arXiv:2603.11822v1 [math.NT] 12 Mar 2026

非线性地毯上的劣可逼近点

ROOPE ANTTILA、JONATHAN M. FRASER 和 HENNA KOIVUSALO

摘要。 $\mathbb{R}^d$ 中的劣可逼近点，是指狄利克雷逼近定理无法在超过某个常数的程度上得到改进的点；换言之，它们是最难以用有理向量逼近的点。丢番图逼近中的一个重要问题是，确定劣可逼近点集何时与给定集合相交于满维集合。我们找到了第一类具有满维交性质的非线性非共形吸引子，从而回答了 Das–Fishman–Simmons–Urba´nski 在2019年提出的一个问题。我们还给出了这些吸引子的豪斯多夫维数公式，该公式本身也具有独立的研究价值。

*2020*年数学主题分类：主要分类：28A78、28A80、11K55；次要分类：37C45。

关键词和短语：劣可逼近点、豪斯多夫维数、非线性非共形吸引子、抛物型康托尔集。

目录

1. 引言 2 2. 非线性地毯 4 2.1. 主要结果 5 3. 符号空间 8 3.1. 符号巴兰斯基地毯 9 3.2. 符号自共形集 11 3.3. 符号非线性地毯 13 4. 主要结果的证明 14 4.1. 非线性地毯的豪斯多夫维数 14 4.2. 非线性地毯的修正下维数 16 4.3. 非线性地毯上的难逼近数 20 5. 抛物型康托尔集 21 参考文献 22

日期：2026年3月13日。RA 和 JMF 的研究得到英国工程与自然科学研究委员会资助（项目编号 EP/Z533440/1）。JMF 还获得了 Leverhulme Trust研究项目资助（RPG-2023-281）。感谢 Lawrence Lee 提醒我们关注问题5.2（出自 [3]）。

1. 引言

丢番图逼近是对无理点能被有理点逼近到何种程度的定量研究。这个基本问题有许多变体，涉及数学的许多不同领域，包括数论、遍历理论和分形几何。该领域最经典的结果是狄利克雷逼近定理，它给出了 $\mathbb{R}^d$ 中所有点的最佳逼近速率。对于这些点，狄利克雷定理的结论无法在常数因子意义下得到改进；它们称为**难逼近点**：这些点是$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$，存在常数 $c > 0$，使得对所有$\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$ 和 $q \in \mathbb{N}$，

$$\left\| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{q} \right\| \geqslant \frac{c}{q^{1+1/d}}.$$

丢番图逼近中的一个重要问题是理解劣可逼近点的大小与分布。Khinchine 的一个经典定理表明，$\mathbb{R}^d$ 中的劣可逼近点集（我们记为 $\mathbf{Bad}_d$）的勒贝格测度为零，但在 [18]，中利用现称为施密特博弈的博弈论方法证明了 $\mathbf{Bad}_d$ 具有满豪斯多夫维数 d。此外，劣可逼近点应当分布得非常均匀，特别地，人们预期：在并非专门设计用以避开它们的分形集 X 上，劣可逼近点应具有满豪斯多夫维数，也就是说，人们预期

$$\dim_{\mathrm{H}} X \cap \mathbf{Bad}_d = \dim_{\mathrm{H}} X.$$

这一点已在许多重要的分形集类 X 上得到验证，例如某些阿尔福斯正则集 [7, 15]（基于 [14] 中的思想）以及满足必要非集中条件的某些自仿射地毯 [3]。一种有用的方法是使用施密特博弈的一种变体以及下维数。下维数有许多等价的定义方式，但对我们而言方便的是利用弱切锥定义的版本。回忆：紧集 T 称为紧集 X 的 **弱切锥**（记为 $T \in \mathrm{Tan}(X)$），如果存在 $x_n \in X$ 以及 $0 < r_n \leqslant \mathrm{diam}(X)$，使得

$$\frac{X \cap B(x_n, r_n) - x_n}{r_n} \to T,$$

在豪斯多夫距离下。我们将非空紧集$X \subseteq \mathbb{R}^d$ 的**下维数** 定义为

$$\dim_{\mathrm{L}} X = \min\{\dim_{\mathrm{H}} T \colon T \in \mathrm{Tan}(X)\}.$$

定理 1.1], 证明了最小值确实存在，并证明了该定义与下维数较为常见的定义等价。有关下维数的更多背景，请参阅 [8, 10] 。注意，$\dim_{\mathrm{L}} X \leqslant \dim_{\mathrm{H}} X$，因为根据我们的定义，（平移后的） X 是其自身的弱切片。我们还可以要求使下维数达到最小值的弱切片满足 $r_n \searrow 0$，但无需作此假设。下维数刻画集合 X 中最薄的部分，与刻画集合最厚部分的 Assouad 维数互为对偶。

施密特博弈方法给出了以下估计，我们将在本文中使用该估计。该结果已在 [7, 定理 3.1], 中证明；另见 [3, 推论 2.6] 和 [8, 第 14 节2]。

命题 1.1。 假设 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 是闭集，并且按照存在 $\beta > 0$ 的意义是超平面弥散 的，其中对于所有 $R \in$ （0,1） $x \in X$ 以及仿射超平面 $V \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$B(x, R) \cap X \setminus V_{\beta R} \neq \emptyset$$

其中 V_ε 表示 V的开 ε-邻域。于是

$$\dim_{\mathrm{H}} X \cap \mathbf{Bad}_d \geqslant \dim_{\mathrm{L}} X.$$

超平面弥散假设的实质是， X 不能过于集中在超平面上。以下例子说明了这一条件的必要性。设

$$X = \{0\} \times [0,1]^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

于是，狄利克雷定理（见 $\mathbb{R}^{d-1}$）表明，对于所有 $\mathbf{x} \in X$ ，存在无穷多个 $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^d$和 $q \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{q} \right\| \leqslant \frac{c}{q^{1+1/(d-1)}} = o\left(\frac{1}{q^{1+1/d}} \right)$$

因此 $X \cap$ **劣可逼近**$_d = \emptyset$ ，但 $\dim_{\mathrm{L}} X = d - 1$。

注 1.2. 当 $d = 1$ 时，可以去掉超平面弥散假设，因为不满足超平面弥散性的集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 必然满足 $\dim_{\mathrm{L}} X = 0$。这可以直接由定义证明。更一般地，如果 $X \subseteq \mathbb{R}^d$ 不满足超平面弥散性，那么

$$\dim_{\mathrm{L}} X \leqslant d - 1.$$

事实上，如果 X 不是超平面弥散的，那么对于所有满足 $n \in \mathbb{N}$ 的 $\beta = 1/n > 0$ ，都存在 $R_n \in$ (0,1) 、 $x_n \in X$ 和一个仿射超平面 V^n ，使得

$$B(x_n, R_n) \cap X \subseteq V^n_{R_n/n}.$$

但这样一来

$$\frac{B(x_n, R_n) \cap X - x_n}{R_n} \subseteq \frac{V^n_{R_n/n} - x_n}{R_n}.$$

注意到，右侧包含于某个仿射超平面 W^n 中，该超平面平行于 V^n，且到原点的距离至多为 $\frac{1}{n}$。对左侧的集合序列取一个收敛子列，便得到 $T \in$Tan(X)，使得对于某个线性超平面 W，有 $T \subseteq W$。于是 $\dim_{\mathrm{L}} X \leqslant \dim_{\mathrm{H}} T \leqslant \dim_{\mathrm{H}} W = d - 1$。

鉴于命题 1.1，估计 $\dim_{\mathrm{H}} X \cap$ **糟糕**$_d$ 的一种策略是估计 $\dim_{\mathrm{L}} X$。遗憾的是，在许多值得关注的情形中，$\dim_{\mathrm{L}} X < \dim_{\mathrm{H}} X$，因此一种更精细的策略是寻找 X 的闭且超平面弥散的子集，并使其下维数尽可能大。这促使我们引入修正下维数，定义如下

$$\dim_{\mathrm{ML}} X = \sup\{\dim_{\mathrm{L}} Y : Y \subseteq X\}.$$

那么，对于所有闭集，

$$\dim_{\mathrm{L}} X \leqslant \dim_{\mathrm{ML}} X \leqslant \dim_{\mathrm{H}} X.$$

贝德福德–麦克马伦地毯（见 [9]）是一类重要的自仿射集，从某种意义上说，也是本文所研究的集合族中最基本的情形。它们通过一个迭代函数系（IFS）定义——我们将在第 2 节中介绍该函数系——但也可以将其理解为：从施加于单位正方形上的均匀但具有各向异性的

网格中选取一部分矩形，然后将选定的图案 无限次迭代。因此，我们可以将 IFS 中的映射视为与网格中选定的矩形相对应。记住这一图像对后文很有帮助。贝德福德–麦克马伦地毯是非共形分形，因为它们在非共形迭代函数系（或非共形扩张映射）下保持不变；这源于定义网格的各向异性：经过迭代，矩形会变得越来越狭长。另一方面，它们也是线性分形，因为定义迭代函数系是仿射的，或者等价地说，相关的扩张映射是分段线性的。已知（见 [3,8]），贝德福德–麦克马伦地毯 X 满足

$$\dim_{\mathrm{ML}} X = \dim_{\mathrm{H}} X$$

此外，只要至少使用两列，并且至少有一列包含两个映射，我们就有

$$\dim_{\mathrm{H}} X \cap \mathbf{Bad}_2 = \dim_{\mathrm{H}} X$$

见 [3]。因此，对于这类非共形分形，我们得到了所需的数论结论。后一个假设与超平面扩散性约束有关。在该结果的证明中，以线性方式定义的底层动力系统发挥了根本作用，这促使 Das–Fishman–Simmons–Urba´nski [3] 提出了以下问题：

问题1（[3]问题5.2）。施密特博弈能否用于证明：在某个由同时具有非共形性和非线性的动力系统定义的分形中，$\mathbf{Bad}_d$ 具有满维数？

本文对这一问题给出了肯定回答，见定理 2.3。我们的主要结果涉及一族非线性非共形地毯，并且我们得到了它们的豪斯多夫维数，以及它们与 $\mathbf{Bad}_2$,的交集的豪斯多夫维数，见定理 2.1、定理 2.2 和定理 2.3。我们还简要讨论了另一类动力系统定义的分形——抛物型康托尔集；对于这类集合，施密特博弈—下维数方法取得了良好效果，见命题 5.1。

2. 非线性地毯

在精确陈述我们的结果之前，先来定义所采用的框架。回顾一下，函数$f\colon\ A \to A$，其中 $A \subset \mathbb{R}^d$，若对所有 $x, y \in A$，都有 $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$，则称其为压缩映射；若存在 $0 < \lambda < 1$，使得对所有 $x, y \in A$，都有 $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \lambda\|x - y\|$，则称其为一致压缩映射。由压缩映射组成的集合$(f_i)_{i\in\Lambda}$，其中 Λ 是有限指标集，且对所有 $i \in \Lambda$, $f_i\colon\ A \to A$，都对应某个紧集 $A \subset \mathbb{R}^d$，称为迭代函数系（*IFS*）。IFS的吸引子是唯一的非空紧集 $X \subset A$，它满足

$$X = \bigcup_{i\in\Lambda} f_i(X).$$

人们常对迭代函数系施加各种分离条件，以便于研究。本文所涉及的条件是开集条件（*OSC*）；若存在一个开集 $U \subset A$，使得对所有 $i \in \Lambda$，都有 $f_i(U) \subset U$，且对所有 $i \neq j$，都有$f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$，则称该迭代函数系满足此条件。

