arXiv:2603.11801v1 [math.CV] 12 Mar 2026

关于某些非线性微分方程解的结构与分类

Abhijit Banerjee、Sujoy Majumder、Shantanu Panja 和 Junfeng Xu

Abstract. 本文致力于研究非线性微分方程的亚纯解，具体而言，研究方程

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = \alpha^2,$$

其中， k 和 n 是满足 $n > 2k$的正整数， α 是 f 和 g的公共小函数。我们的主要结果详细刻画了解，改进了Fang-Qiu [5], 、Fang [4], 、Zhang-Xu [19], 和Li-Yi [9]此前的研究。值得注意的是，我们指出并纠正了引理2.11 [13], 证明中的重大错误；该引理代表了这一领域最新的研究成果。我们还对这一问题给出了完善且严谨的处理。这类方程自然出现在数学和应用科学的多个领域，例如复动力系统、可积系统以及复分析中的值分布理论。理解亚纯解还有助于认识解的增长性、开展稳定性分析，并对物理和工程中的现象进行建模。通过刻画这些解，可以构建求解更广泛类别非线性微分方程的方法，并探究其定性性质；这些对于理论研究和实际应用都至关重要。

1. Preliminaries and Fundamental Results

在本文中，亚纯函数 一词仅指定义在复平面 $\mathbb{C}$上的亚纯函数。我们假定读者熟悉 Nevanlinna理论的标准记号和基础结果；例如参见 [6, 16]。

对于亚纯函数 f，我们分别用 $\rho(f)$、 $\mu(f)$ 和 $\rho_2(f)$ 表示其级、下级和超级。如果 f为非常值且满足 $\rho(f) = \mu(f)$，则称 f具有正规增长。特别地，如果 $f = e^g$，其中 g 为非常数整函数，则 $\rho(f) = \mu(f)$；参见 [16]的定理1.44。

设 f为非常值亚纯函数。如果 $\rho(f) < +\infty$，则 $S(r, f)$ 表示满足以下条件的任意量

$$S(r, f) = O(\log r), \quad r \to \infty.$$

如果 $\rho(f) = +\infty$，则 $S(r, f)$ 表示满足以下条件的任意量

$$S(r, f) = O(\log(rT(r, f))), \quad r \to \infty,\ r \notin E,$$

其中 E 是一个有限线性测度集，每次出现时未必相同。

1.1. 对数导数估计。

在我们的分析中，一个基本工具是以下关于对数导数的经典估计。

定理 1.A。 [8] 设 f 是非常值亚纯函数，且 $k \geq 1$ 是整数。

- *If* $\rho(f) = +\infty$, *then*

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log(rT(r, f)))$$

在可能的例外集 E 之外，该集合具有有限线性测度。

- 如果 f 是有限级的，那么

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r).$$

2010 *Mathematics Subject Classification*：主要分类 30D35，次要分类 30D30。

Key words and phrases：亚纯函数、非线性微分多项式、正规族。**Corresponding Author*：Junfeng Xu。由 $\mathcal{AMS}$-LaTeX 排版。

1.2. **小函数与增长比较**。 亚纯函数 a 称为 f 的小函数，如果

$$T(r,a) = S(r,f).$$

我们用 $\mathbb{S}(f)$ 表示 f 的所有小函数组成的类，并令

$$\hat{\mathbb{S}}(f) = \mathbb{S}(f) \cup \{\infty\}.$$

显然， $\mathbb{C} \subset \mathbb{S}(f)$。

以下定理给出了确保小函数性质成立的一个充分增长条件。

定理 1.B. [16,定理 1.18] 设 f 和 g 是两个非常值亚纯函数，满足$\rho(f) < \mu(g)$。那么

$$T(r,f) = o(T(r,g)) \quad as\ r \to \infty,$$

因此 f 是 g 的小函数。

1.3. **收敛指数与例外值**。 设 f 是一个非常值亚纯函数，且 $a \in \mathbb{C}$。 f 的 a-点的收敛指数 定义为

$$\rho_1(a;f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ N(r,a;f)}{\log r},$$

而互异 a-点的收敛指数定义为

$$\overline{\rho}_1(a;f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \overline{N}(r,a;f)}{\log r}.$$

特别地:

- 若 $a = 0$，则 $\rho_1(f)$和 $\rho_1(\overline{f})$分别表示 f的零点和互异零点的收敛指数。
- 若 $a = \infty$，则 $\rho_1(\frac{1}{f})$和 $\rho_1(\frac{1}{\overline{f}})$分别表示极点对应的量。

设 f是一个非常值亚纯函数。若 $\rho(f) > 0$且 $\rho_1(a;\ f) < \rho(f)$，或若 $\rho(f) = 0$且 $N(r,\ a;\ f) = O(\log\ r)$，当 $r \to \infty$时，则称 $a \in \mathbb{C}$为 f的*Borel* 例外值。当 $\rho(f) > 0$时，每个 Picard 例外值也是 Borel 例外值。

定理 1.C。 [16, 定理 2。11] 设 f 为一个超越亚纯函数，且满足 $\rho(f) > 0$。如果f在$\hat{}\mathbb{C}$中有两个不同的 *Borel* 例外值，则 $\mu(f) = \rho(f)$，且 $\rho(f)$ 或者是正整数，或者是无穷大。

1.4。 **正规 族与球面收敛**。 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为一个区域。考虑映射 ng

$$f : (D, |\cdot|_{\mathbb{R}^2}) \longrightarrow (\hat{\mathbb{C}}, \chi),$$

$\hat{}$ 其中 χ 表示复平面 $\mathbb{C}$上的弦度量，其定义为

$$\chi(z,z') = \begin{cases} \dfrac{|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}}, & z,z' \in \mathbb{C}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}, & z' = \infty. \end{cases}$$

定义 1.A。 [12, 定义 1.3。1] 设函数序列$\{f_n\}$ 定义在区域 D 内。若该序列在 的每个紧子集上球面一致地收敛 于函数 f，则称其收敛于函数 f；也就是说，对于每个紧集 $K \subset D$ 和每个 $\varepsilon > 0$，存在 $N_0 = N_0(K,\varepsilon)$，使得

$$\chi(f_n(z), f(z)) < \varepsilon \quad for\ all\ z \in K,\ n \geq N_0.$$

定义 1.B. [12, 定义3.1.1] 若 D 上的一族亚纯函数 $\mathcal{F}$ 满足：其每个序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ 都含有一个子序列，在 D 的紧子集上球面一致收敛到一个亚纯函数或恒等于 ∞，则称其在 D 上正规。

族 F 在 D 上正规，当且仅当它在 D 的每一点都正规（见 [12, 定理 3.3.2]）。亚纯函数 f 的球导数定义为

$$f^{\#}(z) = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}.$$

定理 1.D。 [12, 马蒂定理] 区域 D 上的亚纯函数族 $\mathcal{F}$ 在 D 中是正规的，当且仅当对于每个紧子集 $K \subset D$, 存在一个常数 $C = C(K)$，使得

$$f^{\#}(z) \le C \quad for\ all\ z \in K,\ f \in \mathcal{F}.$$

1.5. **扎尔克曼引理**。

引理 1.A。 [22,引理] 设 $\mathcal{F}$ 是单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族，使得每个 $f \in \mathcal{F}$ 的零点重数至少为 l，极点重数至少为 m。设 α 满足$-l < \alpha < m$。则 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in \Delta$ 处不正规，当且仅当存在序列 $\{z_n\} \subset \Delta$、$\{f_n\} \subset \mathcal{F}$以及 $\{\rho_n\} \subset \mathbb{R}^+$，使得

$$z_n \to z_0, \qquad \rho_n \to 0,$$

使得

$$\rho_n^{\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \longrightarrow g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$的紧子集上球面一致，其中 g 是一个满足以下条件的非常值亚纯函数

$$g^{\#}(\zeta) \le g^{\#}(0) = 1.$$

此外，Zalcman 证明了

$$\rho_n = \frac{1}{f_n^{\#}(z_n)}. \tag{1.1}$$

根据 Hurwitz 定理， g 的零点和极点的重数分别至少为 l 和 m .

1.6. **值分担与计数函数**。 令 $E(a;\ f)$表示 f的所有 a-点组成的集合，并按重数计数；令$\overline{E}(a;\ f)$表示互不相同的 a-点组成的集合。对于两个非常值亚纯函数 f 和 g，记

$$f = a \Rightarrow g = a$$

if $\overline{E}(a;f) \subset \overline{E}(a;g)$, and

$$f = a \mapsto g = a$$

如果 g 的每个 a-点的重数都至少与 f的相应重数相同。

通常，CM 和 IM 分别表示“计重数”和“不计重数”。设 $R = P/Q \not\equiv 0$ 是一个有理函数，其分子和分母为互素多项式 P和 Q。我们定义

$$\deg(R) = \deg(P) - \deg(Q),$$

并设 $\deg(0) = -\infty$。若 R_1 和 R_2 是非零有理函数，则

$$\deg(R_1 R_2) = \deg(R_1) + \deg(R_2), \qquad \deg\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \deg(R_1) - \deg(R_2).$$

定义 1. [7] 设 k为正整数或 ∞。截断计数函数 $N_k(r,a;\ f)$ 对重数为 m 的 a-点计数：若 $m \le k$，则恰计 m 次；若 $m > k$，则计 k 次。因此，

$$N_k(r,a;f) = \overline{N}(r,a;f) + \overline{N}(r,a;f\ |\ge 2) + \cdots + \overline{N}(r,a;f\ |\ge k),$$

其中 $N_1(r,a;\ f)=\overline{N}(r,a;\ f)$。

定义 2. 设 f和 g为非常值亚纯函数，且 $a,b \in \hat{\mathbb{C}}$。我们用 $N(r,a;\ f\ |g \ne b)$ 表示 f的那些 a-点的计数函数，按重数计数，且这些点不是 g的 b-点。

定义 3. 设 f,g,h为非常值亚纯函数，并设 $a,b,c \in \mathbb{C}$。假设 z_0是 f 的一个 a-点，其重数为 p，满足 $h(z_0) \ne c$，且 z_0 是 g 的一个 b-点，重数为 p。我们用

$$N_E(r,a;f \mid g = b \mid h \ne c)$$

相应的计数函数，以及 $N_E(r,a;\ f \mid g = b \mid h \overline{\ne} c)$ 其约化的 m.

2. 非线性微分方程的解 $(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = \alpha^2$

2.1.研究动机与分析框架。求解涉及亚纯函数的非线性微分方程通常是一项极具挑战性的任务。尤其是，涉及非线性微分单项式的高阶导数的方程，自然地出现在复微分方程和唯一性理论中。本节将系统研究如下非线性微分方程

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = \alpha^2, \tag{2.1}$$

其中，f 和 g 是非常值亚纯函数，n 和 k 是正整数，而 $\alpha(\not\equiv 0)$是 f 和 g的公共小函数。

方程 (2.1) 可视为关于未知函数f 和 g的耦合非线性微分系统。幂、高阶导数以及小函数系数的存在，使非常值解的存在性与分类尤为棘手。

2.2. 历史发展与已知可解情形。一般而言，确定 (2.1) 是否存在非常值解是困难的。据我们所知，Yang 和 Hua [15]最早开始对 (2.1) 进行严格研究。他们考察了最简单的非平凡情形 $k = 1$ 和 $\alpha \equiv 1$，并得到了显式的指数解。

