# 关于非幺环和代数的同调代数及其在 $(\infty,1)$-范畴中的应用

Eric Goubault[a], Eliot Médioni[a], *

[a]LIX、法国国家科学研究中心和巴黎综合理工学院，91128，帕莱索，法国

文章信息

关键词：2020年数学学科分类：55N35 18E10 13C60

摘要

本文旨在发展非幺环和代数上的模的同调代数。其主要应用是定义并研究 $(\infty,1)$-范畴及有向空间的（有向）同调，包括相对同调及其正合序列。

arXiv:2603.11937v1 [math.AT] 12 Mar 2026

## 1. 引言

环上的模范畴是开展同调代数的典型范畴。事实上，这一范畴是阿贝尔范畴；根据 Freyd-Mitchell嵌入定理，所有阿贝尔范畴都可以表示为某个环上的模所构成的具体范畴Freyd （1964年）。这对含幺环上的模也成立。一个自然的问题是：这是否也适用于非幺环上的模？对此已有若干版本，例如坚实模、闭模和 $s$-幺模，Quillen（未发表手稿，1996年）；Positselski （2023）；Tominaga（1976）。在温和的假设下，所有这些概念彼此等价，并导出一个阿贝尔范畴，因此很适合作为同调理论的研究对象。

这个问题并非仅仅具有抽象性质。在诸多情形中，人们实际上需要关于非幺环、甚至非幺代数的同调理论。

例如，在拓扑数据分析中，持久模Zomorodian与Carlsson（2005年）；Carlsson与Zomorodian（2007年）；Bubenik、de Silva与Scott（2015年）被用来定义持久同调，并且由Morita等价，它们与其路径代数Assem、Skowronski与Simson（2006年）上的持久模相同。若底层过滤或多维过滤具有无穷多个层，或者底层范畴具有无穷多个对象，则相应的路径代数具有无穷多个幂等元。在这种情况下，路径代数（尤其是其底层环）没有自然单位，持久模应被视为非幺代数（及其底层环）上的模。

在有向拓扑中，Fajstrup、Goubault、Haucourt、Mimram 和 Raussen （2016）；Grandis （2009）所研究的拓扑空间是“有向的”，意即它们具有“优选方向”，例如，在研究流形时，切空间中的一个锥，或前立方集的规范局部坐标系。为体现有向特征而提出的一种有向同调理论，见 Goubault （2024a），它将前立方集底层箭图的路径代数上的某些持久模作为研究对象，并建立在自然同调理论之上 Dubut、Goubault 和 Goubault-Larrecq （2017年）。同样，如果前立方集含有无限多个点，那么这个路径代数就必须视为非含幺的。这解释了 Goubault （2024a）的方法为何仅考虑有限前立方集，也解释了为何无法为更一般的有向空间定义有向同调理论，更不用说$(\infty,1)$-范畴。

本文首先回顾有关非幺环上的模的零散知识，并将其推广到非幺代数上的（双）模。随后，我们将这些知识应用于单纯富集范畴的一个（有向）同调理论；当同态单纯集为 Kan 时，这类范畴构成 $(\infty,1)$-范畴的一个模型。我们证明，即使在这种非幺情形下，也可以定义相对同调，并证明相应的正合序列。文章最后，我们以有向空间为例，更明确地阐述这些正合序列成立的条件，从而拓展 Goubault (2024a) 的研究方法。

*通讯作者 eric.goubault@polytechnique.edu (E. Goubault); eliot.medioni@student-cs.fr (E. Médioni) ORCID(s): 0000-0002-3198-1863 (E. Goubault)

**论文结构** 第 2 节首先回顾有关非幺环与非幺代数上的模的零散文献。理解非幺代数上的模范畴性质的一个重要要素是代数与模的幺化函子，我们将在第 3 节对其进行详细研究。第 $s4$ 节将回顾坚实、闭及 $s$-幺模（非幺环与非幺代数上的模）的性质，其中一些内容已有研究，另一些则是新的研究成果。本节还将全面研究标量扩张函子（第 4.3 节），涵盖非幺情形，因为这将对相对同调及相对同调正合列的定义和性质起到关键作用。

在我们设想的大多数应用中，例如有向拓扑中的应用，需要使用双模，而不是（左或右）模。在经典的含幺情形下，从（左或右）模转到双模并不存在特别的困难，因为 $A$-$B$-双模可以看作 $A\otimes_{\mathbb{Z}} B^{op}$（左）模。然而，对于非幺环或代数上的双模，情况并不总是如此，因此我们直接证明，固定的 $s$-幺代数上的 $s$-幺双模构成一个阿贝尔范畴。

接下来，我们进入本文的主要应用：定义并研究 $(\infty,1)$-范畴的有向同调理论，见第 6节，其中包括相对同调和相对同调正合列，在很大程度上推广了 Goubault（2024a）的结果。

最后，我们将 $(\infty,1)$-范畴的有向同调理论应用于有向空间；我们将简要回顾有向空间，并为其给出更为显式的相对对构造。

**主要结果** 本文旨在兼具两项目的：一是综述文献中零散分布的、关于非幺环和代数上的模的已知 folklore定理；二是提出新的同调理论，或对现有的（有向）同调理论进行推广，例如 Goubault (2024a) 中提出的理论。尤其是，

- 我们将在第 2 节回顾非幺环和代数上的模的概念。特别是，我们会明确列出所需的所有条件和构造，而这些内容通常并未得到充分阐述。
- 我们证明，代数 $\mathbb{A}$ （以及 $\mathbb{B}$）的单位化上的幺（双）模范畴，与非幺代数 $\mathbb{A}$ （以及$\mathbb{B}$）上的（非幺）（双）模范畴同构，见定理 3，
- 我们证明，即使在非幺情形下，也可以定义标量限制和标量扩张，
- 我们证明， $s$-幺模构成 $s$非幺代数上的坚实模这一便捷情形下的阿贝尔范畴，推论11，
- 我们定义一个便捷的 $s$-幺 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模范畴，并证明它是阿贝尔范畴，而且它$\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$也是代数 $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}^{op}$ ($\mathbb{A}$，分别为 $\mathbb{B}$，它们是非幺代数 $A$ 和 $B$的单位化）的模范畴，命题 12，
- 给定一个 $(\infty,1)$-范畴，将其视为 Kan 单纯富化范畴 $S$，我们定义一个路径代数 $R[S]$，并证明它是 $s$-幺的，命题13，
- 用于定义 $S$的定向同调理论的链复形被证明定义了 $s$-幺双模，定理 14，
- 我们证明，在一定条件下， $(\infty,1)$-范畴的有向同调定义具有函子性，见定理 16、推论 18，并且有向同调是 Kan 单纯富集范畴的不变量，见推论 19。
- 我们证明， $(\infty,1)$-范畴的相对同调存在正合序列，见第 6.5.1 节，
- 我们将这些构造具体应用于视为 $(\infty,1)$-范畴的有向空间，见定理 23，并给出相对同调正合列成立的简单条件，见命题 26。

## 2. 模与（非单位）代数的背景

我们首先回顾关于非幺代数上的模的文献。本节内容大多是已知结果和folklore定理，我们在此加以回顾和汇集，以使内容自成一体。

## 2.1. 非幺代数

**定义 1**（环与无单位元环）。设 $(A,+)$ 是一个阿贝尔群。若 $\times$ 是定义在 $A$ 上的二元运算，并且满足结合律且对 $+$满足分配律，则称 $(A,+,\times)$ 为***rng***（或*"rung"*），也称无单位元环。

若存在 $a \in A$ 使得 $\forall x \in A$、 $a \times x = x \times a = x$，则 $a$ 唯一，记作符号 1，而 $(A,+,\times)$ 称为环 或幺环。

从 *rng* $(A,+,\times)$ 到 *rng* $(B,+,\times)$ 的无幺环同态 是一个函数 $f : A \to B$，它与+ 和 ×相容。两个环之间的环同态是保持单位元 1 的 *rng* 同态。

**定义 2**（代数与幺代数）。设 $R$ 是一个交换环。$R$ 上的一个代数 是配备函数 $R \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}$（记作 $.$）的 *rng* $(\mathbb{A},+,\times)$，满足：

*(i)* $(\mathbb{A},+,.)$ 是一个左 $R$-模 *(iv)* 乘积 $\times$ 是 $R$-双线性的

如果底层的 *rng* 是幺的，那么称该代数为幺代数。

代数同态 $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$是满足以下条件的函数 $\phi : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$：

*(i)* $\phi$ 是无幺环同态 *(ii)* $\phi$是 $R$-模同态

除非另有说明，以下内容中我们绝不假设代数是幺的。

**注 1.** 这并非一种常规定义，而且文献中对非幺代数有许多不同的概念。非幺代数 $\mathbb{A}$ 通常被定义为一个环，连同一个从 $R$ 到 $\mathbb{A}$ 的中心的非幺环态射，并满足某些条件。然而，在我们讨论的特定情形中，我们需要 $\mathbb{A}$ 始终继承一个 $R$-模结构，而这些非幺代数并不具备这一性质。我们的定义也可以由以下命题来阐释。

**注 2.** 由于 $R$ 是交换的，选择左模结构还是右模结构，严格来说只是记号上的区别。若我们具有其中任一种结构，则总可以通过对任意 $r \in R$ 和 $a \in \mathbb{A}$定义 $r.a$ 为 $a.r$（或反过来），将其解释为双模结构。

**注 3.** $R$ 本身是一个幺 $R$-代数。

**命题 1.** 1. 设 $(A,+,\times,.)$ 是一个幺 $R$-代数，且 $\mathbb{A}$ 是 $(A,+,.)$ 的一个子-$R$-模，在 $\times$的作用下保持稳定。那么，$\mathbb{A}$ 连同诱导的运算构成一个 $R$-代数。2. 任意（非幺） $R$-代数 $(\mathbb{A},+,\times,.)$ 都可由此构造为幺代数 $A$ 的一个子-$R$-模，其中$\times$ 由 $A$中的乘法诱导而来。

第一点的证明显而易见，第二点则几乎可由以下构造立即得出：

**注 4.** 下文中，我们通常用字母 $A$、 $B$、 … 表示幺代数，用 $\mathbb{A}$、 $\mathbb{B}$、 … 表示非幺代数。

**定义 3**（单位化）。设 $R$ 是一个交换环（含单位）。设 $\mathbb{A}$ 是一个 $R$-代数。令阿贝尔群 $\mathbb{A} = (\mathbb{A},+) \times (R,+)$ 配备如下乘法：

$$(a,r) \times (b,s) = (ab + r.b + a.s, rs)$$

那么， $\mathbb{A}$ 是 $R$ 上的幺代数，称为 $\mathbb{A}$的单位化。其单位为 $(0,1)$。

这一构造有时也称为*Dorroh* 扩张，名称源自一篇发表于 1932 年的文章，该文研究了 $R$为整数环 Dorroh(1932).

## 2.2.（非幺）代数上的模

现在我们将定义非幺代数上的模，并研究其性质。

**定义 4.** 设 $R$ 是一个环，且 $\mathbb{A}$ 是某个 $R$-代数。

设 $(M,+)$ 是一个阿贝尔群，并配有一个函数 $._{\mathbb{A}} : \mathbb{A}\times M \to M$ （分别为 $M\times\mathbb{A}\to M$）和一个函数 $._R : R\times M\to M$ （分别为 $M\times R\to M$），满足：

1. $\forall m\in M, \forall a,b\in\mathbb{A},\quad (a+b)._{\mathbb{A}} m = a._{\mathbb{A}} m + b._{\mathbb{A}} x$ （分别为 $m.(a+b)=m.a+m.b$）2. $\forall m, n\in M, \forall a\in\mathbb{A},\quad a._{\mathbb{A}}(m+n)=a._{\mathbb{A}} m + a._{\mathbb{A}} n$ （分别为 $(m+n).a=m.a+n.a$）3. $\forall a,b\in\mathbb{A}, \forall m\in M,\quad a._{\mathbb{A}}(b._{\mathbb{A}} m)=(ab)._{\mathbb{A}} m$ （分别为 $(m.a).b=m.(ab)$）4. $(M,+,._R)$ 若为幺环 $R$ 上的左（分别为右）模（按通常的幺模意义）5. $\forall r\in R, \forall a\in\mathbb{A}, \forall m\in M,$

$$r._R(a._{\mathbb{A}} m)=(r.a)._{\mathbb{A}} m = a._{\mathbb{A}}(r._R m)$$

（分别为 $(m._{\mathbb{A}} a)._R r = m._{\mathbb{A}}(r.a)=(m._R r)._{\mathbb{A}} a$）

于是我们称 $(M,+,.)$ 左模 （分别为右模）是 $\mathbb{A}$ 上的模。

研究完单位化的结构性质，尤其是它对模范畴的影响后，这一定义背后的理由便会更加清楚。

**注 5.** 关系 $(r.a)._{\mathbb{A}} m = a._{\mathbb{A}}(r._R m)$ 最好通过在 $M$ 上定义右-$R$-模结构来理解，定义为 $m.r := r._R m$，这样该关系便可改写为：

$$a.(r.m)=(a.r).m$$

当 $\mathbb{A}$ 是含单位的时，

$$r._R m = r._R(1_{\mathbb{A}}._{\mathbb{A}} m)=(r.1_{\mathbb{A}})._{\mathbb{A}} m$$