本文主要研究以下方式定义的一类非线性迭代函数系。设 Λ_1 和 Λ_2 为有限指标集，且 $(f_i)_{i\in\Lambda_1}$ 和 $(g_j)_{j\in\Lambda_2}$ 分别是

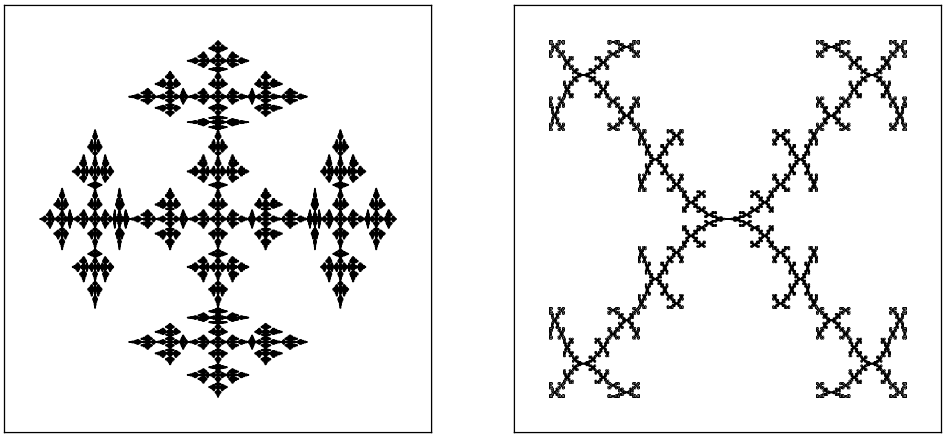

图1. 两种符合我们框架的非线性地毯

定义在 上的自共形迭代函数系，也就是说，每个 f_i 都是 $[0,1]$ 上的一致压缩映射，每个 g_j 都是 $[0,1]$ 上的一致压缩映射。我们称这些迭代函数系为坐标迭代函数系。设 $\Lambda \subset \Lambda_1 \times \Lambda_2$，并考虑平面迭代函数系 $(S_{i,j} := (f_i, g_j))_{(i,j)\in\Lambda}$。这些迭代函数系可以看作对角自仿射迭代函数系的非线性类比。鉴于这种联系，同时为了强调我们允许迭代函数系中存在非线性映射，我们将上述类别中迭代函数系的吸引子称为非线性地毯。以下假设非线性地毯 X 满足 $\operatorname{diam}(X) = 1$；通过重新缩放总能做到这一点，且不会影响我们的结果。需要强调的是， Λ 可能是 $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ 的真子集，因此一般而言，包含关系 $X \subset X_1 \times X_2$ 是严格的，其中 X_1 和 X_2 分别是 $(f_i)_{i\in\Lambda_1}$ 和 $(g_j)_{j\in\Lambda_2}$ 的吸引子。

在上述一般性范围内，非线性地毯这一类非常广泛；例如，它包括所有对角自仿射迭代函数系的吸引子，无需施加任何网格结构。为了使我们的方法奏效，迭代函数系需要具有类似网格的结构。我们认为合适的版本是坐标开集条件：如果两个坐标迭代函数系 $(f_i)_{i\in\Lambda_1}$ 和 $(g_j)_{j\in\Lambda_2}$ 都满足开集条件，就称该非线性地毯满足此条件。请注意，这一假设严格强于假设平面迭代函数系 $(S_{i,j})_{(i,j)\in\Lambda}$满足开集条件。

2.1. 主要结果。 为陈述我们的结果，我们先简要回顾迭代函数系所基于的符号空间；更精确的定义见第3节。我们用 $\Sigma = \Lambda^{\mathbb{N}}$ 表示与非线性地毯 X相关联的自然符号空间，并用 $\pi\colon \Sigma \to X$ 表示自然投影，它对 $(\mathtt{i}, \mathtt{j}) := (i_1 i_2 \cdots \ \ j_1, j_2 \cdots) \in \Sigma$ 定义如下

$$\pi(\mathtt{i}, \mathtt{j}) = \lim_{n\to\infty} S_{i_1,j_1} \circ S_{i_2,j_2} \circ \ldots \circ S_{i_n,j_n}(0).$$

在 Σ 上的自然动力学由左移 σ 给出： $\Sigma \to \Sigma$，其定义为

$$\sigma(\mathtt{i}, \mathtt{j}) = (i_2 i_3 \cdots, j_2 j_3 \cdots),$$

对所有 $(\mathtt{i}, \mathtt{j}) = (i_1 i_2 \cdots \ \ j_1 j_2 \cdots) \in \Sigma$。我们稍微宽泛地使用术语：若存在定义在 X 上的博雷尔测度 ν，它相对于 σ 是遍历的，且满足 $\mu = \pi_*\nu$，则称定义在 X 上的博雷尔概率测度 μ 是遍历的。

我们的第一个结果是关于上述非线性地毯的豪斯多夫维数的一个变分原理，该结果本身也具有独立的研究价值。

定理 2.1。如果 X 是满足坐标开集条件的非线性地毯，那么

$$\dim_{\mathrm{H}} X = \sup\{\dim_{\mathrm{H}} \mu \colon \mu \textit{ is ergodic}\}.$$

我们将研究范围限制在平面吸引子的主要原因之一是，在高维中，即使在自仿射情形下，这一变分原理一般也不成立 [4]。我们的结果是 [12, 定理 2], 的推广；该定理针对非共形动力系统的一类排斥子证明了这一结果。在将其转换为迭代函数系的语言后，这意味着除了坐标开集条件之外，还对迭代函数系施加了支配条件。这是一种几何条件，强制所有映射的强收缩方向彼此一致，并且这种一致性是均匀的。

证明的主要思想是考察由原系统的深层迭代生成的子系统。由于坐标迭代函数系满足有界畸变条件（见引理 3.4），这些子系统的吸引子从本质上说非常接近自仿射集；于是可以利用自仿射理论中的工具，在这些吸引子上构造一列伯努利测度，使其维数趋近于非线性地毯的维数。在 [12], 这一情形下，支配条件保证子系统接近于所谓的 *Gatzouras-Lalley* 地毯 的吸引子；而缺少支配意味着，在我们的情形中，子系统类似于非支配的$Bara\acute{}$*nski* 地毯。通过利用 [12], 之后自仿射分形几何领域取得的发展，即 [1], 中的工作，定理 2.1 的证明与 [12, 定理 2]的证明非常相似。

我们的方法还提供了一种理论上可用于数值估算非线性地毯的豪斯多夫维数的方法，不过本文不作探讨。由于陈述这一结果需要不少准备工作，我们将其推迟到定理 4.2 中给出；但从本质上说，我们证明了豪斯多夫维数可以表示为一列某些优化问题的解的极限。

结合定理 2.1 证明中使用的一些想法，以及 Ferguson、Jordan 和 Shmerkin 的一个论证的非线性类比 [6]，我们得到了第二个结果。

T定理 2.2。如果 X 是满足坐标开集条件的非线性地毯，则 n

$$\dim_{\mathrm{H}} X = \dim_{\mathrm{ML}} X = \sup\{\dim_{\mathrm{L}} X' \colon X' \subset X\}.$$

虽然证明的思路与定理 2.1 的证明相似，但坐标方向上的指数畸变原则上会影响（修正后的）下维数，尽管这种畸变可以任意小，因此在极限时不会影响豪斯多夫维数。问题的本质在于，与豪斯多夫维数不同，下维数在 H¨older 映射（甚至利普希茨映射）下并不稳定。特别是，原则上可能出现这样的情况：从符号角度看，子系统在一个坐标方向上似乎受到支配，但存在一些柱集，其中有界畸变会使柱集在足够长的时间内看起来在另一个方向上受到支配，从而影响下维数。如果非线性地毯具有支配性，这种情况便不会发生，因为支配导致的指数畸变强于有界畸变导致的指数畸变。因此，为了处理一般情形，我们

采用一个引理，该引理表明，如果非线性地毯是非共形的，那么用于逼近豪斯多夫维数的测度可以取为具有不同李雅普诺夫指数的测度，见命题 3.3。结合这一方法与 [6], 中的论证，便可构造出非线性地毯的支配子系统，使其下维数任意接近地毯的维数。

作为定理 2.2 的直接应用，我们回答问题1。我们需要一个额外假设，以确保该集合具有较大的垂直和水平纤维，这是满足超平面扩散条件所必需的。表达这一条件最自然的方式，是将迭代函数系中的映射划分为列和行，分别由集合 Λ_1 和 Λ_2 编号。由 $i \in \Lambda_1$ 编号的列是集合

$$\{S_{i,j} \colon j \in \Lambda_2, (i,j) \in \Lambda\},$$

而由 $j \in \Lambda_2$ 编号的行则以类似方式定义。

定理 2.3。若 X 是满足坐标开集条件的非线性地毯，并且某一列和某一行中都至少有两个映射，则

$$\dim_{\mathrm{H}}(X \cap \mathbf{Bad}_2) = \dim_{\mathrm{H}} X.$$

定理 2.3 中的附加假设稍显微妙。虽然这些假设能确保非线性地毯是超平面弥散的，但事实上，我们的方法在某些不满足这一条件的情形下也适用。实际上，若要直接由定理 2.2 和命题 1.1 推出定理 2.3，我们只需确保在定理 2.2 的证明中，用来见证修正下维数的子集是超平面弥散的。更准确地说，为了证明该结果，只需对 $\varepsilon > 0$ 找到一个闭的超平面弥散子集 $X' \subset X$，使得 $\dim_{\mathrm{L}} X' > \dim_{\mathrm{H}} X - \varepsilon$。这意味着，在更一般的情形下，该结果同样成立：我们只需在行或列中有两个映射，具体取决于维数公式中占主导地位的坐标方向。不过，为了简洁起见，我们选择按上述方式陈述结果，并将更一般的表述留给读者考虑。超平面扩散性的证明相当简单，但为了更明确地说明我们的方法适用的确切情形，我们将其推迟到第 4.3 节。

有人可能会想，是否可以放宽这一条件，只要求 X 不包含在任何一条直线中。当然，这一条件是必要的。然而，这一假设不足以支持我们的证明方法。例如，考虑一个贝德福德–麦克马伦地毯，其中每一列至多有一个映射，但并非所有映射都位于同一行。显然，其吸引子不包含在一条直线中；但同样显然，它也不是超平面弥散的，而且吸引子的任何子集也都不是超平面弥散的。取吸引子上的任意一点 x，并令 V 为经过 x 的水平直线，即可看出这一点。于是，无论我们选择哪个 $\beta > 0$，当 R 充分小时，由于定义映射在迭代过程中偏心率不断增大，$B(x,\ R) \cap X \subseteq V_{\beta R}$。

注 2.4。由于我们的定理 2.3 仅适用于 $d = 2$ 的情形，因此人们可能会想知道，对于 d 的其他取值，问题 1 的情况如何。正如我们上面所提到的，由于“维数间隙”现象，完全一般地推广到高维会面临重大挑战。然而，如果用高维空间上的共形迭代函数系替代共形坐标迭代函数系，我们便得到一个自然模型，在该模型中，我们的证明几乎无需改动即可成立。也就是说，对于任意 $d \geqslant 2$，我们可以取 $(f_i)_{i \in \Lambda_1}$ 以及 $(g_j)_{j \in \Lambda_2}$ 为