定理 2.A. [15, 定理 3] 设 f 与 g 为两个非常数整函数，且设 n 为正整数。若

$$f^n f^{(1)} g^n g^{(1)} = 1,$$

then

$$f(z) = c_1 e^{-cz}, \quad g(z) = c_2 e^{cz},$$

其中 c、c_1 与 c_2 为满足 $c^2(c_1c_2)^{n+1} = -1$ 的非零常数。

随后，Yang 和 Hua 将其分析推广到亚纯函数。

定理 2.B. [15, 定理 2] 设 f 与 g 为两个非常值亚纯函数，且设 $n \geq 6$。若

$$f^n f^{(1)} g^n g^{(1)} = 1,$$

则这些解与定理 *2A* 中的解具有相同的指数形式。

2.3. 两个主要推广方向。从微分方程理论的角度来看，推广 (2.1) 有两条自然途径：

（A）将常数 α 替换为非零多项式或有理函数，从而扩大解空间；（B）提高导数阶数 k，从而得到能够刻画更复杂结构的高阶非线性微分方程。

这两个方向都对后续研究产生了重大影响。

2.4. 多项式右端项与降低的增长条件。Fang 和 Qiu [5]通过降低 n 的界并将常数替换为多项式，改进了定理 2A 和 2B。

T定理 2.C. [5,命题 3] 设 f 与 g 为非常数整函数。若

$$ff^{(1)}gg^{(1)} = z^2,$$

则要么

$$f(z) = c_1 e^{cz^2}, \quad g(z) = c_2 e^{-cz^2},$$

且 $4(cc_1c_2)^2 = -1$，或

$$f(z) = az, \quad g(z) = bz,$$

其中 $(ab)^2 = 1$。

定理 2.D。 [5, 命题 2] 设 f 和 g 为非常数整函数，且 $n \geq 2$。如果

$$f^n f^{(1)} g^n g^{(1)} = z^2,$$

then

$$f(z) = c_1 e^{-cz^2}, \quad g(z) = c_2 e^{-cz^2},$$

与 $4c^2(c_1c_2)^{n+1} = -1$。

定理 2。 **E.** [5, 命题 1] 设 f 与 g 为非常值亚纯函数且 $n \geq 4$。若

$$f^n f^{(1)} g^n g^{(1)} = z^2,$$

则与定理 *2D* 中相同的结论成立。

2.5. **高阶导数与精确分类**。 Fang [4] 对 $\alpha \equiv 1$ 及高阶导数求解了(2.1)。

定理 2.F。 [4] 设 f 和 g 为非常数整函数，且设 $n > k$。若

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = 1,$$

then

$$f(z) = c_1 e^{cz}, \quad g(z) = c_2 e^{-cz},$$

其中 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$。

Zhang [21] 进一步推广了这一结果。

定理 2.G。 [21, 定理 4] 的证明。设 f 和 g 为满足 $n > k + 2$的非常数整函数。若

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = z^2,$$

则这些解为满足二次约束的指数函数。

2.6. **公共极点**。 Zhang 和 Xu [19] 引入了公共极点条件。

定理2.H. [19, 定理1的证明。3] 设 f 和 g 是具有公共极点的非常值亚纯函数，且 $n > k + 10$。如果

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = p^2,$$

其中 次数$p \leq 5$，则 [19] 中陈述的结论 *(i)–(ii)* 成立。

2.7. **正规族方法与开放问题**。 Li 和 Yi [9] 运用正规族论证，得到了关于 $\alpha \equiv 1$ 的以下分类。

定理2.I. [9, 引理2。10] 设 f 和 g 是非常值亚纯函数，且 $n > 2k$。如果

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = 1,$$

那么 f 和 g 必定是指数型超越整函数。

Majumder 和 Mandal [11] 进一步将这一结果推广到了多项式右端。

定理 2.J. [11, 引理 12] 设 f 与 g 为超越亚纯函数，并设 $n > \max\{2k, k + 2\}$。若

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} = p^2,$$

则 [11] 的结论*(i)–(ii)*成立。

2.8. **关键再评估与缺口识别**。 Sahoo与Halder [13] 最先考虑了 α 为公共小函数时的(2.1)。然而，仔细复查揭示了其关键引理中的根本缺陷。

定理 2.K. [13, 引理 2.11] 若$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv a^2$，则 f和 g具有涉及小函数的指数表示。

2.9. **关键漏洞分析与关键引理的失效**。 现在我们转向一个直接促成本研究的关键问题。仔细考察 Sahoo–Halder[13] 中引理 2.11 的证明后发现，该论证存在两处根本性缺陷。由于引理 2.11 是 [13], 后续定理的基石，这些问题严重影响了其中所得结论的有效性。为清晰起见并确保论述完整，我们将详细阐述这些问题。

错误 (a)。在 [13, 第 378], 页，Sahoo–Halder 断言如下:

> “因此，我们得出结论： f 在 $\mathbb{C}$中没有零点，可能的例外仅在 $a(z)$的零点和极点处。类似地，我们可以证明 g 在 $\mathbb{C}$中没有零点，可能的例外仅在 $a(z)$的零点和极点处。”

这一陈述本身是正确的。然而，Sahoo–Halder 随后由这一观察得出结论： $N(r,0;\ f) = S(r,f)$ 以及 $N(r,0;\ g) = S(r,g)$。于是，这些估计随后被实质性地用于 [13, 第 379]页的不等式 (2.6) 和 (2.8) 中。

在我们看来，这一结论并不成立，因为忽略了一种重要情形。事实上，设 z_0 是 f 的一个重数为 p_0 的零点，并假设 z_0 是 g 的一个重数为 s_0的极点。我们考虑以下两种可能性:

i) 若 $np_0 - k > ns_0 + k$，则由恒等式 $(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv a^2$，可知 z_0 必为 a的零点，其重数为 $\frac{n(p_0-s_0)-2k}{2}$ 然而，一般而言， $\frac{n(p_0-s_0)-2k}{2} \geq p_0$ 不一定成立。

ii) 若 $np_0-k < ns_0+k$，则 z_0会成为 a的极点，其重数为 $\frac{n(s_0-p_0)+2k}{2}$.同样，无法保证 $\frac{n(s_0-p_0)+2k}{2} \geq p_0$.

在这两种情况下，上述估计都不足以让我们得出结论： $N(r,\ 0;\ f) = S(r,\ f)$（ g的情况也类似）。因此， [13] 中使用的推论不成立，依赖于该推论的后续不等式也无效。

错误 (b)。在 [13,第 381], 页，作者进一步声称:

> “若 F_1 在 $\hat{}z$ 处有一个极点，且 $\nu^{\infty}_{F_1}(\hat{}z) = \hat{}p$，则由 (2.11)，$\hat{}z$ 必为 G_1 的一个零点，且$\nu^{0}_{G_1}(\hat{}z) = \hat{}p$。因此，由 (2.19) 可得 $2s = t_1$，这是不可能的。”

然而， $s = 1$ 和 $t_1 = 2$ 的情形并未被考虑。在这种情况下， s 和 t_1 是互素整数，且关系式 $2s = t_1$ 确实成立。因此，所声称的矛盾并非普遍成立，该论证因而失效。

由于上述两个错误， [13]中的引理 2.11 按其所述形式并不成立。由于该引理是 [13], 中主要定理证明的基础，因此这些结果的有效性值得怀疑。

注 2.1。 错误 (b) 中所述的同一疏漏也出现在 [2]中引理 *2.8* 的证明里。幸运的是，在这种情况下，最终结论仍然成立，因为可以独立地由定理 *2I* 得出。

总之，当 α 是 f 和 g 的公共小函数时，确定微分方程 (2.1) 的解的精确形式这一问题仍未解决。这个开放问题是本文的主要研究动机。本文着重于确定 (2.1) 在与 f 和 g 相关的一类特定公共小函数 α 下的显式解。我们的结果不仅填补了这一空白，还大幅改进并统一了文献中已有的结果。下面陈述我们的主要结果。

定理 2.1。 设 f 和 g 是具有公共极点的两个非常值亚纯函数，且 α 是 f 和 g 的一个非零小函数，使得0 和 ∞ 是 α 的 *Borel* 例外值。进一步假设 $\rho(\alpha) < \rho(f)$。设 k 和 n 是满足 $n > k$ 的正整数，并且假设

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv \alpha^2.$$

则有以下结论。

(1) 若 $\rho(\alpha) > 0$，则出现以下情况之一:

(1A) $f = R_1 e^{\delta_1}$ 和 $g = R_2 e^{\delta_2}$，其中 R_1 和 R_2 是满足以下条件的亚纯函数

$$R_i = 0 \mapsto \alpha = 0, \qquad R_i = \infty \mapsto \alpha = \infty, \qquad \rho(R_i) < \rho(\alpha), \quad i = 1, 2,$$

且 δ_1 和 δ_2 是有限级非常数整函数，使得 $\delta_1 + \delta_2$ 是多项式，且 $\rho(\alpha) = \deg(\delta_1 + \delta_2)$。

(1B) α 化为整函数，且 $f = c_1 e^{c\beta}$， $g = c_2 e^{-c\beta}$，其中 $\beta(z) = \int_0^z \alpha(t)\,dt$，且 c、c_1、c_2 是满足 $-(nc)^2(c_1c_2)^n = 1$.的非零常数

(2) 若 $\rho(\alpha) = 0$，则 α 化为非零有理函数，且 $f = R_1 e^{\delta_1}$， $g = R_2 e^{-\delta_1}$，其中 R_1和 R_2 是非零有理函数，δ_1 是次数满足 $\deg(\delta_1) = 1$ 的非常数多项式，并满足 $2\deg(\alpha^2) = n\deg(R_1R_2)$。特别地，若 $\alpha \equiv 1$，则 $f(z) = c_1 e^{cz}$， $g(z) = c_2 e^{-cz}$，其中 c、 c_1和 c_2 是满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$.的非零常数

显然，定理 2.1 是对定理2.H的改进。

定理 2.2。设 f 和 g 是两个非常值亚纯函数， α 是 f和 g 的一个非零小函数，使得 0 和 ∞ 是 α, $\rho(\alpha) < \rho(f)$ 的 *Borel* 例外值，并设 k 和n 是满足 $n > 2k$的正整数。假设

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv \alpha^2.$$

于是有以下几种情形：

(1) 若 $\rho(\alpha) > 0$ 且 α 只有有限个零点和极点，则 $f = R_1 e^{\delta_1}$， $g = R_2 e^{\delta_2}$，其中 R_1, R_2是非零有理函数，δ_1, δ_2 是满足下列条件的非常值多项式

$$\deg(\delta_1) = \deg(\delta_2), \quad n(\delta_1 + \delta_2) - P = constant, \quad 2k\,\deg(\delta_1^{(1)}) = 2\deg(\alpha) - n\,\deg(R_1R_2).$$

(2) 若 $\rho(\alpha) > 0$ 且 α 有无限多个零点或极点，则出现以下情形之一：(2A)

$$f = R_1 e^{\delta_1}, \quad g = R_2 e^{\delta_2},$$

其中 $\rho_1(0; R_i) < \rho(\alpha)$, $\rho_1(\infty; R_i) < \rho(\alpha)$ 对于 $i = 1, 2$， R_1R_2是 α的一个小函数，并且δ_1, δ_2 是满足

$$\deg(\delta_1 + \delta_2) = \rho(\alpha).$$

(2B) 若 $\rho_2(f) < +\infty$，则

$$f = R_1 e^{\delta_1}, \quad g = R_2 e^{\delta_2},$$

其中 $\rho_1(0; R_i) < \rho(\alpha)$、 $\rho_1(\infty; R_i) < \rho_2(f)$ 分别是 $i = 1$、2 和 δ_1， δ_2 为超越整函数，且 $\delta_1 + \delta_2$ 是多项式。

(2C) *If* $\rho_2(f) = +\infty$, *then*

$$f = R_1 e^{\delta_1}, \quad g = R_2 e^{\delta_2},$$

其中 $\rho_1(0; R_i) < \rho(\alpha)$、 $N(r, R_i) = S(r, f)$ 分别是 $i = 1$、2 和 δ_1， δ_2 为超越整函数。

(3) 若 $\rho(\alpha) = 0$，则 α 化为非零有理函数，且

$$f = R_1 e^{\delta_1}, \quad g = R_2 e^{\delta_2},$$

其中 R_1、 R_2 为非零有理函数， δ_1、 δ_2 为次数至多为二且满足以下条件的非恒定多项式

$$\delta_1^{(1)} = -\delta_2^{(1)}, \quad 2k\,\deg(\delta_1^{(1)}) = 2\deg(\alpha) - n\,\deg(R_1R_2).$$

特别地，如果 $\alpha \equiv 1$，那么

$$f(z) = c_1 e^{cz}, \quad g(z) = c_2 e^{-cz},$$

其中 c、 c_1、 c_2 是满足以下条件的非零常数

$$(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1.$$

定理	f，g类	公共极点	k, n	右端项 α	结论
2A [15]	整	No	$k=1,\ n\geq 1$	1	指数
2B [15]	亚纯	No	$k=1,\ n\geq 6$	1	指数
2复平面 [5]	整	No	$k=1,\ n=1$	z^2	指数 / 线性
2D [5]	整	No	$k=1,\ n\geq 2$	z^2	指数
2E [5]	亚纯	No	$k=1,\ n\geq 4$	z^2	指数
2F [4]	整	No	$n>k$	1	指数
2G [21]	整	No	$n>k+2$	z^2	指数
2H [19]	亚纯	Yes	$n>k+10$	p^2，度 $p\leq 5$	$e^{\pm c\int p}$
2I [9]	亚纯	No	$n>2k$	1	超越函数 指数
2J [11]	超越函数 亚纯	No	$n>\max\{2k, k+2\}$	p^2	$e^{\pm c\int p}$
2K [13]	亚纯	No	$n>2k$	小函数	**无效**
2.1	亚纯	**Yes**	$n>k$	小函数，$\rho(\alpha)<\rho(f)$	**完全分类**
2.2	亚纯	No	$n>2k$	小函数	**最一般形式**

TABLE 1. $(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)}=\alpha^2$可解情形的比较。

在定理 2.1 的证明中，我们使用以下关键引理。

引理 2.1。 [6, 引理 3。5] 设 F 为非常数亚纯函数，且 $f=\frac{F^{(1)}}{F}$。则对于 $n\geq 1$，

$$\frac{F^{(n)}}{F}=f^n+\frac{n(n-1)}{2}f^{n-2}f^{(1)}+a_nf^{n-3}f^{(2)}+b_nf^{n-4}(f^{(1)})^2+P_{n-3}(f),$$

其中 $a_n=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$、$b_n=-\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$ 以及 $P_{n-3}(f)$ 是具有常数系数的微分多项式，当 $n\leq 3$ 时恒等于零，并且当 $n>3$时次数为 $n-3$。

引理 2.2。 [14] 设 f是非常值亚纯函数，且 $a_n(\not\equiv 0)$、a_{n-1}、……、a_0是 f的小函数。则 $T(r, a_nf^n+a_{n-1}f^{n-1}+\ldots+a_1f+a_0)=nT(r,f)+S(r,f)$。

Lem引理 2.3。 [10] 设 f 是非常值亚纯函数，且 $k\geq 2$ 是整数。若

$$N(r,f)+N(r,0;f)+N(r,0;f^{(k)})=S\left(r,\frac{f^{(1)}}{f}\right),$$

则 $f(z)=\exp(az+b)$，其中 $a\neq 0$ 和 b 是常数。

利用定理 1.A，可以从定理 1.24 [16] 的证明中得到以下引理。

引理 2.4。 [16, 定理 1。24] 设 f 是非常值亚纯函数，且 k 是正整数。则 $N(r,0;f^{(k)})\leq N(r,0;f)+kN(r,f)+O(\log T(r,f)+\log r)$ 当 $r\to\infty$ 时成立，除去一个可能的、具有有限线性测度的例外集。

再次利用 定理 1.A，可以从引理 2.4 [20] 的证明中得到以下引理。

引理 2.5. [20, 引理 2.4] 设 f 是非常值亚纯函数，且 k 和 p 是正整数。则

$$N_p\left(r,0;f^{(k)}\right)\leq T\left(r,f^{(k)}\right)-T(r,f)+N_{p+k}(r,0;f)+O(\log T(r,f)+\log r)$$

and

$$N_p\left(r,0;f^{(k)}\right)\leq k\overline{N}(r,\infty;f)+N_{p+k}(r,0;f)+O(\log T(r,f)+\log r)$$

如 $r\to\infty$，除去一个可能的有限线性测度例外集。

引理 2.6. [17]设 f 为非常值亚纯函数， a_1 和 a_2 为 f的两个不同的小函数。那么 $T(r,f) \le N(r,f) + N(r,a_1;f) + N(r,a_2;f) + S(r,f)$.

