arXiv:2603.11961v1 [math.AC] 12 Mar 2026

渐近素因子与 Vasconcelos 不变量

DIPANKAR GHOSH、RAMAKRISHNA NANDURI 和 SIDDHARTHA PRAMANIK

ABSTRACT. 设 R 为诺特环， I 为 R的一个理想，且 M 为有限生成的 R-模。本文证明了

$$\operatorname{Ass}_R(M/I^nM) = \operatorname{Ass}_R(0 :_M I) \cup \operatorname{Ass}_R(I^{n-1}M/I^nM) \text{ for all } n \gg 0.$$

随后，当 R 为 $\mathbb{N}$-分次、 I 为齐次且 M 为 $\mathbb{Z}$-分次时，我们研究（局部）Vasconcelos 不变量作为 n的函数的渐近行为。当 I 由正次数元素生成时，我们证明：对于充分大的 n，（局部）Vasconcelos 不变量要么与冒号子模（$0 :_M I$）的不变量一致，要么是 n 的一个次数为一且首项系数为 I的某个生成元的次数的多项式。这种二分性完全取决于由（$0 :_M I$）确定的两种情形。因此，我们重获并大幅加强了 Fiorindo-Ghosh [名古屋数学杂志 258 (2025年), 296–310.], 中的主要结果；在那里，在附加假设（$0 :_M I$） $= 0$下证明了渐近线性。

1. INTRODUCTION

1921 年，埃米·诺特 [18] 提出了主分解理论，深刻影响了交换代数和代数几何的发展。这些领域中的许多基础性结果都离不开这一理论；从这个意义上说，诺特环因此获得了核心地位。然而，从现代视角来看，相伴素理想的概念已被证明比主分解本身更为基础。设 R 是一个（交换）诺特环， I 是 R的一个理想，且 M 是一个有限生成的 R-模。过去几十年来，对于所有充分大的 n ，模M/I^nM 的各种代数不变量的行为一直是广受研究的课题。这一研究受到 Brodmann [4], 一项重要结果的启发：该结果指出，对于所有充分大的 n，相伴素理想集合 $\operatorname{Ass}_R(M/I^nM)$ 不再依赖于 n 。此外，他还证明了，对于所有 $n \gg 0$，$\operatorname{Ass}_R(I^{n-1}M/I^nM)$ 都会稳定下来。更一般地，若 N 是 M的一个子模，则由 Kingsbury-Sharp [14,定理 1.5.(ii)] 的结果可知，对于所有 $n \gg 0$，$\operatorname{Ass}_R(M/I^nN)$ 都会稳定。因此，我们为后续内容固定以下记号。

记号 1.1. 设 $N \subseteq M$ 是有限生成的 R-模。记
$\mathcal{A}_N^M(I) := \operatorname{Ass}_R\left(M/I^nN\right)$且 $\mathcal{B}_M(I) := \operatorname{Ass}_R\left(I^{n-1}M/I^nM\right)$，对所有 $n \gg 0$.Set $\mathcal{A}_M(I) := \mathcal{A}_M^M(I)$。

Date：2026年3月13日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号 13A15；次分类号 13E05、13A05、13A02。*Key words and phrases.* 渐近关联素理想；分次环与模；Vasconcelos 不变量。

一个自然的问题是关于稳定集 $\mathcal{A}_M(I)$ 和$\mathcal{B}_M(I)$ 之间的关系。在 [4, (7)], Brodmann 证明，若 $(0:_M I) = 0$，则 $\mathcal{A}_M(I) = \mathcal{B}_M(I)$，其中 $(0:_M I) := \{x \in M : Ix = 0\}$。在 [17, Cor. 13], McAdam-Eakin 证明，差集 $\mathcal{A}_R(I) \setminus \mathcal{B}_R(I)$ 是 $\mathrm{Ass}_R(R)$ 的子集。对此，我们证明以下结果，它推广了 Brodmann 和 McAdam-Eakin 的上述结果。

定理 1.2（关于更强的结果，见定理 2.2）。设 R 是诺特环，I 是 R 的理想，M 是有限生成的 R-模。则，

$$\mathrm{Ass}_R(M/I^nM) = \mathrm{Ass}_R(0:_M I) \cup \mathrm{Ass}_R(I^{n-1}M/I^nM) \ \textit{for all } n \gg 0.$$

特别地，$\mathcal{A}_M(I) = \mathrm{Ass}_R(0:_M I) \cup \mathcal{B}_M(I)$，参见 记号 1.1。

定理 1.2 是定理 2.2 中所证明的更一般结果的特例；见注 2.3。事实上，在定理 2.2 中，我们证明了

$$\mathrm{Ass}_R(M/I^nN) \cap V(I) = \mathrm{Ass}_R(0:_M I) \cup \mathrm{Ass}_R(I^{n-1}N/I^nN) \quad \text{for all } n \gg 0,$$

其中 $N \subseteq M$ 是一个子模，且 $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : I \subseteq \mathfrak{p}\}$。此外，在命题 2.8 中，我们证明了集合 $\mathrm{Ass}_R(M/I^nN) \setminus V(I)$ 从一开始就稳定，并且这一稳定集合与 $\mathrm{Ass}_R(M/N) \setminus V(I)$ 重合。

注意，$\mathcal{A}_M(I) \setminus \mathcal{B}_M(I) \subseteq \mathrm{Ass}_R(0:_M I)$。此外，定理 1.2 中的并集可能互不相交，也可能相交；分别参见例 4.1 和 4.2。因此，$\mathcal{B}_M(I) \subsetneqq \mathcal{A}_M(I)$也有可能。然而，在分次情形下，我们证明了 M/I^nM和 $I^{n-1}M/I^nM$的某些局部 Vasconcelos 不变量最终会相同。接下来，我们将讨论这一数值不变量。

近年来，Vasconcelos 不变量（也称为 v-数）与相伴素理想这一概念相关，受到当代研究者的广泛关注。该不变量最早出现在 [6], ，当时它被定义为多项式环上域中的齐次理想所对应的不变量，用于研究射影 Reed-Muller 型码的最小距离函数的渐近行为。随后，Fiorindo-Ghosh 给出了以下模论定义。在本引言余下部分，设 R 为一个诺特的 $\mathbb{N}$-分次环，M 为一个有限生成的分次 R-模，而 I 为 R 的一个齐次理想。对于$n \in \mathbb{Z}$，M 的第 n个分次分量记为 M_n。