分别定义在 d_1 和 d_2 上的共形迭代函数系，其中 $d_1 + d_2 = d$，并且只需进行简单修改，我们的方法便适用于 $\mathbb{R}^d$ 上的非共形迭代函数系 $(S_{i,\,j} := (f_i,\ g_j))_{(i,j)\in\Lambda}$ 的吸引子。从某种意义上说，该模型只有“一个非共形度”，而在完全一般的情形下，人们可能会问，在维数为 d 时，是否存在 $(d-1)$ 个非共形度。无论如何，这一简单修改为问题1 的 $d \geqslant 2$ 情形提供了答案。$d = 1$ 情形则具有不同的性质，但可以将命题 5.1 视为一种解决方案，不过我们强调，问题 1 的真正精神要求 $d \geqslant 2$。

3. 符号空间

本研究的大部分内容将在符号空间中展开。本节将定义我们所研究的非线性地毯的符号类比，并展示如何用类似于自仿射 Bara´nski 地毯的符号空间来逼近这些空间。我们先引入一些记号。

对于一个有限指标集（也称为字母表） Λ，我们用 $\Sigma(\Lambda) := \Lambda^{\mathbb{N}}$ 表示相应的符号空间。读者应注意， Λ 可以是任意指标集。例如，本文稍后构造的子系统对应的符号空间，其字母表由初始字母表中的有限词构成的集合给出。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们称集合 Λ^n 为长度为 n 的词的集合，并用 $\Lambda^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda^n$ 表示所有有限词的集合。我们将 Σ 和 Λ^* 中的元素都记作 $\mathtt{i}$，即 $\mathtt{i} = i_1 i_2 \cdots$ 或 $\mathtt{i} = i_1 i_2 \cdots i_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$取决于上下文。词 $\mathtt{i} \in \Lambda^*$ 的长度记作 $|\mathtt{i}|$，它是满足 $\mathtt{i} \in \Lambda^n$的唯一自然数 n。对于两个词 $\mathtt{i}_1,\ \mathtt{i}_2 \in \Sigma(\Lambda)$，$\mathtt{i}_1$ 和 $\mathtt{i}_2$ 的最长公共子词定义为$\mathtt{i}_1 \wedge \mathtt{i}_2 := \mathtt{i}_1|_k = \mathtt{i}_2|_k$，其中 k 是满足 $\mathtt{i}_1|_k = \mathtt{i}_2|_k$的最大自然数。最后，对于由 Λ索引的任意实数集合 $(c_i)_{i\in\Lambda}$，我们记

$$c_{\mathtt{i}} = c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_{|\mathtt{i}|}},$$

对所有 $\mathtt{i} \in \Lambda^*$ 均成立。同样地，如果 $(h_i)_{i\in\Lambda}$ 是某个度量空间上由 Λ 索引的一组自映射，我们记

$$h_{\mathtt{i}} = h_{i_1} \circ h_{i_2} \circ \cdots \circ h_{i_{|\mathtt{i}|}}.$$

给定符号空间 $\Sigma = \Sigma(\Lambda)$，以及 一个 $= (a_i)_{i\in\Lambda} \in (0,\ 1)^{\Lambda}$，我们可以通过如下方式定义其上的度量$\rho[\mathbf{a}]$ Σ

$$\rho[\mathbf{a}](\mathtt{i}_1, \mathtt{i}_2) = a_{\mathtt{i}_1 \wedge \mathtt{i}_2},$$

对所有 $\mathtt{i}_1,\ \mathtt{i}_2 \in \Sigma$ 均成立。容易看出，这在 Σ 上定义了一个度量，且该度量诱导的拓扑与由柱集生成的拓扑一致。对任意 $\mathtt{i} \in \Lambda^*$，柱集定义为

$$[\mathtt{i}] = \{\mathtt{i}' \in \Sigma \colon \mathtt{i}'|_{|\mathtt{i}|} = \mathtt{i}\}.$$

最后，我们回顾符号空间上的伯努利测度的定义。对于一个字母表 Λ，我们用

$$\mathcal{P}(\Lambda) = \left\{ \mathbf{p} = (p_{i,j})_{(i,j)\in\Lambda} \colon \sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j} = 1 \right\},$$

以 Λ 为索引的概率向量集合，以及由 $\mathcal{P}^{\circ}(\Lambda) = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Lambda) \colon 0 < p_i < 1\ \forall i \in \Lambda\}$ 构成的集合。对于给定的 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Lambda)$，我们在柱

通过设置集合

$$\nu_{\mathbf{p}}([\mathtt{i}]) = p_{\mathtt{i}},$$

对所有 $\mathtt{i} \in \Lambda^*$，并利用 Carath´eodory 扩张定理将其唯一地扩张为 Σ 上的博雷尔测度。所得测度仍记为 $\nu_{\mathbf{p}}$，称为与概率向量 $\mathbf{p}$ 相关联的 伯努利测度 。

3.1. 符号的 Bara´nski 地毯。 现在我们来描述自仿射地毯的符号类似物。设 Λ_1 与 Λ_2 为有限指标集，并设 $\Lambda \subset \Lambda_1 \times \Lambda_2$。我们以自然的方式将空间 $\Sigma = \Sigma(\Lambda)$ 等同于 $\Sigma(\Lambda_1) \times \Sigma(\Lambda_2)$ 的一个子集。给定 $\mathbf{a} \in (0,1)^{\Lambda_1}$ 与 $\mathbf{b} \in (0,1)^{\Lambda_2}$，我们在 Σ 上定义度量如下

$$d[\mathbf{a},\mathbf{b}]((\mathtt{i}_1,\mathtt{j}_1),(\mathtt{i}_2,\mathtt{j}_2)) \coloneqq \max\{\rho[\mathbf{a}](\mathtt{i}_1,\mathtt{i}_2),\rho[\mathbf{b}](\mathtt{j}_1,\mathtt{j}_2)\} = \max\{\mathbf{a}_{\mathtt{i}_1\wedge\mathtt{i}_2},\mathbf{b}_{\mathtt{j}_1\wedge\mathtt{j}_2}\}$$

对所有 $(\mathtt{i}_1,\mathtt{j}_1),(\mathtt{i}_2,\mathtt{j}_2) \in \Sigma$。我们强调

$$|(\mathtt{i}_1,\mathtt{j}_1)\wedge(\mathtt{i}_2,\mathtt{j}_2)| = \min\{|\mathtt{i}_1\wedge\mathtt{i}_2|,|\mathtt{j}_1\wedge\mathtt{j}_2|\},$$

但在度量的定义中，最长公共子词是逐坐标取的。因此，对于任意 $(\mathtt{i},\ \mathtt{j}) \in \Sigma$ 和 $r>0$，若我们将满足下式的唯一整数记为 k 和 ℓ：

$$a_{\mathtt{i}|_k} < r \leqslant a_{\mathtt{i}|_{k-1}},\ \text{and}\ b_{\mathtt{j}|_\ell} < r \leqslant b_{\mathtt{i}|_{\ell-1}},$$

the度量 $d[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]$ 中以 $(\mathtt{i},\ \mathtt{j}) \in \Sigma$ 为中心、半径为 r 的（开）球是集合

$$Q(\mathtt{i},\mathtt{j},r) \coloneqq \{(\mathtt{i}',\mathtt{j}') \in \Sigma\colon \mathtt{i}'|_k = \mathtt{i}_k \text{ and } \mathtt{j}'|_\ell = \mathtt{j}|_\ell\}.$$

按照自仿射集理论中通常使用的语言，这正是以 $(\mathtt{i},\ \mathtt{j})$ 为中心、半径为 r 的近似正方形，参见例如 [1, 定义 4.3]。由于这一联系，我们将这些空间称为符号巴拉´尼斯基地毯。这些空间在本文后续部分中发挥着重要作用，因为我们可以利用符号巴拉´尼斯基地毯的投影从内部逼近非线性地毯。利用自仿射集理论，符号巴拉´尼斯基地毯的豪斯多夫维数相对容易描述；更为关键的是，每个符号巴拉´尼斯基地毯都有一个维数最大化伯努利测度，其豪斯多夫维数具有相对简单的公式。下面回顾其构造。

对于 $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \coloneqq \mathcal{P}(\Lambda)$，$i \in \Lambda_1$ 和 $j \in \Lambda_2$，我们令

$$q_i(\mathbf{p}) = \sum_{j:(i,j)\in\Lambda} p_{i,j} \quad \text{and} \quad r_j(\mathbf{p}) = \sum_{i:(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}.$$

我们将李雅普诺夫指数的$\mathbf{p}$记为

$$\lambda_1(\mathbf{p},\mathbf{a}) = \sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log a_i, \quad \text{and} \quad \lambda_2(\mathbf{p},\mathbf{b}) = \sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log b_j.$$

令

$$g_1(\mathbf{p},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log q_i(\mathbf{p})}{\lambda_1(\mathbf{p},\mathbf{a})} + \frac{\sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log p_{i,j} - \sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log q_i(\mathbf{p})}{\lambda_2(\mathbf{p},\mathbf{b})}$$

$$g_2(\mathbf{p},\mathbf{a},\mathbf{b}) = \frac{\sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log r_j(\mathbf{p})}{\lambda_2(\mathbf{p},\mathbf{b})} + \frac{\sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log p_{i,j} - \sum_{(i,j)\in\Lambda} p_{i,j}\log r_j(\mathbf{p})}{\lambda_1(\mathbf{p},\mathbf{a})}.$$

我们将 $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Lambda)$ 分解为若干集合

$$\mathcal{P}_V = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P} \colon \lambda_1(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \geqslant \lambda_2(\mathbf{p}, \mathbf{b})\}$$
$$\mathcal{P}_H = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P} \colon \lambda_1(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \leqslant \lambda_2(\mathbf{p}, \mathbf{b})\},$$

并定义

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{cases} g_1(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{if } \mathbf{p} \in \mathcal{P}_V, \\ g_2(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}), & \text{if } \mathbf{p} \in \mathcal{P}_H \setminus \mathcal{P}_V. \end{cases}$$

不难看出，若 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_V \cap \mathcal{P}_H$，则 $g_1(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = g_2(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$，且函数 $\mathbf{p} \mapsto g(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ 在 $\mathcal{P}$ [1] 上连续。虽然乍看之下，$g(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ 的定义似乎很复杂，但其背后的直观含义很简单：g_1 中的第一项不过是伯努利测度 $\nu_{\mathbf{p}}$在第一坐标上的投影的维数，而第二项可以看作该测度的“平均列维数”；同理，g_2 中的第一项是伯努利测度 $\nu_{\mathbf{p}}$ 在第二坐标上的投影的维数，第二项则是“平均行维数”。

我们注意到，尽管 [1]中的背景是欧几里得的，所用方法却是符号的。特别是，下一个命题可由 [1, 推论 5.2] 以及前述事实推出：定义 4.3 中的近似正方形 [1] 对应于度量 $d[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$中的符号球。

命题 3.1. 若 $(\Sigma, d[\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ 是一个符号的 *Bara ́nski* 地毯，且 $\mathbf{p} \in P(\Lambda)$，则

$$\dim_{\mathrm{H}} \nu_{\mathbf{p}} = g(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

下一个命题由结合 [1] 中的定理 A 与推论 5.2 得出。

命题 3.2. 若 $(\Sigma, d[\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ 是一个符号的 *Bara ́nski* 地毯，

$$\dim_{\mathrm{H}} \Sigma = \max_{\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Lambda)} g(\mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

此外，存在 $\mathbf{q} \in P^{\circ}(\Lambda)$，使得

$$\dim_{\mathrm{H}} \Sigma = \dim_{\mathrm{H}} \nu_{\mathbf{q}} = g(\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