引理 2.7。 [10] 设 f 为一个无穷级亚纯函数。则存在一个序列 $\{z_n\}$， $z_n \to \infty$ 使得 $f^{\#}(z_n) > |z_n|^N$ 对每个 $N > 0$都成立，只要 n 足够大。

引理 2.8。 [3, 引理 1 和 2] 设 f 为一个亚纯函数。如果 f 在 $\mathbb{C}$上具有有界球导数，则 $\rho(f) \le 2$。此外，如果 f有有限个极点，则 $\rho(f) \le 1$。

定理 2.1 的证明。设

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv \alpha^2. \tag{2.2}$$

由于 $\rho(\alpha) < \rho(g)$，由（2.2）可得

$$\rho(f) = \rho(f^n) = \rho((f^n)^{(k)}) = \rho\left(\frac{(g^n)^{(k)}}{\alpha^2}\right) = \rho((g^n)^{(k)}) = \rho(g^n) = \rho(g),$$

即， $\rho(f) = \rho(g)$。由于 $n > k$，利用引理 2.5 可得 $T(r,f) = O(T(r,(f^n)^{(k)}))$。此外，我们还有$T(r,(f^n)^{(k)}) = O(T(r,f))$。因此 $S(r,f) = S(r,(f^n)^{(k)}))$。类似地可得 $S(r,g) = S(r,(g^n)^{(k)}))$。再次由（2.2），有 $S(r,(f^n)^{(k)})) = S(r,(g^n)^{(k)}))$。因此 $S(r,f) = S(r,g)$。

注意，若 z_0是 f的重数为 p_0的零点，则 z_0也是$(f^n)^{(k)}$的重数为 $np_0 - k$的零点。由于 $n > k$，通过常规计算可以得出 z_0 是 α 的重数至少为p_0的零点。因此 $f = 0 \mapsto \alpha = 0$。类似地，我们可以证明 $g = 0 \mapsto \alpha = 0$。

再者，若 z_1 是 f的重数为 p_1的极点，则 z_1 也是$(f^n)^{(k)}$ 的重数为 $np_1 + k$的极点。由于 f 与 g 不计重数地分担 ∞，我们可以得出 z_1 是 α 的重数至少为 p_1的极点。因此$f = \infty \mapsto \alpha = \infty$。类似地，我们可以证明 $g = \infty \mapsto \alpha = \infty$。

现在我们考虑以下两种情形。

情形 1. Le t $\rho(\alpha) > 0$。已知 $\rho_1(\alpha) < \rho(\alpha)$且 $\rho_1(\frac{1}{\alpha}) < \rho(\alpha)$。则由定理 1.C，我们g et

$$\mu(\alpha) = \rho(\alpha) \text{ and } \rho(\alpha) \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

设 $\alpha = \frac{\pi_1}{\pi_2}\exp(\alpha_2)$，其中 π_1 和 π_2 分别是由α 的零点和极点构成的典范乘积， α_2 是一个多项式，满足 $\rho(\alpha) = \deg(\alpha_2)$。令 $\alpha_1 = \frac{\pi_1}{\pi_2}$。于是 $\alpha = \alpha_1\exp(\alpha_2)$。注意到 $\rho(\alpha_1) < \rho(\alpha)$，因此由 (2.3) 得 $\rho(\alpha_1) < \mu(\alpha)$。再由定理 1.B，得到

$$T(r,\alpha_1) = S(r,\alpha). \tag{2.4}$$

现在 $f = 0 \mapsto \alpha = 0$意味着 $N(r, 0; f) \le N(r, 0; \alpha)$，因此

$$\rho_1(f) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log^+ N(r,0;f)}{\log r} \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log^+ N(r,0;\alpha)}{\log r} = \rho_1(\alpha) < \rho(\alpha),$$

即， $\rho_1(f) < \rho(\alpha)$。类似地，我们有 $\rho_1(g) < \rho(\alpha)$、 $\rho_1(\frac{1}{f}) < \rho(\alpha)$ 和 $\rho_1(\frac{1}{g}) < \rho(\alpha)$。由于 $\rho(\alpha) < \rho(f) = \rho(g)$，可知 0 和 ∞ 是 f和 g的 Borel 例外值。因此，由定理 1.C 可得 $\mu(f) = \rho(f)$、 $\mu(g) = \rho(g)$ 和 $\rho(f)$ $\rho(g)$ 是正整数或 ∞。

设 $f = \frac{R_{11}}{R_{12}}\exp(\delta_1)$，其中 R_{11} 和 R_{12} 分别是由 f 的零点和极点构成的典范乘积，而 δ_1 是非常数整函数。再设 $g = \frac{R_{21}}{R_{22}}\exp(\delta_2)$，其中 R_{21} 和 R_{22}分别是由 g 的零点和极点构成的典范乘积，而 δ_2 是非常数整函数。现在根据 Ash [1, 定理 4.3.6],，我们得到 $\rho(R_{11}) = \rho_1(f) < \rho(\alpha)$， $\rho(R_{12}) = \rho_1(\frac{1}{f}) < \rho(\alpha)$， $\rho(R_{21}) = \rho_1(g) < \rho(\alpha)$ 以及 $\rho(R_{22}) = \rho_1(\frac{1}{g}) < \rho(\alpha)$。若取 $R_1 = \frac{R_{11}}{R_{12}}$和 $R_2 = \frac{R_{21}}{R_{22}}$，则有

$$f = R_1\exp(\delta_1) \text{ and } g = R_2\exp(\delta_2). \tag{2.5}$$

显然，对于 $i = 1,2$， $R_i = 0 \mapsto \alpha = 0$ 和 $R_i = \infty \mapsto \alpha = \infty$。此外，我们有 $\rho(R_1) < \rho(\alpha)$，且 $\rho(R_2) < \rho(\alpha)$。现在利用定理 1.B，由 (2.3) 可推出 $T(r,R_1) = S(r,\alpha)$，且 $T(r,R_2) = S(r,\alpha)$。由于 $T(r,\alpha) = S(r,f) = S(r,g)$，我们得到 $T(r,R_1) = S(r,f)$，且 $T(r,R_2) = S(r,g)$。因此，将引理 2.2 应用于 (2.5)，可得 $T(r,f) = T(r,\exp(\delta_1)) + S(r,f)$，且 $T(r,g) = T(r,\exp(\delta_2)) + S(r,g)$。显然 $\rho((R_1^n)_{R_1^n}^{(1)}) < \rho(\alpha)$， $\rho((R_2^n)_{R_2^n}^{(1)}) < \rho(\alpha)$，且 $\rho((R_1R_2)^n) < \rho(\alpha)$。因此

$$\rho\Big(\frac{\alpha^2}{(R_1R_2)^n}\Big) = \rho(\alpha). \tag{2.6}$$

注意，$\frac{(f^n)^{(1)}}{f^n} = \frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}$ 以及 $\frac{(g^n)^{(1)}}{g^n} = \frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}$。现在利用引理 2.1，由 (2.2) 可得

$$(f^n)^{(k)} = \left(\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)\right) R_1^n \exp(n\delta_1) \tag{2.7}$$

and

$$(g^n)^{(k)} = \left(\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\right)\right) R_2^n \exp(n\delta_2), \tag{2.8}$$

其中 $P_{k-1}^*\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)$ 是关于 $\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}$ 的次数至多为 $k-1$ 的微分多项式。

因此，由 (2.2)、(2.7) 和 (2.8)，可得

$$\tilde{P}\tilde{Q}\,(R_1R_2)^n \exp(n(\delta_1+\delta_2)) \equiv \alpha^2, \tag{2.9}$$

其中

$$\tilde{P} = \left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right) \tag{2.10}$$

and

$$\tilde{Q} = \left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\right). \tag{2.11}$$

现在我们要证明 (i) $\rho(\delta_1) < +\infty$, $\rho(\delta_2) < +\infty$ 和 (ii) $\delta_1 + \delta_2$ 是多项式。

若不然，假设 $\delta = \delta_1 + \delta_2$ 是一个超越整函数。当然，$\rho(\exp(-\delta)) = +\infty$。由于 $\rho(R_1) < +\infty$、$\rho(R_2) < +\infty$ 和 $\rho(\alpha) < +\infty$，我们得出 R_1、R_2 和 α 是 $\exp(-\delta)$ 的小函数。现在我们考虑以下两种情况。

情形 A. 令 $k = 1$。于是由 (2.2) 可得

$$n^2 f^{n-1} f^{(1)} g^{n-1} g^{(1)} = \alpha^2. \tag{2.12}$$

令 $h = \frac{1}{fg}$。显然，由 (2.5) 得到 $h = \frac{1}{R_1R_2}\exp(-\delta)$，其中 $\delta = \delta_1 + \delta_2$。注意，$T(r,h) = T(r, \frac{1}{R_1R_2}\exp(-\delta)) = T(r, \exp(-\delta)) + S(r, \exp(-\delta))$。因此，$S(r,h) = S(r, \exp(-\delta))$，从而 $N(r,h) = S(r,h)$。现在由 (2.12) 可推得

$$\left(\frac{g^{(1)}}{g} + \frac{1}{2}\frac{h^{(1)}}{h}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^2 - \frac{\alpha^2 h^n}{n^2}. \tag{2.13}$$

Let

$$\xi = \frac{g^{(1)}}{g} + \frac{1}{2}\frac{h^{(1)}}{h}. \tag{2.14}$$

于是由 (2.13) 和 (2.14) 可得

$$\xi^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^2 - \frac{\alpha^2 h^n}{n^2}. \tag{2.15}$$

首先，假设 $\xi \equiv 0$。然后由 (2.15)，可推得 $h^n = \frac{n^2}{4\alpha^2}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^2$。由于 $T(r, \alpha) = S(r, h)$，可推得 $T(r, h) = S(r, h)$，这是不可能的。

接下来，假设 $\xi \not\equiv 0$。由于 $T(r,\ \alpha) = S(r,\ h)$ 且 $N(r,\ h) = S(r,\ h)$，由 (2.15) 得

$$\begin{aligned} 2T(r,\xi) = T(r,\xi^2) + S(r,\xi) &= T\left(r, \frac{1}{4}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^2 - \frac{\alpha^2 h^n}{n^2}\right) + S(r,\xi) \\ &= m\left(r, \frac{1}{4}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^2 - \frac{\alpha^2 h^n}{n^2}\right) + N\left(r, \frac{1}{4}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^2 - \frac{\alpha^2 h^n}{n^2}\right) + S(r,\xi) \\ &\le n\, m(r,h) + S(r,h) + S(r,\xi) \\ &\le nT(r,h) + S(r,h) + S(r,\xi). \end{aligned} \tag{2.16}$$

这表明可将 $S(r,\xi)$ 替换为 $S(r,h)$。将 (2.15) 微分一次，我们得到

$$\begin{aligned} 2\xi\xi^{(1)} &= \frac{1}{2}\frac{h^{(1)}}{h}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^{(1)} - \frac{\alpha^2 h^{n-1}h^{(1)}}{n} - \frac{2\alpha\alpha^{(1)}h^n}{n^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{h^{(1)}}{h}\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^{(1)} - \frac{\alpha^2 h^n}{n^2}\left(n\frac{h^{(1)}}{h} + 2\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{2.17}$$

现在由 (2.15) 和 (2.17)，我们得到

$$\frac{\alpha^2 h^n}{n^2}\left(n\frac{h^{(1)}}{h} + 2\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha} - 2\frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right) = \frac{1}{2}\frac{h^{(1)}}{h}\left(\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^{(1)} - \frac{h^{(1)}}{h}\frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right). \tag{2.18}$$

