_q(\mathfrak{k}_S)$的模。

我们需要以下关于分量 $V^{(1,1)}$的具体描述。

引理 4.3 ([HeKo06])。 我们有， $V^{(1,1)}$ 同构于以下空间的商空间

$$(V^{(1,0)} \otimes V^{(0,1)}) \oplus (V^{(0,1)} \otimes V^{(1,0)})$$

模去由以下形式的关系构成的子空间

$$\{v \otimes w + \hat{S}(v \otimes w) : v \in V^{(1,0)},\ w \in V^{(0,1)}\}.$$

这里 $\hat{}S$： $V_{(1,0)} \otimes V_{(0,1)} \to V_{(0,1)} \otimes V_{(1,0)}$ 是一个特定的可逆 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-等变映射，在经典极限 $q = 1$下化为翻转映射。

ˆ证明。第一条陈述的内容见 [HeKo06，命题 3.11(ii)]。 S 是可逆的 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-等变映射，这一点由 [HeKo06，引理 2.2], 得出，其中证明了 S 是 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-模上编织 $R_{V^{(1,0)},V^{(0,1)}}$ 的倍数。 S 化为翻转映射这一点，则由编织 R的相应结果，以及二者相差一个适当的 q次幂这一事实得出。□

现在我们可以证明以下关于提升映射存在性的结果。

命题 4.4。 设$\Omega_q^\bullet$ 是 $\mathcal{B}$上的 *Heckenberger–Kolb* 微分演算。那么存在两个$U_q(\mathfrak{u})$-等变提升映射 ℓ^q_{+-} 和 ℓ^q_{-+} ，使得

$$\ell^q_{+-} : \Omega_q^{(1,1)} \to \Omega_q^+ \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^- \qquad and \qquad \ell^q_{-+} : \Omega_q^{(1,1)} \to \Omega_q^- \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^+.$$

在经典极限 $q = 1$ 下，它们化为映射

$$x \wedge y \mapsto x \otimes y, \quad and \quad x \wedge y \mapsto -y \otimes x.$$

证明。 根据 Takeuchi 等价，如（2.1）所示，只需证明相应 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-模的类似结果。也就是说，我们要寻找 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-等变映射

$$s_{+-} : V^{(1,1)} \to V^{(1,0)} \otimes V^{(0,1)} \quad \text{and} \quad s_{-+} : V^{(1,1)} \to V^{(0,1)} \otimes V^{(1,0)},$$

使它们与商映射 $\wedge$ 复合后得到恒等映射。

写作 $V := (V^{(1,0)} \otimes V_{(0,1)}) \oplus (V_{(0,1)} \otimes V_{(1,0)})$，并注意到 $V_{(1,1)}$ 由引理 4.3是 V 的商空间。考虑由下式定义的映射 $\tilde{s}_{+-} \colon V \to V^{(1,0)} \otimes V_{(0,1)}$

$$\tilde{s}_{+-}(v \otimes w) = v \otimes w, \quad \tilde{s}_{+-}(w \otimes v) = -\hat{S}^{-1}(w \otimes v).$$

这里 $v \in V^{(1,0)}$ 和 $w \in V_{(0,1)}$，而 ˆS^{-1} 是由 引理 4.3给出的映射的逆映射。我们有

$$\tilde{s}_{+-}\Big(v \otimes w + \hat{S}(v \otimes w)\Big) = v \otimes w - \hat{S}^{-1} \circ \hat{S}(v \otimes w) = 0.$$

于是，由引理 4.3， $\tilde{s}_{+-}$ 下降到商空间 $V^{(1,1)}$ ，从而得到一个良定义映射$s_{+-} \colon V_{(1,1)} \to V_{(1,0)} \otimes V_{(0,1)}$。由于 ˆ$S$ 是 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-等变的，该映射也是 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-等变的。根据构造，显然 $\wedge \circ s_{+-} = \mathrm{id}$。