虽然前两个命题足以证明定理 2.1，但正如我们将看到的，修正下维数更为敏感，而为了证明定理 2.2，我们需要如下引理。

命题 3.3. 设 $(\Sigma, d[\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ 为一个符号的 *Bara ́nski* 地毯，并假设 $a_i \neq b_j$ 对某个 $(i, j) \in \Lambda$ 成立。则对任意 $t < \dim_{\mathrm{H}} \Sigma$，存在 $\mathbf{p} \in P^{\circ}(\Lambda)$，使得

$$\lambda_1(\mathbf{p}, \mathbf{a}) \neq \lambda_2(\mathbf{p}, \mathbf{a}),$$

and

$$\dim_{\mathrm{H}} \nu_{\mathbf{p}} > t.$$

证明。 设 $\mathbf{q} \in \mathcal{P}(\Lambda)$ 是命题 3.2 给出的概率向量，它满足

$$\dim_{\mathrm{H}} \Sigma = g(\mathbf{q}, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

若 $\lambda_1(\mathbf{q}, \mathbf{a}) \neq \lambda_2(\mathbf{q}, \mathbf{b})$，则无须证明任何内容，因此我们不妨假设 $\lambda_1(\mathbf{q}, \mathbf{a}) = \lambda_2(\mathbf{q}, \mathbf{b})$。不失一般性，假设

$$a_{i_0} > b_{j_0},$$

对某个 $(i_0,\ j_0)\ \in \Lambda$。令 $(i_1,\ j_1)\ \in \Lambda$ 为任意一个满足 $a_{i_1} \leqslant b_{j_1}$ 的指标；这样的指标必定存在，否则我们就会得到

$$\lambda_1(\mathbf{q},\mathbf{a}) = \sum_{(i,j)\in\Lambda} q_{i,j}\log a_i > \sum_{(i,j)\in\Lambda^n} q_{i,j}\log b_j = \lambda_2(\mathbf{q},\mathbf{b})$$

由于 $\mathbf{q}\ \in \mathrm{P}^\circ(\Lambda)$ 且 $\mathbf{p}\ \mapsto g(\mathbf{p},\mathbf{a},\mathbf{b})$ 连续，我们可以将 $\delta > 0$ 取得足够小，使得 $0 < q_{i_0,j_0} + \delta, q_{i_1,j_1} - \delta < 1$，并且对于由 $p_{i,j} = q_{i,j}$ 定义的概率向量 $\mathbf{p}\ = (p_{i,j})_{(i,j)\in\Lambda}$，对所有 $(i,j)\notin\{(i_0,j_0),(i_1,j_1)\}$，都有 $p_{i_0,j_0} = q_{i_0,j_0} + \delta$，以及 $p_{i,j_1} = q_{i_1,j_1} - \delta$，我们有

$$g(\mathbf{p},\mathbf{a},\mathbf{b}) > t.$$

此外，显然 $\mathbf{p}\ \in\mathcal{P}^\circ(\Lambda)$，并且

$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{p},\mathbf{a}) &= \sum_{(i,j)\in\Lambda} q_{i,j}\log a_i + \delta\log a_{i_0} - \delta\log a_{i_1}\\ &> \sum_{(i,j)\in\Lambda} q_{i,j}\log b_j + \delta\log b_{j_0} - \delta\log b_{j_1} = \lambda_2(\mathbf{p},\mathbf{b}),\end{aligned}$$

如所要求。 □

3.2. 符号自共形集。 下面我们回顾一些关于自共形迭代函数系的基本结果，并说明符号情形如何变化。设 $(f_i)_{i\in\Lambda}$ 是 $[0,1]$ 上的一个自共形迭代函数系，并令 X 表示其吸引子。对于函数 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$，我们记

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Th本文余下部分将频繁用到以下基本引理 .

引理 3.4. 存在常数 $0 < c \leqslant 1$，使得以下结论成立：

(1) 对所有 $\mathtt{i}\in\Lambda^*$ 和 $x_1,\ x_2\in X$，我们有

$$|f'_{\mathtt{i}}(x_1)| \geqslant c|f'_{\mathtt{i}}(x_2)|.$$

(2) 对所有 $\mathtt{i},\ \mathtt{j}\in\Lambda^*$，我们有

$$c\|f'_{\mathtt{i}}\|\|f'_{\mathtt{j}}\| \leqslant \|f'_{\mathtt{ij}}\| \leqslant \|f'_{\mathtt{i}}\|\|f'_{\mathtt{j}}\|.$$

(3) 对所有 $\mathtt{i}\in\Lambda^*$，我们有

$$c\|f'_{\mathtt{i}}\| \leqslant \operatorname{diam}(f_{\mathtt{i}}(X)) \leqslant \|f'_{\mathtt{i}}\|.$$

引理中的第一条称为有界畸变原理，其证明以及第三条的证明可见 [16]。利用范数的次乘性和链式法则，可由第一条轻易推出第二条。下文将引理中的 $0 < c \leqslant 1$ 称为有界畸变常数。

在符号空间 $\Sigma = \Sigma(\Lambda)$ 上有一个自然的度量 ρ，它与自共形集的几何性质相关。对于 $\mathtt{i}_1,\mathtt{i}_2\in\Sigma$，该度量定义为

$$\rho(\mathtt{i}_1,\mathtt{i}_2) = \|f'_{\mathtt{i}_1\wedge\mathtt{i}_2}\|. \tag{3.1}$$

利用有界畸变引理很容易看出，自然投影 $\pi\colon \Sigma\to X$ 在 Σ 赋予度量 ρ 时是利普希茨的；若该迭代函数系

满足强分离条件，则甚至是双利普希茨的。然而，符号空间 $(\Sigma,\ \rho)$ 不属于上一节的框架，因为一般而言我们只有

$$c^{|\mathtt{i}\wedge\mathtt{j}|}\|f'_{i_1}\|\|f'_{i_2}\|\cdots\|f'_{i_{|\mathtt{i}\wedge\mathtt{j}|}}\| \leqslant \|f'_{\mathtt{i}\wedge\mathtt{i}'}\| \leqslant \|f'_{i_1}\|\|f'_{i_2}\|\cdots\|f'_{i_{|\mathtt{i}\wedge\mathtt{j}|}}\|,$$

根据有界畸变引理，下界中的指数畸变给从下方估计维数带来了困难。不过，我们可以在 Σ 上定义一族度量，它们确实属于上一节的框架，并且能以 H¨lder 意义任意逼近度量 ρ。对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\mathtt{i}\in\Lambda^n$，我们令

$$a_{\mathtt{i}} = \|f'_{\mathtt{i}}\|.$$

我们用 $\Sigma_n = \Sigma(\Lambda^n)$ 表示与字母表 Λ^n 相关联的符号空间，并令$\mathbf{a}_n =(a_{\mathtt{i}})_{\mathtt{i}\in\Lambda^n}$。在 Σ_n 上定义度量 ρ_n 如下:

$$\rho_n = \rho[\mathbf{a}_n].$$

令 $\gamma_n\colon \Sigma_n\to\Sigma$ 表示拼接映射，它是 Σ_n 与 Σ 之间的自然双射，对 $\mathtt{i}=(\mathtt{i}_1)(\mathtt{i}_2)\cdots$ 定义如下:

$$\gamma_n(\overline{\mathtt{i}}) = \mathtt{i}_1\mathtt{i}_2\cdots.$$

引理 3.5。存在常数 $C>0$，使得对每个 $n\in\mathbb{N}$ 以及 $\mathtt{i}_1$、$\mathtt{i}_2\in\Sigma_n$，都有

$$c_n\rho_n(\overline{\mathtt{i}}_1,\overline{\mathtt{i}}_2)^{1+\frac{C}{n}} \leqslant \rho(\gamma_n(\overline{\mathtt{i}}_1),\gamma_n(\overline{\mathtt{i}}_2)) \leqslant \rho_n(\overline{\mathtt{i}}_1,\overline{\mathtt{i}}_2),$$

对于某个常数 $c_n>0$。

证明。令 $n\in\mathbb{N}$，并注意到对于任意 $\mathtt{i}_1$，$\overline{\mathtt{i}}_2\in\Sigma_n$，我们可以写成

$$\gamma_n(\mathtt{i}_1)\wedge\gamma_n(\mathtt{i}_2) = \mathtt{i}_1\mathtt{i}_2\cdots\mathtt{i}_k\mathtt{i}', \tag{3.2}$$

其中 $k=|\mathtt{i}_1\wedge\mathtt{i}_2|$，$\mathtt{i}_\ell\in\Lambda^n$ 对所有 $1\leqslant\ell\leqslant k$ 和 $0\leqslant|\mathtt{i}'|<n$ 均成立。这里强调，前一个最长公共子词是相对于字母表 Λ 而取的，后一个则是相对于 Λ^n 而取的。由上确界范数的次可乘性可得

$$\begin{aligned}\rho(\gamma_n(\mathtt{i}_1),\gamma_n(\mathtt{i}_2)) = \|f'_{\gamma_n(\mathtt{i}_1)\wedge\gamma_n(\mathtt{i}_2)}\| &\leqslant \|f'_{\mathtt{i}_1}\|\|f'_{\mathtt{i}_2}\|\cdots\|f'_{\mathtt{i}_k}\|\|f'_{\mathtt{i}'}\|\\ &\leqslant \|f'_{\mathtt{i}_1}\|\|f'_{\mathtt{i}_2}\|\cdots\|f'_{\mathtt{i}_k}\| = \rho_n(\overline{\mathtt{i}}_1,\overline{\mathtt{i}}_2).\end{aligned}$$

对于另一边的不等式，我们回顾一下：由于迭代函数系是一致收缩的，存在常数 $0<\lambda_1<\lambda_2<1$，它们仅取决于函数 f_i，使得

$$\lambda_1^n \leqslant \|f'_{\mathtt{i}}\| \leqslant \lambda_2^n,$$

对所有 $\mathtt{i}\in\Lambda^n$ 和 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。特别地，对于 $\mathtt{i}_1$，$\mathtt{i}_2\in\Sigma_n$，由有界畸变可得

$$\begin{aligned}\rho(\gamma_n(\mathtt{i}_1),\gamma_n(\mathtt{i}_2)) = \|f_{\gamma_n(\mathtt{i}_1)\wedge\gamma_n(\mathtt{i}_2)}\| &\geqslant \lambda_1^{|\mathtt{i}'|}\prod_{j=1}^{k} c\|f'_{\mathtt{i}_j}\| \geqslant \lambda_1^n\prod_{j=1}^{k}\|f'_{\mathtt{i}_j}\|^{1+\frac{\log c}{\log\|f'_{\mathtt{i}_j}\|}}\\ &\geqslant \lambda_1^n\prod_{j=1}^{k}\|f'_{\mathtt{i}_j}\|^{1+\frac{1}{n}\frac{\log c}{\log\lambda_2}} = \lambda_1^n\rho_n(\overline{\mathtt{i}}_1,\overline{\mathtt{i}}_2)^{1+\frac{1}{n}\frac{\log c}{\log\lambda_2}},\end{aligned}$$