设 $n\frac{h^{(1)}}{h} + 2\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha} - 2\frac{\xi^{(1)}}{\xi} \equiv 0$。由于 h 是超越函数，由 (2.18) 我们得到 $\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^{(1)} - \frac{h^{(1)}}{h}\frac{\xi^{(1)}}{\xi} \equiv 0$。积分后我们得到 $\frac{h^{(1)}}{h} = c_0\xi$，其中 c_0 是非零常数。若 $c_0 = 2$，则由 (2.14) 我们得到矛盾。因此 $c_0 \neq 2$，从而由 (2.14) 我们得到 $\frac{g^{(1)}}{g} = \frac{1-c_0}{c_0}\frac{h^{(1)}}{h}$。现在由 (2.15)，我们得到

$$h^n = \frac{n^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{c_0^2}\right)\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^{(1)}. \tag{2.19}$$

由于 $T(r,\ \alpha) = S(r,\ h)$，由 (2.19) 可知 $T(r,\ h) = S(r,\ h)$，这是不可能的。

令 $n\frac{h^{(1)}}{h} + 2\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha} - 2\frac{\xi^{(1)}}{\xi} \not\equiv 0$。注意到 $N(r,\ \frac{h^{(1)}}{h}) = S(r,\ h)$。由于 $g = R_2\exp(\delta_2)$ 且 $T(r,\ R_2) = S(r,\ h)$，因此 $N(r,\ \xi) = S(r,\ h)$。现在由 (2.18) 得

$$\begin{aligned} nT(r,h) &= m(r,h^n) + S(r,h) \\ &\le m\left(r, \frac{1}{2}\frac{h^{(1)}}{h}\left(\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^{(1)} - \frac{h^{(1)}}{h}\frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right)\right) \\ &\quad + m\left(r, \frac{1}{\alpha^2\left(n\frac{h^{(1)}}{h} + 2\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha} - 2\frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right)}\right) + S(r,h) \\ &\le m\left(r, \frac{1}{2}\frac{h^{(1)}}{h}\left(\left(\frac{h^{(1)}}{h}\right)^{(1)} - \frac{h^{(1)}}{h}\frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right)\right) + m\left(r, \alpha^2\left(n\frac{h^{(1)}}{h} + 2\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha} - 2\frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right)\right) \\ &\quad + N\left(r, \alpha^2\left(n\frac{h^{(1)}}{h} + 2\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha} - 2\frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right)\right) + S(r,h) \\ &\le N\left(r, \frac{\xi^{(1)}}{\xi}\right) + S(r,h) + S(r,\xi) \le T(r,\xi) + S(r,h) + S(r,\xi). \end{aligned} \tag{2.20}$$

由于 $S(r,\ \xi) \le S(r,\ h)$，由 (2.16) 和 (2.20) 得 $\frac{n}{2}T(r,\ h) = S(r,\ h)$，这是不可能的。

因此，δ 是一个多项式。显然，$\delta_2^{(1)} = \delta^{(1)} - \delta_1^{(1)}$。接下来我们要证明 $\rho(\delta_1) < +\infty$ 和 $\rho(\delta_2) < +\infty$。否则，假设 $\rho(\delta_1) = +\infty$。由 (2.9)、(2.10) 和 (2.11)，可得

$$\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta^{(1)} - n\delta_1^{(1)}\right)\exp(n\delta) = \frac{\alpha^2}{(R_1R_2)^n}. \tag{2.21}$$

注意，$(R_1^n)_{\overline{R_1^n}}^{(1)}$和$(R_2^n)_{\overline{R_2^n}}^{(1)}+n\delta^{(1)}$是 $\delta_1^{(1)}$ 的小函数。现在利用引理 2.2，可得

$$T\left(r,\Big(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}+n\delta_1^{(1)}\Big)\Big(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n}+n\delta^{(1)}-n\delta_1^{(1)}\Big)\right)=2T(r,\delta_1^{(1)})+S(r,\delta_1^{(1)}),$$

这表明（$(R_1^n)_{\overline{R_1^n}}^{(1)}+n\delta_1^{(1)}$)($(R_2^n)_{\overline{R_2^n}}^{(1)}+n\delta^{(1)}-n\delta_1^{(1)}$)是无穷级的。此外，exp($n\delta$)是有限级的。于是由（2.6）和（2.21）可得矛盾。因此，$\rho(\delta_1)<+\infty$ 且 $\rho(\delta_2)<+\infty$。

情形 B。令 $k\geq 2$。我们要证明 $\rho(\delta_1)<+\infty$。否则，设 $\rho(\delta_1)=+\infty$。由于$\rho((R_1^n)_{\overline{R_1^n}}^{(1)})<+\infty$, 可知$(R_1^n)_{\overline{R_1^n}}^{(1)}$是 $\delta_1^{(1)}$的一个小函数。因此，根据引理 2.2，我们得到

$$T\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}+n\delta_1^{(1)}\Big)=T(r,\delta_1^{(1)})+S(r,\delta_1^{(1)})$$

因此，$(R_1^n)_{\overline{R_1^n}}^{(1)}+n\delta_1^{(1)}$ 是无穷级。由于 α 是有限级，我们得出

$$T(r,\alpha)=S\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}+n\delta_1^{(1)}\Big). \tag{2.22}$$

注意，$S(r,(R_1^n)_{\overline{R_1^n}}^{(1)}+n\delta_1^{(1)})=S(r,(f^n)_{\overline{f^n}}^{(1)})$。由于 $R_1=0\mapsto\alpha=0$ 且 $R_1=\infty\mapsto\alpha=\infty$，由(2.5)可得

$$N(r,0;f^n)=N(r,0;R_1^n)\leq N(r,0,\alpha^n)\leq nT(r,\alpha). \tag{2.23}$$

and

$$N(r,f^n)=N(r,R_1^n)\leq N(r,\alpha^n)\leq nT(r,\alpha). \tag{2.24}$$

同样，由(2.2)可得

$$N(r,0;(f^n)^{(k)})\leq N(r,0;\alpha^2)\leq 2T(r,\alpha). \tag{2.25}$$

因此，由(2.22)-(2.25)可得

$$\begin{aligned}N(r,f^n)+N(r,0;f^n)+N(r,0;(f^n)^{(k)}) &\leq 2(n+1)T(r,\alpha) \\ &= S\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}+n\delta_1^{(1)}\Big)=S\Big(r,\frac{(f^n)^{(1)}}{f^n}\Big).\end{aligned} \tag{2.26}$$

然后将引理 2.3应用于(2.26)，我们得出 $f(z)=\exp(az+b)$，其中 $a\neq 0$和 b是常数。因此，δ_1 是一个多项式，这与 $\rho(\delta_1)=+\infty$这一事实矛盾。

因此，$\rho(\delta_1)<+\infty$。类似地，我们可以证明 $\rho(\delta_2)<+\infty$。由于 $\delta=\delta_1+\delta_2$，由(2.9)得

$$\tilde{P}\tilde{Q}\exp(n\delta)\equiv\frac{\alpha^2}{(R_1R_2)^n}. \tag{2.27}$$

我们现在证明 δ 是一个多项式。否则，假设 δ 是一个超越整函数。显然$\rho(\exp(n\delta))=+\infty$。另一方面 $\rho((R_1^n)_{\overline{R_1^n}}^{(1)}+n\delta_1^{(1)})<+\infty$ 且 $\rho((R_2^n)_{\overline{R_2^n}}^{(1)}+n\delta_2^{(1)})<+\infty$。

由于 $T(r,f_{(i)})\leq(i+1)T(r,f)+S(r,f)$，通过简单计算，我们由(2.10)和(2.11)得到

$$T(r,\tilde{P})\leq K_1T\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}+n\delta_1^{(1)}\Big)+S\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}+n\delta_1^{(1)}\Big) \tag{2.28}$$

and

$$T(r,\tilde{Q})\leq K_2T\Big(r,\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n}+n\delta_2^{(1)}\Big)+S\Big(r,\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n}+n\delta_2^{(1)}\Big) \tag{2.29}$$

分别地，其中 K_1 和 K_2 是固定的正整数。因此

$$\rho(\tilde{P})\leq\rho\Big(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}+n\delta_1^{(1)}\Big)<+\infty\ \text{ and }\ \rho(\tilde{Q})\leq\rho\Big(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n}+n\delta_2^{(1)}\Big)<+\infty. \tag{2.30}$$

由于 $\rho(\exp(n\delta))=+\infty$，由 (2.6)、(2.27) 和 (2.30) 可得矛盾。因此 δ 是一个多项式 .

最后，通过情形 A 和情形 B，我们证明了 $\rho(\delta_1) < +\infty, \rho(\delta_2) < +\infty$，且 $\delta = \delta_1 + \delta_2$ 是一个多项式。现在考虑以下两个子情形。

子情形 1.1. 设 $\rho(f) < +\infty$。由此，根据 (2.5)，我们推得 δ_1 和 δ_2 都是多项式。由于 $\rho(\alpha) < +\infty$，我们有 $T(r, \delta_1^{(1)}) = S(r,\alpha) = T(r, \delta_2^{(1)})$。又由于 $T(r, R_1) = S(r,\alpha) = T(r, R_2)$，可得 $T(r, (R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + n\delta_1^{(1)}) = S(r,\alpha)$，且 $T(r, (R_2^n)_{R_2^n}^{(1)} + n\delta_2^{(1)}) = S(r,\alpha)$。于是由 (2.28) 和 (2.29)，可知 $T(r,P) = S(r,\alpha) = T(r,Q)$。因此，由 (2.27) 可得 $\deg(\delta) = \rho(\alpha)$。所以 $f = R_1\exp(\delta_1)$ 和 $g = R_2\exp(\delta_2)$，其中 R_1 和 R_2 是亚纯函数，满足 $R_i = 0 \mapsto \alpha = 0, R_i = \infty \mapsto \alpha = \infty$，且当 $i = 1$ 为 2 时，$\rho(R_i) < \rho(\alpha)$；δ_1, δ_2 是多项式，满足 $\rho(\alpha) = \deg(\delta_1 + \delta_2)$。

子情形 1.2. 设 $\rho(f) = +\infty$。显然 δ_1 与 δ_2 是超越整函数。由于 $\delta_1 + \delta_2 = \delta$，我们有 $T(r,\delta_1) = T(r,\delta_2) + S(r,\delta_2)$，从而 $\rho(\delta_1) = \rho(\delta_2)$。注意到 $N(r,P) \le N(r, 0; R_1^n)$，$N(r,Q) \le N(r, 0; R_2^n)$，从而 $N(r,\tilde{P}) \le N(r, 0; \alpha^n)$ 且 $N(r,\tilde{Q}) \le N(r, 0; \alpha^n)$。因此 $\rho_1(\frac{1}{\tilde{P}}) \le \rho_1(\alpha^n) = \rho_1(\alpha)$ 且 $\rho_1(\frac{1}{\tilde{Q}}) \le \rho_1(\alpha^n) = \rho_1(\alpha)$。由于 $\rho_1(\alpha) < \rho(\alpha)$，我们得到

$$\rho_1\Big(\frac{1}{\tilde{P}}\Big) < \rho(\alpha) \text{ and } \rho_1\Big(\frac{1}{\tilde{Q}}\Big) < \rho(\alpha). \tag{2.31}$$

再次由（2.9）可得 $N(r, 0; P) \le N(r, 0; \alpha^n)$，以及 $N(r, 0; Q) \le N(r, 0; \alpha^n)$。因此

$$\rho_1(\tilde{P}) \le \rho_1(\alpha^n) = \rho_1(\alpha) < \rho(\alpha) \text{ and } \rho_1(\tilde{Q}) \le \rho_1(\alpha^n) = \rho_1(\alpha) < \rho(\alpha). \tag{2.32}$$

若 $\rho(\alpha) = \deg(\delta)$，则由（2.5）可得 $f = R_1\exp(\delta_1)$ 和 $g = R_2\exp(\delta_2)$，其中 R_1 和 R_2 是满足 $R_i = 0 \mapsto \alpha = 0$、$R_i = \infty \mapsto \alpha = \infty$ 以及 $\rho(R_i) < \rho(\alpha)$（$i = 1, 2$）的亚纯函数，而 δ_1和 δ_2是有限阶超越整函数，满足 $\delta_1 + \delta_2$为多项式且 $\rho(\alpha) = \deg(\delta_1 + \delta_2)$。接下来我们考虑以下两个子情形。

子情形 1.2.1。设 $\rho(\alpha) < \deg(\delta)$。显然，$\rho(\alpha) < \mu(\exp(\delta))$，因此由定理 1.B，我们得出 $T(r,\alpha) = S(r, \exp(\delta))$。显然，$S(r,\alpha)$ 可以替换为 $S(r, \exp(\delta))$。