因此 $._R$ 由 $._{\mathbb{A}}$ 唯一确定。这一性质使得含单位 $R$-代数的不同定义彼此一致。

**定义 5。** 若 $(M,+,._R,._{\mathbb{A}})$ 是 $R$-代数 $\mathbb{A}$ 上的左模，而 $(M,+,._S,._{\mathbb{B}})$ 是 $S$-代数 $\mathbb{B}$ 上的右模，并且满足：

- $\forall a\in\mathbb{A}, \forall b\in\mathbb{B},\ a._{\mathbb{A}}(m._{\mathbb{B}} b)=(a._{\mathbb{A}} m)._{\mathbb{B}} b$
- $\forall a\in\mathbb{A}, \forall s\in S,\ a._{\mathbb{A}}(m._S s)=(a._{\mathbb{A}} m)._S s$
- $\forall r\in R, \forall b\in\mathbb{B},\ r._R(m._{\mathbb{B}} b)=(r._R m)._{\mathbb{B}} b$
- $\forall r\in R, \forall s\in S,\ r._R(m._S s)=(r._R m)._S s$

则称 $(M,+,._{\mathbb{A}},._{\mathbb{B}})$ 为 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模。

在下文中，为求简便，若上下文已明确代数 $._{\mathbb{A}}$ 和 $._{\mathbb{B}}$，我们通常省略其作用的下标。

**定义6。** 从 $M$ 到 $N$ 上两个左（分别为右）模的左（分别为右）模同态 是一个 $R$-线性函数 $f: M\to N$，满足：

$$f(\lambda.x+\mu.y)=\lambda.f(x)+\mu.f(y)$$

（分别为 $f(x.\lambda+y.\mu)=f(x).\lambda+f(y).\mu$）对所有 $\lambda$、$\mu\in\mathbb{A}$ 和 $x$、$y\in M$ 均成立。

从 $M$ 到 $N$ 的 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模同态是一个左 $\mathbb{A}$-模同态 $f: M\to N$，同时也是一个右 $\mathbb{B}$-模同态。

$\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模范畴记作 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$。
当 $A$ 和 $B$ 是幺代数时，幺 $A$-$B$-双模范畴，即通常意义下的、在含幺环 $A$ 和 $B$上的 $A$-$B$-双模范畴，记作 ${}_{A}\mathrm{UMod}_{B}$。

显然，交换环 $R$ 上的代数具有典范的 $R$-$R$-双模结构，并且满足额外的交换性：对于代数中的任意 $a$ 和任意 $r \in R$，外积 $r.a$ （分别地， $a.r$）定义为$r \times a$ （分别地， $a \times r$），且有性质 $a.r = r.a$。

接下来我们还需要考虑代数变化 时的双模范畴：

**定义 7** （代数上的双模范畴）。 若 $R$和 $S$ 是交换（含幺）环，定义如下范畴：

- 对象是三元组 例 $(\mathbb{A}, M, \mathbb{B})$ 其中 $\mathbb{A}$ 是一个 $R$-代数， $\mathbb{B}$ 是一个 $S$-代数，而 $M$ 是一个 $\mathbb{A} - \mathbb{B}$-双模 $le$
- 从 $(\mathbb{A}, M, \mathbb{B})$ 到 $(\mathbb{A}', M', \mathbb{B}')$ 的态射是三元组 $(f, g, h)$，其中 $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ 是一个 $R$-代数态射，$h : \mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ 是一个 $S$-代数态射，而 $g : (M, +) \to (M', +)$ 是一个群同态，满足：

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall m \in M, \forall b \in \mathbb{B}, h(a.m.b) = f(a).h(m).g(b)$$

- 复合就是通常的函数复合

这个范畴是 左侧为 **R-**代数、右侧为 **S-**代数的双模范畴，我们将其记作 ${}_{R}\mathrm{AlgMods}_{S}$。

## 3. 代数与模的幺化及其性质

本段旨在说明，单位化并非任意的操作，因为它在该词的两种非常强的意义上都是自然的。

**定理 2.** 设 $U$ 是从 $\mathrm{Alg}_R$ 到 $\mathrm{UAlg}_R$ 的函子，使得：

- $U(\mathbb{A}) = \widehat{\mathbb{A}}$ 对于 $\mathbb{A}$ 中的一个对象 $\mathrm{Alg}_R$ （见定义*3*）
- $U(f) : (a, r) \mapsto (f(a), r)$ 对于 $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 属于 $\mathrm{Alg}_R$

那么 $U$ 是从 $\mathrm{UAlg}_R$ 到 $\mathrm{Alg}_R$的遗忘函子的左伴随。

这意味着单位化是函子性的，并且是为给定代数添加单位的最一般方式。当然，这也适用于右代数。

证明。 显然， $U$ 是函子性的。记遗忘函子为 $I$ 。
我们通过明确给出满足单位-余单位方程的自然变换，来证明 $(U, I)$ 是一个伴随对。

在此证明中，正如备注 4 中已指出的那样，为了清晰起见，我们将用不同字体表示幺代数和非幺代数：例如，下文中， $\mathbb{A}$表示一个非幺代数，而 $A$表示一个幺代数。

对于任意（非幺） $R$-代数 $\mathbb{A}$ ，关联如下 $R$-代数同态

$$\eta_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to IU(\mathbb{A})$$

定义如下：

$$\eta_{\mathbb{A}}(x) = (x, 0)$$

对任意幺 $R$ 代数 $A$，关联以下幺代数同态

$$\epsilon_A : UI(A) \to A$$

定义为

$$\epsilon_A : (x, r) \mapsto x + r.1_A$$

于是 $\eta$ 是从 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Alg}_R}$ 到 $UI$ 的自然变换，且 $\epsilon$ 是从 $IU$ 到 $\mathrm{Id}_{\mathrm{UAlg}_R}$的自然变换。此外，对任意（非幺）代数 $\mathbb{A}$,

$$(\epsilon U \cdot U\eta)_{\mathbb{A}} = \epsilon_{U(IU(\mathbb{A}))} \circ U(\eta_{\mathbb{A}})$$

并且对任意 $x \in \mathbb{A}$ 与 $r \in R$, $U(\eta_{\mathbb{A}})(x, r) = (\eta_{\mathbb{A}}(x), r) = ((x, 0), r)$ 因此

$$(\epsilon U \cdot U\eta)_{\mathbb{A}}(x, r) = \epsilon_{UIU(\mathbb{A})}(((x, r), 0)) = (x, r)$$

对任意幺代数 $A$:

$$(I\epsilon \cdot \eta I)_A = I(\epsilon_{UI(A)}) \circ \eta_{I(A)}$$

因此对任意 $x \in A$:

$$(I\epsilon \cdot \eta I)_A(x) = I(\epsilon_{UI(A)})(x, 0) = \epsilon_{UI(A)}((x, 0)) = x$$

由此， $(U, I)$ 是以 $\eta$ 为单位、以 $\epsilon$为余单位的伴随对

□

利用前述构造，我们证明非幺代数上的非幺模范畴同构于幺代数上的幺模范畴:

**定理 3.** 设 $R$ 与 $S$ 为交换（幺）环， $\mathbb{A}$ 为 $R$ 上的代数， $\mathbb{B}$ 为上的代数 $S$.
对每个 $M \in {}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$，将 $F(M) \in {}_{\widehat{\mathbb{A}}}\mathrm{UMod}_{\widehat{\mathbb{B}}}$ 对应为 $M$，保留其加法运算，但其外部运算由下式给出:

$$(a, r).m = a._{\mathbb{A}} m + r._R m \quad \text{and} \quad m.(b, s) = m._{\mathbb{B}} b + m._S s$$

对 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{A}}$ 中的每个 $f : M \to N$，将 $Ff \in {}_{\widehat{\mathbb{A}}}\mathrm{UMod}_{\widehat{\mathbb{B}}}$ 对应为等于 $f$ 者。则 $F$ 是范畴同构。

这一性质是先前所用代数上的模这一定义的主要依据。事实上，在1996年的一篇文章中，Quillen 将非幺代数 $\mathbb{A}$上的模定义为某个任意选取的幺代数 $\mathbb{B} \supset \mathbb{A}$ 上满足若干附加条件的模 Quillen （未发表手稿, 1996年）。随后他证明， $\mathbb{B}$ 的选取在范畴等价的意义下并不重要。然而，我们更倾向于仅用简单的代数关系来表述我们的条件，以使计算方面更为清晰。

注意，定理3 说明了为什么 $r.(a.m)$应当等于 $a.(r.m)$ 在我们对代数上的模的定义的最后一条公理中：在 $R$上的幺代数中，子环 $R.\{1\}$ 包含于代数的中心，因此，任何 $(0, r)$ 对于$r \in R$都必须与任何 $(a, 0)$ 对于 $a \in \mathbb{A}$都可交换，因此 $a.(r.m) = (a, 0).((0, r).m) = (0, r).((a, 0).m) = r.(a.m)$。

证明。 首先，我们来说明 $F$ 是良定义的。取 $M \in_{\widehat{\mathbb{A}}} \mathrm{Mod}_{\widehat{\mathbb{B}}}$。我们首先需要证明 $F(M)$ 是一个双模。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$显然，对于所有 $x \in \mathbb{A}$ 和 $y \in \mathbb{B}$, $m \mapsto x.m.y$ 都是线性的。此外，$1_{\widehat{\mathbb{A}}}.m = (0, 1_R).m = m$ 和$m.1_{\widehat{\mathbb{B}}} = m.(0, 1_S) = m$。另外，

$$\begin{aligned}
(a_1, r_1).((a_2, r_2).m) &= (a_1, r_1).(a_2.m + r_2.m) \\
&= a_1.(a_2.m + r_2.m) + r_1.(a_2.m + r_2.m) \\
&= a_1.(a_2.m) + a_1.(r_2.m) + r_1.(a_2.m) + r_1.(r_2.m) \\
&= (a_1 a_2).m + (a_1.r_2).m + (r_1.a_2).m + (r_1 r_2).m \\
&= (a_1 a_2 + a_1.r_2 + r_1.a_2 + r_1 r_2).m \\
&= ((a_1, r_1) \times (a_2, r_2)).m
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}(m.(b_1,s_1)).(b_2,s_2) &= (m.b_1 + m.s_1).(b_2,s_2)\\ &= m.(b_1b_2 + s_1.b_2 + b_1.s_2 + s_1s_2)\\ &= m.((b_1,s_1)\times(b_2,s_2))\end{aligned}$$

最后，

$$\begin{aligned}((a,r).m).(b,s) &= (a.m + r.m).(b,s)\\ &= (a.m).(b,s) + (r.m).(b,s)\\ &= (a.m).b + (a.m).s + (r.m).b + (r.m).s\\ &= a.(m.b) + a.(m.s) + r.(m.b) + r.(m.s)\\ &= a.(m.b + m.s) + r.(m.b + m.s)\\ &= a.(m.(b,s)) + r.(m.(b,s))\\ &= (a,r).(m.(b,s))\end{aligned}$$

因此， $F(M)$ 是一个定义良好的双模。此外， $F$ 的函子性是显然的。

最后，令 $G$ 为满足以下条件的函子：

- 对于 ${}_{\hat{\mathbb{A}}}\mathrm{Mod}_{\hat{\mathbb{B}}}$中的每个对象 $M$， $G(M)$ 是一个 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模，其底层加法群为 $(M,+)$，乘法律由下式给出

$$a.m.b = (a,0).m.(b,0)$$

- 对于 ${}_{\hat{\mathbb{A}}}\mathrm{Mod}_{\hat{\mathbb{B}}}$中的每个 $g : M \to N$， $Gg = g$

于是 $G$ 显然是函子性的，并且是 $F$的逆。 □

**推论4.** ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$ 是一个在 $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}^{op}$-模上充实的阿贝尔范畴。

证明. 若 $M$ 与 $N$ 是 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$中的对象，则显然可如下在 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}(M,N)$上定义一个左 $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}^{\mathrm{op}}$-模结构：

$$\begin{aligned}&\forall f \in {}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}(M,N),\ \forall (a,r)\in\hat{\mathbb{A}},\ \forall (b,s)\in\hat{\mathbb{B}},\\ &((a,r)\otimes(b,s)).f :\ m \mapsto a.f(m).b + a.f(m).s + r.f(m).b + r.f(m).s\end{aligned}$$

并且这使得映射的复合成为双线性的。

于是显然 $F$ 是一个 $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}^{\mathrm{op}}$-线性函子，并且由于它是一个同构，我们便得到所需结果。 □

**注记 6.** 由于 $F$ 除了是同构外，还是 $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}^{op}$-阿贝尔范畴之间的线性函子，因此它是正合函子。因此，对模链复形的同调序列应用 $F$，等同于取该模链复形在 $F$ 下的像的同调序列。

## 4. 关于闭、坚实和 s-幺模的范畴

取一个含幺交换环 $R$。我们可以证明，按照前文（定义 4）所定义的 $R$-代数 $R$ 上的模范畴，与通常意义下环 $R$ 上的模范畴并不等价（参见 Quillen (未发表手稿，1996年）。

这也是人们可能会质疑 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}$ （或更一般地说， ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$）是否是进行同调代数研究的良好范畴的原因之一。

Quillen 的一篇文章Quillen （未发表手稿，1996年）通过定义非含幺环或代数上的三种合理的模范畴回应了这一担忧。这些范畴在某些方面更为自然，并且在较弱的假设下彼此一致。我们将在定义代数上模的张量积之后，继续介绍他的方法。