定义 1.3。 [12, 定义 1。2] 对于 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$，局部瓦斯康塞洛斯不变量（或局部 v-数）在 M 处 $\mathfrak{p}$定义为

$$v_{\mathfrak{p}}(M) := \inf\{n : \mathfrak{p} = (0:_R x) \text{ for some } x \in M_n\}.$$

Vasconcelos 不变量 （或 v-数） M 定义为

$$v(M) := \inf\{v_{\mathfrak{p}}(M) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)\}.$$

按照约定，$v(0) = \infty$。

受 Brodmann [4], Conca 结果的启发， [5, Thm. 1.1]证明，对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_R(I)$，函数 $v_{\mathfrak{p}}(R/I^n)$ 关于 n 是渐近线性的，即对所有 $n \gg 0$，都有 $v_{\mathfrak{p}}(R/I^n) = a_{\mathfrak{p}}n + b_{\mathfrak{p}}$，其中首项系数 $a_{\mathfrak{p}}$ 等于 I的某个生成元的次数，并且 $b_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$，前提是 R 是一个整环。Ficarra-Sgroi 也独立地在 [9, Thm. 3.1] 中证明了同一结果，其中 R 是域上的多项式环。Fiorindo-Ghosh 进一步加强了 Conca 和 Ficarra-Sgroi 的结果，证明在假设 $(0:_M I) = 0$的条件下，$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM)$ 关于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_M(I)$ 渐近线性；见 [12, Thm. 2.14.(1)]。注意，

当 R 是整环或域上的多项式环时，$(0:_R I) = 0$ 。Fiorindo-Ghosh 结果的进一步推广也可参见[13, 11] 。关于这一不变量的渐近行为，
[3, 20, 10, 2, 15, 8, 19, 1, 16]也针对各种理想滤链进行了研究。 [12, Thm. 2.11] 证明，函数$v(I^{n-1}M/I^nM)$ 和 $v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}M/I^nM)$（对于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_M(I)$）最终总是线性的，其首项系数等于 I的某个生成元的次数。此外，若 $(0:_M I) = 0$，则对于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_M(I)$，函数 $v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}M/I^nM)$ 和$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM)$ 渐近相等；参见 [12, Thm. 2.14.(1)]。考虑到这些结果，以下问题自然地浮现出来。

问题 1.4。设 $(0:_M I) \neq 0$。
(1) 对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_M(I)$，$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM)$ 关于 n 的渐近行为如何？当 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_M(I)$ 时，函数 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM)$ 和 $v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}M/I^nM)$ 最终会相等吗？(2) $v(M/I^nM)$ 的渐近行为如何？对于所有充分大的 n，$v(M/I^nM)$ 是否与 $v(I^{n-1}M/I^nM)$ 相等？

接下来，我们将完整回答 1.4 中提出的所有问题。

定理 1.5 (更强的结果见定理 3.11)。设 R 是一个诺特的$\mathbb{N}$-分次环，M 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 R-模，且 I 是 R 的一个齐次理想。假设 I 由齐次元素 y_1、……、y_c 生成，其次数分别为d_1、……、d_c。那么，以下结论成立：

(1) 设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_M(I) \setminus \operatorname{Ass}_R(0:_M I)$。则，$\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_M(I)$。此外，存在$a_{\mathfrak{p}} \in \{d_1, \ldots, d_c\}$ 和 $b_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ 使得

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM) = v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}M/I^nM) = a_{\mathfrak{p}}n + b_{\mathfrak{p}} \ \ for\ all\ n \gg 0.$$

(2) 设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_M(I) \cap \operatorname{Ass}_R(0:_M I)$。若对 $1 \leqslant i \leqslant c$有 $d_i \geqslant 1$，则

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM) = v_{\mathfrak{p}}(M) = v_{\mathfrak{p}}(0:_M I) \ \ for\ all\ n \gg 0.$$

(3) 设 $(0:_M I) \neq 0$。则，$v(M/I^nM) \leqslant v(0:_M I)$ 对所有 $n \gg 0$均成立。此外，若对 $1 \leqslant i \leqslant c$有 $d_i \geqslant 1$，则

$$v(M/I^nM) = v(0:_M I) \ \ for\ all\ n \gg 0.$$

(4) 设 $(0:_M I) = 0$ 且 $\mathcal{A}_M(I) \neq \emptyset$。则

$$v(M/I^nM) = v(I^{n-1}M/I^nM) \ \ for\ all\ n \gg 0,$$

它关于 n 是渐近线性的，且首项系数属于 $\{d_1, \ldots, d_c\}$。

定理 1.5 不仅处理了 $(0:_M I) \neq 0$ 的情形，也处理了 $(0:_M I) = 0$的情形。因此，在所有可能的情形下都得到了 M/I^nM 的（局部）Vasconcelos 不变量的渐近行为。在定理 1.5 的第 (2) 部分（相应地，第 (3) 部分）中，注意最终有 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM) < v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}M/I^nM)$（相应地，$v(M/I^nM) < v(I^{n-1}M/I^nM)$），而第 (1) 与第 (4) 部分则描述了这些函数最终重合的情形。我们构造了若干例子以补充我们的结果。例 4.1 表明，若不假设 I 由正次数的齐次元素生成，则定理 1.5.(3) 中的等式可能不成立。我们还通过一个例子表明，对于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_M(I)$，函数$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nM)$ 与 $v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}M/I^nM)$ 最终未必重合，参见例 4.2。

定理 1.5 是由定理 3.11 中证明的更一般结果推出的。定理 3.11 研究了 M/I^nN 的（局部）Vasconcelos 不变量的渐近行为

对于分次子模 $N \subseteq M$。每当 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \cap V(I)$ 时，我们通过证明 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 渐近地为常数或关于 n 的一次多项式，完整描述了 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 的渐近行为。此外，我们还将这些函数与 $I^{n-1}N/I^nN$ 的相应函数进行了渐近比较。在某些情况下，这两个函数最终相等，这表明 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 和 $v(M/I^nN)$ 最终仅取决于 I 和 N，而不取决于 M。令人惊讶的是，在其余情况下，$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 和 $v(M/I^nN)$ 最终不再取决于 N。因此，我们重述并大幅加强了 [12] 的主要结果。详情见定理 3.11 和注 3.12。当 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$ 时，我们在命题 3.13 和注 3.14 中对 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 的行为作了一些观察。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们证明定理 2.2。第 3 节中，我们建立若干一般引理和结果，为证明主要定理定理 3.11 做准备。最后，第 4 节中，我们给出具体示例来阐释我们的结果。

致谢。 Pramanik 感谢印度政府通过总理研究奖学金为其攻读博士学位提供的经济资助。

2. Asymptotic prime divisors

在本节中， R 是一个诺特环（不一定是分次环）， I 是 R的一个理想， $N \subseteq M$ 是有限生成的 R-模。本节主要证明定理 2.2 和命题 2.8。我们先给出以下引理。

引理 2.1。 存在 $k \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n \geqslant k$，以下结论成立：(1) 对于 $\mathfrak{p} \in V(I)$，有

$$\{x \in M : \mathfrak{p} = (I^nN :_R x)\} \subseteq (0 :_M I) + I^{n-1}N.$$

(2) $\operatorname{Ass}_R\left(M/I^nN\right) \cap V(I) = \operatorname{Ass}_R\left(\left((0 :_M I) + I^{n-1}N\right)/I^nN\right)$.

