arXiv:2603.11885v1 [math.CO] 12 Mar 2026

关于最大 1-相交曲线之间相切的数目

Eyal Ackerman* Bal´azs Keszegh†

2026年3月13日

摘要

根据Pach的一个猜想，在任意一族 n若尔当弧中，若每对弧恰有一个公共点，且没有三条弧共有一个公共点，则其中的相切对有 $O(n)$个。该猜想已在两种特殊情形下得到证明；然而，对于一般情形，目前最好的上界仅为 $O(n^{7/4})$。在放宽的情形中，即每对弧至多有一个公共点时，这也是相切数目目前已知的最好上界。我们将后一种情形与前一种情形的上界分别改进为 $O(n^{5/3})$和 $O(n^{3/2})$。我们还考虑了这些问题的若干其他变体。例如，我们证明：若这些弧是x-单调的，每对至多相交一次，且它们的左端点位于一条公共竖直线上，则相切的最大值为 $\Theta(n^{4/3})$。若去掉这最后一个条件，则相切数目为 $O(n^{4/3}(\log n)^{1/3})$，从而改进了Pach和Sharir先前的一个上界。在此过程中，我们证明了一个图论定理，它推广了Erd˝os和Simonovits的一个结果，并可能具有独立意义。

1 引言

曲线排列在计算几何与组合几何中发挥着重要作用，并应用于机器人学、计算机图形学、计算机视觉和组合优化等领域 [23]。这些领域中的许多有趣问题都可以表述为：在各种限制条件下，确定曲线之间相切的最大数量。举例来说，有时分析曲线排列的复杂度，归根结底就是估算二边面的数量 [4]。这类面通常可以通过扰动转化为切点。另一个例子是埃尔德什˝著名的单位距离问题，该问题询问平面上 n 个不同点之间距离为单位长度的点对最大数量。这等价于询问平面上 n 个单位圆之间相切的最大数量。

本文始终讨论平面曲线，即若尔当弧，并假设任意两条曲线只有有限个交点。若一个曲线族中的任意两条曲线至多相交于 k 个点，则称该曲线族为 k-相交。如果两条曲线恰有一个公共点，且该点不是交叉点，

*海法大学奥拉宁校区数学、物理与计算机科学系，以色列蒂沃恩 36006。ackerman@math.haifa.ac.il

†匈牙利布达佩斯 HUN-REN 阿尔弗雷德·雷尼数学研究所及厄特沃什·罗兰大学。研究获得国家研究、开发与创新办公室（NKFIH）项目 K 132696 以及欧洲研究委员会高级资助“ERMiD”的支持。本研究得到匈牙利创新与技术部通过国家研究、开发与创新基金提供的资助，该基金由厄特沃什·罗兰大学 TKP 2021-NKTA-62 资助计划提供资金支持。

则称这两条曲线相切或相触。[1] 我们主要研究 1-相交曲线族中相切数量的最大值。这类曲线族有时称为伪线段。[2] 如果曲线族中的每对曲线都恰有一个公共点（交叉点或切点），则称该曲线族是恰好1-相交的。我们始终假设不存在三条曲线共有同一个点的情况，否则可能出现某一点处每对曲线都相切的情形。因此，相切对的数量等于相切点的数量。

J´anos Pach 提出了以下优美的猜想。

猜想1 (Pach [19])**.** 每个由 n 条恰好两两 *1*-相交的平面曲线组成的族，若不存在三条曲线共点，则至多有 $O(n)$ 处相切。

Gy¨orgyi 等人 [13] 证明了这一猜想的一个非常特殊的情形：曲线的端点位于其排列中常数个单元格以内。作者也证明了猜想1对 x-单调 曲线 [3]成立。回顾一下，如果一条曲线是某个连续函数在某个闭区间上的图像（分别是在$\mathbb{R}$上的图像），则称它为 x-单调 曲线（分别称为 双无限x-单调曲线）。对于任意族的（恰好）两两 1-相交曲线，根据 Keszegh 和 P´alv¨olgyi [16]的一个结果，可得相切数量的一个非平凡 $O(n^{7/4})$上界：

定理1 ([16])。 每个由 n k-相交平面曲线组成的族都至多有 $O_k\left(n^{2-\frac{1}{k+3}}\right)$ 个相切。

对于（严格）1-相交曲线族，我们将这个界改进如下。

定理2。 每个由 n 1-相交平面曲线组成的族都至多有 $O(n^{5/3})$ 个相切。

定理 3。 每个由 n 严格 1-相交平面曲线组成的族都至多有 $O(n^{3/2})$ 个相切。

注意，在 n(x-单调) 1-相交曲线中，相切的最大数量为 $\Omega(n^{4/3})$。事实上，根据 Erd˝os 著名的 n 条直线、 n 个点和 $\Theta(n^{4/3})$个点线关联构造（见下文定理 5 的证明），构造一个具有这么多相切的族并不难（参见 [20]）。

对于 x-单调的1-相交曲线，我们有如下界。

定理4. 每一族 n 1-相交的 x-单调平面曲线至多有 $O\left(n^{4/3}(\log n)^{1/3}\right)$次相切。

该上界几乎达到上述$\Omega(n^{4/3})$下界，并以一个$O\left((\log n)^{1/3}\right)$ 因子改进了由Pach和Sharir [22]的一个结果得出的先前上界。对于所谓的接地 x-单调1-相交曲线，我们有一个渐近紧的界。

定理 5. 左端点位于一条公共竖直线上的 n x-单调1-相交平面曲线之间相切次数的最大值为 $\Theta(n^{4/3})$。

定理 4 和定理 5 中上界的证明依赖于对双无限 x-单调曲线的界。

[1]这里我们遵循例如 [21]中的定义。在其他论文中，例如 [8], ，两条曲线可以相交，也可以彼此相切（在不同的点）。然而，对于1-相交曲线，这两种定义是一致的。[2]然而，“伪线段”这一术语在相切的语境中不太合适，因为直线段只能在端点处相切。

定理6。 n 双无限 x-单调1-相交曲线之间的相切最大数量为 $\Theta(n\log n)$。对于恰好1-相交的曲线，相切的最大数量为 $n-1$。

双向无限的 x-单调 1-相交曲线的界已由 Pach 和 Sharir [22] 通过不同且不那么初等的方法证明。下表总结了上述所有结果。

	x-单调	任意
双向无限的 1-相交	$\Theta(n$对数 $n)$ [22] (§ 4.1)	—
双向无限的恰好 1-相交	$n-1$ (§ 4.1)	—
接地 1-相交	$\Theta(n^{4/3})$（§ 4.3）	$\Omega(n^{4/3})$, $O(n^{3/2})$（§ 3）
1-相交	$\Omega(n^{4/3})$ [22], $O(n^{4/3}(\log n)^{1/3})$ (§ 4.2)	$\Omega(n^{4/3})$, $O(n^{5/3})$（§ 3）
恰好 1-相交	$\Theta(n)$ [3]	$\Omega(n)$, $O(n^{3/2})$（§ 3）

表1： n 1-相交曲线之间相切数量最大值的界。

一个图论定理。对于图 H ，令 ex(n,H) 表示 n 个顶点的 H-自由图中边的最大数量，也就是说，该图不包含作为子图的 H 。对于二部图 $H=(A\cup B,E)$，我们用 H^+ 表示通过向 H 添加两个新的相邻顶点 a' 和 b' ，并将 a' 与 B 中的每个顶点相连、将 b' 与 A 中的每个顶点相连而得到的图。也就是说， $H^+=((A\cup\{a'\})\cup(B\cup\{b'\})\ E\cup\{(a',b')\}\cup\{(a',b)\mid b\in B\}\cup\{(a,b')\mid a\in A\})$。Erd˝os 和 Simonovits [9] 在研究 ex(n,Q_3) 时证明了以下结果[3] ，其中 Q_3 是一个有 8 个顶点和 12 条边的图，对应于一个三维立方体。

定理 7 ([9, 定理 2])。 设 H 是一个至少含有一条边的二部图，并且对于某个常数 $0\le\alpha\le 1$，有 $ex(n,H)=O(n^{2-\alpha})=O\left(n^{2-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)$。

注意，如果 $G=(A\cup B,E)$ 是一个二部 H^+-自由图，那么对于每一对相邻顶点$a\in A$ 和 $b\in B$ ，都有 $G[(N_G(a)\setminus\{b\})\cup(N_G(b)\setminus\{a\})]$ ——由它们的开放双邻域所诱导的 G 的子图——是 H-自由的。粗略地说，如果对于 G 中的每一对相邻顶点，由它们的开放双邻域诱导的子图都不会太稠密，因为它是 H-自由的，那么 G 也不会太稠密。我们通过证明定理 7 在以下情形下仍然成立，对其进行了扩展和细化：对于一对（相邻）顶点的开放子双邻域所诱导的子图是稀疏的，无论这是由于 H-自由性还是其他原因。为陈述结果，我们需要以下定义：对于一个图 G 和一个非负单调不减函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ，若对于任意两个不相交子集 $U\subseteq N_G(u)\setminus\{v\}$ 和 $V\subseteq N_G(v)\setminus\{u\}$，都有 $|E(G(U,V))|\le f(|U\cup V|)$，其中 $G(U,V)$ 是二分子图（$U\cup V,\{(u,v)\in E(G)\mid u\in U$和 $v\in V\}$），则称两个顶点 u和 v 具有 f-稀疏子双邻域。为证明定理2，我们使用以下定理；它扩展了定理 7，也可能具有独立的研究价值。

定理 8。 设 G 是一个图，且 $f(n)=O(n^{2-\alpha})$ ，其中 $0\le\alpha<2$ 为某个常数。若 G 中每一对顶点都具有 f-稀疏子双邻域，则 $|E(G)|=O\left(|V(G)|^{2-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)$。此外，若$\alpha\le 1$，那么只需每一对相邻顶点具有 f-稀疏子双邻域，该上界便成立。

[3]我们给出了他们结果的一个简化版本，可以很容易地由此推出原始版本。

显然，定理 8 蕴含定理 7。注意，由定理 7 可以对 t 使用归纳法，得出经典的 K˝ov´ari-S´os-Tur´an 定理 [17] ：一个有 n 个顶点且不含 $K_{t,t}$ 的图有$O_t\left(n^{2-\frac{1}{t}}\right)$ 条边。在极值组合学中，一个重要的未解问题是，这一上界是否紧；目前只有在 $t=2$ 和 $t=3$ 的情形下已知答案为肯定。因此，对于 $\alpha=1$ 和 $\alpha=\frac{1}{2}$，定理 7 中的上界是紧的；而假设 K˝ov´ari-S´os-Tur´an 定理中的上界是紧的，则对每个 $\alpha=\frac{1}{t}$（其中 t 是正整数）也成立。值得注意的是，对于定理 8，每个 $0\le\alpha\le1$ 都有匹配下界。

定理 9。对于每个 $0\le\alpha\le1$，都存在一个二部图 $G=(V,E)$，它有 $|E|=\Omega\left(|V|^{2-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)$条边，并且其中任意一对顶点都具有 f-稀疏子双邻域，其中 $f(n)=O(n^{2-\alpha})$。

相关工作。Agarwal、Nevo、Pach、Pinchasi、Sharir 和 Smorodinsky [4]证明，任意由 n 条两两相交的 x-单调双无限二相交曲线组成的族，至多包含 $2n-4$ 个相切。由二相交闭曲线组成的族称为伪圆。Erd˝os 和 Gr¨unbaum [10](另见 [7, §7.1，问题 14])提出了伪圆之间相切数量的最大值问题 n。由许多点线关联的构造可得该问题的 $\Omega(n^{4/3})$下界。Janzer、Janzer、Methuku 和 Tardos [15]近期的结果给出的最佳上界为 $O(n^{3/2})$。至于两两相交的伪圆，近期一项与 Dam´asdi、Pinchasi 和 Raffay [1]合作的工作，通过证明这种情况下相切数量的最大值为$2n-2$，解决了 Gr¨unbaum [12]的一个旧猜想。文献 [4]证明了一个较差的线性上界。

Ellenberg、Solymosi 和 Zahl [8] 证明，任意一族次数至多为 d 的 n平面代数曲线都存在 $O_d(n^{3/2})$ 个相切点。[4] 如果两条曲线可以相交任意多次，那么 n 条曲线之间可能有 $\Omega(n^2)$ 个相切点。Pach、Rubin 和 Tardos [21] 解决了 Richter 和 Thomassen 提出的一个猜想，证明若每一对 n 闭曲线都相交，则交叉点远多于相切点。具体而言，他们证明，若 X 表示交叉点的数量，T 表示相切点的数量，则 $|X|=\Omega(|T|(\log\log n)^{1/8})$，并猜想 $|X|=\Omega(|T|\log n)$。