### 4.1. 非幺张量积

Quillen 通过任意选取一个将 rng 嵌入环的嵌入，来定义 rng 上模的张量积。如果选取的嵌入是由单位化给出的典范嵌入，那么便得到如下构造。

取某个 $R$-代数 $\mathbb{A}$、一个右 $\mathbb{A}$-模 $M$ 和一个左 $\mathbb{A}$-模 $N$，我们首先利用上一节的范畴同构，将 $M$ 和 $N$ 视为关于单位化 $U(\mathbb{A})$ 的模~ ~$M$ 和 $N$。然后，我们考虑张量积

$$\tilde{M} \otimes_{U(\mathbb{A})} \tilde{N}$$

这相当于取由 $M \times N$生成的自由阿贝尔群，并将其对由以下形式的元素生成的子群取商，其中 $m,\ m' \in M, n,\ n' \in N$和 $(a,r) \in U(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \oplus R$:

- $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$
- $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$
- $(m.(a,r), n) - (m, (a,r).n)$

由于 $(m.(a,r), n) - (m, (a,r).n) = (m.a, n) - (m, n.a) + (m.r, n) - (m, r.n)$，我们可以将上面最后一点中的那些形式的元素等价地替换为以下形式的元素:

- $(m.a, n) - (m, a.n)$ 对于 $a \in \mathbb{A}$
- $(m.r, n) - (m, r.n)$ 对于 $r \in R$

典范投影 $M \times N \to M \otimes N$ 照例记为 $\otimes$。

这给出了张量积的泛性质的一种表述，它完全不涉及单位化。

**定义 8.** 设 $G$ 为一个交换群。一个函数 $f : M \times N \to G$ 使得对任意 $m$、 $m' \in M$、 $n$、 $n' \in N$ 以及$a \in \mathbb{A}$和 $r \in R$:

1. $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$
2. $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$3.
   $f(m.a, n) = f(m, a.n)$4.
   $f(m.r, n) = f(m, r.n)$

称为一个 $\mathbb{A}$–平衡双加性函数。

这个张量积显然由以下泛性质刻画（此前的文献中似乎尚未陈述过）：

**命题 5**（张量积的泛性质）。 对于每个交换群 $G$ 以及任意 $\mathbb{A}$-平衡双加性函数 $f : M \times N \to G$，存在唯一映射 $f : M \otimes N \to G$，使得

$$f(m, n) = \overline{f}(m \otimes n)$$

对于任意 $m \in M$ 和 $n \in N$。

由于这个张量积是用通常的张量积定义的，因此通常张量积的所有性质都适用于幺张量积，包括张量双模时出现的额外结构、结合律等。

### 4.2. 坚实模与闭模的范畴

考虑一个 $R$-代数 $\mathbb{A}$ （或者说一个 rng，因为无幺环是 $\mathbb{Z}$-代数的特殊情形 ）.

我们考虑的第一个范畴，是通过取商 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}$ 得到的，从而将所有行为不良的对象都视为零。考虑左 $\mathbb{A}$-模的满子范畴 $M$，其中的对象满足以下退化性质：

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{A}^n M = 0$$

这个范畴称为**幂零模**范畴。它是一个 Serre 子范畴Serre (1953)，这意味着我们可以将其取商，从而得到一个阿贝尔范畴 ${}_{\mathbb{A}}\mathcal{M}$，其对象是非退化模。这是非幺代数上非退化模中最基础、行为最良好的一类范畴，但由于取商运算，其具体描述并不十分显然。

第二个范畴是下文所定义的坚实模范畴：

**定义 9**(坚实模)。满足以下条件的模 $M \in {}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}$，其自然映射

$$\mu : \mathbb{A} \otimes M \to M, \quad a \otimes m \mapsto a.m$$

是同构的，称为坚实。

我们将用 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{FMod}$ 表示 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}$ 中左坚实 $\mathbb{A}$-模的满子范畴。

**注记7.** 注意，对任意的 $\mathbb{A}$，*firm*模范畴未必是阿贝尔的*González-Férez*与*Marín* （*2007*年）。

后一个范畴按与firm模对偶的方式定义：

**定义10** （闭模）。 使得自然映射的模 $M \in {}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}$

$$\mu' : M \to \mathrm{Hom}(\mathbb{A}, M), \quad \mu'(m) = (a \mapsto a.m)$$

是同构的，称为闭。闭模范畴是 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}$ 中以闭模为对象的满子范畴。

然而，正如下述定理所示，这三个范畴往往相同；该定理由Quillen（未发表手稿，1996年）。

**定义 11**。若一个 *rng* $A$ 满足 $A^2 = A$，则称其为幂等的。当一个代数作为 *rng* 是幂等的时，称其为幂等代数。

**定理 6**。若 $\mathbb{A}$是一个幂等的 $R$-代数，则坚实模范畴、闭模范畴和非退化模范畴 ${}_{\mathbb{A}}\mathcal{M}$都是等价的阿贝尔范畴。

由对偶性可知，以上结论显然都可推广到右模。

本文只使用幂等环，因此为方便起见，我们将统一使用坚实模和双模。

### 4.3. 坚实模的标量扩张

**定义 12.** 设 $g : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 是一个 $R$-代数态射。

那么对于任意 $\mathbb{B}$-模 $M$，记 $\mathcal{I}(M)$ 为底层 $R$-模相同、但外部运算由下式给出的 $\mathbb{A}$-模

$$a._{\mathbb{A}} m = g(a)._{\mathbb{B}} m$$

那么对于任意 $f : M \to N$， $I(f) = f$ 是一个 $\mathbb{A}$-模态射 $M \to N$ （因为 $f(g(a).m) = g(a).f(m)$），我们称所得函子 $\mathcal{I}_g$ 为沿 $g$ 的标量限制。

注记 *8. </style}*取 $M$ 为坚实的情况下， $\mathcal{I}_g(M)$ 不一定是坚实的 $\mathbb{A}$-模。事实上，在后续章节将要研究的例子中，可以验证情况并非如此，因为典范态射甚至不是满射。

命题 7. </style>设 $g:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 是一个 $R$代数态射。

赋予 $\mathbb{B}$ 由下式定义的右 $\mathbb{A}$-模结构

$$\begin{cases} b.a = b\times g(a)\ for\ a\in\mathbb{A}, b\in\mathbb{B} \\ b.r = r.b\ for\ r\in R, b\in\mathbb{B} \end{cases}$$

- 对于任意 $\mathbb{A}$-模 $M$， $\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M$ 具有由下式给出的自然左 $\mathbb{B}$-模结构

$$\begin{cases} r.(b\otimes m) = (r.b)\otimes m \\ b'.(b\otimes m) = (b'b)\otimes m \end{cases}$$

- 若 $\mathbb{B}$ 是坚实的 $\mathbb{B}$-模，则对于任意 $\mathbb{A}$-模 $M$， $\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M$ 是一个坚实的 $\mathbb{B}$-模。

证明。 • $\mathbb{B}$上的右 $\mathbb{A}$-模结构是良定义的，因为 $g$ 是一个 $R$代数态射。

- 显然， $\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M$ 确实是一个左 $\mathbb{B}$-模。
- 取任意一个

$$U = \mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M) \text{ and } p_U : (b,b',m)\mapsto b\otimes(b'\otimes m)$$

or

$$U = (\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}\mathbb{B})\otimes_{\mathbb{A}} M \text{ and } p_U : (b,b',m)\mapsto (b\otimes b')\otimes m$$

使得 $p$ 是典范的 $R$-模同态 $bB\times\mathbb{B}\times M\to N\to U$， $(U,p_U)$ 满足以下泛性质:

对于任意 $R$-模 $N$，每个 $R$-三线性映射 $f:bB\times\mathbb{B}\times M\to N$ 满足

- $f(b.b',b'',m) = f(b,b'.b'',m)$对于任意 $b$、 $b'$、 $b''\in\mathbb{B}$、 $m\in M$
- $f(b,b'.a,m) = f(b,b',a.m)$对于任意 $a\in\mathbb{A}$、 $b$、 $b'\in\mathbb{B}$、 $m\in M$

˜存在唯一的 $R$-模同态 $f:U\to N$，使得

$$\tilde{f} = f\circ p_U$$

因此，存在一个典范同构

$$\phi:(\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}\mathbb{B})\otimes_{\mathbb{A}} M\to\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M)$$

使得 $\phi((b\otimes b')\otimes a) = b\otimes(b'\otimes a)$，接着泛映射

$$\begin{cases} \mu:\mu:\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M)\to(\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M), \quad b\otimes(b'\otimes m)\mapsto(bb')\otimes m \\ \nu:\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}\mathbb{B}\to\mathbb{B}, \quad b\otimes b'\mapsto(bb') \end{cases}$$

使下图交换:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}\mathbb{B})\otimes_{\mathbb{A}} M & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{B}\otimes_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M) \\ & \searrow^{\nu\otimes\mathrm{Id}_M} & \downarrow\mu \\ & & \mathbb{B}\otimes_{\mathbb{A}} M \end{array}$$

因此，如果 $\nu$ 是一个同构，那么 $\mu$ 也是。

□

**定理 8**。 如果 $g:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ 是一个 $R$-代数同态，且 $\mathbb{B}$ 是一个坚实的 $\mathbb{B}$-模，那么存在一个函子

$$E_g : {}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}\to{}_{\mathbb{B}}\mathrm{FMod}$$

使得

- $E_g(M) = \mathbb{B} \otimes_{\mathbb{A}} M$ 其中 $\mathbb{B}$ 具有由 $g$给出的右 $\mathbb{A}$-模结构
- 对于任意 $f : M \to N$,

$$E_g(f) : b \otimes m \mapsto b \otimes f(m)$$

证明。 • 对于任意 $f : M \to N$，映射

$$\mathbb{B} \times M \to N, \quad (b, m) \mapsto b.f(m)$$

由张量积的泛性质经由 $\mathbb{B} \otimes_{\mathbb{A}} M$分解，因此 $E_g(f)$是良定义的函数。此外，$E_g(f)$ 显然是 $R$-线性的。最后，

$$E_g(f)(b.(b' \otimes m)) = E_g(f)((bb') \otimes m) = (bb') \otimes f(m) = b.(b' \otimes m)$$

- 对于任意 $f : M \to N$和 $f' : N \to P$,

$$E_g(f')E_g(f) : b \otimes m \mapsto f'f(m)$$

所以 $E_g(f')E_g(f) = E_g(f'f)$。 □

**定义 13.** 上文定义的函子 $E_g$ 称为沿 $g$的标量扩张。

**注 9.** 通常，我们关注标量扩张，是因为它与标量限制相伴随。然而，除非我们对 $g$作额外假设，此处未必如此。后文中我们并不需要一般情形下的伴随，因此，对于使标量扩张与标量限制函子相伴随的那些 $g$，其最佳刻画留待今后的工作。

### 4.4. s-单位模的范畴

我们将使用的代数具有一些额外性质，使我们能更方便地描述firm模。对最有用结果的更详细说明可见于 Positselski (2023)或Tominaga (1976); Komatsu (1986)，此处我们仅验证它们在我们对代数上的模的定义下成立。以下内容均为folklore，我们只为完备性而加以证明，因为相关文献相当分散。

**定义 14.** $M$ 上的左（分别为右）模称为 $R$-代数 $\mathbb{A}$ 是 **s-**幺的，当且仅当：

$$\forall m \in M, \exists e \in \mathbb{A}, \quad e.m = m$$

（分别为 $m.e = m$）若 $R$-代数 $\mathbb{A}$ 作为左（分别为右） $\mathbb{A}$-模是 $s$-幺的，则称其为左（分别为右） $s$-幺的。双模是 $s$-幺的，当且仅当它既是左 $s$-幺的，也是右 $s$-幺的。

**备注 10.** 任何左（或右） $s$-幺代数显然都是幂等代数。

**命题 9.** 任何左（分别为右） $s$-幺模 $M$，若其定义在左（分别为右） $s$-幺 $R$-代数 $\mathbb{A}$ 上，则是坚实的。

证明。 这基本上与 Positselski (2023) 中针对无幺环给出的证明相同。

关键在于，给定某些 $m \in M$ 和 $e \in \mathbb{A}$ 使得 $e.m = m$， $e \otimes m$ 并不取决于 $e$的具体选择。

确实，取 $e, e' \in \mathbb{A}$ 使得

$$e.m = m = e'.m$$

由代数的 $s$-幺性，还存在 $f \in \mathbb{A}$使得

$$fe = e$$

以及 $f' \in \mathbb{A}$ 使得

$$f'(e' - fe') = e' - fe'$$

那么，令 $g = f + f' - f'f$，我们有：

$$ge = fe + f'e - f'fe = e + f'(e - fe) = e$$

and

$$ge' = fe' + f'e' - f'fe' = fe' + e' - fe' = e'$$

因此， $ge = e$ 和 $ge' = e'$，所以：

$$e \otimes m = ge \otimes m = g \otimes em = g \otimes e'm = ge' \otimes m = e' \otimes m$$