证明。 由 [7, 推论 2.1], , 存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得

$$(I^nN :_M I) = (0 :_M I) + I^{n-1}N \text{ for all } n \geqslant k.$$

(1) 设 $n \geqslant k$ 和 $\mathfrak{p} \in V(I)$。若 $x \in M$ 使得 $\mathfrak{p} = (I^nN :_R x)$，则

$$x \in (I^nN :_M \mathfrak{p}) \subseteq (I^nN :_M I) = (0 :_M I) + I^{n-1}N.$$

因此，对所有 $n \geqslant k$，有 $\{x \in M : \mathfrak{p} = (I^nN :_R x)\} \subseteq (0 :_M I) + I^{n-1}N$。

(2) 注意到 $(0 :_M I) + I^{n-1}N$ 是 M的一个子模，并且 $\left((0 :_M I) + I^{n-1}N\right)/I^nN$ 的每个相伴素理想都包含 I。因此

$$\operatorname{Ass}_R\left(\left((0 :_M I) + I^{n-1}N\right)/I^nN\right) \subseteq \operatorname{Ass}_R\left(M/I^nN\right) \cap V(I) \text{ for all } n \geqslant 1.$$

为了证明另一个包含关系，设 $n \geqslant k$ 且 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/I^nN) \cap V(I)$。那么，存在 $x \in M$ 使得 $(I^nN :_R x) = \mathfrak{p}$。现在，由 (1) 得到$x \in (0 :_M I) + I^{n-1}N$。因此，结论成立。□

现在我们陈述并证明本节的主要结果。

定理 2.2. 假设 记号 1.1。那么，

$$\operatorname{Ass}_R(M/I^nN) \cap V(I) = \operatorname{Ass}_R(0 :_M I) \cup \operatorname{Ass}_R(I^{n-1}N/I^nN) \quad \textit{for all } n \gg 0.$$

特别地， $\mathcal{A}_N^M(I) \cap V(I) = \operatorname{Ass}_R(0 :_M I) \cup \mathcal{B}_N(I)$。

证明。由 Artin-Rees 引理（参见 [21, 17.1.6]），我们得到 $(0:_M I)\cap I^nN=0$对所有 $n\gg 0$均成立。因此，对所有 $n\gg 0$,

$$\big((0:_M I)+I^nN\big)/I^nN\cong (0:_M I)/(0:_M I)\cap I^nN=(0:_M I). \tag{2.2.1}$$

对于每个 $n\geqslant 1$，我们有如下短正合列：

$$0\to \frac{I^{n-1}N}{I^nN}\to \frac{(0:_M I)+I^{n-1}N}{I^nN}\to \frac{(0:_M I)+I^{n-1}N}{I^{n-1}N}\to 0. \tag{2.2.2}$$

由 (2.2.1) 和 (2.2.2)，对于所有 $n\gg 0$，我们得到

$$\operatorname{Ass}_R\big(((0:_M I)+I^{n-1}N)/I^nN\big)\subseteq \operatorname{Ass}_R(0:_M I)\cup \operatorname{Ass}_R\big(I^{n-1}N/I^nN\big). \tag{2.2.3}$$

由 (2.2.1)，由于 $(0:_M I)\cong \big((0:_M I)+I^nN\big)/I^nN$ (对于 $n\gg 0$) 和 $I^{n-1}N/I^nN$(对于 $n\geqslant 1$) 都是 $\big((0:_M I)+I^{n-1}N\big)/I^nN$ 的子模，故 (2.2.3) 中的反向包含显然成立。因此，证明由引理 2.1.(2) 得出。□

注记 2.3。对于每个 $n\geqslant 1$，注意 $\operatorname{Ass}_R(M/I^nM)\subseteq V(I)$。因此，取 $N=M$，由定理 2.2 可得定理 1.2。

注意到，对于所有 $n\gg 0$，定理 2.2 蕴含 $\operatorname{Ass}_R(0:_M I)\subseteq \operatorname{Ass}_R(M/I^nN)$。这也可以由下文提到的一个更一般的事实推出。

引理 2.4。从 $(0:_M I)$ 到 M/I^nN 由$x\mapsto x+I^nN$定义的典范同态，对于所有 $n\gg 0$ 都是单射。

证明。设 $M':=(0:_M I)$。那么，由 Artin-Rees 引理，$I^nN\cap M'=0$ 对所有 $n\gg 0$ 均成立。因此，由于从 M' 到M/I^nN的典范同态的核为 $I^nN\cap M'$，引理得证。□

牢记定理 1.5 的假设后，我们现在在下述引理中描述 $\operatorname{Ass}_R(M)$ 中哪些素理想属于 $\operatorname{Ass}_R(0:_M I)$。这个简单的引理在下一节中会反复用到。设 $\Gamma_I(M):=\bigcup_{n\geqslant 1}(0:_M I^n)$。

引理 2.5。$\operatorname{Ass}_R(M)\cap V(I)=\operatorname{Ass}_R(\Gamma_I(M))=\operatorname{Ass}_R(0:_M I^m)$ 对每个 $m\geqslant 1$。

证明。第一个等式是显然的。我们证明第二个等式。固定 $m\geqslant 1$。注意，由于 $(0:_M I^m)\subseteq \Gamma_I(M)$，有 $\operatorname{Ass}_R(0:_M I^m)\subseteq \operatorname{Ass}_R(\Gamma_I(M))$。设 $\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}_R(\Gamma_I(M))$。于是，根据第一个等式，对于某个 $x\in M$ 和 $I\subseteq \mathfrak{p}$，我们得到 $\mathfrak{p}=(0:_R x)$。因此$x\in (0:_M I)\subseteq (0:_M I^m)$。所以，$\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass}_R(0:_M I^m)$。□

作为定理 2.2 的推论，我们得到如下结果。

推论 2.6。假设 记号 1.1。则

$$\operatorname{Ass}_R(I^{n-1}N/I^nN)=\operatorname{Ass}_R\big(M/(\Gamma_I(M)+I^nN)\big)\cap V(I)\quad \text{for all } n\gg 0.$$