类似地， 我们得到一个 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-等变映射 $s_{-+} \colon V^{(1,1)} \to V_{(0,1)} \otimes V_{(1,0)}$ ，它由以下对象出发

$$\tilde{s}_{-+}(v \otimes w) = -\hat{S}(v \otimes w), \quad \tilde{s}_{-+}(w \otimes v) = w \otimes v,$$

并应用上述类似的推理。

ˆ最后，让我们讨论经典极限 $q = 1$下的情形。我们知道 S 根据引理 4.3，退化为翻转映射。因此， s_{+-} 和 s_{-+} 分别退化为映射 $v \wedge w \mapsto v \otimes w$和 $v \wedge w \mapsto -w \otimes v$。这一观察结合 Takeuchi 等价，得出了提升映射 ℓ^q_{+-} 和 ℓ^q_{-+}的经典极限的结论。□

注4.5。这些并不一定是 Ω 的所有 $U_q(\mathfrak{u})$-等变提升映射。例如，可以通过为相关张量积的各个简单分量赋予不同的符号，来修改上述构造。

之所以关注 命题 4.4 中定义的提升映射，是因为它们具有经典极限这一性质，而这一性质最终将用于证明 定理 5.11。

5. 里奇张量与爱因斯坦条件

本节介绍本文的主要结果，探讨量子不可约旗流形的爱因斯坦条件。回顾这一背景下里奇张量的定义后，我们证明，只要使用恰当的提升映射，它就具有一种特殊形式。完成这一步后，我们证明了一个初步结果，表明爱因斯坦条件对于一般的 q应当成立。最后，我们利用经典极限推导出，在经典值 $q = 1$附近的一个开区间内，爱因斯坦条件成立。

5.1. **定义**。我们首先回顾量子黎曼几何中的里奇张量定义，遵循 [BeMa20，第 8 节。1]。

定义 5.1. 设 $(\Omega^\bullet, \wedge, \mathrm{d})$ 是代数 A 上的微分演算。设 g 是一个量子度量，其逆度量为 $(\cdot,\ \cdot)$。设 ∇ 是 Ω^1 上的左联络，且 $\ell : \Omega^2 \to \Omega^1 \otimes_A \Omega^1$ 是一个提升映射。那么里奇张量（对于上述映射 ℓ）定义为

$$\mathrm{Ricci}_\ell := ((\cdot,\cdot)\otimes \mathrm{id}\otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}\otimes \ell \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}\otimes R_\nabla)(g) \in \Omega^1 \otimes_A \Omega^1.$$

注5.2。这里的下标旨在强调该元素取决于提升映射 ℓ 的选择。此记号也会使后面的一些论证更加清晰。

假设 A 是经典空间上的函数，且 Ω^1 是通常的 1-形式空间。那么，只要我们使用提升映射，Ricci_ℓ 就化为普通里奇张量

$$\ell(x \wedge y) = \frac{1}{2}(x \otimes y - y \otimes x), \quad x, y \in \Omega^1.$$

关于经典情形下这一结论的详细信息，请参见 [BeMa20，例 8。10]。

因此，我们可以自然地定义爱因斯坦条件的量子类比。

定义 5.3。采用上述记号，我们称代数 A 配备固定量子度量 g （以及前文指定的附加数据）满足爱因斯坦条件，若有

$$\mathrm{Ricci}_\ell = \lambda g.$$

这里 λ 是一个标量，我们称之为爱因斯坦常数。

请注意，这一条件至关重要地取决于提升映射 ℓ的选择，这与经典情形不同（经典情形中总是相对于上述反对称化映射而言）。

接下来，我们的目标是检验量子不可约旗流形的情形是否满足这一条件（采用前文讨论的量子度量）。

5.2. **里奇张量的结果**。设 $\mathcal{B} = \mathcal{O}_q(U/K_S)$ 为一个量子不可约旗流形，其配备相应的 Heckenberger–Kolb 微分演算 $\Omega^\bullet_q$。我们考虑 定理 3.2中的唯一（差一个标量）量子度量，以及 定理 3.4中对应的唯一联络。我们将考察 里奇$_\ell$ 在不同提升映射选择下的性质。