那么显然，将每个 $m \in M$ 映射到元素 $e \otimes m$（其中 $e \in \mathbb{A}$ 满足 $em = m$）的函数，是下列函数的逆函数：

$$\mu : \mathbb{A} \otimes M \to M, \quad a \otimes m \mapsto am$$

因此， $\mu$ 是一个双射，所以它是一个同构。 □

**定理 10.** 设 $\mathbb{A}$ 是一个左（分别为右） $s$-幺代数。
那么，左 $\mathbb{A}$-模是坚实的，当且仅当它是左（分别为右） $s$-幺的。

证明。 我们已经看到，左 $s$-幺模是坚实的。
现在取一个 $\mathbb{A}$上的坚实左模 $M$。则对每个 $m \in M$，存在 $a \in \mathbb{A}$ 和 $m' \in M$，使得：

$$m = a.m'$$

于是存在 $e \in \mathbb{A}$ 使得 $ea = a$，从而：

$$e.m = e.(a.m') = (ea).m' = a.m' = m$$

因此 $M$ 是左 $s$-幺的。 □

**推论 11**。 左 $s$-幺环上的左 $s$-幺模范畴是阿贝尔范畴 .

## 5. 一个方便的双模阿贝尔范畴

考虑幺代数 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$时，幺 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模与幺 $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{op}$ 模相同。因此，幺双模范畴继承了模范畴的所有重要范畴结构。但在非含幺情形下，这种对应关系未必成立：双模总可以视为 $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{op}$ 模（我们将对此加以证明），但我们并不认为反过来也成立。

首先，显然，当 $\mathbb{A}$ 是一个 $R$代数且 $\mathbb{B}$ 是一个$S$代数时，可以为 $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{op}$ 赋予 $R \otimes_{\mathbb{Z}} S^{op}$代数结构，具体做法是将乘法律定义为：

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa' \otimes b'b)$$

并将双模作用律定义为：

$$(r \otimes s).a \otimes b = (r.a \otimes s.b)$$

现在，按如下方式定义函子 Merge：

- 对任意 $m \in M$，对于每个 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模 $M$，利用张量积的泛性质，在 $(M, +)$ 上定义左$\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{op}$模作用，使得

$$(a \otimes b).m = a.m.b$$

对于 $a \in \mathbb{A}$， $b \in \mathbb{B}$ 和

$$(r \otimes s).m = r.m.s$$

对于 $s \in S$， $r \in R$，并将所得的 $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{op}$-模 Merge($M$) 与双模 $M$关联。

- 对每个 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模态射 $f : M \to N$，关联其自身 $f$，因为此时

$$f((a \otimes b).m) = f(a.m.b) = a.f(m).b = (a \otimes b).f(m)$$

and

$$f((r \otimes s).m) = f(r.m.s) = r.f(m).s = (r \otimes s).f(m)$$

**注释 11.** 这个函子是忠实的，但只要存在一个非零左 $\mathbb{A}$-模 $M$，它就不再是满的：通过如下方式构造的双模

$$\forall m \in M, \forall b \in \mathbb{B}, \quad m.b = 0$$

会被映到一个 $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}^{op}$-模，使得对于任意向量 $v$ 和任意标量 $\lambda$，都有 $\lambda.v = 0$

由于我们没有一般性的范畴等价，要得到一个双模的阿贝尔范畴，比在幺情形下稍微复杂一些。现在我们来定义这个由 $s$-幺双模构成的范畴：

**定义 15** ($s$-幺双模)。若 $\mathbb{A}$ 是一个在 $R$ 上的代数，且 $\mathbb{B}$ 是一个在 $S$ 上的代数，则称一个 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模为 $s$-幺的，当且仅当它同时是左 $s$-幺和右 $s$-幺的。

$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}^{op}$富集范畴中的 $s$-幺双模构成了 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$ 的一个全子 $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}^{op}$ 富集范畴，由 $s$- 幺双模组成。我们将其记为 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$。

**注记 12.** 函子 Merge 将 $s$-幺双模映为 $s$-幺模。其限制 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}} \to {}_{\mathbb{A}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{B}^{op}}\mathrm{Mod}$ 有时可能是范畴等价：当 $\mathbb{A}$ 和 $\mathbb{B}$ 是幺的时，$s$-幺双模就是幺双模，因此 Merge 就成为幺双模的通常范畴同构。我们认为这个函子在一般情况下并不满，但未能举出反例。

范畴 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$ 是我们将要研究的范畴，原因如下：

**命题 12.** ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$ 是一个 $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}^{op}$-阿贝尔范畴。

证明。设 $M$ 和 $N$ 是 $s$-幺半的 $\mathbb{A}$-$\mathbb{B}$-双模。

那么它们作为左 $\mathbb{A}$-模是 $s$-幺半的。取某个 $(m, n) \in M \times N$。存在 $a \in \mathbb{A}$ 使得 $a.m = m$。于是，存在 $a' \in \mathbb{A}$ 使得 $a'.(n - a.n) = n - a.n$。最后，

$$(a + a' - a'a).m = a.m + a'.m - a'.(am) = a.m = m$$

and

$$(a + a' - a'a).n = a.n + a'(n - a.n) = a.n + n - a.n = n$$

因此，在双模的余积 $M \oplus N$ 中，我们有

$$(a + a' - a'a).(m + n) = m + n$$

并且 $M \oplus N$ 是左 $s$-幺半的。

同理，$M \oplus N$ 是右 $s$-幺半的，因此它是一个 $s$-幺半双模，而 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}$ 存在任意两个对象的余积。

零双模显然是 $s$-幺半的，并且是一个零对象。由于 ${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{B}$ 具有所有有限余积和一个零对象，因此它是一个加性范畴。

若 $M, N$ 是${}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{B}$与 $f \in {}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{B}(M, N)$中的对象，则阿贝尔群态射 $f : M \to N$ 的核与余核阿贝尔群继承 $s$-有单位双模结构，且相应的核与余核态射实际上是双模态射。因此，$f$ 既有核也有余核。

由于任意 $f \in {}_{\mathbb{A}}\mathrm{Mod}_{\mathbb{B}}(M, N)$ 的典范分解恰好就是阿贝尔群范畴中其底层阿贝尔群态射的典范分解，因此，任意 $s$-幺半双模态射都是严格的。 □

## 6. 应用： $(\infty,1)$-范畴的有向同调

本文提出一种适用于单纯富集范畴的同调理论；当同态单纯集合为 Kan 时，这些范畴构成 $(\infty,1)$-范畴的一种模型。

**定义 16** (例如，Lurie (2009))。一个单纯形富集范畴是以单纯集合构成的闭笛卡尔范畴为富集范畴的范畴 $\mathcal{S}$，也就是说，其 $Hom$ 集是单纯集合，并且对于任意对象$A$， $B$， $C$，复合

$$\circ : \mathcal{S}(A,B)\times\mathcal{S}(B,C)\to\mathcal{S}(A,C)$$

是一个单纯映射。

$A$ *si*单纯形富集范畴称为纤维化的，当且仅当所有 $Hom$ 集都是 $Kan$ 复形。

纤维化的单纯形富集范畴尤为重要，因为它们刻画了 $(\infty,1)$-范畴，Lurie(2009)。然而，这里发展的工具适用于一般的单纯形富集范畴。我们认为，这一构造可以推广到拟范畴，但这需要复杂的技术引理，而这些引理对我们的目的来说并非必要。

### 6.1. 定义路径代数

我们想把 一个范畴的 1-态射嵌入到一个代数中，使其作用于高阶态射 .

**定义 17.** 设 $\mathcal{S}$ 是一个单纯形富集范畴。对于每一对对象 $(A,B)$，我们可以考虑单纯集合 $\mathcal{S}(A,B)$ 的0-顶点集合 $(\mathcal{S}(A,B))_0$。于是我们可以定义一个范畴 $\mathcal{S}_0$，其对象与 $\mathcal{S}$ 的对象相同，态射 $A\to B$ 是 $(\mathcal{S}(A,B))_0$ 的元素，而其复合

$$\circ_0 : \mathcal{S}_0(A,B)\times\mathcal{S}_0(B,C)\to\mathcal{S}_0(A,C)$$

是单纯映射在0-顶点上的限制

$$\circ : \mathcal{S}(A,B)\times\mathcal{S}(B,C)\to\mathcal{S}(A,C)$$

这就是 $\mathcal{S}$的1-态射范畴。

**定义18.** 设 $R$ 为一个交换环，并设 $\mathcal{S}$ 为一个单纯形富集范畴。

设 $\mathbb{A}$ 为由 $\mathcal{S}_0$中所有态射生成的自由左$R$-模。对 $\mathcal{S}_0$中的每一个 $f : X\to Y$ 与 $g : Z\to T$态射，令

$$g\times f=\begin{cases} g\circ_0 f & if\ Z=Y\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

然后，将 $\times$ 延拓到 $\mathbb{A}$ 的全体，并按 $R$-线性性，得到一个 $R$-代数，称为 $\mathcal{S}$的路径代数（或卷积代数，*Assem*等人（*2006*年））。记作 $R[\mathcal{S}]$

在一般情形下，路径代数不必是有单位的。事实上，若 $\mathcal{S}$ 只有有限个对象，则可见所有恒等态射之和（这是一个有限和）是一个单位。对于具有无穷多个对象的范畴，其路径代数一般没有典范单位。然而，它仍具有丰富的代数结构：

**命题13.** 对于任意单纯形富集范畴 $\mathcal{S}$和任意交换环 $R$， $R[\mathcal{S}]$作为 $R[\mathcal{S}]$-双模，在两侧都是 $s$-幺的（因而是幂等的）。

证明。 取一个满足以下条件的 $\sum_{i\in I} r_i.f_i\in R[\mathcal{S}]$： $I$ 有限， $r_i\in R$ 对所有 $i\in I$成立，且 $f_i\in\mathcal{S}_0(X_i,Y_i)$ 对所有 $i$成立。令 $X=\{X_i\mid i\in I\}$ 和 $Y=\{Y_i\mid i\in I\}$。则：

$$\left(\sum_{A\in X}1_A\right)\left(\sum_{i\in I}r_i.f_i\right)=\sum_{i\in I}r_i.(1_{X_i}f_i)+\sum_{i\in I}\sum_{A\in X,\,A\neq X_i}r_i.(1_A f_i)$$

$$= \sum_{i\in I} r_i.(1_{X_i} \circ_0 f_i)$$
$$= \sum_{i\in I} r_i.f_i$$

右侧同理。 □

**注记 13.** $R[S]$ 的元素具有如下形式

$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i t_i\,,\, r\right) = \sum_{i\in I} \left(\lambda_i t_i\,,\, r\right)$$

其中 $(\lambda_i)_{i\in I}$ 是 $R$中标量的有限族，$(t_i)_{i\in I}$ 是1-态射的有限族，并且 $r \in R$ .
因此， $\hat{R}[S]$ 由形如 $(\lambda.t, r)$的元素生成。

在下文中 s, **我们取 R 和 R′ 两个固定的交换（含单位）环**以及 $n$一个固定的整数 r.

## 6.2. 定义链复形

考虑一个固定的单纯形富集范畴 $\mathcal{S}$。

第一步：定义一个 $R$-$R'$-链双模 提醒读者，若 $E$ 是一个集合，则由 $E$ 生成的自由 $R$-$R'$-双模是双模 $\left(R \otimes_{\mathbb{Z}} R'\right)_{e\in E}$ 的常值族的余积，其中 $R$ 的左副本视为左 $R$-模，而 $R'$ 的右副本视为右 $R'$-模。

定义 $C_n\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$ 为由集合生成的自由 $R$-$R'$-双模

$$\bigcup_{A,B \text{ objects of } \mathcal{S}} (\mathcal{S}(A,B))_n$$

任意 $\mathcal{S}$ 的同对象中的所有 $i$-单纯形。对于 $\mathcal{S}$ 中的对象对 $(A, B)$，我们称 $C_{n,\ A\to B}\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$ 为由 $(\mathcal{S}(A,B))_n$ 生成的 $R$-$R'$-双模；根据上述定义， $C_n\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$ 是 $\mathcal{S}$ 中所有对象对 $(A, B)$ 对应的 $C_{n,\ A\to B}\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$ 的余积。

第二步：定义平移算子 取 $\mathcal{S}$ 中某些对象 $A$、$B$、$C$ 和 $D$，以及 $f \in \mathcal{S}_0(A,B)$ 和 $g \in \mathcal{S}_0(C,D)$。稍微滥用一下记号，令 $(s_k)_{0\le k\le n}$ 表示任意单纯集合 $E$ 的退化算子 $E_n \to E_{n+1}$。那么

$$s_{n-1} \dots s_0(f) \in (\mathcal{S}(A,B))_n$$

and

$$s_{n-1} \dots s_0(g) \in (\mathcal{S}(C,D))_n$$

现在，我们通过其在基元素上的取值，来定义元素 $f \in \mathcal{S}_0(A,B)$ 和 $g \in \mathcal{S}_0(C,D)$ 对 $R$-$R'$-双模 $C_{n,\ X\to Y}\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$ 中元素的左右作用（作为 $R$-$R'$-双模自同态）；其中 $X$、$Y$ 是 $\mathcal{S}$ 的对象。

第一种情况： $X \neq B$ 或 $Y \neq C$。此时，对所有 $\sigma \in C_{n,X\to Y}\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$，我们令 $f \times \sigma \times g = 0$

第二种情况： $X = B$ 和 $Y = C$。
然后，对于每个 $\sigma \in C_{n,X\to Y}\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$，我们可以使用单纯映射的限制

$$\circ_n : (\mathcal{S}(A,B))_n \times (\mathcal{S}(B,C))_n \to (\mathcal{S}(A,C))_n$$