特别地，$\mathcal{B}_N(I)=\mathcal{A}_N^M(\overline{I})\cap V(I)$，其中 $\overline{(-)}$ 表示模 $\Gamma_I(M)$。

证明。注意到 $\overline{M}=M/\Gamma_I(M)$ 和 $\overline{I^nN}=(I^nN+\Gamma_I(M))/\Gamma_I(M)$，因此对于所有 $n\geqslant 0$，都有 $\overline{M}/\overline{I^nN}\cong M/(\Gamma_I(M)+I^nN)$。由于 $(0:_{\overline{M}} \overline{I})=0$，由定理 2.2 可得 $\mathcal{A}_{\overline{N}}^{\overline{M}}(\overline{I})\cap V(I)=\mathcal{B}_N(I)$。现在，由 Artin-Rees 引理可知，对于所有 $n\gg 0$，都有 $\Gamma_I(M)\cap I^nN=0$。我们断言，对于所有 $n\gg 0$，映射 $x+I^nN\mapsto x+(I^nN+\Gamma_I(M))$ 从 $I^{n-1}N/I^nN$ 到 $\big(I^{n-1}N+\Gamma_I(M)\big)/\big(I^nN+\Gamma_I(M)\big)$ 是一个同构。只需证明它对于所有 $n\gg 0$ 都是单射。设 $x\in I^{n-1}N$ 满足 $x\in I^nN+\Gamma_I(M)$，则存在某个 $y\in I^nN$ 使得 $x=y+z$，并且

$z \in \Gamma_I(M)$。因此，只要 n 足够大，就有 $x - y = z \in \Gamma_I(M) \cap I^{n-1}N = 0$。于是 $x = y \in I^n N$。因此，对于所有 $n \gg 0$，我们有

$$\frac{I^{n-1}\overline{N}}{I^n\overline{N}} \cong \frac{\left(I^{n-1}N + \Gamma_I(M)\right)}{\left(I^n N + \Gamma_I(M)\right)} \cong \frac{I^{n-1}N}{I^n N},$$

因此 $\operatorname{Ass}_R(I^{n-1}N/\overline{I^n N}) = \operatorname{Ass}_R(I^{n-1}N/I^n N)$。所以 $\mathcal{B}_{\overline{N}}(I) = \mathcal{B}_N(I)$。 □

注记 2.7。 沿用推论 2.6 中的记号，其证明表明

$$\frac{I^{n-1}\overline{N}}{I^n\overline{N}} \cong \frac{I^{n-1}N}{I^n N} \text{ for all } n \gg 0.$$

我们将在定理 3.6 的证明中再次使用这个同构。

下面的结果很有意义，因为它表明 $\operatorname{Ass}_R(M/I^n N)$ 中不包含 I 的素理想从一开始就保持稳定。

命题 2.8。 $\operatorname{Ass}_R(M/I^n N) \setminus V(I) = \operatorname{Ass}_R(M/N) \setminus V(I)$ 对所有 $n \geqslant 0$。

证明。 当 $n = 0$ 时，这个等式显然成立。设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/N) \setminus V(I)$。那么，对某个 $x \in M$，有 $\mathfrak{p} = (N :_R x)$。固定 $n \geqslant 1$，并选取一个元素 $r \in I \setminus \mathfrak{p}$。显然，$\mathfrak{p} \subseteq (I^n N :_R r^n x)$。令 $a \in (I^n N :_R r^n x)$。那么 $r^n x a \in I^n N$，因此

$$r^n a \in (I^n N :_R x) \subseteq (N :_R x) = \mathfrak{p},$$

这意味着 $a \in \mathfrak{p}$。因此，对每个 $n \geqslant 1$，都有 $\mathfrak{p} = (I^n N :_R r^n x)$。于是，

$$\operatorname{Ass}_R(M/N) \setminus V(I) \subseteq \operatorname{Ass}_R(M/I^n N) \setminus V(I) \text{ for every } n \geqslant 1.$$

为证明反向包含，设 $n \geqslant 1$，且 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/I^n N) \setminus V(I)$。考虑短正合列

$$0 \to N/I^n N \to M/I^n N \to M/N \to 0. \tag{2.8.1}$$

由于 $\operatorname{Ass}_R(N/I^n N)$ 中的每个素理想都必须包含 I，因此我们有 $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}_R(N/I^n N)$。于是，由短正合列 (2.8.1) 可得 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/N)$。证明完毕。□

注 2.9。 定理 2.2 和命题 2.8 的结论仍然成立，只要将 R 是诺特的这一假设替换为 M 是诺特的这一条件，因为可以使用与 [14, Thm. 1.6(i)] 证明中相同的思路进行这一约化。

注 2.10。 利用主分解理论，可以观察到 $\mathcal{A}_N^M(I) \subseteq V(I)$ 当且仅当对于某个 $k \geqslant 1$，$I^k M \subseteq N$。

3. Asymptotic Vasconcelos invariant

本节将介绍有关 Vasconcelos 不变量的结果，因此我们在分次情形下进行讨论。本节的主要目标是证明定理 3.11，在 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \cap V(I)$ 的假设下，其中 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^n N)$ 的渐近行为得到了完整描述。在本节末尾，我们将对 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$ 时 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^n N)$ 的行为作一些评论；参见命题 3.13 和注 3.14。我们首先建立一些一般性结果。

对于有限生成分次模的短正合列，我们有以下结果，它比较了这些模的局部 v-数。

命题 3.1. 设 $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ 是诺特的 $\mathbb{N}$-分次环 R 上有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次模的短正合列。
(1) 若 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M')$，则 $v_{\mathfrak{p}}(M) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M')$。因此，$v(M) \leqslant v(M')$。(2) 若 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M) \setminus \operatorname{Ass}_R(M')$，则 $v_{\mathfrak{p}}(M'') \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M)$。
证明。(1) 对于 M' 是 M 的分次子模的情形，这已在 [12, 命题 2.5] 中证明。因此，(1) 中的断言成立。(2) 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M) \setminus \operatorname{Ass}_R(M')$。则对于某个 $x \in M$，有 $\mathfrak{p} = (0 :_R x)$，且 $v_{\mathfrak{p}}(M) = \deg(x)$。注意，对于 $r \in R$，若 $rx \neq 0$，则 $\mathfrak{p} = (0 :_R rx)$。因此，由于 $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}_R(M')$，必有 $\phi(M') \cap Rx = 0$。于是可得 $\mathfrak{p} = (0 :_R \psi(x))$。故，$v_{\mathfrak{p}}(M'') \leqslant \deg(\psi(x)) = \deg(x) = v_{\mathfrak{p}}(M)$。□