需要指出的是，在下文所有论证中，提升映射 ℓ 只需定义在子空间 $\Omega_q^{(1,1)} \subset \Omega_q^2$上即可。这是 命题 3.6 关于联络 ∇ 的曲率的推论（详情亦见下一个证明）。

引理 5.4。设 里奇$_\ell$ 为量子旗流形 $\mathcal{B}$ 关于提升映射 ℓ 定义的里奇张量。它具有以下性质：

(1) 若 $\ell : \Omega_q^{(1,1)} \to \Omega_q^+ \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^-$ 则$\mathrm{Ricci}_\ell \in \Omega_q^- \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^+$,
(2) 若 $\ell : \Omega_q^{(1,1)} \to \Omega_q^- \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^+$则$\mathrm{Ricci}_\ell \in \Omega_q^+ \otimes_{\mathcal{B}} \Omega_q^-$。

证明。(1) 利用命题 3.6 可得

$$(\mathrm{id}\otimes R_\nabla)(g_{+-})\in \Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^{(1,1)}\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-,$$
$$(\mathrm{id}\otimes R_\nabla)(g_{-+})\in \Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^{(1,1)}\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+.$$

假设 $\ell:\ \Omega_q^{(1,1)}\to\Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-$。则应用此映射可得

$$(\mathrm{id}\otimes\ell\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes R_\nabla)(g_{+-})\in \Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-,$$
$$(\mathrm{id}\otimes\ell\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes R_\nabla)(g_{-+})\in \Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+.$$

由 [BGKÓ24，定理 36] 可知，逆度量 $(\cdot,\ \cdot)$ 在 $\Omega_q^+\otimes\Omega_q^+$上为零（同样地，它在 $\Omega_q^-\otimes\Omega_q^-$上也为零）。利用这一点以及 $g=g_{+-}+g_{-+}$ 可得

$$\mathrm{Ricci}_\ell=((\cdot,\cdot)\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes\ell\otimes\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\otimes R_\nabla)(g_{-+})\in\Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+.$$

(2) 对于 $\ell:\ \Omega_q^{(1,1)}\to\Omega_q^-\otimes\Omega_q^+$ 的情形，论证完全类似 . □

现在，我们可以结合上述性质以及 定理3.2 中量子度量在数乘意义下的唯一性，推导出以下结果。

命题 5.5。 若 ℓ 是一个 $U_q(\mathfrak{u})$-等变提升映射，则 Ricci_ℓ 是 $(\mathfrak{u})$-不变元，属于 $\Omega_q^1\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^1$。此外，我们还有以下性质：

(1) *if* $\ell_{+-}:\Omega_q^{(1,1)}\to\Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-$ *then* $\mathrm{Ricci}_{\ell_{+-}}=ag_{+-}$ *for some coefficient* a,
(2) *if* $\ell_{-+}:\Omega_q^{(1,1)}\to\Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+$ *then* $\mathrm{Ricci}_{\ell_{-+}}=bg_{-+}$ *for some coefficient* b.

证明。 如果 ℓ 是 $U_q(\mathfrak{u})$-等变的，那么里奇张量定义中出现的所有映射都是 $U_q(\mathfrak{u})$-等变的。由于这些映射的复合应用于 $U_q(\mathfrak{u})$-不变元素 g，因此元素 Ricci_ℓ 必定是 $U_q(\mathfrak{u})$-不变的。

(1) 这里我们现在假设 $\ell_{+-}:\Omega_q^{(1,1)}\to\Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-$，并且满足上述 $U_q(\mathfrak{u})$-等变性。于是 引理 5.4表明 $\mathrm{Ricci}^{\ell_{+-}}$ 必定是 $U_q(\mathfrak{u})$-不变元素，属于 $\Omega_q^-\otimes\Omega_q^+$。由此可知 $\mathrm{Ricci}^{\ell_{+-}}$ 必定是 g_{+-} 的一个倍数，根据 定理 3.2。

(2) 对于 $\ell_{-+}:\Omega_q^{(1,1)}\to\Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+$ 的情形，证明完全类似。 □