现在我们考虑以下两个子情形。

子情形 1.2.1.1。设 $\rho(\alpha) \ge \rho(\delta_1^{(1)})$。由于 $\rho(\alpha) < \rho(\exp(\delta))$，我们有 $\rho(\delta_1^{(1)}) = \rho(\delta_2^{(1)}) < \mu(\exp(\delta))$，因此根据定理 1.B，可得 $T(r, \delta_1^{(1)}) = S(r, \exp(\delta)) = T(r, \delta_2^{(1)})$。此外，我们还有 $T(r,\alpha) = S(r, \exp(\delta))$。在此情形下，我们很容易证明 $T(r,P) = S(r, \exp(\delta)) = T(r,Q)$。因此，由 (2.27) 可得$T(r, \exp(\delta)) = S(r, \exp(\delta))$，这不可能。

子情形 1.2.1.2. 令 $\rho(\alpha) < \rho(\delta_1^{(1)})$。

我们要证明 $\rho(P) < \rho(\alpha)$。那么，由于 $\mu(\alpha) = \rho(\alpha)$，我们有 $\rho(P) < \mu(\alpha)$，因此根据定理 1.B，可得 $T(r, P) = S(r, \alpha)$。

首先设 $k = 1$。在这种情况下，我们有 $T(r, (R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + n\delta_1^{(1)}) = S(r, \alpha)$。注意

$$T(r, n\delta_1^{(1)}) \le T\Big(r, \frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) + T\Big(r, \frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n}\Big) + O(1) \le T(r,\alpha) + S(r,\alpha),$$

因此 $\rho(\delta_1) \le \rho(\alpha)$，这是不可能的。

接下来设 $k \ge 2$。若 $\rho(\alpha) \ge \rho(Q)$，则 $\rho(Q) \le \rho(\alpha) < \rho(\exp(\delta)) = \mu(\exp(\delta))$，因此根据定理 1.B，可得 $T(r,Q) = S(r, \exp(\delta))$。在这种情况下，我们也得出矛盾。因此 $\rho(\alpha) < \rho(Q)$。现在由 (2.31) 和 (2.32) 可知，0 和 ∞是 Q的 Borel 例外值。现在定理 1.C给出 $\mu(Q) = \rho(Q)$，因此 $\rho(\alpha) < \mu(Q)$。于是根据定理 1.B，可得 $T(r,\alpha) = S(r,Q)$。现在按情形 B 中相同的方法继续推导，可得 $N(r,g^n)+N(r, 0; g^n)+N(r, 0; (g^n)^{(k)}) \le 2(n+1)T(r,\alpha)$，因此

$$N(r,g^n) + N(r,0;g^n) + N(r,0;(g^n)^{(k)}) = S(r,\tilde{Q}). \tag{2.33}$$

再次由 (2.29) 可知 $S(r, \tilde{Q}) \le S(r, (R_2^n)_{R_2^n}^{(1)} + n\delta_2^{(1)})$。然后由 (2.33) 得到

$$N(r,g^n) + N(r,0;g^n) + N(r,0;(g^n)^{(k)}) = S\Big(r, \frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\Big) = S\Big(r, \frac{(g^n)^{(1)}}{g^n}\Big). \tag{2.34}$$

然后将引理 2.3 应用于 (2.34)，得到 $g(z) = \exp(cz+d)$，其中 $c \neq 0$ 和 d 是常数。因此产生矛盾，因为 $\rho(g) = +\infty$。

因此 $\rho(\alpha) \leq \rho(\tilde{P})$。类似地，我们可以证明 $\rho(\alpha) \leq \rho(\tilde{Q})$.

假设 $\rho(\alpha) = \rho(P)$。则由上文我们有 $T(r,P) = S(r,\exp(\delta))$。若 $\rho(\alpha) = \rho(Q)$，则我们同样有 $T(r,Q) = S(r,\exp(\delta))$。由于 $T(r,\alpha) = S(r,\exp(\delta))$，由 (2.27) 我们得到 $T(r,\exp(\delta)) = S(r,\exp(\delta))$，这是不可能的。若 $\rho(\alpha) < \rho(Q)$，则由上文我们容易推出 $g(z) = \exp(cz+d)$，其中 $c \neq 0$ 与 d 为常数，这是不可能的。因此 $\rho(\alpha) < \rho(P)$。类似地，$\rho(\alpha) < \rho(Q)$。在这种情形下，由上文我们同样有

$$T(r,\alpha) = S(r,\tilde{P}) \text{ and } T(r,\alpha) = S(r,\tilde{Q}). \tag{2.35}$$

若 $k \geq 2$，则如上所述，我们得到 $f(z) = \exp(az+b)$ 和 $g(z) = \exp(cz+d)$，其中 $a,c \neq 0$ 和 b,d 是常数，这是不可能的。因此 $k = 1$，由 (2.35) 可得 $T(r,\alpha) = S(r,(R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + n\delta_1^{(1)})$。显然，$S(r,\alpha) \leq S(r,(R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + n\delta_1^{(1)})$。由于 $T(r,R_1) = S(r,\alpha)$，我们可以推得

$$T\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) \leq T(r,n\delta_1^{(1)}) + S\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) \tag{2.36}$$

and

$$T(r,n\delta_1^{(1)}) \leq T\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) + S\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big). \tag{2.37}$$

显然，由 (2.36) 和 (2.37) 可得 $S(r,n\delta_1^{(1)}) = S(r,(R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + n\delta_1^{(1)})$。

由于 $T(r,(R_2^n)_{R_2^n}^{(1)}) = S(r,\alpha)$，因此 $T(r,(R_1^n)_{R_1^n}^{(1)}) = S(r,n\delta_1^{(1)})$。类似地，$T(r,(R_2^n)_{R_2^n}^{(1)}) = S(r,n\delta_2^{(1)})$。由于 $\delta_1 + \delta_2 = \delta$，我们得到 $S(r,n\delta_1^{(1)}) = S(r,n\delta_2^{(1)})$。因此 $T(r,(R_2^n)_{R_2^n}^{(1)} + n\delta^{(1)}) = S(r,n\delta_1^{(1)})$。

设 $(R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + (R_2^n)_{R_2^n}^{(1)} + n\delta^{(1)} \equiv 0$。积分后，得到 $(R_1R_2)^n = c_0\exp(-n\delta)$，其中 c_0 是一个非零常数。由 (2.21) 可得 $-c_0((R_1^n)_{R_1^n}' + n\delta_1^{(1)})^2 = \alpha^2$，这表明 $\rho(\delta_1^{(1)}) = \rho(\alpha)$。因此得到矛盾。

设 $(R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + (R_2^n)_{R_2^n}^{(1)} + n\delta^{(1)} \not\equiv 0$。现在利用引理 2.6，得到

$$\begin{aligned} T(r,\delta_1^{(1)}) &\leq \overline{N}(r,\delta_1^{(1)}) + \overline{N}\Big(r,0;\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) + \overline{N}\Big(r,0;\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta^{(1)} - n\delta_1^{(1)}\Big) + S(r,\delta_1^{(1)}) \\ &\leq 2T(r,\alpha_1) + S(r,\delta_1^{(1)}), \end{aligned}$$

这表明 $\rho(\delta_1^{(1)}) \leq \rho(\alpha_1) < \rho(\alpha)$，这是不可能的。

子情形 1.2.2. 设 $\rho(\alpha) > \deg(\delta)$。显然 $\rho(\exp(\delta)) < \mu(\alpha)$，因此 $T(r,\exp(\delta)) = S(r,\alpha)$。由于 $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ 且 $T(r,R_1) = S(r,\alpha) = T(r,R_2)$，我们有

$$T\Big(r,\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\Big) = T\Big(r,-\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) + O(\log r) \leq T\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) + S(r,\alpha). \tag{2.38}$$

同理可得

$$T\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) \leq T\Big(r,\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\Big) + S(r,\alpha). \tag{2.39}$$

然后利用引理 2.2、式 (2.27)–(2.29) 和式 (2.38)–(2.39)，可得

$$2T(r,\alpha) + S(r,\alpha) \leq (K_1+2K_2)T\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) + S\Big(r,\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\Big) + S(r,\alpha)$$

因此，$S(r,\alpha)$ 可以替换为 $S(r,(R_1^n)_{R_1^n}^{(1)} + n\delta_1^{(1)})$。

设 $k \geq 2$。然后按照情形 B 中所采用的相同方法，我们得到 $N(r, f^n) + N(r, 0; f^n) + N(r, 0; (f^n)^{(k)}) \leq 2(n+1)T(r, \alpha_1)$，因此由（2.4）得到

$$N(r, f^n) + N(r, 0; f^n) + N(r, 0; (f^n)^{(k)}) = S\Big(r, \frac{(f^n)^{(1)}}{f^n}\Big).$$

现在利用引理 2.3，我们得到 $f(z) = \exp(az + b)$，其中 $a \neq 0$ 和 b 是常数。因此我们得到一个矛盾。

假设 $k = 1$。然后按照子情形 1.2.1.2 中相同的方法进行推导，我们可以得出$T(r, \frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta^{(1)}) = S(r, n\delta_1^{(1)}) = T(r, \frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n})$。

设 $\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + \frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta^{(1)} \equiv 0$。积分后，我们得到 $(R_1R_2)^n = c_0\exp(-n\delta)$，这表明$R_1$ 和 R_2 没有零点和极点。因此， R_1 和 R_2 是非零常数，所以 δ 是常数。现在由 (2.21) 得到 $-c_0(n\delta_1^{(1)})^2 = \alpha^2$。令 $\delta_1^{(1)} = c\alpha$，其中 c 是非零常数。积分后得到 $\delta_1(z) = c\int_0^z \alpha(t)dt + d_1$，其中 d_1 是常数。由于 $\delta_1 + \delta_2 = \delta$，我们令 $\delta_2(z) = -c\int_0^z \alpha(t)dt + d_2$，其中 d_2 是常数。最后令 $f = c_1\exp(c\beta)$ 和 $g = c_2\exp(-c\beta)$，其中 $\beta(z) = \int_0^z \alpha(t)dt$， c、 c_1 和 c_2 是非零常数，且满足 $-(nc)^2(c_1c_2)^n = 1$。

令$\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + \frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta^{(1)} \not\equiv 0$。然后，按照子情形 1.2.1.2 中相同的方法推导，可得 $\rho(\delta_1) \leq \rho(\alpha_1) < \rho(\alpha)$。由于 $\rho(\alpha) = \mu(\alpha)$，因此有 $\rho(\delta_1) < \mu(\alpha)$，进而由定理 1.B 得 $T(r, \delta_1) = S(r, \alpha)$。因此，由 (2.21) 可得 $T(r, \alpha) = S(r, \alpha)$，这是不可能的。

情形 2. 令 $\rho(\alpha) = 0$。在这种情形下， α 只有有限多个零点和极点，因此 α 是非零有理函数。因此，$f = R_1\exp(\delta_1)$ 和 $g = R_2\exp(\delta_2)$，其中 R_1、 R_2 是两个非零有理函数， δ_1、 δ_2 是两个非常数整函数。

设 $F = \frac{f^n}{\alpha}$ 和 $G = \frac{g^n}{\alpha}$。令 $\mathbf{F} = \{F_\omega\}$， $\mathbf{G} = \{G_\omega\}$，其中 $F_\omega(z) = F(z + \omega)$ 且 $G_\omega(z) = G(z + \omega)$， $z \in \mathbb{C}$。显然，F 和 G 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的两个亚纯函数族。

现在我们考虑以下子情况。

子情况 2.1. 设 F 在 $\mathbb{C}$ 上正规。那么由定理 1.D 可得 $F^\#(\omega) = F_\omega^\#(0) \leq M$，对某个$M > 0$ 以及所有 $\omega \in \mathbb{C}$均成立。因此，由引理 2.8 可得 $\rho(F) \leq 1$。由于 $\rho(\alpha) = 0$，故有 $\rho(f) = 1$ 且$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$，因此 $\rho(g) = 1$。显然，$\deg(\delta_1) = 1$ 且 $\deg(\delta_2) = 1$。此外， P和 Q 是非零有理函数。现在由 (2.9) 可知， $\delta_1 + \delta_2$ 是一个常数，记为 c，因此 $\delta_1^{(1)} = -\delta_2^{(1)}$。然后由 (2.9)–(2.11) 可得

$$\left(\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)\right)\left(\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} - n\delta_1^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} - n\delta_1^{(1)}\right)\right)$$
$$= \frac{\exp(-nc)\alpha^2}{(R_1R_2)^n}. \tag{2.40}$$

令 $|z| \to \infty$，由（2.40）可得 $2\deg(\alpha) = n\deg(R_1R_2)$。最后， $f = R_1\exp(\delta_1)$ 且$g = R_2\exp(-\delta_1)$，其中 R_1、R_2 为非零有理函数， δ_1 为非常数多项式，满足 $\deg(\delta_1) = 1$ 且 $2\deg(\alpha) = n\deg(R_1R_2)$。特别地，若 $\alpha \equiv 1$，则 $f(z) = c_1\exp(cz)$ 且$g(z) = c_2\exp(-cz)$，其中 c、 c_1 和 c_2 为非零常数，满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$。