来定义

$$\circ : \mathcal{S}(A,B) \times \mathcal{S}(B,C) \to \mathcal{S}(A,C)$$

以定义

$$f \times \sigma \times g = (s_{n-1} \dots s_0)(f) \circ_n \sigma \circ_n (s_{n-1} \dots s_0)(g)$$

这扩展为 $R$-$R'$-双模 $C_n\left(R, \mathcal{S}, R'\right)$ 的自同态，因为该双模在所有同对象的 $n$ 单纯形上是自由的。

第三步：从平移导出双模结构 现在考虑任意的 $\lambda, \mu \in R[S]$。那么我们可以将 $\lambda = \sum_{f \in \mathcal{F}} \lambda_f . f$ 写成某个有限子集 $\mathcal{F}$ 的形式，其中 $\mathcal{F}$ 属于 $\coprod_{A,B \in S_0} S_0(A,B)$，并且对所有 $f$，都有 $\lambda_f \in R$；当对所有 $f \in \mathcal{F}$ 都有 $\lambda_f \neq 0$ 时，这种表示是唯一的。同理，我们可以将 $\mu$ 唯一地写成 $\sum_{g \in \mathcal{G}} \mu_g . g$，其中 $\mathcal{G}$ 是 $C \coprod_{D \in S_0} S_0(C,D)$ 的有限子集。现在，对所有 $\sigma \in \bigoplus_{X,Y \in S_0} C_{i,X \to Y}\left(R, S, R'\right)$，我们定义 $\lambda \times \sigma \times \mu$，如下：

$$\lambda \times \sigma \times \mu = \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{g \in \mathcal{G}} f \times \left(\lambda_f . \sigma . \mu_g\right) \times g$$

这是良定义的，因为前面提到的唯一性。
Let 现在我们证明这给出了 $C_n\left(R, S, R'\right)$ 上的一个 $s$-幺 $R[S]$-$R'[S]$-双模结构 .
首先，对所有 $\lambda$ 与 $\mu$,

$$\sigma \mapsto \lambda \times \sigma \times \mu$$

显然作为线性函数的线性组合是 $R$-$R'$-线性的。此外，对于固定的 $\sigma$ ，

$$(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \times \sigma \times \mu$$

根据定义是双线性的。
由 $\circ$的结合律可知，对于任意迹 $f$、 $f'$、 $g$、 $g'$ 以及任意 $\sigma$，都有：

$$\begin{aligned} & f \times (f' \times \sigma) = (f f') \times \sigma \\ \text{and} \quad & (\sigma \times g') \times g = \sigma \times (g' g) \\ \text{and} \quad & f \times (\sigma \times g) = (f \times \sigma) \times g \end{aligned}$$

最后，取 $(f_i)_{i \in I}$ 一个有限的 1-态射族，使得 $f_i \in S_0(X_i, Y_i)$。取 $(r_i)_{i \in I}$ 一个由 $R$ 中的标量构成的族，以及 $(s_i)_{i \in I}$ 一个由 $R'$ 中的标量构成的族。定义 $e_X$ 为 $X$ 在 $S_0$ 中关于任意对象 $X$ 的恒等态射，并且，

$$E = \{e_{X_i} \mid i \in I\} \quad F = \{e_{Y_i} \mid i \in I\}.$$

Then

$$\begin{aligned} \left(\sum_{e \in E} e\right)\left(\sum_{i \in I} r_i . f_i . s_i\right) &= \sum_{i \in I} r_i . (e_{X_i} f_i) . s_i + \sum_{i \in I} \sum_{e \in E,\, e \neq e_{X_i}} r_i . (e f_i) . s_i \\ &= \sum_{i \in I} r_i . (e_{X_i} f_i) . s_i \\ &= \sum_{i \in I} r_i . f_i . s_i \end{aligned}$$

类似地

$$\left(\sum_{i \in I} r_i . f_i . s_i\right) . \left(\sum_{e \in F} e\right) = \sum_{i \in I} r_i . f_i . s_i$$

因此，这是一个双侧 $s$-幺双模，左侧作用于一个 $s$-幺代数，右侧作用于一个 $s$-幺代数。综合这三个步骤，得到以下定理：

**定理14**。 在 $R$-$R'$-双模 $C_n\left(R, S, R'\right)$上存在唯一的（$s$-酉） $R[S]$-$R'[S]$-双模结构，使得对于所有1-态射 $f : X \to Y$、 $g : U \to V$以及任意 $\sigma \in (S(A,B))_n$， 我们有

$$f \times \sigma \times g = \begin{cases} 0 & \text{if } V \neq A \text{ or } B \neq X, \text{ and} \\ (s_{n-1} \ldots s_0)(f) \bullet_n \sigma \bullet (s_{n-1} \ldots s_0)(g) & \text{otherwise} \end{cases}$$

**备注 14**。 对于代数上的一般 $A$-$B$-双模 $M$ 以及关于 $M$ 的谓词 $\mathcal{P}$，陈述

$$\forall a \in A、\ \forall b \in B、\ \forall m \in M、\quad \mathcal{P}(a.m.b)$$

不等价于以下陈述的合取

$$\forall a \in A、\ \forall m \in M、\quad \mathcal{P}(a.m)$$
$$\forall b \in B、\ \forall m \in M、\quad \mathcal{P}(m.b)$$

但在这里，该双模是左、右 $s$-幺的，因此确实存在等价关系，我们可以更简洁地表述这些性质。

## 6.3. 定义同调双模

现在我们证明，对同态集构造奇异同调群的过程与先前的构造相容。

**定义 19.** 边界算子

对任意 $n \geq 2$，定义

$$d_n : C_n\left(R, S, R'\right) \to C_{n-1}\left(R, S, R'\right)$$

使其成为唯一的 $R$-$R'$-双模同态，并满足：对任意 $A$、$B$，即 $S$ 的对象，以及任意 $c \in (S(A,B))_n$、$d_n c$，其边界按单纯形同调中的通常含义定义为 $c$，即

$$d_n c = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \partial_i c$$

其中 $\partial_0$、…、$\partial_n : (S(A,B))_n \to (S(A,B))_{n-1}$ 是该单纯集合的面算子。

因此，$d_n d_{n-1} = 0$，与经典情形一样，并且我们得到一个链复形

$$\ldots \xrightarrow{d_{n+1}} C_{n,A\to B}\left(R, S, R'\right) \xrightarrow{d_n} C_{n-1,A\to B}\left(R, S, R'\right) \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots$$

**命题 15.** 对于每个 $n \geq 2$, $d_n$ 都是一个 $R[S]$-$R'[S]$-双模同态。

证明. 由 $d_n$ 的线性性可知，只需证明对于 $c \in (S(A,B))_n$, $f \in R[S]$ 和 $g \in R'[S]$，$d_n(f \times c \times g)$ 与 $f \times d_n c \times g$ 相同。我们有：

$$f \times d_n c \times g = f \times \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \partial_i c \ \times g = \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j f \times \partial_i c \times g$$

但对于每个 $i$,

$$\begin{aligned}
\partial_i s_n s_{n-1} \ldots s_0 &= (\partial_i s_n) s_{n-1} \ldots s_0 \\
&= (s_{n-1}\partial_i) s_{n-1} s \ldots s_0 \\
&= s_{n-1}(\partial_i s_{n-1}) s \ldots s_0 \\
&= \ldots \\
&= s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_{i+1}(\partial_i s_{i+1}) s_i \ldots s_0 \\
&= s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_{i+1}(s_i \partial i) s_i \ldots s_0 \\
&= s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_{i+1} s_i (\partial i s_i) s_{i-1} \ldots s_0 \\
&= s_{n-1} s_{n-2} \ldots s_{i+1} s_i s_{i-1} \ldots s_0
\end{aligned}$$

so

$$f \times \partial_i c \times g = (s_{n-1} \ldots s_0)(f) \circ_n \partial_i c \circ_n (s_{n-1} \ldots s_0)(g)$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_i(s_n \dots s_0)(f) \circ_n \partial_i c \circ_n \partial_i(s_n \dots s_0)(g) \\
&= \partial_i \left( (s_n \dots s_0)(f) \circ_n c \circ_n (s_n \dots s_0)(g) \right) \\
&= \partial_i(f \times c \times g)
\end{aligned}
$$

Thus

$$
f \times d_n c \times g = \sum_{0 \le j \le n} (-1)^j \partial_i \left( f \times c \times g \right) = d_n \left( f \times c \times g \right)
$$

□

**定义 20**。我们记 $b \quad y \ \vec{H}_n(R, S, R')$ $R(S)$-$R'(S)$-双模链复形的第 $n$ 个同调群 :

$$
\dots \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \left( R, S, R' \right) \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \left( R, S, R' \right) \xrightarrow{d_{n-1}} \dots
$$

## 6.4. 函子性与不变性

我们取定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $R$, $R'$ 两个交换环。

设 $S$ 和 $\mathcal{T}$ 是两个单纯富集范畴, $f : S \to \mathcal{T}$ 是一个单纯富集函子。则 $f$ 诱导出一个函子 $f_0 : S_0 \to \mathcal{T}_0$, 进而诱导出一个 $R$-$R'$-双模同态

$$
f_* : C_n \left( R, S, R' \right) \to C_n \left( R, \mathcal{T}, R' \right)
$$

我们必须提出的问题是, $f$ 是否诱导出一个代数态射 $R[S] \to R[\mathcal{T}]$, 从而使我们能够以某种方式将 $S$ 的同调与 $\mathcal{T}$ 的同调联系起来。

构造这种态射的自然方法是定义一个 $R$-代数态射 $f_R$, 从 $R[S]$ 到 $R[\mathcal{T}]$, 并使其满足:

$f_R(t) = f_0(t)$ 对每个 1-态射 $t$

总是存在一个满足这些条件的 $R$-线性函数, 但它未必是代数态射。事实上, 如果 $\gamma$ 是一个从 $a$ 到 $b$ 的 1-态射, 而 $\delta$ 是一个从 $c$ 到 $d$ 的 1-态射, 那么当 $b \neq c$ 时, 函子 $f$ 可能会将 $b$ 和 $c$ 映射到同一个点。这意味着 $\gamma \times \delta = 0$, 但 $f_R(\gamma) \times f_R(\delta) \neq 0$ 可能并非如此。

正如Goubault (2024b) 和 Goubault(2024a) 中一样, 这个问题的解决方法是 $f$ 必须在对象上是单射, 这样 $f_R$ 才真正是一个 $R$-代数同态。此外, 我们将证明, 这种构造具有足够的函子性, 因此我们的同调是一个有向同胚不变量。

**定理16**。令 $f : S \to \mathcal{T}$ 为单纯富集函子, 且 $n \in \mathbb{N}$。那么 $f$ 诱导一个函子性的 $R$-$R'$-双模态射

$$
f_* : C_n(R, S, R') \to C_n(R, \mathcal{T}, R')
$$

此外, 若 $f$ 在对象上单射, 则

*1)* $f$ 诱导代数态射 $f_R : R[S] \to R[\mathcal{T}]$ 和 $f_S : R'[S] \to R'[\mathcal{T}]$*2)* 对于任意 $a \in R[S]$、 $b \in R'[S]$ 和 $m \in C_n \left( R, S, R' \right)$,

$$
\begin{cases}
f_*(a.m) = f_R(a).f_*(m) \\
f_*(m.b) = f_*(m).f_S(b)
\end{cases}
$$

*3)* $f_R$ 和 $f_S$ 是函子性的

第二点也可以等价地写成

$$f_*(a.m.b) = f_R(a).f_*(m).f_S(b)$$

由于 $s$幺性。然而，在非幺环上工作时，始终应谨慎对待此类简化。

证明。 我们已经解释了如何定义 $f_*$，并且根据定义可 सपष्ट看出它将具有函子性。剩下的只是证明，在 $f$ 在对象上单射的情况下，额外的函子性性质成立。

假设 $f$ 在对象上单射。如前所述，已经存在唯一的 $R$-代数态射$f_R : R[T_S] \to R[T_\mathcal{T}]$，其满足

对于每个 1-态射 $t$，$f_R(t) = f(t)$

如果 $t : x \to y$ 和 $t' : a \to b$ 是 $S$中的 1-态射，那么对于 $t \times t'$需要考虑两种情况：

- 情形 1： $y = a$，因此 $f(y) = f(a)$，从而

$$f_R(t) \times f_R(t') = f(t) \circ f(t') = f(tt') = f_R(tt')$$

- 情形 2： $y \neq a$，在这种情况下，根据 $f$的单射性， $f(y) \neq f(a)$，从而

$$f_R(t) \times f_R(t') = 0 = f_R(0) = f_R(tt')$$

由 $R$-线性性可知， $f_R : R[S] \to R[\mathcal{T}]$ 因此是一个 $R$-代数同态。 $f_S$ 的定义方式相同。

现在证明*2)*。由于

$$f_*(a.(m_1 + m_2)) = f_*(a.m_1) + f_*(a.m_2), \quad f_*((m_1 + m_2).b) = f_*(m_1.b) + f_*(m_2.b)$$

and

$$f_R(a).f_*(m_1 + m_2) = f_R(a).f_*(m_1) + f_R(a).f_*(m_2),$$

$$f_*(m_1 + m_2).f_S(b) = f_*(m_1).f_S(b) + f_*(m_2).f_S(b)$$

我们可以将讨论限制在 $m$ 是一个单形的情形。因此，取 $S$ 的对象 $A, B$ ，并假设$m \in (S(A, B))_n$。

由于双模作用律是 $R[S]$-$R[\mathcal{T}]$-双线性的，我们只需证明该关系对 $R[S]$和 $R[\mathcal{T}]$的生成元成立。因此，我们可以将讨论限制在 $a$和 $b$ 是1-态射的情形。