注 5.6。在上述证明中，我们不需要定理 3.2 的完整结论。唯一需要的事实是，所有 $U_q(\mathfrak{u})$-不变的 $\Omega_q^1\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^1$ 中的元素，都由 $\Omega_q^+\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^-$ 和 $\Omega_q^-\otimes_{\mathcal{B}}\Omega_q^+$ 中分别唯一确定（相差一个标量）的元素张成。这一点由 Takeuchi 等价很容易推出，因为 $V^1=\Phi(\Omega_q^1)$ 分解为 $V^1=V_{(1,0)}\oplus V_{(0,1)}$，其中两个直和项是互不同构的简单 $U_q(\mathfrak{k}_S)$-模（另见 [BGKÓ24，引理 6.8]）。

5.3. **爱因斯坦条件**。在讨论量子不可约旗流形的爱因斯坦条件之前，值得注意的是，在我们的设定中，它等价于要求里奇张量应当对称。确切结果如下。

命题 5.7。 设 $\mathcal{B}$ 为一个量子不可约旗流形，配备 *Heckenberger–Kolb* 微分演算$\Omega_q^\bullet$ 和量子度量 g。设 ℓ 为一个 $U_q(\mathfrak{u})$-等变的提升映射Ω_q^2。当且仅当里奇张量是对称的，也就是说 $\wedge(\mathrm{Ricci}_\ell)=0$，爱因斯坦条件成立。

证明。 给定一个 $U_q(\mathfrak{u})$-等变提升映射 ℓ， 命题 5.5表明

$$\mathrm{Ricci}_\ell=t_1g_{+-}+t_2g_{-+},$$

对于某些标量 t_1 和 t_2。由于 $g=g_{+-}+g_{-+}$，爱因斯坦条件 $\mathrm{Ricci}_\ell=\lambda g$ 成立当且仅当 $t_1=t_2$（其中 λ 等于这个共同值）。

另一方面，回顾一下，量子度量 $g = g_{+-} + g_{-+}$ 是对称的，也就是说$\wedge(g) = 0$。这意味着 $\wedge(g_{-+}) = -\wedge(g_{+-})$，从而我们可以写出

$$\wedge(\mathrm{Ricci}_\ell) = (t_1 - t_2)\wedge(g_{+-}).$$

不难证明 $\wedge(g_{+-}) \neq 0$ （既可以利用量子度量的可逆性，也可以计算其在商空间 $V^{(1,1)}$中的像）。那么， $\wedge$（Ricci_ℓ） $= 0$ 当且仅当 $t_1 = t_2$。这就证明了该断言中两个条件的等价性。□

备注 5.8。 这一结果是量子不可约旗流形所特有的，这意味着对于更一般的代数，我们不应期待这种等价性成立。

现在我们可以证明，只要系数 $\mathcal{B}$和 a 满足 b 命题 5.5中的某个条件，爱因斯坦条件就成立。

命题 5.9。 设 ℓ_{+-} 和 ℓ_{-+} 是两个 $U_q(\mathfrak{u})$-等变提升映射，如命题 *5.5*中所述。记 a和 b 为其中定义的相应系数。

假设 $a + b \neq 0$ 成立。那么存在唯一的提升映射 $\ell = c_1\ell_{+-} + c_2\ell_{-+}$，使得爱因斯坦条件以非零爱因斯坦常数成立，即

$$\mathrm{Ricci}_\ell = \lambda g, \quad \lambda \neq 0.$$

在这种情况下，提升映射 ℓ 的系数 c_1 和 c_2 为

$$c_1 = \frac{b}{a+b}, \quad c_2 = \frac{a}{a+b}.$$

证明。 注意，由 引理 4.2，可知 $\ell = c_1\ell_{+-} + c_2\ell_{-+}$是提升映射，当且仅当它是两个提升映射 ℓ_{+-}和 ℓ_{-+}的凸组合，这意味着 $c_1 + c_2 = 1$。显然， $U_q(\mathfrak{u})$是等变的，因为所考虑的两个映射都是等变的。

根据里奇张量的定义，立即可得

$$\mathrm{Ricci}_\ell = c_1\mathrm{Ricci}_{\ell_{+-}} + c_2\mathrm{Ricci}_{\ell_{-+}}.$$