子情形 2.2。设 F 在 $\mathbb{C}$ 上不是正规函数族。则至少存在一个 $z_0 \in \Delta$，使得 F 在 z_0 处不是正规的。为简便起见，假设 $z_0 = 0$。现在根据定理 1.D，存在一个亚纯函数序列 $\{F(z + \omega_j)\} \subset \mathbf{F}$，其中 $z \in \Delta$，且 $\{\omega_j\}$ 是一个复数序列，满足当 $\omega_j \to \infty$时， $F^\#(\omega_j) \to \infty$。由于 α 只有有限个零点和极点，因此存在一个 $r > 0$，使得在 $D = \{z : |z| \geq r\}$ 中有 $\alpha \neq 0$、 ∞。我们知道，对于$i = 1$， 2，有 $R_i = 0 \mapsto \alpha = 0$ 和 $R_i = \infty \mapsto \alpha = \infty$。因此， $F \neq 0$、 ∞，以及 $G \neq 0$、 ∞ 属于 $D = \{z : |z| \geq r\}$。由于当 $j \to \infty$时 $\omega_j \to \infty$，不妨设对所有 j 都有 $|\omega_j| \geq r + 1$。注意到 $|\omega_j + z| \geq |\omega_j| - |z|$，因此对所有$z \in \Delta$ 都有 $\omega_j + z \in D$。于是，$\{F(z + \omega_j)\}$ 和 $\{G(z + \omega_j)\}$ 是 $z \in \Delta$ 中的两个没有零点的解析函数族。现在根据引理 1.A，存在

(i) 一个序列 $\{z_j\} \subset \Delta$，其中 $z_j \to 0$ 为 $j \to \infty$；(ii) 一个由正数组成的序列 $\{\rho_j\}$，其中 $\rho_j \to 0^+$ 为 $j \to \infty$；(iii) $\{F(\omega_j + z)\}$ 的一个子序列 $\{F(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)\}$

使得

$$h_j(\zeta) = \rho_j^{-k} F(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta) = \rho_j^{-k} \frac{f^n(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} \to h(\zeta) \tag{2.41}$$

在 $\mathbb{C}$ 中球面局部一致，其中 h 是一个没有零点的非常数整函数，满足 $h^{\#}(\zeta) \le h^{\#}(0) = 1$。显然，由引理 2.8 可得 $\rho(h) \le 1$。同样显然,

$$\frac{\alpha^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} \to 0 \tag{2.42}$$

当 $j \to \infty$ 时。现在通过简单计算，由（2.41）可推出

$$\begin{aligned} \rho_j^{-k+1} \frac{(f^n)^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} &= h_j^{(1)}(\zeta) + \rho_j^{-k+1} \frac{\alpha^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha^2(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} f^n(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta) \\ &= h_j^{(1)}(\zeta) + \rho_j \frac{\alpha^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} h_j(\zeta). \end{aligned} \tag{2.43}$$

然后利用（2.41）、（2.42）和（2.43），我们得到 $\rho_j^{-k+1} \frac{(f^n)^{(1)}(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)} \to h^{(1)}(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$中球面局部一致。因此，通过数学归纳法，我们可以证明

$$h_j^{(i)}(\zeta) = \frac{(f^n)^{(i)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} \to h^{(i)}(\zeta) \tag{2.44}$$

在 $\mathbb{C}$ 中球面局部一致，其中 i 是任意正整数。

现在由（2.41）和（2.44）可知

$$\frac{h_j^{(1)}(0)}{h_j(0)} = \rho_j \frac{(f^n)^{(1)}(w_j + z_j)}{f^n(w_j + z_j)} \to \frac{h^{(1)}(0)}{h(0)}$$

因此，由 (1.1) 可得

$$\rho_j \left| \frac{(f^n)^{(1)}(\omega_j + z_j)}{f^n(\omega_j + z_j)} \right| = \frac{1 + |f^n(\omega_j + z_j)|^2}{|(f^n)^{(1)}(\omega_j + z_j)|} \frac{|(f^n)^{(1)}(\omega_j + z_j)|}{|f^n(\omega_j + z_j)|} = \frac{1 + |f^n(\omega_j + z_j)|^2}{|f^n(\omega_j + z_j)|} \to \left| \frac{h^{(1)}(0)}{h(0)} \right|. \tag{2.45}$$

Let

$$(\hat{h}_j)^{(k)}(\zeta) = \frac{(g^n)^{(k)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}.$$

于是，由 (2.2) 可得

$$(h_j)^{(k)}(\zeta)(\hat{h}_j)^{(k)}(\zeta) = 1. \tag{2.46}$$

显然，将 (2.44) 应用于 (2.46)，可得 $(h_j)^{(k)}(\zeta) \to (h_1)\zeta$ 在 $\mathbb{C}$ 中球面局部一致，其中 h_1 是一个没有零点的非常数整函数。应用高阶导数公式，可推得 $h_j(\zeta) \to h(\zeta)$ 在 $\mathbb{C}$ 中球面局部一致。因此，由 (2.44) 和 (2.46) 可得

$$h^{(k)}(\zeta)\hat{h}^{(k)}(\zeta) \equiv 1. \tag{2.47}$$

由于 $\rho(h) \le 1$，由 (2.47) 可得 $\rho(h) \le 1$。由于 h 和 h 是没有零点的非常数整函数，因此 $\rho(h) = 1$ 且 $\rho(h) = 1$。在此情形下，由 (2.47) 可得 $h(z) = (c_1)\exp(cz)$ 且 $h(z) = c_2\exp(-cz)$，其中 c、c_1 和 c_2 是非零常数。现在，由 (2.45) 可得

$$\frac{1 + |f^n(\omega_j + z_j)|^2}{|f^n(\omega_j + z_j)|} \to |c|,$$

这表明 $\lim_{j\to\infty} f^n(\omega_j + z_j) \neq 0, \infty$ 因此由 (2.41) 得到 $h_j(0) = \rho_j^{-k} \frac{f^n}{\alpha}(\omega_j+z_j)\,(\omega_j+z_j) \to \infty$。另一方面，由 (2.41) 得到 $h_j(0) \to h(0) = c_1$。因此，我们得到了一个矛盾。

这就完成了证明。

□

定理 2.2 的证明。假设

$$(f^n)^{(k)}(g^n)^{(k)} \equiv \alpha^2. \tag{2.48}$$

显然 $\rho(f) = \rho(g)$。由于 $T(r,f) = O(T(r,(f^n)^{(k)}))$ 且 $T(r,(f^n)^{(k)}) = O(T(r,f))$，我们可以得出 $\rho_2(f) = \rho_2((f^n)^{(k)})$。类似地，$\rho_2(g) = \rho_2((g^n)^{(k)})$。再由 (2.48) 我们可以推出 $\rho_2((f^n)^{(k)}) = \rho_2((g^n)^{(k)})$。因此我们得出

$$\rho_2(f) = \rho_2(g). \tag{2.49}$$

设 $f = \frac{f_{11}}{f_{12}}$，其中 f_{11} 与 $f_{12} \not\equiv 0$ 为整函数。则由魏尔斯特拉斯因子分解定理，我们可以写成 $f_{11}(z) = z^{k_{11}} P_{1,0}(z)\exp(\delta_{11}(z))$，其中 k_{11} 是 0 的重数，$P_{1,0}$ 是由 f 的非零点构成的初等因子之积，且 δ_{11} 是一个整函数。再由魏尔斯特拉斯因子分解定理，我们可以写成 $f_{12}(z) = z^{k_{12}} P_{1,\infty}(z)\exp(\delta_{12}(z))$，其中 k_{12} 是 0 的重数，$P_{1,\infty}$ 是由 f 的非零极点构成的初等因子之积，且 δ_{12} 是一个整函数。因此

$$f = R_1 \exp(\delta_1), \tag{2.50}$$

其中 $R_1(z) = z^{k_1} \frac{P_{1,0}(z)}{P_{1,\infty}(z)}$，$k_1 = k_{11} - k_{12}$ 和 $\delta_1 = \delta_{11} - \delta_{12}$。类似地，我们可以取

$$g = R_2 \exp(\delta_2), \tag{2.51}$$

其中 $R_2(z) = z^{k_2} \frac{P_{2,0}(z)}{P_{2,\infty}(z)}$，$k_1 = k_{21} - k_{22}$ 和 $\delta_2 = \delta_{21} - \delta_{22}$。需要注意的是，只有当 f 和 g 都只有有限个零点和极点时，R_1 和 R_2 才是非零有理函数。

首先，我们要估计计数函数 $N(r, 0; f)$ 和 $N(r, 0; g)$。

为此，设 z_0 是 f 的一个重数为 p_0的零点。那么，z_0 也是 $(f^n)^{(k)}$ 的一个零点，重数为$np_0 - k$。因此，z_0 有以下几种可能：

(i) z_0 既不是 $(g^n)^{(k)}$ 的零点，也不是 g的极点；(ii) z_0 是 $(g^n)^{(k)}$ 的零点，但不是 g的零点；

(iii) z_0 是 g的零点；(iv) z_0 是 g的极点。

对于情形（i）：在此情形下，由（2.48）可知，z_0 是 α 的一个重数为$\frac{np_0-k}{2} \geq p_0$的零点。对于情形（$ii$）：设 z_0 是（g^n）$^{(k)}$ 的一个重数为 q_0 的零点，且 $g(z_0) \neq 0$。在此情形下，由（2.48）可知，z_0 是 α 的一个重数为$\frac{np_0-k+q_0}{2} > p_0$的零点。

对于情形（iii）：设 z_0 是 g 的一个重数为 q_0的零点。于是由（2.48）可知，z_0 是 α 的一个重数为 $\frac{n(p_0+q_0)}{2} - 2k \geq p_0$的零点。

对于情形（iv）：设 z_0 是 g 的一个重数为 s_0的极点。由于 $n > 2k$，$np_0 - k = ns_0 + k$不可能成立。若 $np_0 - k > ns_0 + k$，则由（2.48）可知，z_0 是 α 的一个重数为$\frac{n(p_0-s_0)}{2} - 2k \geq 1$的零点。另一方面，若 $np_0 - k < ns_0 + k$，则由（2.48）可知，z_0 是 α 的一个重数为 $\frac{n(s_0-p_0)}{2} + 2k \geq 1$的极点。由于 $n > 2k$，我们必有 $p_0 \leq s_0$。

因此我们得出结论：

$$\overline{N}(r,0;f) \leq N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha). \tag{2.52}$$

注意，如果 ∞是 g的 Picard 例外值，那么我们有 $N(r, 0; f) \leq N(r, 0; \alpha)$。类似地，我们有

$$\overline{N}(r,0;g) \leq N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha). \tag{2.53}$$

如果 ∞ 是 f的 Picard 例外值，那么我们有

$$N(r,0;g) \leq N(r,0;\alpha). \tag{2.54}$$

接下来我们要估计计数函数 $N(r, f)$ 和 $N(r, g)$。

设 z_1 是 f 的一个重数为 p_1的极点。那么 z_1 也是 $(f^n)^{(k)}$ 的一个重数为$np_1 + k$的极点。对于 z_1，以下情况之一成立：(I) z_1 是 $(g^n)^{(k)}$ 的零点，但不是 g 的零点；(II)z_1 既不是 $(g^n)^{(k)}$ 的零点，也不是 g 的极点；(III) z_1 是 g 的零点，且 (IV) z_1 是 g 的极点。

对于情况 (*I*): 设 z_1 是 $(g^n)^{(k)}$ 的一个重数为 q_1 的零点，且满足 $g(z_1) \neq 0$。如果 $q_1 > np_1+k$，那么 z_1 必须是 α 的零点。如果 $q_1 < np_1 + k$，那么 z_1 是 α 的极点。但当$q_1 = np_1 + k$ 时，无法得出任何结论，因此我们无法估计计数函数

$$N_E(r,\infty; f^n \mid (g^n)^{(k)} = 0 \mid g^n \neq 0) \tag{2.55}$$

借助 α 的零点或极点。

对于其余可能情形，z_1 必定是 α 的零点或 α 的极点。因此

$$\overline{N}(r,f) \leq \overline{N}_E(r,\infty; f^n \mid (g^n)^{(k)} = 0 \mid g^n \neq 0) + N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha). \tag{2.56}$$

同理，我们有

$$\overline{N}(r,g) \leq \overline{N}_E(r,\infty; g^n \mid (f^n)^{(k)} = 0 \mid f^n \neq 0) + N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha). \tag{2.57}$$

此外，根据上述讨论可知，若 z_0 是 f 的一个重数为 p_0 的零点，且是 g 的一个重数为s_0 的极点，则 z_0 将是 α 的一个重数为 $^{n\,(s_0-p_0)}{}_{2}{}^{+2k}$ 的极点，其中 $p_0 \leq s_0$ 且 $np_0 - k < ns_0 + k$。显然，z_0 将是 R_1R_2 的一个重数为 $s_0 - p_0 \leq {}^{n\,(s_0-p_0)}{}_{2}{}^{+2k}$ 的极点。因此我们得出

$$\begin{aligned} & N(r,0;R_1R_2) + N(r,R_1R_2) \\ \leq\ & 2N(r,0;\alpha) + 2N(r,\infty;\alpha) + N_E(r,\infty; f^n \mid (g^n)^{(k)} = 0 \mid g^n \neq 0) \\ & + N_E(r,\infty; g^n \mid (f^n)^{(k)} = 0 \mid f^n \neq 0) \\ \leq\ & 2N(r,0;\alpha) + 3N(r,\infty;\alpha) + N(r,0;(g^n)^{(k)} = 0 \mid g^n \neq 0) + N(r,0;(f^n)^{(k)} = 0 \mid f^n \neq 0). \end{aligned} \tag{2.58}$$