由此可得结论：$c_n=\lambda_1^n$和 $C=$对数c对数λ_2。—— □

3.3. **符号非线性地毯**。 最后，我们描述与引言中讨论的非线性地毯相对应的符号空间。本节中，固定两个自共形迭代函数系 $(f_i)_{i\in\Lambda_1}$ 和$(g_j)_{j\in\Lambda_2}$ ，它们作用于 $[0,1],$ ，吸引子分别为 X_1 和 X_2，并考虑平面迭代函数系$(S_{i,\ j}=(f_i,\ g_j))_{(i,j)\in\Lambda}$，其中 $\Lambda\subset\Lambda_1\times\Lambda_2$。我们将该迭代函数系的吸引子记为 $X\subset X_1\times X_2$。注意，若 $0<c_1,\ c_2\leqslant 1$ 分别是将引理 3.4 应用于坐标迭代函数系$(f_i)_{i\in\Lambda_1}$ 和$(g_j)_{j\in\Lambda_2}$所得的有界畸变常数，那么取 $c=\min\{c_1,\ c_2\}$后，有界畸变引理便能以同一个常数应用于这两个坐标迭代函数系。

我们在 d 上定义度量 $\Sigma=\Sigma\ (\Lambda)$ 定义如下：

$$d((\mathtt{i}_1,\mathtt{j}_1),(\mathtt{i}_2,\mathtt{j}_2))=\max\{\rho^1(\mathtt{i}_1,\mathtt{i}_2),\rho^2(\mathtt{i}_2,\mathtt{j}_2)\},$$

其中， ρ^1 和 ρ^2 分别是 $\Sigma(\Lambda_1)$ 和 $\Sigma(\Lambda_2)$ 上由 (3.1) 给出的度量。与之前一样，这个度量并不能完全构成一个符号 Bara´nski 地毯，但我们可以沿用上一节的方法，并对任意 $n\in\mathbb{N}$ 和 $(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n$ 定义：

$$\mathbf{a}_n=(a_{\mathtt{i}})_{\mathtt{i}\in\Lambda_1^n}\coloneqq(\|f'_{\mathtt{i}}\|)_{\mathtt{i}\in\Lambda_1^n}\text{ and }\mathbf{b}_n=(b_{\mathtt{j}})_{\mathtt{j}\in\Lambda_2^n}\coloneqq(\|g'_{\mathtt{j}}\|)_{\mathtt{j}\in\Lambda_2^n}\tag{3.3}$$

并令 $\Sigma_n=\Sigma(\Lambda^n)$ 表示与字母表 Λ^n 相关联的符号空间，赋予度量 $d_n=d[\mathbf{a}_n,\mathbf{b}_n]$。与处理有界畸变常数时一样，我们显然可以假设，引理 3.5 对度量 ρ^1 和 $\rho[\mathbf{a}_n]$，以及 ρ^2 和 $\rho[\mathbf{b}_n]$，均适用于相同的常数。

拼接映射 $\gamma_n\colon\Sigma_n\to\Sigma$ 对于 $(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Sigma_n$ 自然定义为

$$\gamma_n((\overline{\mathtt{i}},\overline{\mathtt{j}}))=(\gamma_n(\overline{\mathtt{i}}),\gamma_n(\overline{\mathtt{j}})),$$

这里我们稍微滥用一下记号，用 γ_n 同时表示 $\Sigma(\Lambda_1^n)$ 和 $\Sigma(\Lambda_2^n)$ 上的拼接映射。下一个命题可由引理 3.5 轻易推出。

命题 3.6。 赋予度量 d 的符号空间 Σ 满足

$$\dim_{\mathrm{H}}\Sigma=\lim_{n\to\infty}\dim_{\mathrm{H}}\Sigma_n=\lim_{n\to\infty}\max_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}(\Lambda^n)}g(\mathbf{p},\mathbf{a}_n,\mathbf{b}_n),$$

其中每个 Σ_n 都赋予度量 $d_n=d[\mathbf{a}_n,\mathbf{b}_n]$。

证明。 由引理 3.5 可知，对于所有 $n\in\mathbb{N}$ 以及 $(\mathtt{i}_1,\ \mathtt{j}_1),\ (\mathtt{i}_2,\ \mathtt{j}_2)\in\overline{\Sigma}_n$，均有

$$c_nd_n((\overline{\mathtt{i}}_1,\overline{\mathtt{j}}_1),(\overline{\mathtt{i}}_2,\overline{\mathtt{j}}_2))^{1+\frac{C}{n}}\leqslant d(\gamma_n((\overline{\mathtt{i}}_1,\overline{\mathtt{j}}_1)),\gamma_n((\overline{\mathtt{i}}_2,\overline{\mathtt{j}}_2))\leqslant d_n((\overline{\mathtt{i}}_1,\overline{\mathtt{j}}_1),(\overline{\mathtt{i}}_2,\overline{\mathtt{j}}_2)).$$

因此，根据标准结果（例如 [5, 命题 3.3],），

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{C}{n}}\dim_{\mathrm{H}}\Sigma_n\leqslant\dim_{\mathrm{H}}\Sigma\leqslant\liminf_{n\to\infty}\dim_{\mathrm{H}}\Sigma_n,$$

由命题 3.2 即得所述结论。 □

以下定理是定理 2.1 的符号类比。

定理 3.7。 对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个定义在 Σ 上的测度 ν，它相对于 σ 是遍历的，并且满足

$$\dim_{\mathrm{H}}\nu\geqslant\dim_{\mathrm{H}}\Sigma-\varepsilon.$$

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathbf{q}_n \in \mathcal{P}(\Lambda^n)$ 为将命题 3.2 应用于符号空间 $(\Sigma_n,\ d[\mathbf{a}_n,\ \mathbf{b}_n])$ 所得到的概率向量，并令 $\nu_n := \nu_{\mathbf{q}_n}$ 为 Σ_n 上相应的伯努利测度。在 Σ 上定义测度 $\mu_n = \nu_n \circ \gamma_n^{-1}$，然后

$$\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \circ \sigma^{-k}.$$

由 σ^k 遍历性可知，μ_n 相对于 σ是遍历的。此外，对每个 $n \in \mathbb{N}$，测度 μ_n 显然相对于 μ_n绝对连续，因此

$$\dim_{\mathrm{H}} \overline{\mu}_n \geqslant \dim_{\mathrm{H}} \mu_n.$$

按照命题 3.6 的证明中所用的方法应用引理 3.5，可得

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu_n \geqslant \frac{1}{1+\frac{C}{n}} \dim_{\mathrm{H}} \nu_n = \frac{1}{1+\frac{C}{n}} \dim_{\mathrm{H}} \Sigma_n,$$

因此，根据命题 3.6，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以取足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得

$$\dim_{\mathrm{H}} \mu_n \geqslant \dim_{\mathrm{H}} \Sigma - \varepsilon,$$

至此，证明完成。 □

4. Proofs of the main results

本节将符号结果转化到几何情形，并证明主要结果——定理 2.1 和 2.2。在本节余下部分，我们固定一个非线性地毯 X，其定义迭代函数系为 $(S_{i,\ j} = (f_i,\ g_j))_{(i,j)\in\Lambda}$，且满足坐标开集条件。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，令$\mathbf{a}_n$ 和$\mathbf{b}_n$ 按 (3.3) 中的定义给出。

4.1. 非线性地毯的豪斯多夫维数。我们对定理 2.1 的证明是一个标准几何引理的变体，该引理使我们能够计算典型点处沿近似正方形的局部维数。对于 $(\mathtt{i},\mathtt{j}) \in \Sigma$ 和 $n \in \mathbb{N}$，记

$$\Delta_n = \{(\mathtt{i},\mathtt{j}) \in \Lambda^* \colon \|f'_{\mathtt{i}}\| < 2^{-n} \leqslant \|f'_{\mathtt{i}^-}\|,\ \|g'_{\mathtt{j}}\| < 2^{-n} \leqslant \|g'_{\mathtt{j}^-}\|\}.$$

此外，对于任意 $(\mathtt{i},\mathtt{j}) \in \Delta_n$，记

$$Q_n(\mathtt{i},\mathtt{j}) = \{(\mathtt{i}',\mathtt{j}') \in \Sigma \colon \mathtt{i}'|_{|\mathtt{i}|} = \mathtt{i},\ \text{and}\ \mathtt{j}'|_{|\mathtt{j}|} = \mathtt{j}\},$$

为对应于 $(\mathtt{i},\mathtt{j})$ 的第 n 级符号近似正方形。注意，$Q_n(\mathtt{i},\mathtt{j})$ 是度量 d 下半径为 2^{-n} 的球。

为了转到几何情形，令

$$\mathcal{Q}_n = \{f_{\mathtt{i}}(U) \times g_{\mathtt{j}}(V) \colon (\mathtt{i},\mathtt{j}) \in \Delta_n\}.$$

由于坐标迭代函数系满足开集条件，集合 $\mathcal{Q}_n$ 两两不相交；此外，存在常数 $0 < c_1 \leqslant c_2$，使得对于任意 $Q \in \mathcal{Q}_n$，都存在一点 $(x,y) \in Q$，使得

$$B((x,y), c_1 2^{-n}) \subset Q \subset B((x,y), c_2 2^{-n}).$$

这表明集合$\mathcal{Q}_n$ 在 [13] 的意义下是一个一般滤过 。令

$$E := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{Q\in\mathcal{Q}_n} Q \subset X, \tag{4.1}$$

并且对于任意 $(x,y)\in E$，我们用 $Q_n((x,y))$ 表示$\mathcal{Q}_n$ 中包含 (x,y) 的唯一元素。下面的引理可由 [13, 命题 3.1] 得出。

引理 4.1. 设 μ 是支撑于 E 上的无原子博雷尔概率测度。那么对μ 几乎处处的$(x,y)\in X$，有

$$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu,(x,y))=\liminf_{n\to\infty}\frac{\log\mu(Q_n((x,y)))}{-n\log 2},$$
$$\overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu,(x,y))=\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\mu(Q_n((x,y)))}{-n\log 2}.$$

现在我们已准备好证明定理 2.1。

定理 4.2. 若 X 是满足坐标开集条件的非线性地毯，则对每个 $\varepsilon>0$，存在一个定义在 X 上的遍历测度 μ，使得

$$\dim_{\mathrm{H}}\mu\geqslant\dim_{\mathrm{H}}X-\varepsilon.$$

此外，

$$\dim_{\mathrm{H}}X=\lim_{n\to\infty}\max_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}(\Lambda^n)}g(\mathbf{p},\mathbf{a}_n,\mathbf{b}_n),$$

其中 $\mathbf{a}_n$,$\mathbf{b}_n$ 由(3.3)定义。

证明。 不妨假设定义迭代函数系至少有两列非空列和两行非空行；否则很容易看出，吸引子包含在一条直线上，因此是一个自共形集，在这种情况下，维数公式简化为经典的自共形测度维数公式。

令 $\varepsilon>0$，令 ν 为定理 3.7 给出的 Σ 上的测度，并记 $\mu=\pi_*\nu$。我们断言，为了证明 $\dim_{\mathrm{H}}\mu\geqslant\dim_{\mathrm{H}}X-\varepsilon$，只需证明对于任意 $(\mathtt{i},\ \mathtt{j})\in\Delta_n$，

$$\mu(f_{\mathtt{i}}(U)\times g_{\mathtt{j}}(V))=\nu(Q_n(\mathtt{i},\mathtt{j})).\tag{4.2}$$

事实上，由 (4.1) 可立即得出 $\mu(E)=1$；再利用引理 4.1 和定理 3.7，以及对任意 $(\mathtt{i},\ \mathtt{j})\in\Delta_n$，集合 $Q_n(\mathtt{i},\ \mathtt{j})$ 是半径为 2^{-n} 的符号球这一事实，可得

$$\dim_{\mathrm{H}}\mu\geqslant\dim_{\mathrm{H}}\nu\geqslant\dim_{\mathrm{H}}\Sigma-\varepsilon\geqslant\dim_{\mathrm{H}}X-\varepsilon,$$