于是，由 命题 5.5，存在系数 a 和 b 使得

$$\mathrm{Ricci}_\ell = c_1 a g_{+-} + c_2 b g_{-+}.$$

因此，该表达式与量子度量 $g = g_{+-} + g_{-+}$ 成比例，当且仅当 $c_1 a = c_2 b$。由于 $c_1 + c_2 = 1$，这只有在

$$c_1 = \frac{b}{a+b}, \quad c_2 = \frac{a}{a+b},$$

这显然要求 $a + b \neq 0$。在这种情况下，爱因斯坦条件成立，其爱因斯坦常数为 $\lambda = c_1 a = c_2 b$; 根据假设 $a + b \neq 0$，该常数非零。□

备注 5.10。 请注意，在上述结果中，我们只用到了提升映射 ℓ_{+-} 和 ℓ_{-+}的一些一般性质，而没有用到它们的具体形式。

请注意，满足 命题 5.9 所要求性质的提升映射确实存在，正如我们在 命题 4.4中所证明的。这意味着我们可以预期，对于一般的 量子化参数 q，爱因斯坦条件成立，因为条件 $a + b \neq 0$ 一般而言应当成立。

下面我们将证明这一点确实成立，至少在 q 充分接近经典值 $q = 1$的条件下。在此我们将使用提升映射 ℓ^q_{+-} 和 ℓ^q_{-+} 中构造的命题 4.4，从而可以基于经典极限进行考察。

定理 5.11。 设 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$ 是一个量子不可约旗流形。设 $\Omega^\bullet_q$ 为相应的 *Heckenberger–Kolb* 微分演算， g 为前面引入的量子度量，且 ∇ 为与该量子度量相容的唯一 *Levi-Civita* 联络。

于是，存在唯一的提升映射 $\ell^q = c_1(q)\,\ell^q_{+-} + c_2(q)\,\ell^q_{-+}$，使得在经典值 $q=1$ 附近的某个开区间内，爱因斯坦条件成立，且爱因斯坦常数非零。

证明。 记 $a(q)$ 和 $b(q)$ 分别为命题 a 和 b 中的系数，见 命题 5.9，以强调它们对量子化参数 q 的依赖关系。更明确地说，有

$$\mathrm{Ricci}_{\ell^q_{+-}} = a(q) g_{+-}, \quad \mathrm{Ricci}_{\ell^q_{-+}} = b(q) g_{-+}. \tag{5.1}$$

于是，命题 5.9表明，只要满足 $a(q)+b(q)\neq 0$，爱因斯坦条件便成立；这唯一确定了标量 $c_1(q)$ 和 $c_2(q)$。因此，只需证明条件 $a(q)+b(q)\neq 0$ 在 $q=1$附近的某个适当开区间内成立。

接下来，只需证明：

(1) $a(q)$ 和 $b(q)$ 在 $q=1$ 附近的某个开区间内是连续函数；(2) 在经典值 $q=1$ 处，有 $a(1)+b(1)\neq 0$。

对于 (1)，我们断言这里所考虑的所有构造在某一固定值附近的一个小区间内都是连续的 q_0（量子化参数的取值）。量子化坐标环 $\mathcal{O}_q(U)$ 的这一事实是众所周知的，对 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$ 也同样如此。Heckenberger-Kolb 演算 $\Omega^\bullet_q$ 的连续性在 [Mat19，引理 5.7] 中有所讨论。类似地，对出现在 [BGKÓ24] 中的所有构造也可以观察到这一点。事实上，它们源于范畴论考量，这些考量所使用的态射确实满足该性质（而这又源于关于$U_q(\mathfrak{u})$-模的众所周知的结果）。这保证了 (1) 对 $a(q)$以及 $b(q)$成立。