另一条研究方向考察由两族互不相交曲线组成的曲线族之间的相切数量。Pach、Suk 和 Treml [24] 引入了这一问题，并将其归因于 Ben-Dan 和 Pinchasi [5]。根据 Ben-Dan 和 Pinchasi 的一项观察以及 Janzer 等人 [15], 的结果，可得上界 $O(n^{3/2})$；而 Keszegh 和 P´alv¨olgyi [16]利用二相交曲线证明了下界 $\Omega(n^{4/3})$。对于两族 1-相交曲线，P´alv¨olgyi 等人证明了一个线性上界 [2]。

关于曲线之间相切及其应用的更多相关结果，请参见 [4] 和 [21]以及其中的参考文献。

组织结构。第 2 节介绍一些记号并整理若干有用的引理后，我们在第 3 节证明适用于任意 1-相交曲线的结果。第 4 节证明关于 x-单调曲线的结果。最后，在第 5 节证明定理 8 和定理 9，并探讨其进一步的应用以及与相关图论结果的联系。

[4]如前所述，他们对相切的定义略有不同，实际上他们给出的是相切点数量的上界。

2 记号与工具

回顾一下，我们假设任意两条曲线仅有有限个交点，且没有三条曲线交于同一点。根据前一个假设，我们还可以假设这些曲线由折线链构成。事实上，给定一组曲线 $\mathcal{C}$，考虑平面图 G，其顶点集由 $\mathcal{C}$ 中曲线的端点和交点组成，边集则由沿曲线相邻顶点之间的子曲线组成。根据 F´ary 定理 [11]，这个平面图可以用直线边嵌入，并保持相同的旋转系统。将每条曲线 $c \in \mathcal{C}$ 替换为由该嵌入中对应于 G 中属于 c的边所组成的折线链，由此得到曲线族 $\mathcal{C}'$。对于 $\mathcal{C}$ 中两条曲线的每个交点（或相切点），其对应曲线在 $\mathcal{C}'$中都有唯一的交点（或相切点），反之亦然。

对于曲线集 $\mathcal{C}$，我们用 $G_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$ 的相切图，即顶点集为 $\mathcal{C}$、边集由曲线的相切对组成的图。为方便起见，我们有时会将 $\mathcal{C}$ 中的曲线与 $G_{\mathcal{C}}$ 中对应的顶点互换使用。

设 c 是一条曲线，p 和 q 是 c 上的两个点。我们用 $c[p,q]$ 表示 c 上这两点之间的子曲线。对于另一条在 c 处与 c' 相交的曲线（交点唯一），例如，我们也可以写作 $c[c',q]$，而不写 $c[c\cap c',q]$。如果 c 是定向的，那么我们用 c^-（分别用 c^+）表示沿其定向的起点（分别为终点）。我们也分别用 $c[-,p]$ 和 $c[p,+]$ 代替 $c[c^-,p]$ 和 $c[p,c^+]$。如果 c 是一条 x-单调曲线，而 p 是一个点（不一定在 c 上），那么在稍微滥用记号的情况下，例如写作 $c[p,+]$，我们指的是 $c[\ell_p\cap c,+\infty)$，其中 ℓ_p 是经过 p 的垂直线。按照惯例，圆括号表示端点不属于该子曲线。

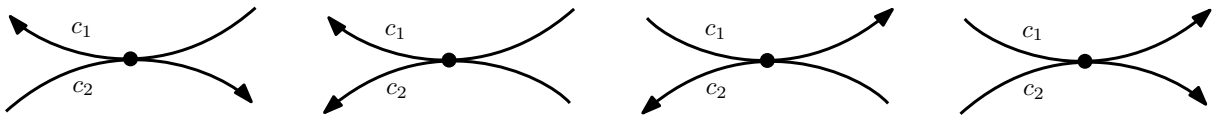
一族 x-单调曲线按以下方式诱导出平面的一种广义梯形剖分 。对于每个 p （它是某条曲线的端点或两条曲线的交点），我们绘制一条包含 p 且不与除包含 p的曲线之外的任何其他曲线相交的极大垂直线段（也可能是射线或直线）。由此将平面划分为广义梯形。

定理10 (x-单调曲线的切割引理 [14, 命题 211])。 对于任意一族$\mathcal{C}$ 由 n x-单调1-相交曲线组成的曲线，以及任意 $r > 1$，存在 $\mathcal{C}$ 中的一个曲线子集，它诱导出平面的一种广义梯形剖分，将平面划分为 $O(r^2)$ 个广义梯形，使得每个梯形的内部至多与 $\mathcal{C}$中的 n/r 条曲线相交。

我们还将用到（非对称）K˝ov´ari-S´os-Tur´an 定理，以及 Janzer等人 [15] 关于交反序列大小的最新紧界。后者改进了 Marcus和Tardos [18] 以及Pinchasi和 Radoi˘ci´c [25]此前得到的界。

定理*11*（*K˝ov´ari-S´os-Tur´an* 定理 [17]）。对于任意 $m,n,s,t \geq 1$，若 $G=(A\cup B,E)$ 是一个二部图，满足 $|A|=m$, $|B|=n$，并且在 A 中不存在 s 个顶点、在 B 中不存在 t 个顶点，使它们构成完全二部子图 $K_{s,t}$，则 $|E|\leq(s-1)^{1/t}nm^{1-1/t}+(t-1)m$。特别地，当 $m=n$ 和 $s\geq t$ 时，$|E|=O_s(n^{2-1/t})$。

定理 12 ([15])。 设 A^1、. . . 、 A^n 是某个包含 n 个符号的集合的若干子集上的线性序，并且在任意两个不同的线性序中，都没有三个符号以相同的顺序出现。那么 $\sum_{i=1}^{n}|A^i|=$ $O\ n^{3/2}$ ()。



(a) (b) (c) (d)

图1：两条有向曲线 c_1 与 c_2的四种相切类型：(a) 左-左 (b) 左-右 (c) 右-右 (d) 右-左。

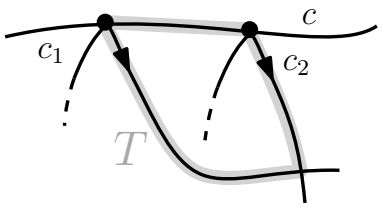


图2：若 c_1 与 c_2 在 ℓ 处接地，且与 c具有相同的相切类型，则 $c_1[c,+]$ 与$c_2[c,+]$ 不能相交。

3 任意1-相交曲线

本节我们考虑不一定是 x-单调的 1-相交曲线，并证明定理2和定理3。我们从接地曲线开始。若曲线族 $\mathcal{C}$ 中的每条曲线都在曲线 $c \notin \mathcal{C}$ 上有一个端点，则称曲线族 $\mathcal{C}$ 在曲线 $c \notin \mathcal{C}$ 处接地 。

定理13. 设 A 是接地于曲线 ℓ_A 的曲线族， B 是接地于曲线 ℓ_B的曲线族，且所有这些曲线构成一个1-相交曲线族， $A \cup \{\ell_A\}$ 中没有曲线与 ℓ_B相交， $B \cup \{\ell_B\}$ 中也没有曲线与 ℓ_A相交。则相切对 $\{c_A \in A, c_B \in B\}$ 的数目为 $O(|A \cup B|^{3/2})$。

证明. 我们将 A 中的曲线称为红色曲线，将 B 中的曲线称为蓝色曲线。若一对同色曲线相切，则我们可以在局部重绘它们，使其不相交，因为我们只关心红蓝相切。因此，每一对同色曲线要么交叉，要么不相交。将 A 中的每条曲线定向为远离 ℓ_A ，并将 B 中的每条曲线定向为远离 ℓ_B。于是存在四种红蓝相切，因为每条曲线相对于其定向都有“左”侧和“右”侧，见图1。

命题 1. 设 c、 c_1、 c_2和 ℓ为四条互不相同的曲线，满足：*(1)* $\{c, c_1, c_2, \ell\}$ 是1-相交的；*(2)* c_1 和 c_2 在 ℓ 处接地，并且定向远离 ℓ；*(3)* c是定向的，并在同类型的相切点处与 c_1 和c_2 相切；以及 *(4)* c 和 ℓ 不相交。则 $c_1[c,+]$ 和 $c_2[c,+]$ 不相交。

证明. 假设 $c_1[c,+]$和 $c_2[c,+]$相交，并令 T表示简单闭曲线 $c[c_1,c_2] \cup c_1[c,c_2] \cup c_2[c,c_1]$，见图 2。则 c_1^-和 c_2^-位于不同的两侧 T。[5]然而，这是不可能的，因为这两个点都在 ℓ 上，而它不能与 T相交。□

回到定理的证明，我们分别考虑四种相切类型。对于某一类型 t，我们对每条曲线 $b \in B$ ，写出从 A 开始与 b

[5]假设 T 具有某个任意定向，而不考虑其他曲线的定向。

在一个给定类型的接触点处相切的曲线的有序列表。将该列表记为 $l_t(b)$，并按照相应接触点沿着 b 的顺序排列。

命题 2. 不存在三条曲线 $a_1, a_2, a_3 \in A$ 和两条曲线 $b_1, b_2 \in B$，使得 a_1, a_2, a_3 在 $l_t(b_1)$ 和 $l_t(b_2)$ 中都按此顺序出现。

证明。反设存在这样的曲线。首先注意，由命题 1 可知，$b_1[a_1, +]$ 和 $b_2[a_1, +]$ 不相交。特别地，$b_1[a_1, a_3]$ 和 $b_2[a_1, a_3]$ 不相交。接下来，我们断言，三条子曲线 $a_i[b_1, b_2]$、$i = 1$、2、3 中至少有一对相交。反设这些曲线两两不相交。将 b_1 和 b_2 稍微“膨胀”，并在每条子曲线 $c \in \{a_1(b_1, b_2)\ a_2(b_1, b_2)\ a_3(b_1, b_2)\ b_1(a_1, a_3)\ b_2(a_1, a_3)\}$ 上固定一点 $p(c)$。注意，这些子曲线互不相交。接下来，按照图 3 所示，画出 $K_{2,3}$ 的一个无交叉副本，其顶点为这五个点，边沿着相应的子曲线。注意，由于 a_1, a_2, a_3 按此顺序同时与 b_1 和 b_2 相切，$p(a_1)\ p(a_2)\ p(a_3)$ 的逆时针循环次序对于 $p(b_1)$ 和 $p(b_2)$ 相同。然而，这与 Pinchasi 和 Radoi˘ci´c [25] 的以下引理矛盾。

引理 1 ([25,引理 1])。设 G 是一个拓扑图，其中不存在由两条边组成且自身奇数次交叉的4圈。对于 G 的每个顶点 v，令 C_v 表示 v 的邻居的逆时针循环次序。那么对于每对顶点 u 和 v，如果 u 和 v 有两个以上的公共邻点，那么这些邻点在 C_v 中的次序与它们在 C_u 中的次序相反。

在证明余下部分中，我们只考虑 $a_i[b_1, b_2]$、$i = 1$、2、3 中保证存在的一对子曲线交叉，因此不失一般性，我们可以假设 $a_1(b_1$、$b_2)$ 与 $a_2(b_1$、$b_2)$ 相交。我们还可以假设 a_1 在遇到 b_2 之前先遇到 b_1。由于根据命题 1，$a_1[b_1, +]$ 不可能与 $a_2[b_1, +]$ 相交，因此 $a_1[b_1, +]$ 与 $a_2[-, b_1]$ 相交。它们与 $b_1[a_1, a_2]$ 和 $b_2[a_1, a_2]$ 一起将平面划分为三个连通区域。对于每种红蓝相切类型，点 a_1^- 和 a_2^- 位于两个不同的区域，示意见图 4。然而，这是不可能的，因为这两个点都位于 ℓ_A 上，而 ℓ_A 不与任何曲线 a_1、a_2、b_1、b_2 相交。

□

由命题 2 和定理 12 可知 $\sum_i |l_t(b_i)| = O(|A \cup B|)^{3/2}$。因此，红蓝相切的数量也

□

$O(|A \cup B|)^{3/2}$。

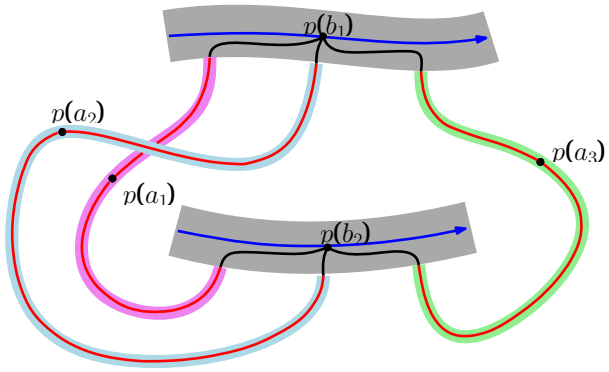


图 3：如果这些子 曲线 $a_i(b_1, b_2)$ 彼此不相交，那么我们就可以画出 $K_{2,}$ 的无交叉副本 $_3$.