由引理 2.5，我们有 $\operatorname{Ass}_R(0 :_M I) = \operatorname{Ass}_R(\Gamma_I(M))$。现在我们证明，模 $(0 :_M I)$ 和 $\Gamma_I(M)$ 实际上具有相同的（局部）Vasconcelos 不变量。

命题 3.2。 设 R 为诺特的 $\mathbb{N}$-分次环，M 为有限生成的$\mathbb{Z}$-分次 R-模，且 I 为 R 的齐次理想。
(1) 若 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$，则 $v_{\mathfrak{p}}(M) = v_{\mathfrak{p}}(\Gamma_I(M)) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I^n)$ 对每个 $n \geqslant 1$。(2) $v(\Gamma_I(M)) = v(0 :_M I^n)$ 对每个 $n \geqslant 1$。(3) 若 $\operatorname{Ass}_R(M) \subseteq V(I)$，则 $v(M) = v(\Gamma_I(M))$。

证明。 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。考虑子模链

$$(0 :_M I) \subseteq (0 :_M I^2) \subseteq (0 :_M I^3) \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_I(M) \subseteq M.$$

因此，由命题 3.1.(1)，我们得到

$$v_{\mathfrak{p}}(M) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(\Gamma_I(M)) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I^{n+1}) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I^n) \quad \text{for each } n \geqslant 1. \tag{3.2.1}$$

注意，$I \subseteq \mathfrak{p}$ 由于 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。因此，若对某个 $x \in M$ 有 $\mathfrak{p} = (0 :_R x)$，则显然有 $x \in (0 :_M I)$。由此可得 $v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M)$。将此不等式与 (3.2.1) 中的诸不等式结合起来，我们得到

$$v_{\mathfrak{p}}(M) = v_{\mathfrak{p}}(\Gamma_I(M)) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I^n) \quad \text{for each } n \geqslant 1.$$

这就证明了 (1)。因此，由引理 2.5，最后两部分随之成立。□

在本节的其余部分，我们将采用如下设定。

设定 3.3. 设 R 是一个诺特的 $\mathbb{N}$-分次环。设 $N \subseteq M$ 是有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 R-模。设 I 是由齐次元素 $y_1, \ldots, y_c$ 生成的 R 的理想，其次数分别为 $d_1, \ldots, d_c$。

根据引理 2.1，对于所有 $n \gg 0$，包含 I 的 M/I^nN 的相伴素理想与 $\left((0 :_M I) + I^{n-1}N\right)/I^nN$ 的相伴素理想一致。接下来，我们证明这两个模具有相同的渐近（局部）Vasconcelos 不变量。

命题 3.4。 在 设定 3.3 和 记号 1.1下，令 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \cap V(I)$。则，

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) = v_{\mathfrak{p}}\left(((0 :_M I) + I^{n-1}N)/I^nN\right) \quad \textit{for all } n \gg 0.$$

证明。 由引理 2.1.(2) 和命题 3.1.(1) 可知，

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) \leqslant v_{\mathfrak{p}}\left(((0 :_M I) + I^{n-1}N)/I^nN\right) \quad \text{for all } n \gg 0.$$

反向不等式由引理 2.1.(1) 得出。□

当 $(0 :_M I) \neq 0$ 时，以下结果保证了 M/I^nN 的（局部）Vasconcelos 不变量有一个常数上界。

命题 3.5。在 设定 3.3下，若 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$，则

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) = v_{\mathfrak{p}}(M) \text{ for all } n \gg 0.$$

因此，$v(M/I^nN) \leqslant v(0 :_M I)$ 对所有 $n \gg 0$ 均成立。

证明。由引理 2.4，模 $(0 :_M I)$ 同构于 M/I^nN的一个子模，对所有 $n \gg 0$ 均成立。于是第一个不等式由命题 3.1.(1) 得出，而等式 $v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) = v_{\mathfrak{p}}(M)$ 则由命题 3.2.(1) 得到。□

接下来，我们证明 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 关于 n 渐近线性

$$\mathfrak{p} \in \left(\mathcal{A}_N^M(I) \cap V(I)\right) \setminus \operatorname{Ass}_R(0 :_M I).$$

这大大加强了 [12], 的主要结果；该结果是在额外假设 $(0 :_M I) = 0$ 下证明渐近线性的；参见 [12, 定理 1.9.(1)]。

定理 3.6。 设有设定 3.3 和记号 1.1，令 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$ 使得 $I \subseteq \mathfrak{p}$。则 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)$。此外，存在 $a_{\mathfrak{p}} \in \{d_1, \ldots, d_c\}$ 和 $b_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$，使得

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) = v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}N/I^nN) = a_{\mathfrak{p}}n + b_{\mathfrak{p}} \text{ for all } n \gg 0.$$

证明。 由于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$ 且 $I \subseteq \mathfrak{p}$，由定理 2.2 与推论 2.6 可知

$$\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I) \subseteq \operatorname{Ass}_R\left(M/(\Gamma_I(M) + I^nN)\right) \text{ for all } n \gg 0.$$

因此，根据 [12, 定理 2.11],，存在 $a_{\mathfrak{p}} \in \{d_1, \ldots, d_c\}$ 与 $b_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ 使得

$$v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}N/I^nN) = a_{\mathfrak{p}}n + b_{\mathfrak{p}} \text{ for all } n \gg 0. \tag{3.6.1}$$

因此，由命题 3.4，若 $(0 :_M I) = 0$，则

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) = v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}N/I^nN) = a_{\mathfrak{p}}n + b_{\mathfrak{p}} \text{ for all } n \gg 0.$$

于是，我们可以假设 $(0 :_M I) \neq 0$。设 $(-)$ 表示模 $\Gamma_I(M)$ 约化。则 $(0 :_M I) = 0$。从而，命题 3.4 给出

$$v_{\mathfrak{p}}\left(M/(\Gamma_I(M) + I^nN)\right) = v_{\mathfrak{p}}\left(\overline{M}/I^n\overline{N}\right) = v_{\mathfrak{p}}\left(I^{n-1}\overline{N}/I^n\overline{N}\right) \text{ for all } n \gg 0. \tag{3.6.2}$$

根据注记 2.7，$\frac{I^{n-1}N}{I^nN} \cong \frac{I^{n-1}N}{I^nN}$ 对所有 $n \gg 0$。因此，由于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)$,

$$v_{\mathfrak{p}}\left(I^{n-1}\overline{N}/I^n\overline{N}\right) = v_{\mathfrak{p}}\left(I^{n-1}N/I^nN\right) \text{ for all } n \gg 0. \tag{3.6.3}$$