因此，我们取 $U, V$ $S$和 $t, t' \in (S(U, V))_0$的对象。我们需要证明 $f_*(t.m) = f_0(t).f_*(m)$ 和$f_*(m.t') = f_*(m).f_0(t')$。这两个关系的证明方式完全相同，因此我们只证明第一个。

需要考虑两种情形：

- 情形 1： $V \neq A$

  在该情形下， $a.m = 0$ 因此 $f_*(t.m) = 0$，并且由 $f$ 的单射性亦有 $f(V) \neq f(A)$，因此

$$f_0(t).f_*(m) = 0 = f_*(t.m)$$

- 情况 2： $V = A$，则

$$\begin{aligned} f_*(t.m) &= f_n(s_0 \dots s_{n-1}(t) \circ_n m) \\ &= f_n(s_0 \dots s_{n-1}(t)) \circ_n f_n(m) \\ &= s_0 \dots s_{n-1}(f_0(t)) \circ_n f_*(m) \\ &= f_0(t).f_*(m) \end{aligned}$$

*3*）的证明直接源于以下事实：$(gf)_* = g_* f_*$。 □

**命题 17.** 设 $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ 是单纯富集函子，且 $n \in \mathbb{N}$。那么对于每个 $a$、$b \in X$，下图均交换：

$$\begin{array}{ccc} C_{n+1,a\to b}\left(R,\mathcal{S},R'\right) & \xrightarrow{f_*} & C_{n+1,f(a)\to f(b)}\left(R,\mathcal{T},R'\right) \\ \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ C_{n,a\to b}\left(R,\mathcal{S},R'\right) & \xrightarrow[f_*]{} & C_{n,f(a)\to f(b)}\left(R,\mathcal{T},R'\right) \end{array}$$

证明。这与标准奇异同调中的同样直接的计算如出一辙。 □

**推论 18.** 1. 若 $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ 是单纯富集函子，则对于每个 $n \in \mathbb{N}$，$f_*$ 诱导一个 $R$-$R'$- 双模同态

$$\vec{H}_n(R,f,R') : \vec{H}_n(R,\mathcal{S},R') \to \vec{H}_n(R,\mathcal{T},R')$$

$\vec{}$在没有歧义时，我们将简单地用 $H_n(f)$ 表示它

2. 如果 $f$ 在对象上单射，那么对于任意 $a \in R(\mathcal{S})$、$b \in R'(\mathcal{T})$ 和 $u \in G_n(R,\mathcal{S},R')$：

$$\vec{H}_n(f)(a.u.b) = f_R(a).\vec{H}_n(f)(u).f_{\mathcal{S}}(b)$$

**推论 19**。同调在单纯富集范畴的同构意义下保持不变，即同构的单纯富集范畴会产生同调双模，而这些双模在以左侧 $R$-代数和右侧 $R'$-代数为对象的双模范畴中同构。

这由同构是单射函数这一事实推出，因此同构会在同调中诱导函子性同态。

## 6.5. $(\infty,1)$-范畴的相对同调

本小节推广了有向拓扑中针对有限前立方集的一个早期构造Goubault (2024a)。

概述 奇异同调的一个关键方面是，空间 $X$ 的链复形 $C_n(X)$可以对其子空间 $A$ 的链复形 $C_n(A)$ 取商，且这一操作发生在阿贝尔范畴 ${}_R\mathrm{UMod}$中。然后是边界算子

$$\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

诱导出一个边界算子

$$\partial : C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$$

这给出了 ${}_R\mathrm{UMod}$ 上链复形的一个短正合序列。根据同调代数中的一个标准结果，该链复形短正合序列会诱导出一个长正合序列，将每个复形的同调群联系起来。

如果能在我们的情形中得到类似结果，将 $(\infty,1)$-范畴的同调与子-$(\infty,1)$-范畴的同调联系起来，那将非常理想。然而，由于变动代数上的双模范畴不是阿贝尔范畴，我们必须谨慎行事。

### *6.5.1.* 单纯富化子范畴的正合序列

取 $\mathcal{S}$ 一个单纯形富集范畴，并取 $\mathcal{S}$ 的一个单纯形富集子范畴 $\mathcal{T}$。

设 $n \in \mathbb{N}$。于是 $(\mathcal{T}(A,B))_n \subset (\mathcal{S}(A,B))_n$，因此 $C_n(R,\mathcal{T},R')$ 可视为 $C_n(R,\mathcal{S},R')$ 的一个子 $R$-$R'$-双模。

**定义 21.** 1. 扩展 $\mathcal{T}$-链的双模是 $C_n(R,S,R')$ 的子 $R[S]$-$R'[S]$-双模，由 $C_n(R,\mathcal{T},R')$ 生成（或者等价地，由 $\mathcal{T}$ 的 $n$- 单纯形生成）。记作：

$$C_n^S(R,\mathcal{T},R')$$

2. 该 $\mathcal{T}$-相对 $S$-链的双模是

$$C_n(R,S/\mathcal{T},R') := C_n(R,S,R')/C_n^S(R,\mathcal{T},R')$$

**命题20.** 在 $s$-幺 $R[S]-R'[S]$-双模的阿贝尔范畴中，存在链复形的短正合序列：

$$0 \longrightarrow C_*^S(R,\mathcal{T},R') \xrightarrow{j} C_*(R,S,R') \xrightarrow{p} C_*(R,S/\mathcal{T},R') \longrightarrow 0$$

证明. 由于 $S$ 的边界算子是 $R[S]$-$R'[S]$-双模态射，它将由$C_n(R,\mathcal{T},R')$生成的双模映入由

$$\partial\left(C_n(R,\mathcal{T},R')\right) \subset C_{n-1}(R,\mathcal{T},R')$$

thus

$$\partial\left(C_n^S(R,\mathcal{T},R')\right) \subset C_{n-1}^S(R,\mathcal{T},R')$$

并且 $\partial$ 在 $\left(C_n^S(R,\mathcal{T},R')\right)_{n\in\mathbb{N}}$ 上诱导一个边界算子。由此得到链复形 $C_*^S(R,\mathcal{T},R')$，且包含映射 $j_n:\ C_n^S(R,\mathcal{T},R') \to C_n(R,S,R')$ 按定义是链复形的单态射。

此外，这一事实

$$\partial\left(C_n^S(R,\mathcal{T},R')\right) \subset C_{n-1}^S(R,\mathcal{T},R')$$

也意味着 $S$ 上的边界算子诱导出一个边界算子：

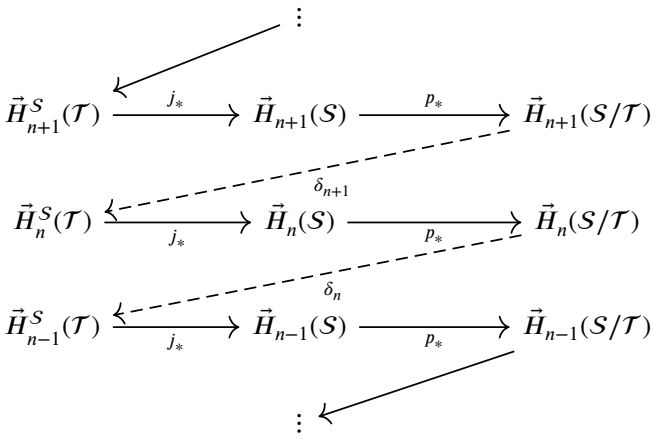
$$\partial : C_n(R,S/\mathcal{T},R') \to C_{n-1}(R,S/\mathcal{T},R')$$

它定义了链复形 $C_*(R,S/\mathcal{T},R')$，而 $p:\ C_*(R,S,R') \to C_*(R,S/\mathcal{T},R')$作为典范投影，按定义是一个链复形满态射，其核确实是单态射 $j=(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$的像。 □

**定义22。** • 链复形 $C_*(R,S/\mathcal{T},R')$ 的同调称为 $S$ 的同调 相对于 $\mathcal{T}$，记作 $\vec{H}(R,S/\mathcal{T},R')$。

• 链复形 $C_*^S(R,\mathcal{T},R')$ 的同调称为 $\mathcal{T}$的同调 在中的扩张，记作$\vec{H}^S(R,\mathcal{T},R')$。

根据之字形引理，链复形的短正合序列给出了 $s$-幺半双模阿贝尔范畴中的同调对象长正合序列：



因此，可以根据在 $S$ 中扩张的 $\mathcal{T}$ 的同调，以及相对于 $\mathcal{T}$ 的 $S$ 的同调，计算 $S$ 的同调。

### *6.5.2.* 使用标量扩张函子的表述

我们希望能找到一种系统的方法，根据 $C_*(R,\mathcal{T},R')$ 和 $R[S]$计算链复形 $C_*^S(R,\mathcal{T},R')$，或至少计算其同调双模。通过用标量扩张来描述 $C_n^S(R,\mathcal{T},R')$，可以部分回答这个问题。

设 $R$ 和 $R'$ 为交换环， $n$ 为一个整数。设 $S$ 为一个单纯形富集范畴， $\mathcal{T}$为 $S$的一个单纯形富集子范畴。

那么，典范单射函子 $\mathcal{T}\to S$ 诱导出一个单纯富集范畴之间的典范函子 $\mathcal{T}\to S$。作为单射二映射，包含映射 $\mathcal{T}\to S$ 诱导出自然的代数单射 $R[\mathcal{T}]\to R[S]$ 和 $R'[\mathcal{T}]\to R'[S]$。随后，沿这些代数单射进行标量扩张，得到一个 $s$-幺 $R[S]$-$R'[S]$-双模：

$$R[S]\otimes_{R[\mathcal{T}]} C_n(R,\mathcal{T},R')\otimes_{R'[\mathcal{T}]} R'[S]$$

由于 $f: R[S]\times C_n(R,\mathcal{T},R')\times R'[S]\to C_n(R,S,R')$ 是 $\mathbb{Z}$-三线性的，并且在每一侧都是平衡的，因此它可通过张量积因子化为一个映射：

$$\iota_n:\begin{cases} R[S]\otimes_{R[\mathcal{T}]} C_n(R,\mathcal{T},R')\otimes_{R'[\mathcal{T}]} R'[S] & \to C_n(R,S,R') \\ x\otimes m\otimes y & \mapsto x.m.y \end{cases}$$

**定义23**。 我们将 $\iota_n$ 称为传递映射。

传递映射始终是一个 $R[S]$-$R'[S]$-双模态射，但不一定是单射。它之所以有用，是因为具有以下显然的性质：

**命题21**。 传递映射的像恰好是 $C_n^S(R,\mathcal{T},R')$。

现在，复形 $C_*(\mathcal{T})$ 的边界算子 $\partial_*$ 诱导出算子

$$\mathrm{Id}_{R[S]}\otimes\partial_n\otimes\mathrm{Id}_{R'[S]}: R[S]\otimes C_n(\mathcal{T})\otimes R'[S]\to R[S]\otimes C_{n-1}(\mathcal{T})\otimes R'[S]$$

它们定义了一个链复形

$$\left(R[S]\otimes C_*(\mathcal{T})\otimes R'[S],\ \mathrm{Id}_{R[S]}\otimes\partial_*\otimes\mathrm{Id}_{R'[S]}\right)$$

由于传递映射是 $R[S]-R'[S]$-双模的态射，因此通过标量限制，它也是 $R[\mathcal{T}]-R'[\mathcal{T}]$-双模的态射，从而诱导出链复形的态射：

$$\iota: R[S]\otimes C_*(\mathcal{T})\otimes R'[S]\to C_*^S(\mathcal{T})$$

**命题 22.** 传递映射诱导出 $s$-幺 $R[S]-R'[S]$-双模链复形的短正合序列

$$R[S]\otimes C_*(\mathcal{T})\otimes R'[S]\xrightarrow{\iota} C_*^S(\mathcal{T})\longrightarrow 0$$

因此，存在一个链复形的长正合序列：

$$0\longrightarrow \mathrm{Ker}(\iota)\longrightarrow R[S]\otimes C_*(\mathcal{T})\otimes R'[S]$$

$$C_*^S(\mathcal{T})\xrightarrow{\iota} C_*(R,S,R')\longrightarrow C_*(R,S/\mathcal{T},R')\longrightarrow 0$$

我们将在下一节证明，对于有向空间， $\mathrm{Ker}(\iota)=0$ 的情形具有良好的几何解释。在这个值得关注的情形中，长正合序列完全塌缩，从而为我们提供了一种根据 $\mathcal{T}$的同调具体计算 $S$ 的同调的方法。这使我们能够降低问题的复杂性。

然而，在更一般的情形下，能否通过谱序列使用这一序列进行计算，仍是一个悬而未决的问题（假设对于所选的 $S$ 和 $\mathcal{T}$， $\mathrm{Ker}(\iota)$ 已得到充分理解）。

## 7. 应用：有向空间的有向同调

我们将采用上一节的构造，并将其应用于 d-空间理论。这样做的动机是推广关于前立方空间的同调结果 Goubault (2024a)，这些空间是有向空间的一种自然组合模型。

### 7.1. 有向空间

具有时间方向的空间有多种概念，其中有一种尤为突出：它具有特别的普适性，非常适合用于同调，即有向空间（例如参见 Fajstrup 等人 （2016）；Grandis（2009）可参见本节中所有定义），本节将对其作简要介绍。