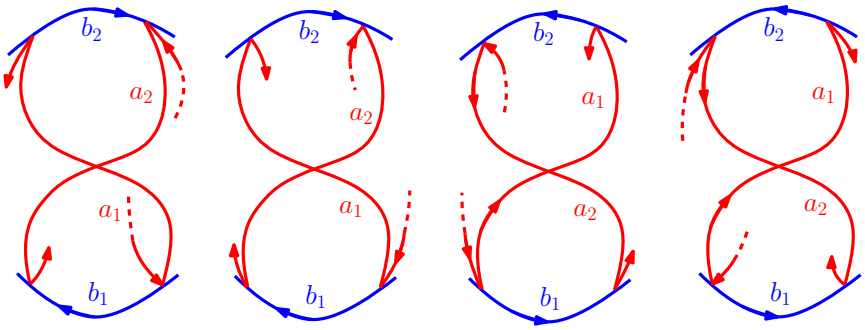


图 4：命题 2 证明的示意图： $a_1[b_1,+]$ 与 $a_2[-,b_1]$ 相交，并与 $b_1[a_1,a_2]$ 和 $b_2[a_1,a_2]$ 一起诱导出一个平面划分。对于任意红蓝相切类型， a_1^- 和 a_2^- 位于该划分的不同区域。

推论 1。 设 $\mathcal{C}$ 是一个由 n 1相交曲线组成、在曲线 ℓ处接地的族。那么 $\mathcal{C}$ 之间的相切数量为 $O(n^{3/2})$ 。

证明。 记 $t(n)$ 为此类 n曲线组成的曲线族中相切数量的最大值。我们通过对 n归纳，证明 $t(n) = O(n^{3/2})$ 。将 ℓ 分成两个不相交子曲线，使得 $\mathcal{C}$ 中的 $n/2$条曲线在每条子曲线上接地。利用定理13和归纳法，我们得到递归关系 $t(n) \le 2t(n/2) + O(n^{3/2})$ ，由此可得 $t(n) = O(n^{3/2})$ 。 □

推论2。 设 A 是一个接地于曲线 ℓ_A 的曲线族， B 是一个接地于曲线 ℓ_B的曲线族，且 $A \cup B \cup \{\ell_A, \ell_B\}$ 构成一个1-相交曲线族。那么，相切对的数量 $\{c_A \in A, c_B \in B\}$ 为 $O(|A \cup B|^{3/2})$。

证明。若 ℓ_A 与 ℓ_B 在点 p相交，则在 p 处将它们各分成两条曲线（使得p 不属于其中任何一条）。将这些子曲线记为 ℓ_A^1、ℓ_A^2、ℓ_B^1 和 ℓ_B^2 ，并注意到它们两两不相交。对于 A （分别地， B）中与 ℓ_B （分别地， ℓ_A）相交的每条曲线，我们都将其切成两条子曲线，使其中一条接地于 ℓ_A^1 或 ℓ_A^2 （若未切分，则接地于 ℓ_A ），另一条接地于 ℓ_B^1 或 ℓ_B^2 （若未切分，则接地于 ℓ_B ）。接下来，只需对每个 $x \in \{A, B\}$和 $i \in \{1, 2\}$，给出接地于 ℓ_x^i的曲线之间相切数量的上界；并对每个满足 $x \ne y$ 或 $i \ne j$ 的 x、 $y \in \{A, B\}$以及 i、 $j \in \{1, 2\}$ ，给出曲线对 c和 c'之间相切数量的上界，其中 c接地于 ℓ_x^i，而 c'接地于 ℓ_y^j。由推论 1和定理13可知，所有这些相切的总数为 $O(|A \cup B|^{3/2})$。

□

现在我们可以推导出本节的主要结果。

定理 3. 每一族恰好相交1次的平面曲线都存在 $O(n^{3/2})$ 处相切。

证明。 这可由推论 1 直接得出。 □

定理2. 每一族 n 1-相交的平面曲线都存在 $O(n^{5/3})$ 处相切。

证明。 设 $\mathcal{C}$ 是一个由 n 1-相交曲线组成的族，且 $G_{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的相切图。由推论2可知， $G_{\mathcal{C}}$ 满足关于 $f(x) = O(x^{3/2})$ 的 f-稀疏子双邻域性质。事实上，设 v_0 和 v_1 是 $G_{\mathcal{C}}$ 中的两个相邻顶点，且 $V_i \subseteq N_{G_{\mathcal{C}}}(v_i) \setminus \{v_{1-i}\}$，其中 $i = 0, 1$，

是它们在 $G_{\mathcal{C}}$ 中的邻域的两个不相交子集。我们希望对 $t(V_0, V_1)$—— $\{u_0 \in V_0, u_1 \in V_1\}$ 中相切对的数量——给出上界。对于每个 $i = 0$，1，以及每条曲线 $u \in V_i$，我们将 u 分成两个子曲线 u_i' 和 u_i''，使它们各自都接地于 v_i。将由此得到的曲线集合分别记为 V_1'、V_1''、V_2' 和 V_2''。因此，$t(V_0, V_1) = t(V_0', V_1') + t(V_0', V_1'') + t(V_0'', V_1') + t(V_0'', V_1'')$。由推论2可知，该和的上界为 $O(|V_0 \cup V_1|)^{3/2})$。因此，根据定理 8，我们有 $|E(G_{\mathcal{C}})| \leq O(n^{5/3})$。 □

4 单调曲线之间的相切

Pach和Sharir [22] 研究了以下问题：在平面内的一组 n线段中，最多有多少对互不相交的线段是竖直可见的？如果存在一条竖直线段与两条线段都相交，且不与集合中的任何其他线段相交，我们就称这两条线段竖直可见。这个问题的动机来自对 Bentley-Ottmann 直线扫描算法原始实现中事件队列最大规模的分析；该算法用于枚举一组线段之间的所有交点 [6]。

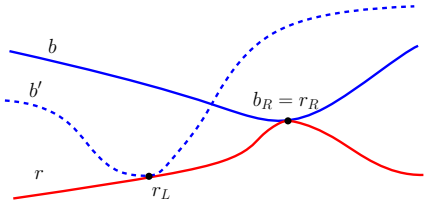
Pach和Sharir [22] 证明，在一组 n 线段中，互不相交且竖直可见的线段对的最大数量为 $O\left(n^{4/3}(\log\ n)^{2/3}\right)$，且为 $\Omega\left(n^{4/3}\right)$。他们还指出，这些界对 x-单调的 1-相交曲线同样成立。

容易看出，计算不相交且竖直可见的曲线对，可以归约为计算 x-单调的1-相交曲线的接触对，反之亦然。事实上，只需将一条曲线的一小段极窄部分替换成一个接触另一条曲线的“尖峰”，竖直可见的曲线就能变为相切。另一方面，一对相切曲线很容易“分开”，从而变为竖直可见。因此，Pach和Sharir [22]的结果意味着，n x-单调的1-相交曲线之间的相切最大数量为 $O\left(n^{4/3}(\log\ n)^{2/3}\right)$ and $\Omega\left(n^{4/3}\right)$。

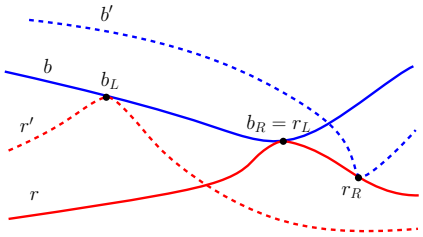
改进Pach和Sharir的上界。我们概述Pach和Sharir [22]上界的证明，并指出导出定理4和定理 5 中更优上界的改进之处。首先，利用切割引理（定理10）将平面划分为广义梯形，使每个梯形被数量不多的曲线切割。然后估计每个梯形 T_i 内的相切数量，最后对所有梯形求和并给出上界。对于 T_i内的相切，考虑切割 T_i的两组曲线：“短”曲线（至少有一个端点位于 T_i 内）和“长”曲线（没有端点位于 T_i内）。因此，就 T_i而言，长曲线的表现类似双向无限曲线。于是，可以利用定理6给出长-长相切数量的上界。为了得到定理 5的紧上界，此处我们使用下文引理2的线性上界。短-长相切的数量利用K″ov´ari-S´os-Tur´an定理和一个技术性引理（见下文引理3）给出上界。最后，通过进一步将 T_i 划分为竖直条带，给出 [22] 内短-短相切数量的上界。不过我们注意到，也可以改用归纳法，这样证明更简洁，且能得到更好的上界。为完整起见，我们给出详细证明。

4.1 双向无穷的1-相交 x-单调曲线

设 c_1 与 c_2 为两条双向无穷的 x-单调曲线，并设 v 为一条垂直线。我们称 v与 c_1 相交早于其与 c_2 相交，如果 c_1 与 v 的交点低于



(a) 如果 $b_R = r_R$，那么存在一条蓝色曲线 b' 在 C 中，其起点位于 b下方。



(b) 如果 $b_R = r_L$，那么存在曲线 b'，$r' \in C$，它们互不相交。

图5：定理14的证明示意图：如果 $G_{\mathcal{L}}$ 包含一个圈，那么考虑蓝色曲线 b，它的起点位于圈内所有其他蓝色曲线的下方。

c_2 与 v的交点。 c_1 位于下方 c_2，如果不存在任何垂直线在与c_1相交之前与 c_2 相交。我们称 c_1 起始于下方 c_2，如果 c_1 位于 c_2之下，或者 $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$ 以及 c_1 与 c_2 的最左交点左侧的任意垂直线在与 c_2相交之前与 c_1 相交。

为方便起见，我们将定理6拆分为两个陈述。

定理14. 设 $\mathcal{L}$ 是由 n 条双向无穷的 x-单调曲线组成的集合，使得$\mathcal{L}$ 中每一对曲线恰好相交于一个点。则 $\mathcal{L}$中的曲线之间至多有 $n-1$ 个相切。该界是最优的。

证明. 容易构造 $n-1$ 条曲线，使得其中每一条都恰好与另外一条曲线相切，并且这 n 条曲线是双向无穷的、 x-单调的，且其中任意两条恰好相交于一个点。例如，考虑对应于函数 $f(x) = 0$和 $f(x) = |x - i|$ 的图像的曲线，其中 $i = 0, 1, \ldots\ldots, n-2$。

至于上界，设 $\mathcal{L}$ 是如上所述的一组曲线，并首先注意到，不存在一条曲线从下方与一条曲线相切、同时又从上方与另一条曲线相切，否则这两条曲线不相交。因此， $G_{\mathcal{L}}$ 是一个二部图，我们可以把从上方与某条曲线相切（相应地，从下方相切）的曲线称为蓝色（相应地，红色）曲线。因此，在每个切点处，一条红色曲线从下方与一条蓝色曲线相切。

我们证明相切图 $G_{\mathcal{L}}$ 是一个森林，因此至多有 $n-1$ 个相切对。反设存在一个圈 C，且它位于 $G_{\mathcal{L}}$中。不失一般性，我们可以假设 C 是一个简单圈，因此， C 中的每条曲线 c 都包含两个对应于 C中边的切点。我们将其中较左的切点记为 c_L （较右的切点记为 c_R）。设 b 是 C 中起点低于 C 中其他所有蓝色曲线的蓝色曲线，并设 r 是从下方在 b_R处与 b 相切的红色曲线。如果 $b_R = r_R$，那么存在一条蓝色曲线 b'，它在 r_R左侧与r 相切。然而，此时 b' 必定在 $b' \cap r$右侧与 b 相交，这意味着 b'的起点低于 b （见图 5a）。另一方面，如果 $b_R = r_L$，那么存在一条蓝色曲线 b'，它在 r_L 右侧与 r 相切；同时还存在一条红色曲线 r'，它在 b_R左侧与 b 相切。然而，此时 b'和 r' 不可能相交（见图 5b）。

□

由定理14，我们可以得出一个符合 [4, 定理 3.1] 精神的二部变体。

推论 3。 设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ 是一个由 n x-单调的双无限 1-相交曲线组成的族。假设 $\mathcal{L}_1$ 中的每条曲线都与 $\mathcal{L}_2$ 中的每条曲线相交。那么切线对的数量

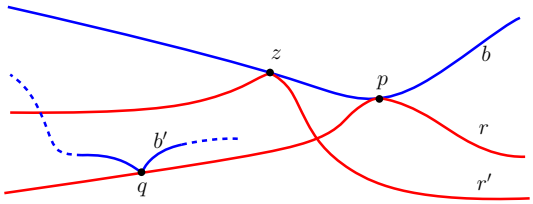


图6：引理2证明示意图： p 是一个未标记的红蓝接触点。

$\{\ell_1 \in \mathcal{L}_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_2\}$ *is at most* $2(n-1)$.