由 Artin-Rees 引理，$\Gamma_I(M) \cap I^nN = 0$ 对所有 $n \gg 0$。因此

$$(\Gamma_I(M) + I^nN)/I^nN \cong \Gamma_I(M)/(\Gamma_I(M) \cap I^nN) = \Gamma_I(M) \text{ for all } n \gg 0.$$

因此，由于 $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}_R(0 :_M I) = \operatorname{Ass}(\Gamma_I(M))$（参见引理 2.5），由此可得

$$\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}_R\left((\Gamma_I(M) + I^nN)/I^nN\right) \text{ for all } n \gg 0.$$

现在，对每个 $n \geqslant 1$，考虑短正合列

$$0 \to \frac{\Gamma_I(M) + I^nN}{I^nN} \to \frac{M}{I^nN} \to \frac{M}{\Gamma_I(M) + I^nN} \to 0.$$

根据命题 3.1.(2)，我们得到

$$v_{\mathfrak{p}}\left(M/(\Gamma_I(M) + I^nN)\right) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}N/I^nN) \text{ for all } n \gg 0, \tag{3.6.4}$$

其中，第二个不等式由命题 3.1.(1) 得出。因此，由 (3.6.1)、(3.6.2)、(3.6.3) 和 (3.6.4) 可得我们的断言。□

我们进一步研究 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 关于 n 的渐近行为，其中 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。由于集合 $\operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$ 和 $\mathcal{B}_N(I)$ 不一定互不相交（参见例 4.2），因此有两种情形：$\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)$ 或 $\mathfrak{p} \notin \mathcal{B}_N(I)$。在下面的定理中，我们讨论情形 $\mathfrak{p} \notin \mathcal{B}_N(I)$。

定理 3.7. 取 设定 3.3 和 记号 1.1，令 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus \mathcal{B}_N(I)$。假设$I \subseteq \mathfrak{p}$。那么，

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) = v_{\mathfrak{p}}(M) \ \textit{for all } n \gg 0.$$

证明。 由于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus \mathcal{B}_N(I)$ 且 $I \subseteq \mathfrak{p}$，由定理 2.2 得到 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$，而引理 2.1.(2) 表明

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R\left(\frac{(0 :_M I) + I^{n-1}N}{I^nN}\right) \ \text{for all } n \gg 0.$$

由于 $\mathfrak{p} \notin \mathcal{B}_N(I)$，考虑到短正合列 (2.2.2)，由命题 3.1.(2)，我们得到

$$v_{\mathfrak{p}}\left(\frac{(0 :_M I) + I^{n-1}N}{I^{n-1}N}\right) \leqslant v_{\mathfrak{p}}\left(\frac{(0 :_M I) + I^{n-1}N}{I^nN}\right) \ \text{for all } n \gg 0. \tag{3.7.1}$$

现在，由 Artin-Rees 引理，$(0 :_M I) \cap I^nN = 0$ 对所有 $n \gg 0$ 均成立。因此，

$$\big((0 :_M I) + I^nN\big)/I^nN \cong (0 :_M I)/\big((0 :_M I) \cap I^nN\big) = (0 :_M I) \ \text{for all } n \gg 0.$$

因此，对所有 $n \gg 0$，我们得到

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) &= v_{\mathfrak{p}}\left(\frac{(0 :_M I) + I^{n-1}N}{I^{n-1}N}\right) \\ &\leqslant v_{\mathfrak{p}}\left(\frac{(0 :_M I) + I^{n-1}N}{I^nN}\right) \quad [\text{by (3.7.1)}] \\ &= v_{\mathfrak{p}}\left(M/I^nN\right) \quad [\text{by Proposition 3.4}] \\ &\leqslant v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) \quad [\text{by Proposition 3.5}]. \end{aligned}$$

这就推出第一个等式。第二个等式 $v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) = v_{\mathfrak{p}}(M)$ 由命题 3.2.(1) 得出。□

接下来，我们考虑 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)$ 的情形。对于一个分次模 M，我们记

$$\operatorname{indeg}(M) := \inf\{n \in \mathbb{Z} : M_n \neq 0\},$$

M 的初始次数 为。按惯例，$\operatorname{indeg}(0) = \infty$。

定理 3.8。 在设定 3.3 和记号 1.1下，设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I) \cap \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。假设对 $1 \leqslant i \leqslant c$ 有 $d_i \geqslant 1$ 。那么

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) = v_{\mathfrak{p}}(M) \ \textit{for all } n \gg 0.$$

证明。 根据命题 3.5，只需证明

$$v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) \ \text{for all } n \gg 0. \tag{3.8.1}$$

设 $k_1 \geqslant 1$ 使得对所有 $n \geqslant k_1$，都有 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(I^{n-1}N/I^nN)$。那么，对每个$n \geqslant k_1$，有 $I^{n-1}N/I^nN \neq 0$，因此 $I^nN \neq 0$。对 $n < 0$，令 $I^nN := 0$ 。注意，模 $\mathscr{L} := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} I^nN$ 是 $\mathbb{N}^2$-分次环 $T := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I^n$上的有限生成 $\mathbb{Z}^2$-分次模，其中 m, n 次分次分量

$\mathscr{L}$和 T分别是每个 $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$的 $(I^nN)_m$和 $(I^n)_m$。因此，根据 $[12, \text{定理 2.8.(1)}]$,，存在 $k_2 \geqslant 1$、 $a \in \{d_1, \ldots, d_c\}$和 $b \in \mathbb{Z}$，使得

$$\operatorname{indeg}(I^nN) = an + b \text{ for all } n \geqslant k_2.$$

由于对 $1 \leqslant i \leqslant c$有 $d_i \geqslant 1$ ，函数初始次数(I^nN)（对 $n \geqslant k_2$）是严格递增的。选取 $k_3 \geqslant k_2$ ，使得初始次数$(I^{k_3}N) > v_{\mathfrak{p}}(M)$。现在，由 Artin-Rees 引理，存在 $k_4 \geqslant 1$ ，使得对所有 $n \geqslant k_4$有 $(0 :_M I) \cap I^nN = 0$ 。由引理 2.1.(1)，我们选取 $k > \max\{k_1, k_3, k_4\}$ ，使得

$$\{x \in M : \mathfrak{p} = (I^nN :_R x)\} \subseteq (0 :_M I) + I^{n-1}N \text{ for all } n \geqslant k. \tag{3.8.2}$$