其中，最后一个不等式是由 $\pi\colon\Sigma\to X$ 是利普希茨的事实得出的。

由坐标迭代函数系满足开集条件可知，$X\cap\overline{(f_{\mathtt{i}}(U)\times g_{\mathtt{j}}(V))}=\pi(\overline{Q_n(\mathtt{i},\ \mathtt{j})})$. 这表明

$$\mu(f_{\mathtt{i}}(\overline{U})\times g_{\mathtt{j}}(\overline{V}))=\nu(Q_n(\mathtt{i},\mathtt{j})),$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$以及 $(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Delta_n$。注意，集合 $f_{\mathtt{i}}(U)\setminus f_{\mathtt{i}}(\overline{U})=f_{\mathtt{i}}(U\setminus U)$ 与$g_{\mathtt{j}}(V)\setminus g_{\mathtt{j}}(V)=g_{\mathtt{j}}(V\setminus V)$ 是可数的，因此集合 $f_{\mathtt{i}}(U)\times g_{\mathtt{j}}(V)\setminus f_{\mathtt{i}}(U)\times g_{\mathtt{j}}(V)$ 包含于 $\mathbb{R}^2$中可数个竖直线和水平线所构成的集合之中。因此，为了证明 (4.2)，只需证明对任意竖直线或水平线$V\subset\mathbb{R}^2$，有 $\mu(V)=0$。然而，这一点是显然的，因为 μ 是 $k=1$，.....，n 的 k 步伯努利测度的平均，所以它到坐标轴的投影是（k 步）自共形测度的平均，而这些测度显然是无原子的，当且仅当该非线性迭代函数系至少有两个非空的行和列。该命题的第二个断言由命题 3.6 得出。□

4.2. **非线性地毯的修正下维数**。 接下来，我们改编前几节中的方法以证明定理 2.2。对任意 $n \in \mathbb{N}$，我们用

$$t_n = \max_{\mathbf{p}\in\mathcal{P}(\Lambda^n)} g(\mathbf{p}, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n),$$

其中$\mathbf{a}_n$ 和$\mathbf{b}_n$ 由 (3.3) 给出。我们先从两个简单的引理开始。

引理 4.3。假设存在 x、 $y \in X$ 和$(i, j) \in \Lambda$，使得

$$|f_i'(x)| \neq |g_j'(y)|.$$

那么对于无穷多个 $n \in \mathbb{N}$，存在$(\mathtt{i}, \mathtt{j}) \in \Lambda^n$，使得

$$\|f_{\mathtt{i}}'\| \neq \|g_{\mathtt{j}}'\|.$$

证明。不失一般性，假设

$$|f_i'(x)| < |g_j'(y)|.$$

由于 f_i' 和 g_j' 连续，对于所有足够大的 $n \in \mathbb{N}$，存在 $(\mathtt{i}, \mathtt{j}) \in \Lambda^n$，使得对于所有 $(x, y) \in [0, 1]^2$，我们有

$$|f_i'(f_{\mathtt{i}}(x))| < |g_j'(g_{\mathtt{j}}(y))|.$$

我们可以假设 $\|f_{\mathtt{i}}'\| = \|g_{\mathtt{j}}'\|$；否则结论已得。于是，对任意 $x' \in [0, 1]$，都存在 $y' \in [0, 1]$，使得 $|f_{\mathtt{i}}'(x')| \leqslant |g_{\mathtt{j}}'(y')|$。令 $x' \in [0, 1]$ 为满足$|f_{ni\mathtt{i}}(x')| = \|f_{i\mathtt{i}}'\|$的点；根据紧致性，这样的点存在。于是

$$\|f_{i\mathtt{i}}'\| = |f_{i\mathtt{i}}'(x')| = |f_i'(f_{\mathtt{i}}(x'))\|f_{\mathtt{i}}'(x'))| < |g_j'(g_{\mathtt{j}}(y'))\|g_{\mathtt{j}}'(y')| = |g_{j\mathtt{j}}'(y')| \leqslant \|g_{j\mathtt{j}}'\|,$$

由此便得到了所要证明的结论。 □

下一个引理可由前一个引理和命题 3.3 直接推出。

引理 4.4. 对于任意 $\varepsilon > 0$，以及无穷多个 $n \in \mathbb{N}$，存在 $\mathbf{p} \in P(\Lambda^n)$，使得

$$\lambda_1(\mathbf{p}, \mathbf{a}_n) \neq \lambda_2(\mathbf{p}, \mathbf{b}_n),$$

and

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \geqslant t_n - \varepsilon.$$

现在我们可以证明定理 2.2 了。

定理 *2.2* 的证明。 令 $t < \dim_{\mathrm{H}} X$，并取足够小的 $\varepsilon > 0$，使得 $t(1+\varepsilon) < \dim_{\mathrm{H}} X$。回顾一下，根据定理 4.2，$\lim_{n\to\infty} t_n = \dim_{\mathrm{H}} X$，因此我们可以取足够大的 $n \in \mathbb{N}$，使得 $t(1 + \varepsilon) < t_n < \dim_{\mathrm{H}} X$。如有必要，进一步增大 $n \in \mathbb{N}$，并应用引理 4.4，我们可找到 $\mathbf{p} \in \mathcal{P}(\Lambda^n)$，使得

$$g(\mathbf{p}, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) > t(1 + \varepsilon),$$

并且不失一般性，我们可以假设 $\lambda_1(\mathbf{p},\mathbf{a}_n) > \lambda_2(\mathbf{p},\mathbf{b}_n)$。

现在，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，考虑集合

$$\Gamma_{n,k} = \{(\overline{\mathtt{i}}, \overline{\mathtt{j}}) \in \Lambda^{nk} \colon n_{\mathtt{i},\mathtt{j}}(\overline{\mathtt{i}}, \overline{\mathtt{j}}) = \lceil kp_{\mathtt{i},\mathtt{j}} \rceil, \forall (\mathtt{i}, \mathtt{j}) \in \Lambda^n\},$$

其中 $n_{\mathtt{i},\mathtt{j}}(\mathtt{i},\mathtt{j}) := \#\{0 \leqslant \ell \leqslant k-1 : \sigma^{n\ell}(\mathtt{i},\mathtt{j})\rceil_n = (\mathtt{i},\mathtt{j})\}$ 表示符号 $(\mathtt{i},\mathtt{j})$ 在词 $(\mathtt{i},\mathtt{j})$ 中出现的次数。由于对于某个 $\delta_n > 0$， $\lambda_1(\mathbf{p},\mathbf{a}_n) \geqslant \lambda_2(\mathbf{p},\mathbf{b}_n)+\delta_n$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} \lceil kp_{\mathtt{i},\mathtt{j}}\rceil \log a_{\mathtt{i}} &\geqslant \sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} kp_{\mathtt{i},\mathtt{j}} \log a_{\mathtt{i}} + \sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} \log a_{\mathtt{i}} \\ &\geqslant \sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} kp_{\mathtt{i},\mathtt{j}} \log b_{\mathtt{j}} + k\delta_n + \sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} \log a_{\mathtt{i}} \\ &\geqslant \sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} \lceil kp_{\mathtt{i},\mathtt{j}}\rceil \log b_{\mathtt{j}} + k\delta_n + \sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} \log a_{\mathtt{i}} \\ &> \sum_{(\mathtt{i},\mathtt{j})\in\Lambda^n} \lceil kp_{\mathtt{i},\mathtt{j}}\rceil \log b_{\mathtt{j}} - \log c,\end{aligned} \tag{4.3}$$

每当 $k > \delta_n^{-1}\left(-\log c - \sum_{(\mathtt{i},\ \mathtt{j})\in\Lambda^n} \log\ a_{\mathtt{i}}\right)$，其中 $0 < c \leqslant 1$ 是坐标迭代函数系的一致有界畸变常数。此外，由于每个 $(\mathtt{i},\ \mathtt{j})$ 在 $\Gamma_{n,\ k}$ 的词中出现的次数恒定，因此我们有

$$a_{\mathtt{i}_1\mathtt{i}_2\cdots\mathtt{i}_k} = a_{\mathtt{i}'_1\mathtt{i}'_2\cdots\mathtt{i}'_k} =: a_{n,k} \text{ and } b_{\mathtt{j}_1\mathtt{j}_2\cdots\mathtt{j}_k} = b_{\mathtt{j}'_1\mathtt{j}'_2\cdots\mathtt{j}'_k} =: b_{n,k},$$

对所有的 $(\mathtt{i}_1\mathtt{i}_2\cdots\mathtt{i}_k,\ \mathtt{j}_1\mathtt{j}_2\cdots\mathtt{j}_k)$，$(\mathtt{i}'_1\mathtt{i}'_2\cdots\mathtt{i}'_k,\ \mathtt{j}'_1\mathtt{j}'_2\cdots\mathtt{j}'_k) \in \Gamma_{n,\ k}$，由此可得 (4.3),

$$b_{n,k} < ca_{n,k}. \tag{4.4}$$

注意，最初取 n足够大时，我们还可以假设

$$(\max_{i\in\Lambda_1} a_i)^{\varepsilon n} \leqslant c \text{ and } (\max_{j\in\Lambda_2} b_j)^{\varepsilon n} \leqslant c,$$

因此，对于每个充分大的 $k \in \mathbb{N}$、每个 $(\mathtt{i}_1\mathtt{i}_2\cdots\mathtt{i}_k,\ \mathtt{j}_1\mathtt{j}_2\cdots\mathtt{j}_k) \in \Gamma_{n,\ k}$，以及每个$x \in X$，由链式法则和有界畸变可得，

$$|f'_{\mathtt{i}_1\mathtt{i}_2\cdots\mathtt{i}_k}(x)| = \prod_{j=1}^{k} |f'_{\mathtt{i}_j}(f_{\mathtt{i}_{j+1}\cdots\mathtt{i}_k}(x))| \geqslant \prod_{j=1}^{k} ca_{\mathtt{i}_j} \geqslant (a_{\mathtt{i}_1\mathtt{i}_2\cdots\mathtt{i}_k})^{1+\varepsilon}, \tag{4.5}$$

其中我们将 $f_{\mathtt{i}_{j+1}\cdots\mathtt{i}_k}(x) = x$ 解释为，类似地

$$|g'_{\mathtt{j}_1\mathtt{j}_2\cdots\mathtt{j}_k}(x)| \geqslant (b_{\mathtt{j}_1\mathtt{j}_2\cdots\mathtt{j}_k})^{1+\varepsilon}. \tag{4.6}$$

˜现在，记 $\Gamma_{n,k}$ 为 $\Gamma_{n,k}$ 中各字符串在其第一坐标上的投影，并令

$$s_{n,k} = \frac{\log \#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{-\log a_{n,k}} + \frac{\log \#\Gamma_{n,k} - \log \#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{-\log b_{n,k}} \tag{4.7}$$