至于 (2)，我们需要考虑经典极限 $q=1$。此时 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$ 退化为不可约旗流形 $G/P_S \cong U/K_S$ 上一个适当的函数代数 A。类似地，$\Omega^\bullet_q$ 退化为该空间上的通常微分形式（在 Kähler 微分的意义下），我们将其记为 $\Omega^\bullet$。量子度量 $g = g_{+-} + g_{-+}$ 退化为 G/P_S 上的一个 $\mathfrak{g}$-不变度量，而 ∇ 则成为关于该度量的（唯一）经典 Levi-Civita 联络。注意，为记号简便起见，对于 g 和 ∇，我们略去了对 q 的任何依赖。

在这一设定下，考虑经典提升映射

$$\ell : \Omega^2 \to \Omega^1 \otimes_A \Omega^1, \quad \ell(x\wedge y) = \frac{1}{2}(x\otimes y - y\otimes x).$$

那么 [BeMa20，例 810] 表明 里奇$_\ell$ 与通常的里奇张量一致（除去约定上的差异）。由于不可约旗流形 G/P_S 是爱因斯坦流形，这意味着 里奇$_\ell = \lambda g$，其中 λ 是经典爱因斯坦常数。

注意，如上所述，经典提升映射 ℓ 可以视为两个 $\mathfrak{g}$-等变提升映射的凸组合$\frac{1}{2}(\ell_{+-} + \ell_{+-})$

$$\ell_{+-} : \Omega^{(1,1)} \to \Omega^+ \otimes_A \Omega^-, \qquad \ell_{+-}(x\wedge y) = x\otimes y,$$
$$\ell_{-+} : \Omega^{(1,1)} \to \Omega^- \otimes_A \Omega^+, \qquad \ell_{-+}(x\wedge y) = -y\otimes x.$$

这里记 $x\in\Omega^+$ 和 $y\in\Omega^-$。与 命题 4.4 对比可知，它们分别与该处定义的映射 ℓ^1_{+-} 和 ℓ^1_{-+} 的经典极限 ℓ^q_{+-} 和 ℓ^q_{-+} 一致。

因此我们得到恒等式 $\ell = \frac{1}{2}(\ell^1_{+-} + \ell^1_{+-})$。利用这一点以及（5.1），我们得到

$$\mathrm{Ricci}_\ell = \frac{1}{2}\mathrm{Ricci}_{\ell^1_{+-}} + \frac{1}{2}\mathrm{Ricci}_{\ell^1_{-+}} = \frac{1}{2}\left(a(1)g_{+-} + b(1)g_{-+}\right).$$

由于我们知道 $\mathrm{Ricci}_\ell = \lambda g$，这意味着 $a(1) = b(1) = 2\lambda$。特别地，我们发现 $a(1)$ 和 $b(1)$ 均不为零，因为对于任何不可约旗流形，爱因斯坦常数 λ 都不为零 G/P_S（例如参见 [Bes07，第 8] 章，其中讨论了更一般的紧致齐性凯勒流形类）。这就证明了该结果。□

注记 5.12。作为一项额外观察，由上述结果可知

$$c_1(1) = \frac{b(1)}{a(1)+b(1)} = \frac{1}{2}, \quad c_2(1) = \frac{a(1)}{a(1)+b(1)} = \frac{1}{2},$$

这意味着 $\ell^q = c_1(q)\ell^q_{+-} + c_2(q)\ell^q_{-+}$ 在 $q = 1$ 处退化为经典映射。

6. 讨论与展望

本文的主要结果是定理 5.11，该定理证明了任意量子不可约旗流形 $\mathcal{O}_q(U/K_S)$ 在经典值$q = 1$附近的一个开区间内满足爱因斯坦条件。本节最后，我们将讨论一些相关的开放问题和推广。

第一个自然的问题是，爱因斯坦条件是否对所有 $q > 0$ 都成立。通过更仔细地分析这些结果，应该可以证明，除至多有限多个 q 值外，该结论均成立。这是因为大多数构造都是在关于 q 的有理函数域上进行的（不过请注意，处理 $*$-结构可能会引入平方根，例如为了得到标准正交基）。

在 [Mat22的定理 65] 中，研究表明，爱因斯坦条件适用于所有量子射影空间，从而推广了2维量子球面的先前结果；该结果见[BeMa20第 8.2 节。3]. 值得注意的是，这些结果对的所有取值 q都成立，因此量子不可约旗流形也应当如此。