我们断言 (3.8.1) 对所有 $n \geqslant k$成立。为证明该断言，固定 $n \geqslant k$。设 $x \in M$ 为齐次元素，使得 $\mathfrak{p} = (I^nN :_R x)$ 且 $\deg(x) = v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$。于是由 (3.8.2)， $x \in (0 :_M I) + I^{n-1}N$。因此，对某个 $y \in (0 :_M I)$ 以及 $z \in I^{n-1}N$，有 $x = y + z$。由于 $(0 :_M I) \cap I^{n-1}N = 0$，模 $(0 :_M I) + I^{n-1}N$ 是 $(0 :_M I)$ 与 $I^{n-1}N$的（内）直和。由于 x 是齐次的， y 与 z也必定是次数等于 $\deg(x)$ 的齐次元素。因此，鉴于命题 3.5，我们得到

$$\deg(z) = \deg(x) = v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M) < \operatorname{indeg}(I^{n-1}N),$$

这意味着 $z = 0$。因此， $x = y \in (0 :_M I)$。注意

$$\mathfrak{p} = (I^nN :_R x) \supseteq (0 :_R x).$$

设 $r \in \mathfrak{p}$。则 $rx \in (0 :_M I) \cap I^nN = 0$ ，因为 $x \in (0 :_M I)$。因此 $r \in (0 :_R x)$。这表明 $\mathfrak{p} = (0 :_R x)$。因此，$v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) \leqslant \deg(x) = v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$。证毕。□

注记 3.9。 定理 2.2 中证明了

$$\mathcal{A}_N^M(I) \cap V(I) = \operatorname{Ass}_R(0 :_M I) \cup \mathcal{B}_N(I).$$

设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。则存在一个齐次元素 $x \in (0 :_M I)$，使得 $\mathfrak{p} = (0 :_R x)$ 且 $\deg(x) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I)$。根据引理 2.4，我们还有$\mathfrak{p} = (I^nN :_R x)$。因此，由定理 3.7 和定理 3.8，

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) = v_{\mathfrak{p}}(M) = \deg(x) \text{ for all } n \gg 0.$$

接下来，我们描述 M/I^nN 的 Vasconcelos 不变量的渐近行为，这取决于模 $(0 :_M I)$ 是否为零。

定理 3.10. 假设 设定 3.3 和 记号 1.1。则有以下结论：(1) 设 $(0 :_M I) \neq 0$。那么，$v\big(M/I^nN\big) \leqslant v(0 :_M I)$ 对所有 $n \gg 0$. 都成立。此外，若 $d_i \geqslant 1$ 对 $1 \leqslant i \leqslant c$ 成立，且若 $\mathcal{A}_N^M(I) \subseteq V(I)$，则

$$v\big(M/I^nN\big) = v(0 :_M I) \text{ for all } n \gg 0.$$

(2) 设 $(0 :_M I) = 0$ 且 $\emptyset \neq \mathcal{A}_N^M(I) \subseteq V(I)$。那么，

$$v\big(M/I^nN\big) = v\big(I^{n-1}N/I^nN\big) \text{ for all } n \gg 0,$$

它关于 n 呈线性，其首项系数属于 $\{d_1, \ldots, d_c\}$。

证明。 (1) 第一部分已在命题 3.5 中证明。对于第二部分，假设对 $1 \leqslant i \leqslant c$，有 $d_i \geqslant 1$，且 $\mathcal{A}_N^M(I) \subseteq V(I)$。那么，根据定理 3.6，函数$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 对所有 $n \gg 0$ 都严格递增，其中 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。另一方面，当 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$ 时，我们有 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I)$，对于

所有 $n \gg 0$，参见注 3.9。注意，$\emptyset \neq \operatorname{Ass}_R(0 :_M I) \subseteq \mathcal{A}_N^M(I)$（根据定理 2.2）。因此，对所有 $n \gg 0$，可得

$$\begin{aligned} v(M/I^nN) &= \min\{v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)\} \\ &= \min\{v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) : \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)\} = v(0 :_M I). \end{aligned}$$

(2) 由于 $(0 :_M I) = 0$ 和 $\mathcal{A}_N^M(I) \subseteq V(I)$，由定理 2.2 可得 $\mathcal{A}_N^M(I) = \mathcal{B}_N(I)$。因此，定理 3.6 得出

$$\begin{aligned} v(M/I^nN) &= \min\{v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) : \mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I)\} \\ &= \min\{v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}N/I^nN) : \mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)\} \\ &= v(I^{n-1}N/I^nN) \text{ for all } n \gg 0. \end{aligned}$$

现在，已知对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)$，函数 $v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}N/I^nN)$ 关于 n 是渐近线性的，其首项系数为 $\{d_1, \ldots, d_c\}$，参见 [12, 定理 2.11]。由于有限个 n 上的线性函数的最小值也关于 n 渐近线性，且其首项系数等于这些首项系数中的最小值，所需结果便得证。□

现在我们可以陈述本节的主要结果。

定理 3.11. 假设 设定 3.3 和记号 1.1成立。则有以下结论：
(1) 设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$ 且 $I \subseteq \mathfrak{p}$。则 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)$。此外，存在 $a_{\mathfrak{p}} \in \{d_1, \ldots, d_c\}$ 和 $b_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ 使得

$$v_{\mathfrak{p}}\big(M/I^nN\big) = v_{\mathfrak{p}}\big(I^{n-1}N/I^nN\big) = a_{\mathfrak{p}}n + b_{\mathfrak{p}} \text{ for all } n \gg 0.$$

(2) 设 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \cap \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。若对 $1 \leqslant i \leqslant c$有 $d_i \geqslant 1$，则

$$v_{\mathfrak{p}}\big(M/I^nN\big) = v_{\mathfrak{p}}(M) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) \text{ for all } n \gg 0.$$

(3) 设 $(0 :_M I) \neq 0$。则对所有 $n \gg 0$，有 $v\big(M/I^nN\big) \leqslant v(0 :_M I)$。此外，若对 $1 \leqslant i \leqslant c$有 $d_i \geqslant 1$，且若 $\mathcal{A}_N^M(I) \subseteq V(I)$，则

$$v\big(M/I^nN\big) = v(0 :_M I) \text{ for all } n \gg 0.$$

(4) 设 $(0 :_M I) = 0$，且 $\emptyset \neq \mathcal{A}_N^M(I) \subseteq V(I)$。则

$$v\big(M/I^nN\big) = v\big(I^{n-1}N/I^nN\big) \text{ for all } n \gg 0,$$

其关于 n 是线性的，且首项系数属于 $\{d_1, \ldots, d_c\}$。

证明。(1) 已在定理 3.6 中证明。为证明 (2)，令 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \cap \operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$。于是 $I \subseteq \mathfrak{p}$。此外，有两种可能：要么 $\mathfrak{p} \notin \mathcal{B}_N(I)$，要么 $\mathfrak{p} \in \mathcal{B}_N(I)$。在第一种情况下，所需结果由定理 3.7 得出，而第二种情况则由定理 3.8 得出。最后，(3) 和 (4) 分别正是定理 3.10.(1) 和 (2)。□