**定义24** （有向空间，Grandis （2009））。一个有向空间是一个二元组 $X = (X, dX)$ 其中 $X$ 是一个拓扑空间，且 $dX$ 是 $X$中的一组连续路径，称为该空间的有向路径，满足以下条件：

（$i$）每条常值路径都是有向路径；（$ii$）对有向路径作任意递增重参数化，所得仍是有向路径。也就是说，对任意有向路径 $\gamma \in dX$ 以及任意连续递增函数 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$，都有 $\gamma \circ \varphi \in dX$；（$iii$）对任意有向路径 $\gamma$ 和 $\delta$，若 $\gamma(1) = \delta(0)$，则 $\gamma$ 与 $\delta$ 的拼接 $\gamma \cdot \delta$ 是一条有向路径

有向空间的一个简单例子是闭区间 $[0,1]$，其定向路径为递增函数 $[0,1] \to [0,1]$。这个空间就是**有向单位区间**。

有向空间的态射定义如下。

**定义25**。设 $X = (X, dX)$ 和 $Y = (Y, dY)$ 是两个有向空间。连续函数 $f : X \to Y$称为有向映射，或称***dimap***，当且仅当：

$$\forall \gamma \in dX, \quad f \circ \gamma \in dY$$

从有向单位区间到有向空间 $X$ 的 dimap 称为**有向路径**。$X$ 的有向路径恰好就是它的定向路径。

有向空间与 dimap（以及函数的复合）构成有向空间范畴。该范畴中的同构称为**有向同胚**。

在给定的有向空间中，从一点到另一点的路径集合赋予紧开拓扑。

**定义 26.** 设 $X = (X, dX)$ 是一个有向空间，且 $x, y \in X$。
所有满足条件的有向路径的集合 $\gamma \in dX$

$$\gamma(0) = x \; and \; \gamma(1) = y$$

以及 紧开拓扑称为从 $x$ 到 $y$ 的路径空间，记作 $\mathbf{P}(\vec{\mathbf{X}})^{\mathbf{y}}_{\mathbf{x}}$

给定一个有向空间，其点表示程序的状态，有向路径表示所有可能的状态转换序列，那么执行迹应当理解为路径 在递增双射重参数化下 Grandis (2009意义上的迹，即状态转换的速度并不重要。

关系 $\sim$ “在递增双射重参数化下相同”定义为：$\gamma \sim \delta$ 当且仅当存在一个连续递增双射函数

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

使得

$$\delta = \gamma \circ f$$

确实是一种等价关系。

**定义 27**。给定一个有向空间 $X = (X, dX)$，从 $x \in X$ 到 $y \in X$ 的迹 是从 $x$ 到 $y$ 的路径关于此处记作 $\sim$的等价关系所形成的等价类。若 $\gamma$ 是有向路径，我们将对应的迹记作 $[\gamma]$。

现在注意，若 $\gamma$ 和 $\delta$ 是满足 $\gamma(1) = \delta(0)$的有向路径，且 $f$， $g : [0,1] \to [0,1]$ 是连续、双射且递增的函数，则：

1. $\gamma \circ f(1) = \delta \circ g(0)$2.

$(\gamma \circ f) \cdot (\delta \circ g) = (\gamma \cdot \delta) \circ (f \cdot g)$

这使我们能够在迹上定义拼接，从而产生一个范畴。

**定义 28** (迹范畴 Fajstrup 等人 (2016))。 设 $X = (X, dX)$ 是一个有向空间。其迹范畴是这样一个范畴：对象为 $X$中的点，态射从 $x$ 到 $y$ 的态射是从 $x$ 到 $y$的迹，复合由轨迹拼接给出。

## 7.2. 有向空间的同调

在本节中，为完整起见，我们回顾 Goubault (2024b) 第6节的构造。我们回顾如下内容：维数为 $n$ 的标准单形是

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \mid \forall i \in \{0, \dots, n\},\ t_i \geq 0 \text{ and } \sum_{j=0}^{n} t_j = 1 \right\}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$、 $n \geq 1$ 和 $0 \leq k \leq n$，拓扑 $n$-单形的第 $k$ 个（$n-1$）面（包含）是由包含映射诱导的子空间包含

$$\delta_k : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$$

由包含映射诱导

$$(t_0, \dots, t_{n-1}) \to (t_0, \dots, t_{k-1}, 0, t_k, \dots, t_{n-1})$$

对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 \leq k < n$，第 $k$ 个退化 $n$-单形是由满射诱导的满射

$$\sigma_k : \Delta_n \to \Delta_{n-1}$$

由满射诱导：

$$(t_0, \dots, t_n) \to (t_0, \dots, t_k + t_{k+1}, \dots, t_n)$$

仍如 Goubault （2024b）所述，我们将 $p$ 称为 $i$-迹， $i \geq 1$，或称维数为 $i$ 的 $X$连续映射

$$p : \Delta_{i-1} \to Tr(X)$$

满足以下条件：

- $p(t_0, \dots, t_{i-1})(0)$ 不依赖于 $t_0$， …， $t_{i-1}$，我们将其记为 $^s p$ （“ $p$的起点”）
- 并且 $p(t_0, \dots, t_{i-1})(1)$ 也为常数，记作 $^t p$ （“ $p$的终点”）

我们用 $T_i(X)$ 表示 $X$中 $i$-迹的集合。我们用 $T_i(X)(a,b)$, $a, b \in X$ 表示 $T_i(X)$ 的子集，其中包含从 $a$到 $b$的 $i$-迹。

简言之， $X$ 的一个 $i$-迹是 $X$的迹空间中的一个特定 $(i-1)$-单形，我们可以像往常一样为其定义边界映射和退化映射：

- 映射 $d_j, j = 0$， …， $i$ 作用于 $(i+1)$-路径 $p : \Delta_i \to Tr(X), i \geq 1$:

$$d_j(p) = p \circ \delta_j$$

- 映射 $s_k, k = 0$， …， $i-1$ 作用于 $i$-路径 $p : \Delta_{i-1} \to Tr(X), i \geq 1$:

$$s_k(p) = p \circ \sigma_k$$

这使得 $\mathcal{K}_{\vec{X}}(a,b) = ((T_i(X)(a,b))_{i \geq 0}, d_j, s_k)$ (对于某个 $a$， $b$ 在 $X$）， 并且 $\mathcal{K}_{\vec{X}} = ((T_i(X))_{i \geq 0}, d_j, s_k)$ 单纯集合，如 Goubault (2024b）所示。

现在，我们可以定义 $i$-迹 $p$ 与 $j$-迹 $q$的复合 $q \circ p$， 它源自迹 $*$上的拼接运算： $q \circ p$ 是一个带有 $q \circ p(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{i+j-1}) = p(t_0, \dots, t_{i-1}) * q(t_i, \dots, t_{i+j-1})$的 $(i+j)$-迹。

**定理 23**。 通过上述构造， $\mathcal{K}_{\vec{X}}(x, y)$ 是一个单纯富集范畴。

证明。 单形的复合具有结合性，因为已知轨迹的拼接具有结合性（即路径的拼接，模去重新参数化）。

□

**备注 15**。 这个单纯形富集范畴是纤维化的，其证明与无向拓扑中奇异单纯复形的证明基本相同。

**定义 29**。 对于两个交换幺环 $R$ 和 $R'$，有向空间 $\vec{X}$ 的同调定义为

$$\vec{H}_n(R, \vec{X}, R') := \vec{H}_n(R, \mathcal{K}_{\vec{X}}, R')$$

**备注 16**。 在带框双范畴的语境中也考虑过类似的构造，参见 *Albert、Dubut 和 Goubault (已投稿，2026年)*。

## 7.3. 良好子空间的相对同调

Let $\vec{X} = (X, dX)$ 是一个有向空间。

→ →**定义 30.** $X$ 的一个子空间 是一个有向空间 $A = (A, dA)$，满足

1. $A \subset B$2.
$dA \subset dB$

这个子空间定义与有向空间中子对象的范畴论概念相一致。

→ →给定 $X$ 的一个子空间 $A$， $\mathcal{K}_{\vec{A}}$ 是 $\mathcal{K}_{\vec{X}}$ 的一个单纯富化子范畴，我们可以尝试理解上一节所述的相对同调长正合序列。我们将研究一种特殊情况，其中 $A$ 相对于 $X$ 的同调 → →可以通过传递映射显式表示。

→定义 *31. </style>*设 $A$ 是一个有向空间的子空间。

- $\vec{A}$ 称为满 的，如果对于任意定向路径 $\gamma \in dX$，都有 $\gamma([0,1]) \in A, \gamma \in dA$
- $\vec{A}$ 称为分离的，如果对于任意定向路径 $\gamma \in dX$， $\gamma^{-1}(A)$ 是连通的，因而是 $[0,1]$ 的一个区间（可以是空区间）。

→分离性意味着，任何位于 $X$ 中的定向路径进入和离开 $A$ 至多一次。这一性质已被 Goubault (2024a) 用于在前立方集的有向同调情形下得到相对同调正合序列；我们在这里也沿用同样的思路来寻找这类同调正合序列。

→ →**定义 32**。 我们称一对有向空间 $(A, X)$ 为相对对， 当

→ →1.
$A = (A, dA)$ 是 $X = (X, dX)$→ 的满子空间2. $A$
是分离的3. $A$ 在 $X$ 中是闭的

.

## 7.4. 链的典范单射

接下来我们将证明，对于一个相对对，定义 4.3 中的传递映射从

→上的链复形进行标量扩张后， $A$ (从 $R[\mathcal{K}_{\vec{A}}]$-双模到 $R[\mathcal{K}_{\vec{X}}]$-双模)得到 $X$ 上的链复形，确实是一个单射函数。为此，我们需要引入约化形式的概念。

类似于 Goubault (2024a)，作者使用了双模链复形中元素的典范形式这一概念，以便理解某些前立方集合的相对（有向）同调，我们在下文针对有向空间的情形定义约化形式：

**定义 33**（约化形式）。 $C_n(\mathcal{K}_{\vec{A}})$ 从 $R[\mathcal{K}_{\vec{A}}]$-双模到 $R[\mathcal{K}_{\vec{X}}]$-双模的标量扩张中的一个元素：

$$\sum_{i\in I} a_i \otimes m_i \otimes b_i \ \in \ R[\mathcal{K}_{\vec{X}}] \otimes C_n(\mathcal{K}_{\vec{A}}) \otimes R'[\mathcal{K}_{\vec{X}}]$$

称为约化形式，如果

1. 对于每个 $i \in I$、 $a_i = \lambda_i u_i$ ，其中 $\lambda_i \in R$ ，且 $u_i$ 是一个迹，不能在右侧被 $A$ 的非常值迹分解，即如果 $u_i = tt'$ ，其中 $t'$ 是 $A$ 中的一个迹，那么 $t'$ 是一个常值迹2. 对于每个 $i \in I$、 $b_i = \mu_i v_i$ ，其中 $\mu_i \in R'$ ，且 $v_i$ 是一个迹，不能在左侧被 $A$ 的非常值迹分解，即如果 $v_i = t't$ ，其中 $t'$ 是 $A$ 中的一个迹，那么 $t'$ 是一个常值迹3. 对于每个 $i \in I$、 $m_i$ 是迹空间中的一个 $n$-单形，其中该迹空间属于 $A$

约化形式将帮助我们更好地理解相对对的传递映射的核。

**命题 24**。 如果 $(A, X)$ 是一个相对对，那么每个元素都有约化形式。

证明。 $R[\mathcal{K}_{\vec{X}}] \otimes C_n(\mathcal{K}_{\vec{A}}) \otimes R'[\mathcal{K}_{\vec{X}}]$ 中的每个元素都是初等张量的线性组合，因此我们只需证明初等张量的分解。

由 $(u, x, v) \mapsto u \otimes x \otimes v$的三线性，我们可以将问题归结为求出 $t \otimes m \otimes t'$ 的一个约化形式，其中$m$ 是 $\vec{A}$ 的一个迹单形，而 $t$、 $t'$ 是 $\vec{X}$ 中的迹，且满足 $t \otimes m \otimes t' \neq 0$。

取一条与迹 $t = [\gamma]$相关联的路径 $\gamma \in dX$ 。那么 $\gamma^{-1}(A)$是一个闭区间。

此外， $t \otimes m \otimes t' \neq 0$ ，因此 $t.m.t' \neq 0$。事实上，如果 $t.m.t'$ 为空，那么我们必有 $t.m = 0$ 或 $m.t' = 0$。例如，考虑第一种情况：记 $c$ 为 $m$的起始端点处的常值迹，则有$t.c = 0$，因此：

$$t \otimes m \otimes t' = t \otimes c.m \otimes t' = t.c \otimes m \otimes t' = 0$$

这显然荒谬。

因此， $\gamma(1) = m(\cdot)(0) \in A$。由于 $\gamma^{-1}(A)$ 是闭的，且根据 $A$的闭性， $\gamma^{-1}(A)$中 1 的连通分支是一个紧区间，我们将其最小点记为 $s_0$。在 $s_0$ 处拆分 $\gamma$ ，得到两个新的迹 $t_1$， $t_2$ ，使得：