另一个自然的问题是，能否将这些结果推广到不可约的量子旗流形。提出这一推广是合理的，因为任何（广义）旗流形都是爱因斯坦流形（它们都是紧致齐性凯勒流形）。不过，这可能无法实现，而且一般来说，这个问题似乎比我们在此讨论的要困难得多。在 [Mat25]中，研究表明，可以引入 Heckenberger–Kolb 演算的共变一阶推广形式。然而，要构造完整演算的合理对应形式并非易事，正如 [CÓR25]中针对与 $SU(3)$相对应的量子完全旗流形所讨论的那样。例如，所引论文表明，无法存在本文所述意义下的共变量子度量，这意味着必须对整个框架进行重大修改。

参考文献

[BeMa20] E.J. Beggs, S. Majid, 量子黎曼几何,《数学基础丛书》，第 355 卷，施普林格，2020 年。[Bes07] A.L. Besse, 爱因斯坦流形, 施普林格，2007 年。[BGKÓ24] J. Bhowmick, B. Ghosh, A.O. Krutov, R. Ó Buachalla, 不可约量子旗流形上的 *Levi-Civita* 联络, arXiv 预印本 arXiv:2411.03102（2024）。[Con94] A. Connes, 非交换几何, Academic Press, Inc.，美国加利福尼亚州圣迭戈，1994 年。[CÓR25] A. Carotenuto, R. Ó Buachalla, J. Razzaq, 全量子旗流形的非交换复结构 $\mathcal{O}_q(SU_3)$, 数学物理通讯 115，第 3 期（2025 年）：68。[DNR00] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu, *Hopf* 代数：导论, CRC Press, 2000 年。[DKÓ+21] F. Díaz García, A. Krutov, R. Ó Buachalla, P. Somberg, K.R. Strung, 不可约量子旗流形上的全纯相对 *Hopf* 模, 数学物理通讯 111，第 1 期（2021 年）：10。[HeKo04] I. Heckenberger, S. Kolb, 量子化不可约旗流形对偶余代数的局部有限部分, 伦敦数学会会刊 89，第 2 期（2004 年）：457-484。

[HeKo06] I. Heckenberger, S. Kolb, 量子化不可约旗流形的德拉姆复形, 《代数杂志》305，第 2 期（2006 年）：704-741。[KlSc97] A.U. Klimyk, K. Schmüdgen, 量子群及其表示, 《理论与数学物理》，施普林格出版社（柏林-海德堡），1997 年。[Mat19] M. Matassa, 量子不可约旗流形上的凯勒结构, 《几何与物理杂志》145（2019 年）：103477。[Mat21] M. Matassa, 量子射影空间上的福比尼–施图迪度量与 *Levi-Civita* 联络, 《数学进展》393（2021 年）：108101。[Mat22] M. Matassa, 量子射影空间的量子黎曼几何, 《几何与物理杂志》179（2022 年）：104611。[Mat25] M. Matassa, 正幂零根基的等变量子化与协变微分演算, 《表示论》29，第 09 期（2025 年）：289-331。[MeRe24] B. Mesland, A. Rennie, 谱三元组的曲率与魏岑伯克公式, 《数学通讯》297，第 12 期（2024 年）：4582-4604。[Mor07] A. Moroianu, 凯勒几何讲义, 第 69 卷。剑桥大学出版社，2007 年。[ÓBu16] R. Ó Buachalla, 量子齐性空间上的非交换复结构, 《几何与物理杂志》99（2016 年）：154-173。[ÓBu17] R. Ó Buachalla, 量子齐性空间上的非交换凯勒结构, 《数学进展》322（2017 年）：892-939。[Tak79] M. Takeuchi, 相对 *Hopf* 模——等价与自由性判据, 《代数杂志》60，第 2 期（1979 年）：452-471。

奥斯陆大都会大学计算机科学系，奥斯陆大都会大学，挪威奥斯陆电子邮箱地址：marco.matassa@oslomet.no