证明。 首先考虑满足 ℓ_1 从下方接触 ℓ_2 的切线对 $\{\ell_1 \in \mathcal{L}_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_2\}$ 的数量。我们声称， $\mathcal{L}$ 中参与此类接触的曲线两两相交，因此根据定理14，此类接触至多有 $n-1$ 个。事实上，假设有两条曲线 ℓ_1， $\ell_1' \in \mathcal{L}_1$ 不相交，并且不妨设 ℓ_1 位于 ℓ_1' 上方。设 $\ell_2 \in \mathcal{L}_2$ 是一条从上方接触 ℓ_1 的曲线。那么 ℓ_2 和 ℓ_1' 不相交，这就产生了矛盾。类似地可知， $\mathcal{L}_2$ 中的任意两条曲线都相交。因此，满足 ℓ_1 从下方接触 ℓ_2 的切线对 $\{\ell_1 \in \mathcal{L}_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_2\}$ 有 $n-1$ 对；对称地，满足 ℓ_1 从上方接触 ℓ_2 的切线对 $\{\ell_1 \in \mathcal{L}_1, \ell_2 \in \mathcal{L}_2\}$ 有 $n-1$ 对。

□

对于每两条曲线至多相交一次的双向无限 x单调曲线族，我们需要以下引理。

引理2。 设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ 是一个由 n x单调的双向无限1-相交曲线组成的族。假设 $\mathcal{L}_1$ 中的每条曲线都在 $\mathcal{L}_2$中的每条曲线下方开始。那么切线对 $\{\ell_1 \in \mathcal{L}_1 \ell_2 \in \mathcal{L}_2\}$ 至多有 $n-1$个。这个界是最佳可能的。

证明。 将 $\mathcal{L}_1$ 中的曲线称为红色曲线，将 $\mathcal{L}_2$ 中的曲线称为蓝色曲线。不失一般性，假设没有两个红蓝相切点具有相同的 x坐标。在每条曲线上标记最左侧的红蓝相切点。由于这些点中最左侧的红蓝相切点属于两条曲线，至多有 $n-1$ 个点被标记。我们断言，每个红蓝相切点实际上都被标记了。

事实上，反设存在一个未标记的红蓝切点 p。设 r和 b 分别为在 p处相切的红色曲线和蓝色曲线。由于 p 不是 r上最左侧的红蓝切点，因此存在一条蓝色曲线 b' ，它在 p 左侧的点 q处与 r 相切。类似地，存在一条红色曲线 r' ，它在 p 左侧的点 z处与 b 相切。不妨设 q 位于 z 左侧，并参见图6。容易看出， $r'(z,+)$和$r(-,p)$必定在 z 和 p之间的某一点相交，因此 r' 起始时位于 r上方。由于 b' 起始时位于r'上方，可知 $b'(-,q)$与 $r'(-,q)$相交。因此， $b'(q,+)$位于 $r'(q,+)$下方，这意味着$b'(q,+)$必定与 r 相交，因为 $r'(q,+)$也与之相交。然而，这是不可能的，因为 b'和 r 相切。

上界的证明到此结束。定理14的证明中提到的构造表明，这个上界是紧的。

□

利用引理2，我们可以对定理6的 $O(n\log\ n)$上界给出一个简明证明。Pach和Sharir [22, 定理 2]，已经证明了这一界限，但所使用的工具较为复杂。为完整起见，我们还将用切曲线描述下界构造。

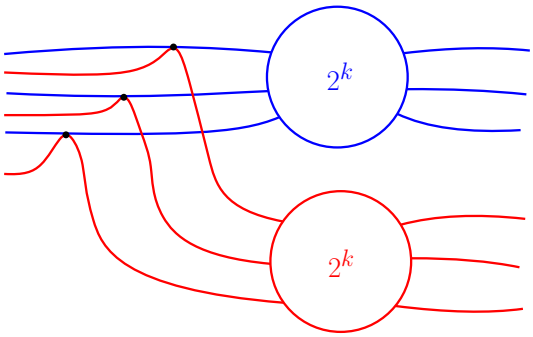


图7： 2^{k+1} 条曲线允许出现 $2^k(k+1)$次相切。

定理15。 设 $\mathcal{L}$ 是一个由 n x-单调双无限1-相交曲线组成的族。那么， $\mathcal{L}$ 中曲线之间的相切数为 $O(n \log n)$。这个界限在渐近意义下是紧的。

证明。 设 $f(n)$为一族 n x-单调双无限1-相交曲线中相切次数的最大值。我们用归纳法证明 $f(n) \leq n\log_2 n$。显然，当$n=1$时，该结论成立。对于 $n>1$，设 $\mathcal{L}=\{\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n\}$是一族 x-单调双无限1-相交曲线，并且对每个 $i<j$， ℓ_i都从 ℓ_j下方开始。令 $\mathcal{L}_1=\{\ell_1,\ldots,\ell_{\lfloor n/2\rfloor}\}$和 $\mathcal{L}_2=\{\ell_{\lfloor n/2\rfloor+1},\ldots,\ell_n\}$。根据归纳法假设， $\mathcal{L}_1$中的曲线之间至多有 $f(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor) \leq \lfloor \frac{n}{2}\rfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{2}\rfloor$次相切， $\mathcal{L}_2$中的曲线之间至多有 $f(\lceil \frac{n}{2}\rceil) \leq \lceil \frac{n}{2}\rceil \log_2 \lceil \frac{n}{2}\rceil$次相切。根据引理2，其中一条曲线属于 $\mathcal{L}_1$、另一条属于 $\mathcal{L}_2$的接触对至多有 $n-1$ 对。因此， $\mathcal{L}$中的曲线之间的相切次数至多为$\lfloor \frac{n}{2}\rfloor \log_2 \lfloor \frac{n}{2}\rfloor + \lceil \frac{n}{2}\rceil \log_2 \lceil \frac{n}{2}\rceil + n - 1 \leq n\log_2 n$。

至于下界，我们证明：对于任意正整数 k，都有 $f(2^k) \geq 2^{k-1}k$。当 $k=1$ 时，这显然成立。假设该命题对 k 成立。于是，我们可以按照图7所示的方式，将两个族组合起来，使每个族中的 2^k 条曲线之间至少有 $2^{k-1}k$ 个相切点。因此，这些 2^{k+1} 条曲线之间的相切总数为 $2\cdot 2^{k-1}k + 2^k = 2^k(k+1)$。 □

4.2 任意 1-相交的 x-单调曲线

在本节中，我们证明定理4。大多数要素已经出现在 [22], 中；不过，为了在曲线的背景下对我们的改进上界给出完整证明，我们在此重新陈述这些内容。

引理3。 设 $\mathcal{L}=\{a,b,c,d\}$ 是四条双无限 x-单调曲线。则不存在两条 x-单调曲线 e、f，使得它们中的每一条都从下方与 $\mathcal{L}$ 中的每条曲线相切，并且 $\mathcal{L}\cup\{e,f\}$ 是 1-相交的。

证明。 反设存在如上所述的六条曲线。由于 e 和 f 都从下方与a、b、c、d相切，因此 $\mathcal{L}$中的每条曲线都会出现在 $\mathcal{L}$的下包络上。不失一般性，假设 a、b、c、d在 $\mathcal{L}$的下包络上从左到右依次出现，并令$p=b\cap c$，见图 8。

注意，若 $f\cap a$位于 $e\cap a$左侧，则 $f(f\cap a,p)$必定与 $e(e\cap a,p)$相交，否则f就无法与 b相切。因此， $e(-,p)$与 $f(-,p)$必定相交。若 $f\cap a$位于 $e\cap a$右侧，则根据对称性， $e(-,p)$与 $f(-,p)$也必定相交。同理， $e(p,+)$与 $f(p,+)$必定相交，因此 e 与 f 相交多于一次，矛盾。 □

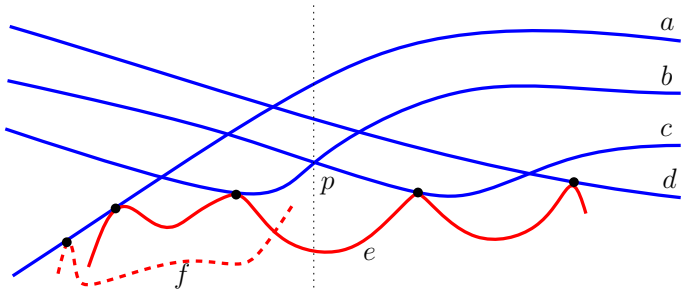


图 8：引理3证明示意图：如果 $f \cap a$ 位于 $e \cap a$ 的左侧，那么 $f(f \cap a,\ p)$ 必须与 $e(e \cap a,\ p)$ 相交，否则 f 就无法接触 b。

定理4。 每个由 n 1-相交的 x-单调平面曲线构成的族都至多有 $O\left(n^{4/3}(\log n)^{1/3}\right)$个相切。

证明。 我们对 n 使用归纳法，证明相切数量至多为 $cn^{4/3}(\log n)^{1/3}$，其中 c 是某个绝对常数。我们稍后选择 n_0 和 c，使得当 $n \le n_0$ 时结论显然成立。设 $\mathcal{C}$ 是一个由 n 1-相交的 x-单调曲线组成的族，其中 $n > n_0$，并假设对所有曲线数量更少的此类曲线族，结论均成立。记 $t(\mathcal{C})$ 为 $\mathcal{C}$ 中曲线之间的相切数量，并令 $r = n^{1/3}(\log n)^{2/3}$。由定理10可知，存在一个子集 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$，它将平面划分为 $O\left(\frac{n^{2/3}}{n}(\log)^{4/3}\right)$ 个广义梯形，使得每个梯形与 $\mathcal{C}$ 中至多 $n^{2/3}(\log n)^{2/3}$ 条曲线相交。

接下来，我们界定每个梯形 t_i 内的相切数量。令 $\mathcal{L}_i$ 表示与 t_i 相交且其两个端点均不在 t_i 内部的曲线，令 $\mathcal{S}_i$ 表示与 t_i 相交且至少有一个端点位于 t_i 内部的曲线。注意，$\mathcal{L}_i$ 中至多包含两条位于 $\mathcal{C}'$ 内、分别从上方和下方界定 t_i 的曲线。还要注意，对于每条曲线 $c \in \mathcal{L}_i \cup \mathcal{S}_i$，$c \cap t_i$ 由单条曲线组成，这是因为这些曲线是 x-单调的，并且每条曲线与 $\mathcal{C}'$ 中从下方和上方界定 t_i 的两条曲线至多相交一次。忽略 $\mathcal{C} \setminus (\mathcal{L}_i \cup \mathcal{S}_i)$ 中的曲线，并考虑将 $\mathcal{L}_i$ 和 $\mathcal{S}_i$ 中的曲线裁剪到 t_i。注意，与 $\mathcal{L}_i$ 对应的曲线（裁剪到 t_i）可以轻松延伸为 x-单调的双向无限曲线，且不会引入新的交点。为方便起见，我们仍将新的曲线集记为 $\mathcal{L}_i$ 和 $\mathcal{S}_i$。令 $m_i = |\mathcal{L}_i|$ 和 $n_i = |\mathcal{S}_i|$。