- $t = t_1 t_2$
- $t_2$ 是 $A$ 中的一个迹（因为 $\vec{A}$是闭的）
- $t_1$ 不能在右侧被 $A$的非常值迹分解

同理，我们可以写成 $t' = t'_1 t'_2$，其中 $t'_2$ 不能在 $\vec{A}$ 中从左侧分解，且 $t'_1 \in dA$。于是：

$$t \otimes m \otimes t' = (t_1 t_2) \otimes m \otimes (t'_1 t'_2) = t_1 \otimes (t_2.m.t'_1) \otimes t'_2$$

□

现在，我们将证明约化形式的唯一性，先考虑约化形式的初等张量，然后再推广这一结果。

**引理 25.** 如果 $a \otimes m \otimes b$ 和 $a' \otimes m' \otimes b'$ 是 $R[\mathcal{K}_{\vec{X}}] \otimes C_n(\mathcal{K}_{\vec{A}}) \otimes R'[\mathcal{K}_{\vec{X}}]$中的约化形式，那么：

$$a.m.b = a'.m'.b' \text{ if and only if } \begin{cases} a = a' \\ m = m' \\ b = b' \end{cases}$$

证明. 对于每个 $s \in \Delta_n$，都存在表示 $m(s)$的 $\sigma(s)$，以及两条有向路径 $\gamma, \delta$，使得 $a.m.b(s)$ 由 $(\gamma \cdot \sigma(s)) \cdot \delta$表示，其中 $[\gamma] = a$ 且 $[\delta] = b$。

同样地，也存在一条路径 $\sigma'(s)$ 表示 $m'(s)$，以及两条有向路径 $\gamma'$，$\delta'$，使得 $a'.m'.b'(s)$ 由 $(\gamma' \cdot \sigma'(s)) \cdot \delta'$表示，其中 $[\gamma'] = a$ 且 $[\delta'] = b$。

由于 $a.m.b(s) = a'.m'.b'(s)$，存在一个连续递增的双射函数

$$f_s : [0,1] \to [0,1]$$

使得

$$(\gamma \cdot \sigma(s)) \cdot \delta = \left((\gamma' \cdot \sigma'(s)) \cdot \delta'\right) \circ f_s$$

然而，与约化形式存在性的证明中一样，

$$\begin{aligned}\inf\{t \mid \delta(t) \in A\} = \frac{1}{2} &= \inf\left\{t \,\middle|\, \left((\gamma' \cdot \sigma'(s)) \cdot \delta'\right) \circ f_s \in A\right\} \\ &= f_s^{-1}\left(\inf\left\{t \,\middle|\, \left((\gamma' \cdot \sigma'(s)) \cdot \delta'\right) \in A\right\}\right) \\ &= f_s^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

因此我们必有 $f_s(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$，于是 $f_s$诱导出一个从 $\delta'$到 $\delta$的双射重参数化，这就证明了$b = b'$。

同样的推理可得 $a = a'$，并且 $f_s$在$[f_s^{-1}(\frac{1}{4}), f_s^{-1}(\frac{1}{2})]$上的限制将 $\sigma'(s)$映射到 $\sigma(s)$，因此$m(s) = m'(s)$对所有 $s \in \Delta_n$ 都成立，从而得到 $m = m'$。 □

**注 17.** 对于前立方集合的情形，只有 $n = 0$ 需要对相对对施加条件，因为 $n$-链的双模是自由的，这一点由 $n \geq 1$ *Goubault (2024a*证明。这个思路可以推广到我们的情形。

注意，只有当迹空间中的单形可能是常值时，$A$ 在 $X$ 中的分离性才是必要的。因此，在 $n \geq 1$ 的情况下，对我们的链复形进行正规化（即商去退化单形）可以大幅放宽假设，因为只有第一同调双模需要特殊处理。

更确切地说，我们认为，对于 $n \geq 1$，$R[\mathcal{K}_{\vec{X}}] \otimes C_n(\mathcal{K}_{\vec{A}}) \otimes R'[\mathcal{K}_{\vec{X}}]$ 是以下各项的直和

1. 由非常值迹生成的双模，它是自由的。
2. 由常值迹生成的双模，在上述假设下很可能是投射的；在取同调之前对奇异链进行归一化，可以将其消去。

**命题26**。 如果 $(A, X)$ 是一个相对对，那么传递映射是单射。

证明。 令 $m \in \ker \iota$。可以将 $m$ 写成如下形式的有限和：

$$\sum_{i \in I} (\lambda_i t_i) \otimes m_i \otimes (\mu_i t_i')$$

其中 $m_i$ 是 $\vec{A}$ 的一个迹单形，$t$，$t'$ 是 $\vec{X}$ 中的迹，并且

$$\iota(m) = \sum_{i \in I} (\lambda_i.t_i).m_i.(\mu_i.t_i') = 0$$

这个最后的等式发生在 $C_n(\mathcal{K}_{\vec{X}})$ 中；它是迹空间的单形上的自由 $R$-$R'$-双模，因此，这个等式等价于其在 $X$ 的迹空间所有单形上的投影的合取。因此，取某个 $i_0 \in I$ 并考虑

$$J = \left\{ i \in I \mid t_i.m_i.t_i' = t_{i_0}.m_{i_0}.t_{i_0}' \right\}$$

Then

$$\sum_{j \in J} \lambda_j.(t_j.m_j.t_j').\mu_j = 0$$

但接着，对于每个 $j \in J$， $t_j \otimes m_j \otimes t'_j$ 都有一个约化形式 $a_j \otimes n_j \otimes b_j$，并且

$$a_j.n_j.b_j = t_j.m_j.t'_j = t_{i_0}.m_{i_0}.t'_{i_0} = a_{i_0}.n_{i_0}.b_{i_0}$$

因此，根据前述引理，

$$a_j = a_{i_0}$$
$$n_j = n_{i_0}$$
$$b_j = b_{i_0}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}(\lambda_j.t_j)\otimes m_j\otimes(\mu_j t'_j) &= \sum_{j\in J}\lambda_j.(t_j\otimes m_j\otimes t'_j).\mu_j\\ &= \sum_{j\in J}\lambda_j.(a_j\otimes n_j\otimes b_j).\mu_j\\ &= \sum_{j\in J}\lambda_j.(a_{i_0}\otimes n_{i_0}\otimes b_{i_0}).\mu_j\end{aligned}$$

那么，由于 $C_n(\mathcal{K}_{\vec{X}})$ 是以迹单形为基的自由 $R$-$R'$-双模，子 $R$-$R'$-双模 $R.(a_{i_0}.n_{i_0}.b_{i_0}).R'$ 是以 $(a_{i_0}.n_{i_0}.b_{i_0})$ 为基的自由 $R$-$R'$-双模。因此，存在唯一的 $R$-$R'$-双模态射

$$f : R.(a_{i_0}.n_{i_0}.b_{i_0}).R' \to R.(a_{i_0}\otimes n_{i_0}\otimes b_{i_0}).R', \quad a_{i_0}.n_{i_0}.b_{i_0} \mapsto a_{i_0}\otimes n_{i_0}\otimes b_{i_0}$$

然后

$$\sum_{j\in J}\lambda_j.(a_{i_0}\otimes n_{i_0}\otimes b_{i_0}).\mu_j = f\left(\sum_{j\in J}\lambda_j.(a_{i_0}.n_{i_0}.b_{i_0}).\mu_j\right) = f(0) = 0$$

因此，对于任意 $i_0 \in I$，

$$\sum_{j\in I,\, t_j.m_j.t_j = t_{i_0}.m_{i_0}.t'_{i_0}} (\lambda_j.t_j)\otimes m_j\otimes(t'_j.\mu_j) = 0$$

从而 $m = 0$。 □

总之，当 $(A, X)$ 为相对对时，传递映射是 $R[\mathcal{K}_{\vec{X}}]\otimes C_n(\mathcal{K}_{\vec{A}})\otimes R'[\mathcal{K}_{\vec{X}}]$ 与 $C_n^{\mathcal{K}_{\vec{X}}}(R, \mathcal{K}_{\vec{X}}, R')$之间的同构。

因此，我们得到链复形的正合序列：

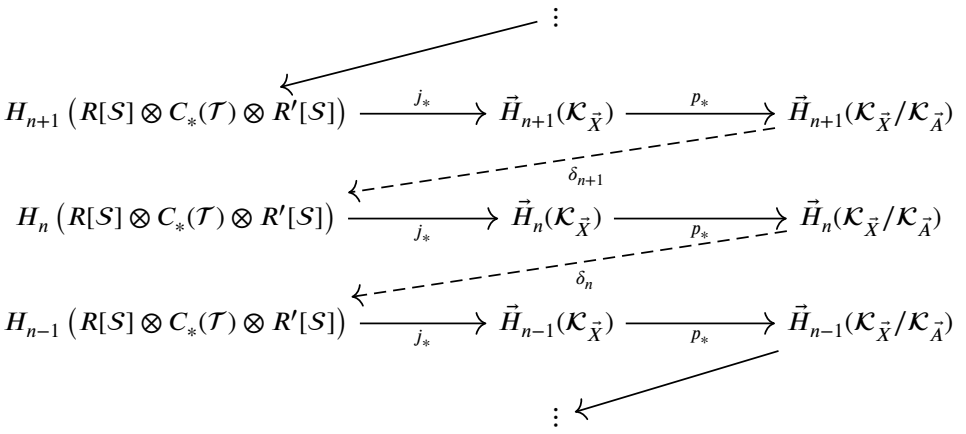
$$0 \longrightarrow R[\mathcal{K}_{\vec{X}}]\otimes C_*(\mathcal{K}_{\vec{A}})\otimes R'[\mathcal{K}_{\vec{X}}] \xrightarrow{\iota} C_*^{\mathcal{K}_{\vec{X}}}(R, \mathcal{K}_{\vec{A}}, R') \longrightarrow 0$$

并且这些链复形是同构的。这使得我们可以简化上一节末尾的正合序列：

**命题27.** 存在链复形的短正合序列：

$$0 \longrightarrow R[S]\otimes C_*(\mathcal{T})\otimes R'[S] \longrightarrow C_*(R, S, R') \longrightarrow C_*(R, S/\mathcal{T}, R') \longrightarrow 0$$

因此，存在一个同调群的长正合序列：



## 作者贡献声明

**EliotMédioni**：概念构思、撰写初稿；**Eric Goubault**：概念构思、审阅与编辑、指导。

## 致谢

作者感谢 Jérémy Dubut、Augustin Albert 和 Sanjeevi Krishnan 在本研究准备期间与他们进行了多次交流。

## 利益冲突与经费声明

作者声明，在准备本研究的过程中不存在需要报告的利益冲突。

本研究未获得公共、商业或非营利部门资助机构提供的任何专项资助。

## 参考文献

Albert, A., Dubut, J., Goubault, E., 已投稿，2026年。《阿贝尔框双范畴中的同调代数》。Assem, I., Skowronski, A., Simson, D., 2006年。《结合代数表示论要素：表示论技巧》。第1卷，伦敦数学学会学生教材。剑桥大学出版社。doi：10.1017/CBO9780511614309。Bubenik, P., de Silva, V., Scott, J.A., 2015年。广义持久模的度量。《计算数学基础》15，1501–1531。网址：https://doi.org/10.1007/s10208-014-9229-5，doi：10.1007/s10208-014-9229-5。Carlsson, G., Zomorodian, A., 2007年。多维持久性理论，载于：第二十三届计算几何年度研讨会论文集，美国计算机协会，美国纽约州纽约市。第184–193页。网址：https://doi.org/10.1145/1247069.1247105，doi：10.1145/1247069.1247105。Dorroh, J.L., 1932。关于代数的伴随。美国数学学会通报38，85–88。Dubut, J., Goubault, E., Goubault-Larrecq, J., 2017年 25, 775 807101007104850169438。有向同调理论与埃伦伯格-斯廷罗德公理。《应用范畴结构》–。doi：./s---y。Fajstrup, L., Goubault, E., Haucourt, E., Mimram, S., Raussen, M., 2016年。《有向代数拓扑与并发》。施普林格。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-319-15398-8，doi：10.1007/978-3-319-15398-8。Freyd, P., 1964年。《阿贝尔范畴：函子理论导论》。Harper国际版，Harper & Row。González-Férez, J., Marín, L., 2007年。坚实模范畴不一定是阿贝尔范畴。《代数杂志》318，377–392。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869307004590，doi：https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.08.007。Goubault, E., 2024a。有向同调与持久模。《应用与计算拓扑杂志》9，3。Goubault, E., 2024b。有向同调的半阿贝尔方法。《应用与计算拓扑杂志》8，271–299。Grandis, M., 2009。《有向代数拓扑：不可逆世界的模型》。新数学专著丛书，剑桥大学出版社。doi：10.1017/CBO9780511657474。Komatsu, H., 1986年。s-幺模范畴。《冈山大学数学杂志》28，65–91。Lurie, J., 2009。《高阶拓扑斯理论》（AM-170）。普林斯顿大学出版社。

Positselski, L., 2023。非幺环上模的张量-同态形式主义。网址：https://arxiv.org/abs/2308.16090，arXiv:2308.16090。
Quillen,D.,未发表手稿,1996年。非幺环上的模理论。Serre, J.P., 1953。群同伦群与阿贝尔群类。《数学年刊》58，258–294。网址：http://www.jstor.org/ stable/1969789。Tominaga,H.,1976。论s-幺环。《冈山大学数学杂志》18。
Zomorodian,A.,Carlsson,G.,2005年。计算持久同调。《离散计算几何》33，249–274。