现在将引理 2.5 应用于 (2.48)，由 (2.52) 和 (2.53) 可得

$$\begin{aligned} (k+1)\,\overline{N}(r,f) &= N_{k+1}(r,(f^n)^{(k)}) \\ &= N_{k+1}\left(r,\frac{\alpha^2}{(g^n)^{(k)}}\right) \\ &\leq N_{k+1}(r,0;(g^n)^{(k)}) + N_{k+1}(r,\alpha) \\ &\leq N_{2k+1}(r,0;g^n) + k\,\overline{N}(r,g^n) + (k+1)N(r,\alpha) + O(\log T(r,g) + \log r) \\ &\leq (2k+1)\overline{N}(r,0;g) + k\,\overline{N}(r,g) + (k+1)N(r,\alpha) + O(\log T(r,g) + \log r) \\ &\leq k\overline{N}(r,g) + (3k+2)\,[N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha)] + O(\log T(r,g) + \log r). \end{aligned} \tag{2.59}$$

同理

$$(k+1)\,\overline{N}(r,g) \leq k\,\overline{N}(r,f) + (3k+2)\,[N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha)] + O(\log T(r,f) + \log r). \tag{2.60}$$

因此，由 (2.59) 和 (2.60)，可得

$$\begin{aligned} \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,g) \leq\ & (6k+4)\,[N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha)] + O(\log T(r,f) + \log r) \\ & + O(\log T(r,g) + \log r). \end{aligned} \tag{2.61}$$

设 $F = \frac{f^n}{\alpha}$ 和 $G = \frac{g^n}{\alpha}$。令 $\mathbf{F} = \{F_\omega\}$，$\mathbf{G} = \{G_\omega\}$，其中 $F_\omega(z) = F(z+\omega)$ 且 $G_\omega(z) = G(z+\omega)$，$z \in \mathbb{C}$。显然，$\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{G}$ 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的两个亚纯函数族。

现在我们分以下两种情形讨论。

情形 1. 令 $\rho(\alpha) = 0$。在此情形下，α 只有有限个零点和极点，因此 α 是有理函数。由 (2.52) 和 (2.53) 可知，f 和 g 都只有有限个零点。

现在我们考虑以下两种子情形。

子情形 1.1. 设 $\mathbf{F}$ 在 $\mathbb{C}$ 上正规。则由马蒂定理，对某个$M > 0$ 以及所有 $\omega \in \mathbb{C}$，有 $F^{\#}(\omega) = F^{\#}_{\omega}(0) \leq M$。因此由引理 2.8，我们有 $\rho(F) \leq 2$。由于 $\rho(\alpha) = 0$，由此可得$\rho(f) \leq 2$，从而 $\rho(g) \leq 2$。显然由 (2.50) 和 (2.51) 可推得 $\deg(\delta_1) \leq 2$ 且 $\deg(\delta_2) \leq 2$。另一方面，由 (2.61)，当 $r \to \infty$ 时我们得到 $N(r,f) + N(r,g) = O(\log r)$。这表明 f和g 至多有有限个极点。因此由 (2.50) 和 (2.51) 我们断定 R_1 和R_2 均为有理函数。再由 (2.9) 可见 $\delta_1 + \delta_2$ 是常数，从而 $\delta_1^{(1)} = -\delta_2^{(1)}$。现在由 (2.40) 我们得到 $2k\deg(\delta_1^{(1)}) = \deg(\alpha^2/(R_1R_2)^n)$。特别地，若 $\alpha \equiv 1$，则 R_1 和 R_2 都不能有零点。由于 $n > 2k$，由 $2k\deg(\delta_1^{(1)}) = \deg(\alpha^2/(R_1R_2)^n)$ 我们断定 $\deg(\delta_1) = 1$，且R_1、R_2 化为非零常数。最后 $f = R_1\exp(\delta_1)$ 且 $g = R_2\exp(\delta_2)$，其中 R_1、R_2 为

非零有理函数，且 δ_1、δ_2 是次数至多为二的非恒定多项式，使得$\delta_1^{(1)} = -\delta_2^{(1)}$且 $2k\deg(\delta_1^{(1)}) = 2\deg(\alpha) - n\deg(R_1R_2)$。特别地，若 $\alpha \equiv 1$，则 $f(z) = c_1\exp(cz)$且 $g(z) = c_2\exp(-cz)$，其中 c、c_1和 c_2是非零常数，使得 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k} = 1$。

子情形 1.2. 设 F 在 $\mathbb{C}$上不正规。假设 F 在 $z_0 = 0$处不正规。然后按照定理 2.1 证明中子情形 2.2 的同样做法，我们可以容易地构造出 $z \in \Delta$ 中两族没有零点的亚纯函数 $\{F(z+\omega_j)\}$和 $\{G(z+\omega_j)\}$。现在若考虑由 (2.55) 给出的计数函数，则可得出 $F(z+\omega_j)$的每个极点的重数都是 n的倍数。对 $G(z+\omega_j)$亦然。显然我们应用引理 1.A，得到

$$h_j(\zeta) = \rho_j^{-k}F_j(z_j+\rho_j\zeta) = \frac{f^n(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)} \to h(\zeta) \tag{2.62}$$

在 $\mathbb{C}$中球面局部一致，其中 h是一个没有零点的非常值亚纯函数，使得 $h^{\#}(\zeta) \le h^{\#}(0) = 1$。显然由引理 2.8，我们得到 $\rho(h) \le 2$。由 Hurwitz 定理，我们可以说 h 的每个极点的重数都是 n的倍数。因此我们假设 $h = h^n$，其中 h 是某个非常值亚纯函数。若取 $(\hat{h}_j(\zeta))^{(k)} = (g^n)^{(k)}(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)\,\alpha(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)$，然后按照 ^ ^ 定理 2.1 证明中子情形 2.2 的同样做法，我们可以证明 $\overline{h}_j(\zeta) \to h_1(\zeta)$ ^ 在 $\mathbb{C}$中球面局部一致，其中 h_1 是某个没有 ^ 零点的非常值亚纯函数。利用 Hurwitz 定理，我们得出 h_1的每个极点的重数是 ^ ^ ^ n 的倍数，因此可以假设 $h_1 = h^n$，其中 h 是某个非常值亚纯函数。由于 $(h_j(\zeta))^{(k)} \to (\bar{h}^n(\zeta))^{(k)}$以及 $(\hat{h}_j(\zeta))^{(k)} \to (\hat{h}^n(\zeta))^{(k)}$，由 (2.48) 我们得到

$$(\bar{h}^n(\zeta))^{(k)}(\hat{h}^n(\zeta))^{(k)} \equiv 1. \tag{2.63}$$

^ 由于 $\rho(h) \le 2$，由（2.63）可得 $\rho(h) \le 2$。再由（2.61）可以容易地推出，$N(r,h) + N(r,\hat{h}) = O(\log r)$。这表明 $\bar{h}$和 $\hat{h}$只有有限个极点。令 $\bar{h} = \frac{1}{Q_3}\exp(\delta_{11})$和 $\hat{h} = \frac{1}{Q_4}\exp(\delta_{12})$，其中 Q_3、Q_4 为非零多项式，δ_{11}、δ_{12} 为次数至多为二的非恒定多项式。现在以与子情形 1.1 中相同的方式继续推导，我们可以得出 Q_3、Q_4 为非零常数，而 δ_{11}、δ_{12} 为次数为一的多项式，且 $\delta_{11}^{(1)} = -\delta_{12}^{(1)}$。因此由 ^（2.63）可得 $h(z) = \bar{c}_1\exp(cz)$和 $h(z) = \hat{c}_2\exp(-cz)$，其中 c、$\bar{c}_1$和$\hat{c}_2$为非零常数。

现在按照定理 2.1 的子情形 2.2 的证明中所用的同样方式进行，我们得到一个矛盾。

情形 2. 设 $\rho(\alpha) > 0$。在此情形中，我们有要么 $N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha) = O(\log r)$，要么 $N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha) \ne O(\log r)$。因此我们必须考虑以下两个子情形。

子情况 2.1. 设当 $r \to \infty$时，$N(r,0;\alpha) + N(r,\alpha) = O(\log r)$。因此 $\alpha = R\exp(P)$，其中 R是非零有理函数，P 是多项式。此外，由 (2.52) 和 (2.53)，我们得出 f 和 g 都只有有限个零点。

现在我们分为以下两个子情形。

子情形 2.1.1. 设 $\rho(f) < +\infty$。显然 $\rho(g) < +\infty$。现在由 (2.61)，我们得到当 $r \to \infty$时，$N(r,\overline{f}) + N(r,g) = O(\log r)$。这表明 f和 g 至多有有限个极点。因此由 (2.50) 和 (2.51)，我们看到 R_1 和 R_2 都是有理函数，并且 δ_1、δ_2 是多项式，使得 $\deg(\delta_1) = \rho(f)$且 $\deg(\delta_2) = \rho(g)$。然后由 (2.9)-(2.11)，我们得到

$$\left(\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_1^n)^{(1)}}{R_1^n} + n\delta_1^{(1)}\right)\right)\left(\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\right)^k + P_{k-1}^*\left(\frac{(R_2^n)^{(1)}}{R_2^n} + n\delta_2^{(1)}\right)\right)$$
$$= \frac{\exp(-n(\delta_1+\delta_2)+2P)R^2}{(R_1R_2)^n}. \tag{2.64}$$

显然，由 (2.64) 可得 $n(\delta_1+\delta_2) - P$是一个常数。由于 $\rho(f) = \rho(g)$，因此 $\deg(\delta_1) = \deg(\delta_2)$，从而 $\delta_1^{(1)} \not\equiv 0$。于是，在 (2.64) 两边取 $|z| \to \infty$，得到$2k\deg(\delta_1^{(1)}) = 2\deg(R) - n\deg(R_1R_2)$。最后，$f = R_1\exp(\delta_1)$且 $g = R_2\exp(\delta_2)$，其中 R_1, R_2是非零有理函数，δ_1, δ_2 是非恒定多项式，并满足 $\deg(\delta_1) = \deg(\delta_2)$，$n(\delta_1+\delta_2) - P$是一个常数，且 $\deg(2k) = 2\deg(R) - n\deg(R_1R_2)$。

子情况 2.1.2. 设 $\rho(f) = +\infty$。由于 $\rho(\alpha) < \rho(f)$，可得 $\rho(F) = +\infty$。于是由引理 2.7，存在一个序列 $\{\omega_j\}$，满足 $\omega_j \to \infty$，使得对每个 $N > 0$

$$F^{\#}(\omega_j) > |\omega_j|^N, \tag{2.65}$$

若 j充分大。注意 $F_{\#j}(0) = F^{\#}(\omega_j) \to \infty$当 $j \to \infty$。于是由定理 1.D，我们得出$\{F_j\}$在 $z = 0$处不正规。我们采用与定理 2.1 的子情形 2.2 类似的方法，但作如下必要修改：

由 (1.1) 我们有$\rho_j = {}_{F^{\#}}{}^{\frac{1}{(\omega_j+z_j)\cdot\alpha}}$ 我们还知道 $F_{\#}(\omega_j + z_j) = F_{\#j}(z_j) \geq F_{\#j}(0) = F_{\#}(\omega_j)$。因此 $\rho_j \leq {}_{F^{\#}}{}^{\frac{1}{(\omega_j)}}$ 从~~而由~~ ~~(~~2.65)，我们看到对每一个 $N > 0$

$$\rho_j < |\omega_j|^{-N}, \tag{2.66}$$

若 j 充分大。我们还有

$$\frac{\alpha^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} = \frac{R^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{R(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} + P^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta). \tag{2.67}$$

注意到 $\frac{R^{(1)}(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)}{R(\omega_j+z_j+\rho_j\zeta)} \to 0$ 当 $j \to \infty$。设 $\deg(P^{(1)}) = s$。假设 $N > s$。则由 (2.66) 可得 $\lim_{j\to\infty} \rho_j|\omega_j|^s \leq \lim_{j\to\infty} |\omega_j|^{s-N} = 0$。由于 $|P^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)| = O(|\omega_j|^s)$，我们有

$$\rho_j|P^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)| = O(\rho_j|\omega_j|^s) \to 0 \text{ as } j \to \infty. \tag{2.68}$$

则由 (2.67) 和 (2.68)，我们有

$$\rho_j \frac{\alpha^{(1)}(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)}{\alpha(\omega_j + z_j + \rho_j\zeta)} \to 0 \text{ as } j \to \infty.$$

现在我们清楚地看到，若沿用定理 2.1 的子情形 2.2 的证明，则必将得到矛盾。

子情形 2.2。设 $N(r, 0; \alpha)+N(r,\alpha)\neq O(\log r)$ 当 $r \to \infty$。则对给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $R > 0$使得 $N(r, \alpha) < r^{\rho_1(\frac{1}{\alpha})+\varepsilon}$且 $N(r, \frac{1}{\alpha}) < r^{\rho_1(\alpha)+\varepsilon}$, $\forall\, r > R$。设 $\rho_1 = \max\{\rho_1(\frac{1}{\alpha}), \rho_1(\alpha)\}$。因此$N(r,\alpha) < r^{\rho_1+\varepsilon}$且 $N(r, \frac{1}{\alpha}) < r^{\rho_1+\varepsilon}$, $\forall\, r > R$。从而由 (2.52) 和 (2.53)，我们推出

$$\overline{N}(r, 0; f) < r^{\rho_1+\varepsilon} \text{ and } \overline{N}(r, 0; g) < r^{\rho_1+\varepsilon} \tag{2.69}$$