˜注意，$\#\Gamma_{n,\ k}$ 对应于由字母表$\Gamma_{n,\ k}$定义的子系统中的非空列数；并且由于按构造每个非空列所含的映射数相同，每个非空列中的映射数为$\#\Gamma_{n,\ k}/\#\Gamma_{n,\ k}$。完全按照 [6, 引理 4.3] 中的方法使用斯特林近似可得$s_{n,\ k} \to g(\mathbf{p},\ \mathbf{a}_n,\ \mathbf{b}_n)$ 随 $k \to \infty$趋于.....，因此，只要 k 足够大，我们就有

$$\frac{s_{n,k}}{1+\varepsilon} > t.$$

现在，我们用$\Sigma_{n,\ k} = \Sigma(\Gamma_{n,\ k})$ 表示与字母表$\Gamma_{n,\ k}$ 相关联的符号空间，并令$X_{n,\ k} = \pi(\Sigma_{n,\ k})$。为使记号稍微清晰一些，以下不带上划线的记号（$\mathtt{i}$，$\mathtt{j}$）表示字母表$\Gamma_{n,\ k}$中的字母，而带上划线的记号（$\overline{\mathtt{i}}$，$\overline{\mathtt{j}}$）表示$\Gamma^*_{n,\ k}$ 和$\Sigma_{n,\ k}$中的词。下面的引理是证明中的主要几何论证。

引理 4.5。 对于任意 $T \in \mathrm{Tan}(X_{n,k})$，有

$$\dim_{\mathrm{H}} T \geqslant t.$$

证明。 令 $T \in \mathrm{Tan}(X_{n,k})$，并令 $x_m \in X_{n,k}$, $r_m > 0$ and

$$\frac{X_{n,k} \cap B(x_m, r_m) - x_m}{r_m} \to T,$$

在豪斯多夫距离下。记 $M_{x_m,r_m}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 该映射为

$$M_{x_m,r_m}(y) = \frac{y - x_m}{r_m}.$$

对于每个 $m \in \mathbb{N}$，令$(\overline{\mathtt{i}}_m, \overline{\mathtt{j}}_m) \in \Sigma_{n,k}$ 使得 $\pi(\overline{\mathtt{i}}_m, \overline{\mathtt{j}}_m) = x_m$，并选择 $k_m, \ell_m \in \mathbb{N}$为满足以下条件的最小自然数

$$\|f'_{\overline{\mathtt{i}}_m|_{k_m}}\| \leqslant r_m, \text{ and } \|g'_{\overline{\mathtt{j}}_m|_{\ell_m}}\| \leqslant r_m. \tag{4.8}$$

我们用.....表示

$$Q_m = \{(\overline{\mathtt{i}}, \overline{\mathtt{j}}) \in \Sigma(\Gamma_{n,k})\colon \overline{\mathtt{i}}|_{k_m} = \overline{\mathtt{i}}_m|_{k_m} \text{ and } \overline{\mathtt{j}}|_{\ell_m} = \overline{\mathtt{j}}_m|_{\ell_m}\},$$

以（$\mathtt{i}$，$\mathtt{j}$）为中心、半径为 r_m 的符号近似正方形，并且由

$$D_m = \pi(Q_m), \tag{4.9}$$

几何上的对应对象。由 (4.4) 和引理 3.4 可知，对于任意的（$\mathtt{i}$，$\mathtt{j}$）$\in \Gamma^{\ell}_{n,\ k}$，

$$\|g'_{\overline{\mathtt{j}}}\| \leqslant (b_{n,k})^{\ell} < c^{\ell}(a_{n,k})^{\ell} \leqslant \|f'_{\overline{\mathtt{i}}}\|, \tag{4.10}$$

因此，特别地，$m \in \mathbb{N}$ 的所有情形下都有 $k_m \geqslant \ell_m$。此外，(4.8) 表明 $\mathrm{diam}(D_m) \leqslant r_m$，又由于 $x_m \in D_m$，我们有 $D_m \subset B(x_m,\ r_m)$。特别地，存在 $F \subset T$，使得在必要时取一个子列后，

$$F_m := \frac{D_m - x_m}{r_m} \to F,$$

在豪斯多夫距离下。

现在我们按如下方式定义 D_m 上的测度 ν_m。首先注意，由于$k_m \geqslant \ell_m$，

$$Q_m = \bigcup_{\overline{\mathtt{j}}' \in \Delta_m(\overline{\mathtt{i}}_m, \overline{\mathtt{j}}_m)} [\overline{\mathtt{i}}_m|_{k_m}] \times [\overline{\mathtt{j}}_m|_{\ell_m}\mathtt{j}'],$$

其中

$$\Delta_m(\overline{\mathtt{i}}_m, \overline{\mathtt{j}}_m) = \{\overline{\mathtt{j}}' \in \Lambda_2^{(k_m-\ell_m)nk}\colon (\overline{\mathtt{i}}_m|_{k_m}, \overline{\mathtt{j}}_m|_{\ell_m}\overline{\mathtt{j}}') \in \Gamma^{k_m}_{n,k}\}.$$

我们对每个 $\mathtt{j}' \in \Delta_m(\mathtt{i}_m,\ \mathtt{j}_m)$ 定义

$$\nu_m(S_{\overline{\mathtt{i}}_m|_{k_m}, \overline{\mathtt{j}}_m|_{\ell_m}\mathtt{j}'}(X_{n,k})) = \left(\frac{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{\#\Gamma_{n,k}}\right)^{k_m-\ell_m}.$$

注意，由于 $\mathtt{i}_m|_{k_m} \equiv \mathtt{i}_m|_{\ell_m} \mathtt{i}'$，存在唯一的词 $\mathtt{i}' \in \tilde{\Gamma}_{n,k}^{k_m-\ell_m}$；并且由于对于每个 $\mathtt{i} \in \Gamma_{n,k}$，属于 $\Gamma_{n,k}$ 的元素数量为 $\#\Gamma_{n,k}/\#\tilde{\Gamma}_{n,k}$，因此我们有

$$\#\Delta_m(\bar{\mathtt{i}}_m, \bar{\mathtt{j}}_m) = \left(\frac{\#\Gamma_{n,k}}{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}\right)^{k_m-\ell_m},$$

因此，在第一阶段赋予 D_m 的总质量为 1。然后，我们以归纳方式将质量均匀地分配给每个柱集的子集，即对每个 $(\mathtt{i},\mathtt{j}) \in \Gamma_{n,k}$，令

$$\nu_m(S_{\bar{\mathtt{i}}\mathtt{i},\bar{\mathtt{j}}\mathtt{j}}(X_{n,k})) = \frac{1}{\#\Gamma_{n,k}} \nu_m(S_{\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}}}(X_{n,k})),$$

只要 $\mathtt{i} = \bar{\mathtt{i}}_m|_{k_m}\mathtt{i}_1\cdots\mathtt{i}_p$ 且 $\mathtt{j} = \bar{\mathtt{j}}_m|_{\ell_m}\mathtt{j}'\mathtt{j}_1\cdots\mathtt{j}_p$，其中 $\mathtt{j}' \in \Delta_m(\mathtt{i}_m, \bar{\mathtt{j}}_m)$ 和 $(\mathtt{i}_j,\mathtt{j}_j) \in \Gamma_{n,k}$ 对所有 $j = 1,\ldots,p$ 均成立。令

$$\mu_m = \nu_m \circ M_{x_m,r_m}^{-1},$$

测度 μ_m 支撑在 F_m 上。我们声称，存在与 m 无关的常数 $c > 0$ 和 $r_0 > 0$，使得

$$\mu_m(B(x,r)) \leqslant cr^t, \tag{4.11}$$

对于所有 $x \in B(0,1)$ 和 $0 < r < r_0$ 均成立。为说明这确实给出了所声称的结论，令 μ 为序列 $(\mu_m)_m$ 的一个弱-$*$ 极限点，并注意到，由于 μ_m 的支撑为 F_m，μ 的支撑包含于 F 中；此外，对于每个 $x \in Q$ 和 $r < r_0$，根据波特芒托定理，我们有

$$\mu(B(x,r)) \leqslant \liminf_{m\to\infty} \mu_m(B(x,r)) \leqslant cr^t.$$

因此 $\dim_{\mathrm{H}} T \geqslant \dim_{\mathrm{H}} F \geqslant \dim_{\mathrm{H}} \mu \geqslant t$。

接下来只需证明 (4.11)。为此，设 $x \in B(0,1)$，且 $0 < r < \operatorname{diam}(Q)$，并注意到 $M_{x_m,r_m}^{-1}(B(x,r)) = B(x_m + r_m x, r_m r)$。记 $y = x_m + r_m x$ 和 $r' = r_m r$。令

$$\Delta(r') = \{(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}}) \in \Gamma_{n,k}^* \colon \|f'_{\bar{\mathtt{i}}}\| < r' \leqslant \|f'_{\bar{\mathtt{i}}^-}\|, \text{ and } \|g'_{\bar{\mathtt{j}}}\| < r' \leqslant \|g'_{\bar{\mathtt{j}}^-}\|\},$$

并且进一步，

$$\Delta(y,r') = \{(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}}) \in \Delta(r') \colon \pi(\mathcal{Q}(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}})) \cap B(y,r') \neq \emptyset\},$$

其中 $Q(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}}) = \{(\bar{\mathtt{i}}',\bar{\mathtt{j}}') \colon \bar{\mathtt{i}}'|_{|\mathtt{i}|} = \mathtt{i}, \text{且 } \bar{\mathtt{j}}'|_{|\mathtt{j}|} = \mathtt{j}\}$，$\bar{}$ 表示与 $(\mathtt{i},\mathtt{j})$ 对应的符号近似正方形。与 [17], 类似，由坐标迭代函数系满足开集条件可知，存在常数 $M_{n,k} < \infty$，它与 y 和 r' 无关，使得 $\#\Delta(y,r') \leqslant M_{n,k}$。

若 $(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}}) \in \Delta(y,r')$，则由 (4.10) 可得 $|\mathtt{i}| \geqslant |\mathtt{j}|$，并如前所述，集合 $\pi(Q(\mathtt{i},\mathtt{j}))$ 被以下集合覆盖

$$\left(\frac{\#\Gamma_{n,k}}{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}\right)^{|\bar{\mathtt{i}}|-|\bar{\mathtt{j}}|},$$

第 $|\mathtt{i}|$层的柱集，根据测度 ν_m 的定义，每个柱集的质量为

$$\left(\frac{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{\#\Gamma_{n,k}}\right)^{k_m-\ell_m} \left(\frac{1}{\#\Gamma_{n,k}}\right)^{|\bar{\mathtt{i}}|-k_m}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\nu_m(\pi(Q(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}}))) &\leqslant \left(\frac{\#\Gamma_{n,k}}{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}\right)^{|\bar{\mathtt{i}}|-|\bar{\mathtt{j}}|}\left(\frac{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{\#\Gamma_{n,k}}\right)^{k_m-\ell_m}\left(\frac{1}{\#\Gamma_{n,k}}\right)^{|\bar{\mathtt{i}}|-k_m}\\ &= \left(\frac{1}{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}\right)^{|\bar{\mathtt{i}}|-k_m}\left(\frac{\#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{\#\Gamma_{n,k}}\right)^{|\bar{\mathtt{j}}|-\ell_m}.\end{aligned}$$

我们可以写成 $\bar{\mathtt{i}}=\bar{\mathtt{i}}_m|_{k_m}\mathtt{i}'$ 和 $\bar{\mathtt{j}}=\bar{\mathtt{j}_m}|_{\ell_m}\mathtt{j}'$，其中 $|\mathtt{i}'|=|\bar{\mathtt{i}}|-k_m$ 和 $|\mathtt{j}'|=|\mathtt{j}|=\ell_m$，因此，根据 $\Delta(y,\ r')$ 的定义，并结合有界畸变以及 k_m 和 ℓ_m 的选取，再利用公式 (4.5) 和 (4.6)，可得

$$r_m r \geqslant \|f'_{\bar{\mathtt{i}}}\| \gtrsim r_m a_{n,k}^{(1+\varepsilon)(|\bar{\mathtt{i}}|-k_m)},$$

and

$$r_m r \geqslant \|g'_{\bar{\mathtt{j}}}\| \gtrsim r_m b_{n,k}^{(1+\varepsilon)(|\bar{\mathtt{j}}|-\ell_m)},$$