我们对集合 $\mathcal{L}_i$ 与 $\mathcal{S}_i$ 各自内部的相切数目，以及不同集合的曲线之间的相切数目给出上界：由定理15，$\mathcal{L}_i$中的曲线之间有 $O(m_i \log m_i)$个相切。由归纳法，$\mathcal{S}_i$中的曲线之间至多有 $cn_i^{4/3}(\log n_i)^{1/3}$ 个相切。由对称性，只需对满足 s_i 从下方与 l_i 相切的相切对 $s_i \in \mathcal{S}_i, l_i \in \mathcal{L}_i$ 的数目给出上界。考虑二部切触图$(\mathcal{L}_i \cup \mathcal{S}_i, \{(l_i \in \mathcal{L}_i, s_i \in \mathcal{S}_i)\ |\ l_i$ 与 s_i 相切且 s_i 从下方与 l_i 相切$\})$。由引理3可知，该图不包含 $\mathcal{L}_i$ 中的四个顶点，使得它们每一个都与 $\mathcal{S}_i$中相同的两个顶点相邻。因此，由K¨ov´ari-S´os-Tur´an定理，该图至多有 $O(n_i\sqrt{m_i} + m_i)$条边。

因此，$t(\mathcal{C})$至多为

$$\sum_{i=1}^{O(r^2)} \left(O(m_i \log m_i) + O(n_i\sqrt{m_i} + m_i) + cn_i^{4/3}(\log n_i)^{1/3}\right). \tag{1}$$

回顾一下， $n_i \le n/r$ 和 $m_i \le n/r + 2 \le 2n/r$。我们还知道 $\sum n_i \le 2n$。因此，

$$\sum_{i=1}^{O(r^2)} O(m_i \log m_i) \le O\left(\frac{n^{2/3}}{(\log n)^{4/3}} \frac{2n(\log n)^{2/3}}{n^{1/3}} \log n\right) \le O\left(n^{4/3}(\log n)^{1/3}\right), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{O(r^2)} O(n_i\sqrt{m_i} + m_i) \le O\left(2n\sqrt{\frac{2n(\log n)^{2/3}}{n^{1/3}}} + \frac{n^{2/3}}{(\log n)^{4/3}} \frac{2n(\log n)^{2/3}}{n^{1/3}}\right) \le O\left(n^{4/3}(\log n)^{1/3}\right) \tag{3}$$

and,

$$\sum_{i=1}^{O(r^2)} c n_i^{4/3}(\log n_i)^{1/3} \le c \cdot 2n(n/r)^{1/3}(\log n)^{1/3} \le 2cn^{11/9}(\log n)^{5/9}. \tag{4}$$

综合以上结果，存在一个常数 c'，使得 $t(\mathcal{C}) \le c'n^{4/3}(\log n)^{1/3} + 2cn^{11/9}(\log n)^{5/9}$。若我们选择足够大的 n_0，使得 $2(\log n)^{2/9} \le n^{1/9}/2$，则可得 $t(\mathcal{C}) \le c'n^{4/3}(\log n)^{1/3} + \frac{c}{2}n^{4/3}(\log n)^{1/3} \le cn^{4/3}(\log n)^{1/3}$，其中最后一个不等式对 $c \ge 2c'$成立。 □

4.3 接地1-相交的 x-单调曲线

本节证明定理 5。首先，我们用与定理4的证明中类似的论证证明一个特殊情形，然后通过归纳法得出一般情形。

定理 16. 设 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ 是一个由 n 1-相交的 x-单调曲线组成的族，且 $\mathcal{C}$ 中每条曲线的左端点都位于同一条垂直线 ℓ 上，并且对于任意一对曲线 $c_1 \in \mathcal{C}_1$和 $c_2 \in C_2$， c_1 的左端点低于 c_2的左端点。那么，切线对至多有$dn^{4/3}$ 个 $\{c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}$，其中 d是某个绝对常数。

证明。 我们对 n 使用归纳法。我们稍后选取 n_0 和 d，使得命题对 $n \le n_0$ 平凡成立。设 $\mathcal{C}$ 是定理陈述中所述的一个 n 曲线族，其中 $n > n_0$，并假设命题对所有曲线数更少的此类曲线族均成立。我们将 $\mathcal{C}_1$和 $\mathcal{C}_2$ 中的曲线分别称为红色和蓝色。用 $t(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$ 中的曲线之间红蓝相切的数量，并令 $r = n^{1/3}$。根据定理10，存在一个子集 $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$，它将平面划分为 $O(n^{2/3})$ 个广义梯形，使得每个梯形至多与来自 $\mathcal{C}$的 $n/r = n^{2/3}$条曲线相交。

接下来，我们界定每个梯形 t_i 内红蓝相切的数量。令 $\mathcal{L}_i$ 为与 t_i 相交且两个端点都不在 t_i 内部的曲线，令 $\mathcal{S}_i$ 为与 t_i 相交且有一个端点位于 t_i 内部的曲线。回顾一下， $\mathcal{L}_i$ 中至多有两条曲线属于 $\mathcal{C}'$，它们分别从上方和下方界定 t_i 。还要注意，对于每条曲线$c \in \mathcal{L}_i \cup \mathcal{S}_i$，$c \cap t_i$ 由一条曲线构成，因为这些曲线是 x-单调的，并且每条曲线与 $\mathcal{C}'$ 中从下方和上方界定 t_i 的两条曲线至多相交一次。忽略 $\mathcal{C} \setminus (\mathcal{L}_i \cup \mathcal{S}_i)$中的曲线，并考虑每条曲线在其与 t_i的最左交点和最右交点之间的部分。对于 $\mathcal{L}_i$中的曲线，我们取从ℓ 到其与 t_i 的最右交点的部分，并用水平射线向左、向右延伸，使其成为双向无限的 x-单调曲线。为简便起见，我们将新的曲线集合记为$\mathcal{L}_i$ 和 $\mathcal{S}_i$。令 $m_i = |\mathcal{L}_i|$ 和 $n_i = |\mathcal{S}_i|$。

我们分别估计集合 $\mathcal{L}_i$ 和 $\mathcal{S}_i$ 内的红蓝相切数量，以及不同集合中的曲线之间的相切数量：根据引理2，红蓝相切最多有 $m_i - 1$ 个

$\mathcal{L}_i$中的曲线之间的相切。根据归纳法， $\mathcal{S}_i$中的曲线之间的红蓝相切最多有 $dn_i^{4/3}$ 个。考虑二部切触图($\mathcal{L}_i \cup \mathcal{S}_i, \{(l_i \in \mathcal{L}_i, s_i \in \mathcal{S}_i)$ $\not\parallel_i$ 和 s_i 形成红蓝相切，其中 s_i 为红色， l_i 为蓝色$\})$。由对称性，只需估计这类红蓝相切的数量。由引理3可知，该图中不存在 $\mathcal{L}_i$ 内的四个顶点，使得它们各自都与$\mathcal{S}_i$中的同两个顶点相邻。因此，根据K˝ov´ari-S´os-Tur´an定理，该图至多有 $O($ $n_i\sqrt{m_i}+m_i)$条边。 —

因此，

$$t(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=1}^{O(r^2)} \left(m_i + O(n_i\sqrt{m_i} + m_i) + dn_i^{4/3} \right). \tag{5}$$

回顾一下 hat $n_i \leq n/r$ and $m_i \leq n/r + 2 \leq 2n/r$。我们还有 $\sum n_i \leq n$。因此 e,

$$\sum_{i=1}^{O(r^2)} O(n_i\sqrt{m_i} + m_i) \leq O(n\sqrt{2n^{2/3}} + n^{2/3} \cdot 2n^{2/3}) \leq O(n^{4/3}) \tag{6}$$

and,

$$\sum_{i=1}^{O(r^2)} dn_i^{4/3} \leq d(n/r)^{1/3} \sum_{i=1}^{O(r^2)} n_i \leq dn^{11/9}. \tag{7}$$

综合以上结果，存在一个常数 d' ，使得 $t(\mathcal{C}) \leq d'n^{4/3} + dn^{11/9}$。如果我们选择足够大的 n_0，使得 $n^{1/9}/2 \geq 1$，那么可得 $t(\mathcal{C}) \leq d'n^{4/3} + \frac{d}{2}n^{4/3} \leq dn^{4/3}$，其中最后一个不等式在 $d \geq \max$ $\{2d', n_0^{2/3}/2\}$ 时成立。 □

由定理 16 可得，接地 x-单调曲线也满足相同的上界。

定理 5. 左端点位于同一条公共竖直线上的 n x-单调 1-相交平面曲线之间的相切最大数量为 $\Theta(n^{4/3})$。

证明。 令 $t(n)$ 表示定理陈述中一族 n 曲线的最大相切数。根据归纳法和定理 16，我们得到递归关系 $t(n) \leq 2t(n/2) + O(n^{4/3})$，其解为 $t(n) \leq O(n^{4/3})$。

至于下界，考虑由 n 条直线和 n 个点构成的著名构造，它产生 $\Omega(n^{4/3})$ 个点线关联（例如参见 [20]）。令 ℓ为一条位于所有点左侧的垂直线。在点集的每个点 p 处，以一个小圆盘 D_p 的中心为固定点，将与 p关联的直线重新绘制，记为 $\mathcal{L}_p$，使其成为从 ℓ出发的 1-相交 x-单调曲线，并使每条曲线都贡献一段位于 D_p内的上包络。将 p 替换为一条 x-单调曲线 c_p ： 它在距 ℓ 一定小距离处沿着 $\mathcal{L}_p$ 中斜率最小的直线延伸至 D_p ，随后与 $\mathcal{L}_p$中的每条曲线相切。沿同一条直线延伸的曲线绘制在距该直线不同的位置，使它们彼此相交。图9给出了示意图。

□

推论4。 一族 n 1-相交的 x-单调曲线中，相切的最大数量（这些曲线在 x 轴上的投影交集非空）为 Θ $(n^{4/3})$。

4.4 双无穷 k-相交的 x-单调曲线

鉴于定理14和[4, 定理2， 4] 人们很自然会猜想，对每个固定的 k，类似的结论都成立。

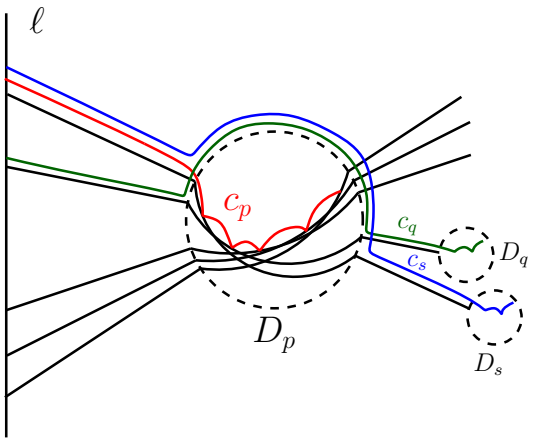


图9： n条接地的双向无穷 x-单调1-相交曲线的一种构造，这些曲线具有$\Omega(n^{4/3})$次相切。

猜想 2. 每个由 n 两两相交的双无限 x-单调 k-相交曲线组成的集合，都有 $O_k(n)$个相切。

我们未能解决这一猜想。尽管如此，我们仍给出一个简单且较弱的多项式上界，以及关于该猜想的两条观察。为得到该上界，我们使用如下观察。

观察 1. 设 r 与 r' 为两条双向无穷 x-单调曲线，它们从下方与一条 x-单调曲线 b相切。则 r 与 r' 在一点处相交，该点的 x坐标介于 $b\cap r$ 与 $b\cap r'$之间。

根据定理1，任意 n k-相交曲线之间有 $O_k\left(n^{2-\frac{1}{k+3}}\right)$ 次相切。对于双向无穷 x-单调曲线，可以略微改进这一上界。

命题3. 设 $\mathcal{L}$ 为一族 k-相交的双向无穷 x-单调曲线。则 $\mathcal{L}$ 具有$O_k\left(n^{2-\frac{1}{k+1}}\right)$ 次相切。

证明。 注意， $\mathcal{L}$ 中的曲线不一定两两相交。考虑相切图 $G_{\mathcal{L}}$ ，并为每条曲线 $c\in\mathcal{L}$各抛一次公平硬币。如果结果为“正面”，则删除所有对应于以下相切的边： c 从下方接触另一条曲线。否则，如果结果为“反面”，则对 c 从上方接触另一条曲线的相切执行相同操作。显然， $G_{\mathcal{L}}$ 中的每条边以 $1/4$的概率保留。因此，存在一个二分子图（$B\cup R$， E），其中至少有 $|E（G_{\mathcal{L}}）|/4$ 条边，并且每条对应于顶点 $r\in R$ 的曲线都从下方接触与其在 B中的邻居相对应的曲线。只需界定该子图的大小即可。为方便起见，我们扰动 $\mathcal{L}$中的曲线，使不对应于（$B\cup R$， E）中边的相切彼此分离。