$\forall\, r > R$。接下来立即讨论以下两个子情形。

子情形 2.2.1. 设 $\rho(f) < +\infty$。那么由 (2.61) 可得

$$\overline{N}(r, f) < r^{\rho_1+\varepsilon} \text{ and } \overline{N}(r, g) < r^{\rho_1+\varepsilon}$$

$\forall\, r > R$。利用定理 1.A，得到

$$T(r, \tilde{P}) = T\Big(r, \frac{(f^n)^{(k)}}{f^n}\Big) \leq \overline{N}(r, f) + (k + 1)\overline{N}(r, 0; f) + O(\log r) < r^{\rho_1+\varepsilon},$$

$\forall\, r > R$。类似地

$$T(r, \tilde{Q}) = T\Big(r, \frac{(g^n)^{(k)}}{g^n}\Big) < r^{\rho_1+\varepsilon},$$

~ ~$\forall\, r > R$。因此 $\rho(P) \leq \rho_1 < \rho(\alpha) = \mu(\alpha)$，且 $\rho(Q) \leq \rho_1 < \rho(\alpha) = \mu(\alpha)$。于是由定理 1.B, ~ ~可得 $T(r, P) = S(r, \alpha)$，且 $T(r, Q) = S(r, \alpha)$。

同样，由于 $N(r, 0; (f^n)^{(k)} \mid f \neq 0) \leq T(r, \tilde{P})$，且 $N(r, 0; (g^n)^{(k)} \mid g \neq 0) \leq T(r, \tilde{Q})$，我们得 et

$$N(r, 0; (f^n)^{(k)} \mid f \neq 0) < r^{\rho_1+\varepsilon} \text{ and } N(r, 0; (g^n)^{(k)} \mid g \neq 0) < r^{\rho_1+\varepsilon},$$

$\forall\, r > R$。因此，由（2.58）可得

$$\rho_1(0; R_1R_2) \leq \rho_1 < \rho(\alpha) \text{ and } \rho_1(\infty; R_1R_2) \leq \rho_1 < \rho(\alpha).$$

约去公共因子后，我们可以假设

$$R_1R_2 = z^{k_1+k_2}\frac{P_{1,0}P_{2,0}}{P_{1,\infty}P_{2,\infty}} = z^{k_3}\frac{P_{3,0}}{P_{3,\infty}},$$

其中 $k_3 = k_1 + k_2$, $P_{3,0}$ 和 $P_{3,\infty}$ 分别是由非零点和极点构成的初等因子的乘积。现在根据 Ash [1, 定理 4.3.6], , 可得 $\rho(P_{3,0}) = \rho_1(0;P_{3,0}) \leq \rho_1 < \rho(\alpha)$, 以及$\rho(P_{3,\infty}) = \rho_1(0;P_{3,\infty}) \leq \rho_1 < \rho(\alpha)$。显然 $\rho(R_1R_2) < \rho(\alpha) = \mu(\alpha)$。然后由定理 1.B 可得$T(r, R_1R_2) = S(r,\alpha)$。

由于 $T(r,P) = S(r,\alpha)$, $T(r,Q) = S(r,\alpha)$ 且 $T(r,R_1R_2) = S(r,\alpha)$, 由 (2.9) 我们得出 $\deg(\delta_1 + \delta_2) = \rho(\alpha)$。此外, 由上文我们有 $\rho_1(0;\ f) < \rho(\alpha)$, $\rho_1(\infty;\ f) \leq \rho(\alpha)$, $\rho_1(0;\ g) \leq \rho(\alpha)$ 以及 $\rho_1(\infty;\ g) < \rho(\alpha)$。因此 $f = R_1\exp(\delta_1)$ 且 $g = R_2\exp(\delta_2)$, 其中 $\rho_1(0;\ R_i) < \rho(\alpha)$, $\rho_1(\infty;R_i) < \rho(\alpha)$ 对于 $i = 1,\ 2$, R_1R_2 是 α 的小函数, δ_1 和 δ_1 是非恒定多项式, 使得 $\deg(\delta_1 + \delta_2) = \rho(\alpha)$。

子情形 2.2.2. 设 $\rho(f) = +\infty$。由于 $\rho(f) = \rho(g)$, 因此有 $\rho(f) = +\infty$。在此情形下, 我们有 $f = R_1\exp(\delta_1)$ 和 $g = R_2\exp(\delta_2)$, 其中 δ_1 和 δ_2 是超越整函数。接下来我们考虑以下两个子情形。

子情形 2.2.2.1. 设 $\rho_2(f) < +\infty$。于是由 (2.49), 有 $\rho_2(f) = \rho_2(g) < \rho(f)$。因此有 $\log T(r,f) < r^{\rho_2(f)+\varepsilon}$ 以及 $\log T(r,g) < r^{\rho_2(f)+\varepsilon}$, $\forall\ r > R$。设 $\rho_2 = \max\{\rho_1(\alpha)\ \rho_1(\frac{1}{\alpha})\ \rho_2(f)\}$。现在由 (2.61), 得到 $N(r,f) = O(r^{\rho_2+\varepsilon})$ 和 $N(r,g) = O(r^{\rho_2+\varepsilon})$, $\forall\ r > R$。因此 $\rho_1(\infty;\ f) \leq \rho_2 < \rho(f)$ 且 $\rho_1(\infty;\ g) \leq \rho_2 < \rho(g)$。再由 (2.69), 得到 $\rho_1(0;\ f) \leq \rho_2 < \rho(f)$ 和 $\rho_1(0;\ g) \leq \rho_2 < \rho(g)$。利用定理 1.A, 得到

$$T\left(r, \frac{(f^n)^{(1)}}{f^n}\right) = \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,0;f) + O(\log T(r,f) + \log r) = O(r^{\rho_2+\varepsilon})$$

$\forall\ r > R$因此 $\rho(\frac{(f^n)^{(1)}}{f^n}) \leq \rho_2 < \rho(f)$。类似地, 我们可以证明 $\rho(\frac{(g^n)^{(1)}}{g^n}) \leq \rho_2 < \rho(f)$。因此, 由 (2.32) 可得 $\rho(P) \leq \rho_2 < \rho(f)$, 且 $\rho(Q) \leq \rho_2 < \rho(f)$。

Ag再次, 由于 $N(r,0;(f^n)^{(k)} \mid f \neq 0) \leq T(r,\tilde{P})$, 且 $N(r,0;(g^n)^{(k)} \mid g \neq 0) \leq T(r,\tilde{Q})$, 我们有

$$N(r,0;(f^n)^{(k)} \mid f \neq 0) = O(r^{\rho_2+\varepsilon}) \text{ and } N(r,0;(g^n)^{(k)} \mid g \neq 0) = O(r^{\rho_2+\varepsilon}),$$

$\forall\ r > R$。因此, 由 (2.58) 可推得

$$\rho_1(0;R_1R_2) \leq \rho_2 < \rho(f) \text{ and } \rho_1(\infty;R_1R_2) \leq \rho_2 < \rho(f).$$

若我们可以假设

$$R_1R_2 = z^{k_1+k_2}\frac{P_{1,0}P_{2,0}}{P_{1,\infty}P_{2,\infty}} = z^{k_3}\frac{P_{3,0}}{P_{3,\infty}},$$

其中 $k_3 = k_1 + k_2$, $P_{3,0}$ 和 $P_{3,\infty}$ 分别是由非零点和极点构成的初等因子的乘积, 那么根据 Ash [1, 定理 4.3.6], 可得 $\rho(P_{3,0}) = \rho_1(0;P_{3,0}) \leq \rho_2 < \rho(f)$, 且 $\rho(P_{3,\infty}) = \rho_1(0;P_{3,\infty}) \leq \rho_2 < \rho(f)$。显然, $\rho(R_1R_2) \leq \rho_2 < \rho(f)$。因此, $\rho(\tilde{P}\tilde{Q}(R_1R_2)^n) \leq \rho_2 < \rho(f)$。由于 $\rho(\alpha) < +\infty$, 由 (2.9) 可知 $\rho(e^{\delta_1+\delta_2}) \leq \rho_2 < \rho(f)$, 故 $\delta_1 + \delta_2$ 是一个多项式。因此, $f = R_1\exp(\delta_1)$ 且 $g = R_2\exp(\delta_2)$, 其中 $\rho_1(0;\ R_i) < \rho(\alpha)$, $\rho_1(\infty;\ R_i) < \rho_2(f)$（$i = 1$=2）, 且 δ_1, δ_2是超越整函数, 满足 $\delta_1 + \delta_2$ 是一个多项式。

子情形2.2.2.2. 设 $\rho_2(f) = +\infty$。由 (2.49), 可得 $\rho_2(g) = +\infty$。在此情形下, 由 (2.69) 可推出, 对于 $i = 1, 2$, 有 $\rho_1(0;\ R_i) < \rho(\alpha)$。另一方面, 由 (2.61) 可得, 对于 $i = 1, 2$, 有 $N(r,R_i) = S(r,f)$。因此, $f = R_1\exp(\delta_1)$ 且 $g = R_2\exp(\delta_2)$, 其中 $\rho_1(0;\ R_i) < \rho(\alpha)$, 对于$i = 1,2$, $N(r,R_i) = S(r,f)$, 并且 δ_1 和 δ_2 是超越整函数。

证明至此完成。

□

References

[1] R. B. Ash, 《复变函数》, Academic Press, 纽约, 1971年。[2] A. Banerjee 和 S. Majumder, 有限权下与小函数分担的非线性微分多项式, 《阿拉伯数学杂志》, 4（2015）, 7-28。[3] J. M. Chang 和 L. Zalcman, 与其导数分担一个集合的亚纯函数, J. Math. Anal. Appl., 338（2008）, 1191-1205。[4] M. L. Fang, 整函数的唯一性与值分担, Comput. Math. Appl., 44（2002）, 823-831。[5] M. L. Fang 和 H. L. Qiu, 分担不动点的亚纯函数, J. Math. Anal. Appl., 268（2002）, 426-439。[6] W. K. Hayman, 《亚纯函数》, 克拉伦登出版社, 牛津, 1964年。

[7] I. Lahiri，亚纯函数的加权值分担与唯一性，Complex Var. Theory Appl.，46（2001），241-253。[8] I. Laine，Nevanlinna理论与复微分方程，Walter de Gruyter，柏林，1993年。[9] X. M. Li 和 H. X. Yi，关于亚纯函数某些微分多项式值分担的评述，Bull. Aust. Math. Soc，90（2014），427-443。[10] X. J. Liu、S. Nevo 和 X. C. Pang，零点重数至少为 $k+1$的亚纯函数的 k阶导数，J. Math. Anal. Appl.，348（2008），516-529。[11] S. Majumder 和 R. Mandal，其某个微分多项式分担一个多项式的亚纯函数，Tamkang Journal of Math.，50（2）（2019），165-185。[12] J. Schiff，《正规族》，Sringer，柏林，1993年。[13] P. Sahoo 和 S. Halder，亚纯函数的加权集分享与唯一性，Publ. Math. Debrecen，99（3-4）（2021），371-388。[14] C. C. Yang，关于微分多项式的亏量 II，Math. Z.，125（1972），107-112。[15] C. C. Yang 和 X. H. Hua，亚纯函数的唯一性与值分担，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.，22（1997），395-406。[16] C. C. Yang 和 H. X. Yi，亚纯函数唯一性理论，Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特/波士顿/伦敦，2003年。[17] L. Yang，值分布理论，Springer-Verlag 与科学出版社，纽约，1993年。[18] L. Z. Yang 和 J. L. Zhang，费马型函数方程不存在亚纯解，Aequations Math.，76（1-2）（2008），140-150。[19] X. B. Zhang 和 J. F. Xu，分担一个小函数的亚纯函数的唯一性及其应用，Comput. Math. Appl.，61（2011），722-730。[20] J. L. Zhang 和 L. Z. Yang，与 R. Br¨uck 猜想相关的一些结果，J. Inequal. Pure Appl. Math.，8（1）（2007）第18条。[21] J. L. Zhang，关于不动点的整函数唯一性定理，Comput. Math. Appl.，56（2008），3079-3087。[22] L. Zalcman，正规族：新视角，Bull. Amer. Math. Soc.，35（1998），215-230。

Department of Mathematics, University of Kalyani, West Bengal 741235, India.*Email address*: abanerjee kal@yahoo.co.inDepartment of Mathematics, Raiganj University, Raiganj, West Bengal-733134, India.*Email address*: sm05math@gmail.comDepartment of Mathematics, University of Kalyani, West Bengal 741235, India.*Email address*: panjasantu07@gmail.comDepartment of Mathematics, Wuyi University, Jiangmen 529020, Guangdong, People's Republic of China.*Email address*: xujunf@gmail.com