其中隐含常数与 m 无关。将这些不等式与前面的计算结合起来，可得

$$\begin{aligned}\nu_m(\pi(Q(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}}))) &\lesssim a_{n,k}^{(1+\varepsilon)(|\bar{\mathtt{i}}|-k_m)\frac{\log \#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{-(1+\varepsilon)\log a_{n,k}}}+b_{n,k}^{(1+\varepsilon)(|\bar{\mathtt{j}}|-\ell_m)\frac{\log \#\Gamma_{n,k}-\log \#\tilde{\Gamma}_{n,k}}{-(1+\varepsilon)\log b_{n,k}}}\\ &\lesssim r^{\frac{s_{n,k}}{1+\varepsilon}} \leqslant r^t,\end{aligned}$$

因此

$$\mu_m(B(x,r))=\nu_m(B(y,r'))\leqslant \sum_{(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}})\in\Delta(y,r')}\nu_m(\pi(Q(\bar{\mathtt{i}},\bar{\mathtt{j}})))\lesssim M_{n,k}r^t,$$

这就完成了证明 □

回忆一下，下维数定义为

$$\dim_{\mathrm{L}} X=\min\{\dim_{\mathrm{H}} T\colon T\in \mathrm{Tan}(X)\},$$

前一个引理表明，$\dim_{\mathrm{L}} X_{n,\ k}\geqslant t$，因此 $\dim_{\mathrm{ML}} X\ \geqslant\ t$。由于$t<\dim_{\mathrm{H}} X$ 是任意的，结论得证。□

4.3. 非线性地毯上的劣可逼近数。 要直接根据上文定理 2.2 的证明推出定理 2.3，我们唯一需要验证的是：在定理 2.2 的证明中用于见证修正下维数的集合是闭集且超平面弥散。我们构造的集合显然是紧的，因为它们本身就是非线性地毯的吸引子。现在我们证明它们也是超平面弥散的。定理 2.3 陈述中的附加假设正是对此的保证。事实上，$X_{n、k}$ 在第一坐标上的投影具有˜严格为正的直径 $d_1>0$，这由$\#\Gamma_{n、k}>1$ 得到保证，因为根据假设，迭代函数系至少有一行包含两个映射。此外，$X_{n、k}$ 的所有非空垂直纤维的直径都一致地有某个 $d_2>0$正下界，这由˜$\#\Gamma_{n、k}>\#\Gamma_{n、k}$ 得到保证，并且每一列中所用的映射数量是恒定的。

设 $R>0$、 $x\in X_{n,\,k}$ 和 V 是平面中的一个仿射超平面（一条直线）。设 D_m 是按（4.9）定义的（几何）近似正方形，其中心为 x ，半径为 2^{-m}，其中 m 的选取唯一，并使得

$$D_m\subseteq B(x,R)$$

and

$$D_{m-1}\nsubseteq B(x,R).$$

那么，

$$D_m\setminus V_{\beta R}\neq\emptyset,$$

于是，对于 $\beta=c\min\{d_1,d_2\}$ ，存在某个仅取决于原始迭代函数系的常数 $c>0$ 。证明至此完成。

5. 抛物型康托尔集

本节指出，施密特博弈方法也可用于解决另一类著名的动力系统定义的分形与**劣**$_d$相交的问题。文献 [2], 指出，对于无限生成的自共形集，通过转向维数较大的有限生成子系统，施密特博弈方法同样适用。本节将指出，类似的方法也适用于非一致收缩抛物型康托尔集。尽管本节的主要结果可由已知结果轻易推出，但据我们所知，文献中尚未提及这一结果，因此我们将简要讨论其细节。

抛物型康托尔集由 Urbański [19] 引入，可以将其视为作用在线上的迭代函数系的吸引子，其中映射允许存在导数为 1 的非双曲（或抛物）不动点。下面简要介绍这一模型。对于定义在 $[0,1]$, 上的可微收缩映射 f，若$f(p)=p$且 $|f'(p)|=1$，则称 $p\in[0,1]$ 为抛物点；必要时，我们在端点处采用单侧导数。显然，若 h 是可微收缩映射，则它至多有一个抛物点。

设 Λ 是一个至少含有两个元素的有限指标集，并考虑作用在 $[0,1]$ 上的可微压缩映射的迭代函数系 $(f_i)_{i\in\Lambda}$ 。如果这些映射 $(f_i)_{i\in\Lambda}$ 中至少有一个具有抛物点，我们就称该迭代函数系为抛物型迭代函数系。除上述条件外，我们还作出以下假设：

(1) 对所有 $i\in\Lambda$， f_i 在 $[0,1]$ 上均为 C^2 。(2) 对所有 $i\in\Lambda$， f_i 在 $[0,1]$ 上均具有非零导数。(3) 迭代函数系 $(f_i)_{i\in\Lambda}$ 满足开集条件，其开集为 (0，1)。

我们将满足 (1)、(2) 和 (3) 的抛物型迭代函数系的吸引子称为抛物型康托尔集。特别地，如果吸引子不是整个区间，那么它就是拓扑康托尔集。以下观察是本节的主要结果。

命题 5.1. 设 X 是一个抛物型康托尔集。那么

$$\dim_{\mathrm{H}}\mathbf{Bad}_1\cap X=\dim_{\mathrm{H}}X.$$

证明。 该结论可由两个简单的观察得出。首先，对任意 $\varepsilon>0$，存在一个子集 $Y\subseteq X$ ，使得

$$\dim_{\mathrm{H}}Y>\dim_{\mathrm{H}}X-\varepsilon$$

并且 Y 是由定义 X 的抛物型迭代函数系的某个（高次迭代）中的一致收缩子迭代函数系生成的 X 的自共形子集。这一事实基本上是众所周知的，不过例如在 [11，第 3] 节中有明确证明。其次，由于 Y 是一个一致收缩的 C^2 迭代函数系的吸引子，因此它是准自相似的，并且

$$\dim_{\mathrm{L}} Y = \dim_{\mathrm{H}} Y.$$

关于这一点，参见 [8, 推论 6.4.4]。于是由命题 1.1

$$\text{维数}_{\mathrm{H}}\, X \geqslant \text{维数}_{\mathrm{H}}\, \textbf{坏}_1 \cap X \geqslant \text{维数}_{\mathrm{H}}\, \textbf{坏}_1 \cap Y \geqslant \text{维数}_{\mathrm{L}}\, Y = \text{维数}_{\mathrm{H}}\, Y > \text{维数}_{\mathrm{H}}\, X - \varepsilon$$

并令 $\varepsilon \to 0$，证明得证。 □

在上述内容中，可以不作 C^2 假设，而只假设 $C^{1+\alpha}$并附加另一项技术条件，参见 [11，方程 (2.3)]，，但我们将其精确表述留给读者。

参考文献

[1] K. Bara´nski. 某些平面几何构造的极限集的豪斯多夫维数。《数学进展》，210(1):215–245，2007年。doi:10.1016/j.aim.2006.06.005。[2] T. Das、L. Fishman、D. Simmons 和 M. Urba´nski。共形动力系统定义的难以逼近向量与分形。《数学研究快报》，25(2):437–467，2018年。doi:10.4310/MRL.2018.v25.n2.a5。[3] T. Das、L. Fishman、D. Simmons 和 M. Urba´nski。自仿海绵上的劣可逼近点与下 Assouad 维数。《遍历论与动力系统》，39(3):638–657，2019年。doi:10.1017/etds.2017.42。[4] T. Das 和 D. Simmons。自仿海绵的豪斯多夫维数与动力学维数：一个维数间隙结果。《数学新进展》，210(1):85–134，2017年。doi:10.1007/s00222-017-0725-5。[5] K. Falconer。《分形几何：数学基础与应用》。约翰·威立父子出版公司，霍博肯（新泽西州），第3版，2014年。[6] A. Ferguson、T. Jordan 和 P. Shmerkin。自仿射地毯投影的豪斯多夫维数。《数学基础》，209(3):193–213，2010年。 doi:10.4064/fm209-3-1。[7] L. Fishman。分形上的施密特博弈。《以色列数学杂志》，

171 1 77 92, 2009 doi: ( ): – 。[8]

10.1007/s11856-009-0041-x
J. M. Fraser。《Assouad 维数与分形几何》，《剑桥数学论丛》第222卷。剑桥大学出版社，剑桥，2021年。doi:10.1017/9781108778459。[9] J. M. Fraser。Bedford-McMullen 地毯的分形几何。载于《热力学形式主义》，《数学讲义》第

2290 495 516 2021 doi:10.1007/ 卷，页码 –

978-3-030-74863-0 15
。施普林格，Cham，。[10] J. M. Fraser 、 D. C. Howroyd 、 A. K¨aenm¨aki 和 H. Yu。关于微集的豪斯多夫维数。《美国数学会会刊》，147(11):4921–4936，2019年。 arXiv:26801616。[11] J. M. Fraser 和 N. Jurga。抛物型地毯。《以色列数学杂志》，

267 2 583 621, 2025 doi:10.1007/ ( ): – 。

s11856-025-2715-4
[12] D. Gatzouras 和 Y. Peres。某些扩张映射的全维不变测度。《遍历论与动力系统》，17(1):147–167，1997年。 doi:10.1017/S0143385797060987。[13] A. K¨aenm¨aki、B. Li 和 V. Suomala。Moran 构造中的局部维数。《非线性》，29(3):807，2016年。 doi:10.1088/0951-7715/29/3/807。[14] D. Kleinbock、E. Lindenstrauss 和 B. Weiss。关于分形测度与丢番图逼近。《数学选刊》，10(4):479，2005年。doi:10.1007/s00029-004-0378-2。[15] D. Kleinbock 和 B. Weiss。分形上的难以逼近向量。《以色列数学杂志》，149(1):137–170，2005年。 doi:10.1007/BF02772538。[16] R. D. Mauldin 和 M. Urba´nski。无限迭代函数系中的维数与测度。《伦敦数学会会刊》（

3 73 1 105 154, 1996 https://doi-org.ezproxy.st-andrews. ），（）：–。

ac.uk/10.1112/plms/s3-73.1.105 doi:10.1112/plms/s3-73.1.105
网址：，。

[17] Y. Peres、M. Rams、K. Simon 和 B. Solomyak。自共形集的正豪斯多夫测度与开集条件的等价性。《美国数学会会刊》，129(9):2689–2699，2001年。 arXiv:2668794。[18] W. M. Schmidt。线性形式的难以逼近系统。《数论杂志》，

1 2 139 154, ( ): –
1969 doi:10.1016/0022-314X(69)90032-8
。[19] M. Urba ´nski。抛物型康托尔集。《数学基础》，151(3):241–277，1996 年。
(Roope Anttila) 圣安德鲁斯大学数学研究所，圣安德鲁斯 KY16 9SS，苏格兰电子邮箱： ra216@st-andrews.ac.uk
(Jonathan M. Fraser) 圣安德鲁斯大学数学研究所，圣安德鲁斯 KY16 9SS，苏格兰电子邮箱： jmf32@st-andrews.ac.uk(Henna Koivusalo) 布里斯托尔大学数学学院，Fry大楼，Woodland路，布里斯托尔 BS8 1UG，英国电子邮箱： henna.koivusalo@bristol.ac.uk