我们声称，对于稍后确定的某个足够大的 c_k ，$(B\cup R,E)$ 不包含 K_{k+1,c_k} 作为子图。事实上，不妨假设存在一个由 c_k 条曲线$R'=\{r_1,r_2,\ldots,r_{c_k}\}\subseteq R$组成的子集，其中每条曲线都从下方与子集$B'=\{b_1,b_2,\ldots,b_{k+1}\}\subseteq B$中的每一条 $k+1$ 曲线相切。令 ℓ 为 B' 中曲线的下包络。那么，ℓ 由至多 $\lambda_{k+2}(k+1)$ 个曲线段组成，其中 $\lambda_s(n)$ 表示 (n,s)-Davenport-

Schinzel 序列 [26]。[6] 注意，每条曲线 $r' \in R'$ 都与这些曲线段中的 $k+1$ 个相切（它们分别属于 B' 中的 $k+1$ 条不同曲线）。因此，对于曲线 R' 所相切的 ℓ 中由 $k+1$ 个曲线段组成的子集，至多有 $\binom{\lambda_{k+2}(k+1)}{k+1}$ 种可能。令 $c_k = 1 + \binom{\lambda_{k+2}(k+1)}{k+1}$，则存在两条曲线 r'、$r'' \in R'$，它们与 ℓ 中相同的 $k+1$ 个曲线段相切。考虑其中一条曲线段 s。由观察 1 可知，r' 与 r'' 在某个点相交，该点的 x 坐标介于 $s \cap r'$ 与 $s \cap r''$ 之间。由于 r' 和 r'' 所相切的 $k+1$ 个曲线段具有不同的 x 投影，因此 r' 和 r'' 至少相交 $k+1$ 次，这是不可能的。因此，$(B \cup R, E)$ 是一个 K_{k+1}, c_k-自由图。由 K˝ov´ari-S´os-Tur´an 定理可知，它至多有 $O_k\left(n^{2-\frac{1}{k+1}}\right)$ 条边。

—

□

接下来的观察指出，如果猜想 2 成立，那么即使不要求曲线是双向无限曲线，同样的结论也成立。

命题 4. 假设猜想 *2* 对某个 $k > 2$成立。那么，每一组由 n 条两两相交的 x-单调、$(k-2)$-相交曲线组成的集合，都存在 $O_k(n)$ 个相切。

证明。 设 $\mathcal{L}$ 是一组满足命题条件的曲线。不失一般性，我们假设任意两条曲线的端点的 x坐标均不相同。相切有四种类型：从上方接触的曲线，其起点在从下方接触的曲线的起点之前或之后，且终点也在其终点之前或之后。我们分别考虑这四种类型，并注意到，从上方接触的曲线集合与从下方接触的曲线集合互不相交。将前一集合中的曲线称为红色曲线，将后一集合中的曲线称为蓝色曲线。接下来，我们将每条红色曲线延长为双向无限曲线：从其左端点（分别从右端点）向左（分别向右）上方作一条非常陡的射线。类似地，我们将每条蓝色曲线延长为双向无限曲线：从其左端点（分别从右端点）向左（分别向右）下方作一条非常陡的射线。向左上方的射线与向右下方的射线斜率符号相反。同样，向左下方的射线与向右上方的射线斜率符号相反。注意，这样做至多会在两条曲线之间引入两个新的交点；而对于（所考虑类型的）相切曲线，则不会引入新的交点。

□

根据以下关于偶数 k 的观察，我们可以假设每对非切线曲线恰好相交于 k 个点。

命题 5. 设 $\mathcal{L}$ 是由 n 条双无限 x-单调曲线组成的集合，并且 $\mathcal{L}$ 中的任意两条曲线至少相交于一个点，至多相交于某个偶数 k 个点。则存在一个由 n 条双无限 x-单调曲线组成的集合 $\mathcal{L}'$，使得 $\mathcal{L}'$ 中的任意两条曲线要么在一个点处接触，要么恰好交叉于 k 个点，并且 $\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{L}'$ 中的接触对数量相同。

证明。 不失一般性，我们可以假设所有曲线在$-\infty$ 和 $+\infty$ 处均平行于 x轴，并根据它们在 $-\infty$处从上到下的顺序，将其标记为 1、2，.....，n。令 $f\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ 表示它们在 $+\infty$处的顺序，也就是说，$f(i)$ 是 i 在 $+\infty$处按曲线从上到下排列时所在的位置。

如果 f 是恒等函数，那么任意一对曲线要么相切，要么在偶数个点处相交。在这种情况下，对于任意两条在 $k' < k$ 个点处相交的曲线，都可以将它们重新绘制得非常靠近

[6]由一个含有 n 个元素的字母表中的字母组成的序列，若不含两个连续相同的字母，且不含长度为 $s+2$ 的两个字母交替子序列，则称为 (n, s)-*Davenport-Schinzel sequence*。事实上，对于我们的目的而言，下包络大小的一个平凡上界 $O(k^3)$ 也足够。

它们的一个交叉点，使它们在 $k-k'$ 个新的交叉点处相交。这样，我们就能使每一对不相切的曲线之间恰好有 k 个交叉点。

否则，如果 f 不是恒等函数，那么我们可以找到两条相交奇数次的曲线，将它们重新绘制，使其相交偶数次，并重复这一过程，直到f变为恒等函数。具体而言，设 i和 j是两条曲线，使得 $i<j$且 $f(i)>f(j)$。如果有多个这样的曲线对，我们就选择一对“最近”的曲线，也就是说，选择使差值$f(i)-f(j)$最小的一对。注意，不存在曲线 l使得 $f(i)>f(l)>f(j)$；否则我们必须同时有 $l<i$和 $j<l$（否则，$(i,\ l)$或$(l,\ j)$就会成为比$(i,\ j)$更近的一个“反向”曲线对），而这是不可能的，因为 $i<j$。因此，$f(i)=f(j)+1$，由此可知，我们可以重新绘制 i和 j，使它们在一个额外的点相交。

□

5 一个 Erd˝os-Simonovits 型定理

本节证明定理 8 和定理 9，并讨论它们的一些应用及其与其他图论结果的联系。对于图 $G=(V,E)$，我们用 $d(G)$ 表示 G 中的平均度。由顶点子集 $U\subseteq V$ 导出的子图记为 $\bar{G}[U]$。对于顶点 $v\in V$，我们用 $N_G(v)$ 表示（或在上下文明确时简记为 $N(v)$）G 中与 v 相邻的顶点。两个顶点 v 和 u 的（开）双邻域等于 $(N_G(v)\cup N_G(u))\setminus\{u,v\}$。以下假设 G 是二部的。回顾一下，对于非负单调不减函数$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，如果对于任意两个不相交子集 $U\subseteq N_G(u)\setminus\{v\}$ 和 $V\subseteq N_G(v)\setminus\{u\}$，都有 $|E(G(U,V))|\le f(|U\cup V|)$，其中 $G(U,V)$ 是二分子图 $(U\cup V,\{(u,v)\in E(G)\mid u\in U$和 $v\in V\})$，那么称顶点 u 和 v 具有 f-稀疏子双邻域。定理 8 将由下一个结果推出。

定理 *17*。设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个非负单调不减函数，且 $G=(A\cup B,E)$ 是一个具有 n 个顶点、满足 $d(G)\ge 16$ 的二部图。*(i)* 若 G 中每一对顶点都有 f-稀疏子双邻域，则 $(d(G))^3\le 2^{11}nf(2d(G))$。*(ii)* 若每一对相邻顶点都有 f-稀疏子双邻域，且 $|E|\ge 25n^{3/2}$，则 $(d(G))^3\le 2^{20}nf(2d(G))$。

证明。令 $m=|E|$，并设 $d=\bar{d}(G)=2m/n$ 为 G 的平均度。我们先将 G 替换为图 G'，使得每个顶点的度大致等于平均度（同时保持 f-稀疏性）：按任意顺序遍历 G 的顶点，并将每个满足 $\deg(v)>d$ 的顶点 v替换为 $\lfloor\deg(v)/d\rfloor$ 个度为 d 的顶点，并视情况再加上一个度较小的顶点。将 v 的邻居以满足此性质的任意方式连接到替换 v 的顶点上。注意，所得图中任意一对（相邻）顶点仍具有 f-稀疏子双邻域，因为新图中顶点的每个子邻域都不可能包含对应于同一个原始顶点的两个顶点。因此，新图中的每个子邻域都对应于 G 中的一个子邻域。此外，由于 $d=2m/n$，新图的顶点数至多为 $\sum_{v\in A\cup B}(\lfloor\deg_G(v)/d\rfloor+1)\le 2n$。由于边数保持不变，该图的平均度至少为 $d/2$。

接下来，我们反复删除度小于 $d/8$的顶点，直到不再有这样的顶点。我们断言，此步骤后至少还剩下 $m/2$ 条边。事实上，反设剩余边数少于 $m/2$，并记 x 为被删除的顶点数。那么至多删除了$xd/8$ 条边，因此 $xd/8>m/2=2nd/8$，这不可能，因为 $x\le 2n$。记所得的图为 $G'=(A'\cup B',\ E')$，并注意到 $|A'\cup B'|\le 2n$、$|E'|\ge m/2$，且其度

在 G' 中的每个顶点都至少为 $d/8$，至多为 d。还要注意，$|A' \cup B'| \geq 2|E'|/d \geq m/d = n/2$。此外，$G'$ 仍具有 f-稀疏子双邻域性质，因为删除顶点时这一性质得以保持。

考虑 (i)，对于每一对顶点 $a \in A'$ 和 $b \in B'$，由 G' 的两个开双邻域的并集诱导的子图中，边的数量至多为 $f(2d)$。因此，我们有$\sum_{a\in A', b\in B'} |E(G'[(N_{G'}(a) \setminus \{b\}) \cup (N_{G'}(b) \setminus \{a\})])| \leq \binom{2n}{2} f(2d) \leq 2n^2 f(2d)$。注意，对于满足 $a \in N_{G'}(b') \setminus \{a'\}$ 且$b \in N_{G'}(a') \setminus \{b'\}$ 的每一对 $a' \in A'$ 和 $b' \in B'$，每条边 $(a, b) \in E'$ 都会在此和式中计数。由于 a（分别为 b）至少有 $\frac{d}{8} - 1 \geq \frac{d}{16}$ 个不同于 b（分别为 a）的邻居，因此 (a, b) 在上述和式中至少计数 $d^2/256$ 次（此处用到了假设$d \geq 16$）。因此，$nd/2 = m = |E| \leq 2|E'| \leq 2^{10} n^2 f(2d)/d^2$，从而 $d^3 \leq 2^{11} n f(2d)$。

考虑 (ii)，我们有 $d \geq 50n^{1/2}$ 因为 $m \geq 25n^{3/2}$。不妨设 $|B'| \geq |A'|$，因此 $|B'| \geq n/4$ 以及 $|A'| \leq n$。令 $\#K_{2,1}$ 表示 $K_{2,1}$ 在 G' 中且有两个顶点位于 A' 中的数量，并令 $\#K_{2,2}$ 表示 $K_{2,2}$ 在 G' 中的数量。于是，

$$\#K_{2,2} = \frac{1}{4} \sum_{a\in A', b\in B', (a,b)\in E'} |E(G'[(N_{G'}(a) \setminus \{b\}) \cup (N_{G'}(b) \setminus \{a\}])| \leq \frac{m}{4} f(2d) = \frac{dn}{8} f(2d).$$

另一方面，记 $s_{a,a'} = |N_{G'}(a) \cap N_{G'}(a')|$。对于两个不同的顶点 $a, a' \in A'$，我们有 $\#K_{2,1} = \sum_{a\neq a'\in A'} s_{a,a'}$，并且：

$$\#K_{2,2} = \sum_{a\neq a'\in A'} \binom{s_{a,a'}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{a\neq a'\in A'} (s_{a,a'}^2 - s_{a,a'}) \geq \frac{(\#K_{2,1})^2}{2\binom{|A'|}{2}} - \frac{\#K_{2,1}}{2} \geq \frac{(\#K_{2,1})^2}{2\binom{n}{2}} - \frac{\#K_{2,1}}{2},$$

其中倒数第二个不等式由柯西不等式得出。对于 $\#K_{2,1}$，我们有如下下界：

$$\#K_{2,1} = \sum_{a\neq a'\in A'} s_{a,a'} = \sum_{b\in B'} \binom{\deg(b)}{2} \geq \frac{n}{4} \binom{d/8}{2} \geq nd^2/2^{11} \geq n^2,$$

其中，我们按 B' 中的顶点对 $K_{2,1}$ 进行了双重计数，并使用了不等式 $|B'| \geq n/4$ 和 $d \geq 50n^{1/2}$。结合上述不等式可得：

$$\frac{dnf(2d)}{8} \geq \#K_{2,2} \geq \frac{(\#K_{2,1})^2}{n^2} - \frac{\#K_{2,1}}{2} \geq \frac{(\#K_{2,1})^2}{n^2} - \frac{(\#K_{2,1})^2}{2n^2} = \frac{(\#K_{2,1})^2}{2n^2} \geq \frac{n^2 d^4}{2^{22} \cdot 2n^2} = \frac{d^4}{2^{23}}.$$

这意味着 $d^3 \leq 2^{20} n f(2d)$，如所声称。 □

U利用定理 17，我们现在可以证明定理 8。为方便起见，重述如下 e.

定理 8。设 G 是一个图，并且对于某个常数 $0 \leq \alpha < 2$，有 $f(n) = O(n^{2-\alpha})$。如果 G 中的每一对顶点都有 f-稀疏子双邻域，那么 $|E(G)| = O\left(|V(G)|^{2-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)$。此外，如果$\overline{\alpha} \leq 1$，那么只需每一对相邻顶点都有 f-稀疏子双邻域，即可得到此界。

证明。回顾一下，每个图都包含一个二分子图，其大小至少是该图大小的一半。设 $G' = (A' \cup B', E')$ 是 G 的这样一个二分子图，其中 $|E'| \geq |E(G)|/2$，并令 $n = |V(G)|$ 和 $d' = d(G')$。如果 G 中每一对顶点都有 f- 稀疏子双邻域，

那么 G' 也满足同样的条件，由定理 17 可得 $d'^3 \le 2^{11} n f(2d') = O(nd'^{2-\alpha})$。因此 $d' \le O(n^{1/(\alpha+1)})$，上界得证。

如果 $0 < \alpha \le 1$ 且每一对相邻顶点都有 f-稀疏子双邻域，那么我们可以假设 $|E'| \ge 25n^{3/2}$；否则定理显然成立。因此，根据定理 17，我们得到 $d'^3 \le 2^{20} n f(2d') = O(nd'^{2-\alpha})$ 以及 $d' \le O(n^{1/(\alpha+1)})$，与之前一样。□

接下来我们证明定理 9，由此可知定理 8 的上界在渐近意义下是紧的。为方便起见，我们重述该定理。

定理 9。对于每个 $0 \le \alpha \le 1$，存在一个二部图 $G = (V, E)$，具有 $|E| = \Omega\left(|V|^{2-\frac{\alpha}{\alpha+1}}\right)$ 条边，使得 G 中的每一对顶点都有 f-稀疏子双邻域，其中 $f(n) = O(n^{2-\alpha})$。

证明。 $\alpha = 0$ 的情形是平凡的。对于 $\alpha = 1$，我们可以取一个含有 $\Theta(n^{3/2})$ 条边的 $K_{2,2}$-自由图 [17]。事实上，在这样的图中，由两个子双邻域诱导的任意二部子图都不包含度至少为二的顶点。这也说明了为什么对于 $\alpha > 1$，我们要求每一对顶点都满足 f-稀疏子双邻域性质，而不只是相邻顶点对。事实上，在 $K_{2,2}$-自由图中，相邻顶点对的子双邻域之间根本没有边，因此对于这样的邻域，无论 $\alpha < 2$ 取何值，该假设都成立，但边数却是 $\Theta(n^{3/2})$。

接下来我们证明 $0 < \alpha < 1$ 的下界。为方便起见，固定 $c = 2 - \alpha > 1$。因此，我们希望构造一个含有 $\Omega\left(n^{\frac{4-c}{3-c}}\right)$ 条边的图，其中每一对顶点的子双邻域对于 $f(x) = O(x^c)$ 都是 f-稀疏的。具体而言，我们构造并分析一个标准的随机二分图 $G = (A \cup B, E)$，其中 $|A| = |B| = n$，且每一对顶点 $a \in A$ 和 $b \in B$ 都以概率 $p = n^{-\frac{2-c}{3-c}}$ 独立地由一条边连接。

对于每个 $A' \subseteq A$ 和 $B' \subseteq B$，令 $E_{A',B'} := E(G[A' \cup B'])$。如果 $B' \subseteq N(a) \setminus \{b\}$、$A' \subseteq N(b) \setminus \{a\}$ 且 $|E_{A',B'}| > q(|A'| + |B'|)^c$，我们就称四元组 $a \in A, b \in B, A' \subseteq A$ 和 $B' \subseteq B$ 为“坏四元组”，其中 $q > 0$ 是一个足够大的常数，稍后将确定。这样一个固定的四元组成为坏四元组的概率为 $p^{|A'|}p^{|B'|} \cdot \Pr(|E_{A',B'}| > q(|A'| + |B'|)^c$。令 X 为表示坏四元组数量的随机变量。那么，

$$\mathbb{E}(X) = n^2 \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i \binom{n-1}{j} p^j \cdot \Pr_{Z \sim \mathrm{Bin}(ij,p)} \left(Z > q(i+j)^c\right),$$

其中 Z 是一个二项分布随机变量，表示在 $i \cdot j$ 次独立试验中成功的次数，每次试验的成功概率均为 p。只需证明当 $n \to \infty$ 时，$\mathbb{E}(X) \to 0$，因为根据马尔可夫不等式，$\Pr(X \ge 1) \le \mathbb{E}(X)$，这意味着 $\mathbb{E}(X) \to 0$ 蕴含着以高概率不存在坏四元组。此外，根据切尔诺夫界，以高概率有 $|E| = \Theta(\mathbb{E}(E)) = \Theta(pn^2) = \Theta(n^{(4-c)/(3-c)})$，因此，以高概率存在 $\Theta(n^{(4-c)/(3-c)})$ 条边且不存在坏四元组。

Let

$$T_{i,j} := \binom{n}{i} p^i \binom{n}{j} p^j \cdot \Pr_{Z_{i,j} \sim \mathrm{Bin}(ij,p)} (Z_{i,j} > q(i+j)^c).$$

由于 $\mathbb{E}(X) \le n^4 \cdot$最大值$_{i,\,j}$ $\{T_{i,j}\}$，只需证明 $T_{i,\,j}$ 的最大值趋于零的速度快于 n^{-4}（当 $n \to \infty$ 时）。注意，当 $i + j$ 为奇数时，$\max_{i,\,j}$ $\{T_{i,j}\}$ 在 i 和 j 相等或几乎相等时取得。事实上，假设总和 $s = i + j$ 固定，那么显然

当 ij 取最大值时，$\Pr_{Z_{i,j}\sim\text{二项分布}(ij,p)}(Z_{i,j} > q(i+j)^c)$ 取得最大值，而这发生在 $i = \lfloor s/2 \rfloor$ 和 $j = \lceil s/2 \rceil$ 取值为 ..... （反过来也一样）时。同样，不难证明二项式系数 $\binom{n}{i}\binom{n}{j} = \binom{n}{i}\binom{n}{s-i}$ 的乘积也在 $i = \lfloor s/2 \rfloor$ 和 $j = \lceil s/2 \rceil$ 时取得最大值，见 [27]。因此，我们将考虑 $\max_i\{T_{i,i}, T_{i,i+1}\}$，并将分析分为三种情况。

令 $A_{i,j} := \binom{n}{i}p^i\binom{n}{j}p^j$ 为 $T_{i,j}$ 的第一项，并令 $B_{i,j} := \Pr_{Z_{i,j}\sim\mathrm{Bin}(ij,p)}(Z_{i,j} > q(i+j)^c)$ 为其第二项。注意 $\frac{A_{i,i}A_{i+1,i+1}}{A_{i,i+1}^2} = p^{n-i} \le n$。利用不等式 $\binom{n}{i} \le (ne/i)^i$，可得

$$A_{i,i} = \left(\binom{n}{i}p^i\right)^2 \le \left(\frac{e\cdot n^{1/(3-c)}}{i}\right)^{2i} \text{ and thus } A_{i,i+1} \le n\left(\frac{e\cdot n^{1/(3-c)}}{i}\right)^{2i}. \tag{8}$$

情形 1： $i > 10e\cdot n^{1/(3-c)}$。由公式 (8) 可知 $T_{i,i}, T_{i,i+1} < n0.1^{2i} \le n0.1^{20en^{1/(3-c)}}$。由于 $n\to\infty$ 这一表达式比 n^{-4} 衰减得快得多，因此该情形得证。

情形 2： $i \le 10e\cdot n^{\frac{1}{3-c}}$。令 $\mu_{i,j} = \mathbb{E}(Z_{i,j}) = ijp$，并令 $t_{i,j} = q(i+j)^c$。注意 $2qi^c \le t_{i,i}, t_{i,i+1} \le 9qi^c$, $\mu_{i,i} = i^2p$，且 $i^2p \le \mu_{i,i+1} \le 2i^2p$。回想一下，根据切尔诺夫界，对于任意 $\delta \ge 0$，有

$$\Pr(Z_{i,j} > (1+\delta)\mu_{i,j}) \le \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu_{i,j}} = e^{\mu_{i,j}(\delta-(1+\delta)\ln(1+\delta))}.$$

因此，

$$\ln B_{i,j} \le \mu_{i,j}(\delta - (1+\delta)\ln(1+\delta)).$$

注意，若我们选择 $q \ge (10e)^{2-c}$，则 $\frac{t_{i,i}}{\mu_{i,i}} \ge \frac{q}{p}i^{c-2} \ge 1$。将 $\delta = \frac{t_{i,j}}{\mu_{i,j}} - 1 \ge 0$ 代入 $j = i,\ i+1$，得到：

$$\begin{aligned}
\ln B_{i,j} &\le t_{i,j} - \mu_{i,j} - t_{i,j}(\ln t_{i,j} - \ln\mu_{i,j}) = t_{i,j}(1 - \ln t_{i,j} + \ln\mu_{i,j}) - \mu_{i,j} \\
&\le 9qi^c\left(1 - \ln(2q) - c\ln i + \ln 2 + 2\ln i + \ln p\right) \\
&\le 9qi^c\left(2 - \ln(2q) + (2-c)\ln i - \frac{2-c}{3-c}\ln n\right).
\end{aligned}$$

接下来，我们将当前情形分为两个子情形，并证明在这两种情形下，$\ln T_{i,i}$ 和 $\ln T_{i,i+1}$ 都以足够快的速度趋于 $-\infty$。

子情形 2a： $n^{2(3-c)} \le i \le 10e\cdot n^{3-c}$。考虑 $T_{i,j}$ 的自然对数，其中 $j = i,\ i+1$，我们有：

$$\begin{aligned}
\ln T_{i,j} &= \ln A_{i,j} + \ln B_{i,j} \\
&\le \ln n + 2i\left(1 + \frac{\ln n}{3-c} - \ln i\right) + 9qi^c\left(2 - \ln(2q) + (2-c)\ln\left(10e\cdot n^{\frac{1}{3-c}}\right) - \frac{2-c}{3-c}\ln n\right) \\
&= \ln n + 2i\left(1 + \frac{\ln n}{3-c} - \ln i\right) + 9qi^c\left(2 - \ln(2q) + (2-c)\ln(10e)\right) \\
&\le 3i\ln n + 9qi^c(9 - \ln(2q)).
\end{aligned}$$

因此，若取 $q > 0.5e^9$（我们确实如此），那么由于当 $c > 1$ 和 $i \ge n^{\frac{1}{(3-c)}}$ 时，$i\ln n \ll i^c$，我们得出结论：在这种情况下，$T_{i,i}$ 和 $T_{i,i+1}$ 超多项式地趋于零。

子情形 2b： $i < n^{2(3-c)}$。回想一下，对于 $j = i, i+1$，我们有：

$$\begin{aligned}
\ln T_{i,j} &\le \ln n + 2i\left(1 + \frac{\ln n}{3-c} - \ln i\right) + 9qi^c\left(2 - \ln(2q) + (2-c)\ln i - \frac{2-c}{3-c}\ln n\right) \\
&\le \ln n + 2i\left(1 + \frac{\ln n}{3-c} - \ln i\right) + 9qi^c\left(2 - \ln(2q) + \frac{2-c}{2(3-c)}\ln n - \frac{2-c}{3-c}\ln n\right) \\
&= \ln n + 2i\left(1 + \frac{\ln n}{3-c} - \ln i\right) + 9qi^c\left(2 - \ln(2q) - \frac{\ln n}{2(3-c)}\right) \\
&= \left(1 + \frac{2i}{3-c} - \frac{9qi^c}{2(3-c)}\right)\ln n - 2i(\ln i - 1) - 9qi^c(\ln(2q) - 2) \\
&< \frac{2(3-c) + 4i - 9qi^c}{2(3-c)}\ln n < \frac{-qi^c}{2(3-c)}\ln n < -5\ln n,
\end{aligned}$$

其中，最后两个不等式在 q 足够大时成立。因此，在这种情况下，$n^4 T_{i,\,i}$ 和 $n^4 T_{i,\,i+1}$ 也趋于零。考虑证明过程中对 q 的条件，只需取例如 $q = 5000$ 即可。

□

备注：

- 如引言中所述，定理 8 蕴含 Erd˝os 和 Simonovits 的定理（定理 7），而后者又蕴含 K˝ov´ari-S´os-Tur´an 定理。比较定理 7 和定理 8 的差异，首先，前者只能用于诱导出稀疏子图的子双邻域，这是因为需要避开某个特定子图；而后者只需假设其稀疏。其次，只要定理中的条件对每一对顶点（而非仅对相邻顶点）都成立，定理 8 就可用于极其稀疏的诱导子图（当 $\alpha > 1$ 时，边数为次线性）。第三，对于定理 8，每个 $0 \le \alpha \le 1$ 都有一个匹配下界（定理 9）；而对于定理 7，只有 $\alpha = 1$，[12] 已知匹配下界。对于某些 $\alpha = \frac{1}{t}$, $t > 2$，任何紧确界都是一项重要成果。

- 定理 8 的证明与 [9] 中定理 7 的证明非常相似。两种情况下，首先都要使图接近正则，然后使用双重计数；不过，对于定理 7，第一部分需要付出更多努力。按时间顺序，我们最先证明了定理 8 的第一部分，因为证明定理2需要用到它；后来才了解到定理 7，并用它证明了定理 8 的第二部分。

- 如果不假设每个子双邻域所诱导的子图都稀疏，而是改为假设每一对（相邻）顶点的双邻域所诱导的子图稀疏，那么定理 8 是否仍成立，将是一个有趣的问题。注意，在这种情况下，定理 8 的证明的第一部分无法奏效。显然，f-稀疏双邻域并不意味着 f-稀疏子双邻域。例如，回想一下，对于足够大的 n [17]，$(n^{3/2})/4 \le \mathrm{ex}(n, K_{2,\,2}) \le n^{3/2}$；并考虑一个 $K_{2,\,2}$-无二部图 G，其每一侧有 n 个顶点，并有 $\Theta(n^{3/2})$ 条边。进一步假设 G 中每个顶点的度数至少为 $c\sqrt{n}$，至多为 $C\sqrt{n}$，其中 $0 < c < C$ 是一些常数。注意，对于 $f(x) = x/2$，G 中任意一对顶点都有一个 f-稀疏双邻域。现在在每一侧添加 $c' = 20$ 个新顶点，并将它们与另一侧的所有顶点相连。于是，当 $g(x) = x^{1.6}$ 且 n 足够大时，以下结论成立。对于两个原有顶点，它们的双邻域至少包含 $2c' + 2c\sqrt{n} - 2 \ge 2c\sqrt{n}$ 个顶点，这些顶点所诱导的子图

至多有 $C\sqrt{n}+2c'C\sqrt{n}+c'^2 \le g(2c\sqrt{n})$ 条边；一个原有顶点和一个新顶点的双邻域至少由 $n+2c'+c\sqrt{n}-2 \ge n$ 个顶点组成，且这些顶点所诱导的子图至多有 $(n+C\sqrt{n})^{3/2}+c'n+c'^2+c'C\sqrt{n} \le g(n)$ 条边；两个新顶点的双邻域至少由 $2n+2c'-2 \ge 2n$ 个顶点组成，且这些顶点所诱导的子图至多有 $(2n)^{3/2}+2c'n+c'^2 \le g(2n)$ 条边。因此，在所得的图中，任意一对顶点都有一个 g-稀疏双邻域。然而，新顶点所诱导的子图是来自不同两侧的任意两个原有顶点的一个子双邻域，而且该子图有 $2c'$ 个顶点和 $c'^2=400$ 条边，这比 $g(2c')$ 更多。

- 定理 8 还可能有其他应用，例如在其他情形下与定理 12 结合使用。下面是一个例子。对于图 H，令 $\mathrm{ex}_{\mathrm{cr}}(n,H)$ 表示在具有 n 个顶点且不含自相交副本 H 的拓扑图中，边数的最大值。注意，$\mathrm{ex}(n,H) \le \mathrm{ex}_{\mathrm{cr}}(n,H)$；若 H 是非平面图，则 $\mathrm{ex}(n,H)=\mathrm{ex}_{\mathrm{cr}}(n,H)$。在 [15] 中，利用定理 12 证明了 $\mathrm{ex}_{\mathrm{cr}}(n,C_4)=O(n^{3/2})$（且此界是紧的）。利用定理 8 可立即得到：

推论5. *若* $\mathrm{ex}_{cr}(K_{2,3})=O(n^{5/3})$ *并且* $\mathrm{ex}_{cr}(n,K_{3,3}^{-})=O(n^{5/3})$，*其中* $K_{3,3}^{-}$ *表示删去一条边后的、具有* $3+3$ *个顶点的完全二部图。*

致谢。我们感谢 Rom Pinchasi 就本文研究的问题进行了许多富有帮助的讨论。特别是，他提出了定理 6 和定理 4 的证明中的大部分要点，后来还发现 Pach和Sharir [22] 已经证明了类似结果。我们感谢 Bal´azs Patk´os 对定理 8 提出的意见。证明定理 9 时，我们与谷歌的大语言模型“Gemini”（https://gemini.google.com/）进行了多轮互动。

参考文献

[1] Eyal Ackerman、G´abor Dam´asdi、Bal´azs Keszegh、Rom Pinchasi 和 Rebeka Raffay。《两两相交伪圆形成的二边形最大数量》。载于 Oswin Aichholzer 和 Haitao Wang（编），*41st International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2025)* 332 *Leibniz International*，第 卷，*Proceedings in Informatics (LIPIcs)* 2 1 2 14, 2025 第 – 页：–：德国达格斯图尔，。达格斯图尔城堡 – 莱布尼茨信息学中心。网址：https://drops.dagstuhl.de/entities/document/10.4230/LIPIcs.SoCG.2025. 2，doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2025.2。[2] Eyal Ackerman、Bal´azs Keszegh 和 D¨om¨ot¨or P´alv¨olgyi。《平面曲线之间的相切及其在 L形着色中的应用》。*European Journal of Combinatorics*，121：103837，2024年。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669823001555，doi:10.1016/j.ejc.2023.103837。[3] Eyal Ackerman 和 Bal ´ 1 *x* *Eu-* azs *ropean Journal of Combinatorics* 118 103929, 2024 Keszegh。《关于 -相交 -单调曲线之间的相切数量》。[4] ，：。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669824000143，doi:10.1016/j.ejc.2024.103929。´Pankaj K. Agarwal、Eran Nevo、J *J. ACM*anos Pach、Rom Pinchasi、Micha Sharir 和 Shakhar Smorodinsky。《伪圆排列中的透镜及其应用》。[5] ，51(2)：139–186，2004年。doi:10.1145/972639. 972641。[6] Itay Ben-Dan 和 Rom Pinchasi。个人通信。 *IEEE Transactions on Computers* 28 9 643 647, 1979 10 1109 1979 1675432 Jon Bentley 和 Thomas Ottmann。《报告和计数几何交点的算法》。[7] ，C- ( )：–。doi：./TC. . . ´Peter Brass、William O. J. Moser 和 J *Research problems in discrete geometry*anos Pach。[8] 。施普林格，2005年。*Discrete Analysis*Jordan S. Ellenberg、Jozsef Solymosi 和 Joshua Zahl。《曲线相切和正交性的新界》。，2016年11月4日。doi:10.19086/da.990。

[9] P. Erd˝os 和 M. Simonovits。《图论中的一些极值问题》。载于 P. Erd˝os、A. R´enyi 和 V. T. S´os（编），*Combinatorial Theory and its Applications I*，第 4 卷，*Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*，第 377–390 页。North-Holland，阿姆斯特丹，1970。[10] miki/1970-22ErdSimCube.pdf。Colloq. Proc.，匈牙利巴拉顿菲赖德，1969。网址：https://users.renyi.hu/¨P˝al Erd¨os 和 Branko Grünbaum。《曲线排列中的密切顶点》。[11] *Geometriae Dedicata*，1(4)：322–333，1973年。doi:10.1007/BF00147765。Istv´an Fary。《关于平面图的直线表示》。[12] *Acta Scientiarum Mathematicarum*，12(182-192)：229，1948年。¨Branko Grünbaum。《[13] *Arrangements and spreads*》。数学科学会议委员会区域数学会议系列第10号。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，1972年。P¨eter Gy¨orgyi、B´alint Hujter 和 S´andor Kisfaludi-Bak。《平面曲线集合中接触对的数量》。[14] *Computational Geometry*，67：29–37，2018年。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/ pii/S0925772117300949，doi:10.1016/j.comgeo.2017.10.004。Sariel Har-Peled。《理论与实践中的平面切割构造》。[15] *SIAM Journal on Computing*，29(6)：2016–2039，2000年。doi:10.1137/S0097539799350232。Barnab´as Janzer、Oliver Janzer、Abhishek Methuku 和 G´abor Tardos。《交反序列、边序图及应用的紧界》。[16] *Journal of the London Mathematical Society*，112(4)，2025年10月。doi:10.1112/jlms.70324。Bal¨azs Keszegh 和 D¨om¨ot¨or P¨alv´olgyi。《两个曲线族之间的相切数量》。[17] *Combinatorica*，43 5 939 952，2023 10 1007 00493 023 00041 8 ( )：– Oct。doi：. /s - - - .˝T. K´ov´ari、V. S´os 和 P. Turán。《关于 K. Zarankiewicz 问题》。[18] *Colloquium Mathematicae*，3(1)：50–57，1954年。网址：http://eudml.org/doc/210011。Adam Marcus 和 G´abor Tardos。《交反序列与几何应用》。*J. Comb. Theory Ser. A* 113 4 675 691, 2006 10 1016 2005 07 002 [19] ，( )：–。doi：. /j.jcta. . . . Ɉ[20] anos Pach。个人通信。Ɉ *Combinatorial Geometry*anos Pach 和 Pankaj K. Agarwal。[21] ，第11章，第177–178页。John Wiley and Sons Ltd，1995年。doi:10.1002/9781118033203.ch11。Ɉ´anos Pach、Natan Rubin 和 G´abor Tardos。《Jordan 曲线的交叉引理》。[22] *Advances in Mathematics*，331 908：–940，2018年。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870818301026，doi:10.1016/j.aim.2018.03.015。Ɉ *SIAM Journal on Computing*anos Pach 和 Micha Sharir。《线段排列中的垂直可见性与 Bentley-Ottmann 扫描线算法的队列大小》。[23] ，20(3)：460–470，1991年。doi:10.1137/0220029。Ɉ *Combinatorial Geometry and Its Algorithmic Applications: The Alcalá Lectures*anos Pach 和 Micha Sharir。*Mathematical Surveys and Monographs*，[24] 第152卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，2009年。doi:10.1090/surv/152。Ɉ*Comput. Geom.*anos Pach、Andrew Suk 和 Miroslav Treml。《平面上互不相交区域族之间的相切》。[25] ，45(3)：131–138，2012年。doi:10.1016/j.comgeo.2011.10.002。Rom Pinchasi 和 Radoˇs Radoiˇci´c。《关于不含长度为 4 的自相交圈的拓扑图的边数》。载于 Janos Pach（编），*Towards a Theory of Geometric Graphs*，第 342 卷，*Contemporary Mathematics*，第 233–234 页。2004。[26] *Davenport–Schinzel Sequences and Their Geometric Applications*，第 卷，第 – 页。美国数学学会，。[27] Micha Sharir 和 Pankaj K. Agarwal。。剑桥大学出版社，纽约，1995年。Fabius Wiesner。《二项式系数乘积的最大值》。网址：https://math.stackexchange.com/ questions/3506175/maximum-of-a-product-of-binomial-coefficients。