注 3.12。在定理 3.11 中，我们注意到以下事实。
(1) 第 (2) 部分（分别地，第 (3) 部分）表明，当 $(0 :_M I) \neq 0$ 时，我们最终有 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) < v_{\mathfrak{p}}(I^{n-1}N/I^nN)$（分别地，$v(M/I^nN) < v(I^{n-1}N/I^nN)$）。此外，函数 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 和 $v(M/I^nN)$ 最终将与 N 无关。(2) 第 (1) 和 (4) 部分改进了 [12, 定理 2.14.(1) 和 (2)] 的结果，表明渐近地，线性函数 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 和 $v(M/I^nN)$ 仅取决于 I 和 N，而与 M 无关。

接下来，我们对 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 在 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$ 时的行为作如下观察。

命题 3.13。 根据设定 3.3 和记号 1.1，令 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$。那么，对所有 $n \geqslant 0$，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/I^nN)$ 成立。此外，以下结论成立：
(1) $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) \leqslant v_{\mathfrak{p}}(M/I^{n+1}N)$ 对所有 $n \geqslant 0$。(2) $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ $\leqslant$初始次数 $\big((I+\mathfrak{p})/\mathfrak{p}\big) \cdot n + v_{\mathfrak{p}}(M/N)$ 对所有 $n \geqslant 1$。
证明。 根据命题 2.8，

$$\operatorname{Ass}_R(M/I^nN) \setminus V(I) = \operatorname{Ass}_R(M/N) \setminus V(I) \text{ for all } n \geqslant 0.$$

因此，对所有 $n \geqslant 0$，$\mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I) = \operatorname{Ass}_R(M/N) \setminus V(I)$，且 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/I^nN)$。
(1) 设 $n \geqslant 0$。考虑短正合列

$$0 \to \frac{I^nN}{I^{n+1}N} \to \frac{M}{I^{n+1}N} \to \frac{M}{I^nN} \to 0.$$

由于 $I \nsubseteq \mathfrak{p}$，可得 $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Ass}_R\big(I^nN/I^{n+1}N\big)$。因此，所需的不等式由命题 3.1.(2) 得出。

(2) 由于 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M/N)$，存在一个齐次元素 $x \in M$，使得 $(N :_R x) = \mathfrak{p}$ 且 $v_{\mathfrak{p}}(M/N) = \deg(x)$。取次数最小的齐次元素 $r \in I \setminus \mathfrak{p}$。那么，对每个 $n \geqslant 1$，都有 $r^nx \neq 0$ 且 $(I^nN :_R r^nx) = \mathfrak{p}$。因此

$$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN) \leqslant \deg(r^nx) \leqslant \deg(r) \cdot n + \deg(x) \text{ for all } n \geqslant 1.$$

因此结论成立，因为 $\deg(r) = \operatorname{indeg}((I+\mathfrak{p})/\mathfrak{p})$ 且 $\deg(x) = v_{\mathfrak{p}}(M/N)$。

□

注记 3.14. (1) 命题 3.13 保证，对于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$，函数 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 总是非递减的，且有线性函数 $\operatorname{indeg}((I+\mathfrak{p})/\mathfrak{p}) \cdot n + v_{\mathfrak{p}}(M/N)$ 作为上界。因此，若 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 最终为线性函数，则其斜率至多为 $\operatorname{indeg}((I+\mathfrak{p})/\mathfrak{p})$。此上界是紧的；参见例 4.3 和注记 4.4.(2)。
(2) $v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$ 关于 n 的渐近行为并非对所有 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$ 都一致，例 4.3 展示了这一点。

4. Examples

本节将给出若干具体例子，以补充我们的结果。第一个例子表明，若去掉定理 3.11.(3) 中“I 由正次数齐次元素生成”这一条件，那么对于 $n \gg 0$，只要 $(0 :_M I) \neq 0$，等式 $v(M/I^nM) = v(0 :_M I)$ 就未必成立。

例 4.1. 设 $R := \mathbb{Z}[X]$ 是变量 X 上的标准分次多项式环。考虑 $M := R/(pX)$、$I = \mathfrak{p} := (p)$ 和 $\mathfrak{m} := (p, X)$，其中 p 是一个素数。那么 $(0 :_M I) = (X)M \neq 0$。此外，以下结论成立。

(1) $\operatorname{Ass}_R(M/IM) = \operatorname{Ass}_R(0 :_M I) = \{\mathfrak{p}\}$。对于所有 $n \geqslant 2$，我们有

$$\operatorname{Ass}_R\left(M/I^nM\right) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\} \text{ and } \operatorname{Ass}_R\left(I^{n-1}M/I^nM\right) = \{\mathfrak{m}\}.$$

因此，集合 $\operatorname{Ass}_R(0 :_M I)$ 与 $\mathcal{B}_M(I)$ 不相交。
（2）$v_{\mathfrak{p}}(M/IM) = 0$，且对于所有 $n \geqslant 2$，$v_{\mathfrak{p}}\big(M/I^nM\big) = v_{\mathfrak{p}}(M) = v_{\mathfrak{p}}(0 :_M I) = 1$。（3）对于所有 $n \geqslant 2$，$v_{\mathfrak{m}}\big(M/I^nM\big) = v_{\mathfrak{m}}\big(I^{n-1}M/I^nM\big) = 0$。
（4）对于所有 $n \geqslant 1$，$v\big(M/I^nM\big) = v\big(I^{n-1}M/I^nM\big) = 0 < v(0 :_M I) = 1$。

证明。由于（（pX）：$_R\, p$）=（X），我们有（0：$_M\, I$）=（X）$M \cong$（$R/\mathfrak{p}$）（-1）$\neq 0$。（1）注意到 $M/IM \cong R/\mathfrak{p}$。因此，$\operatorname{Ass}_R$（$M/IM$）$=\{\mathfrak{p}\}=\operatorname{Ass}_R$（0：$_M\, I$）。令 $n \geqslant 1$。则 $I^nM=$（p^n，pX）/（pX）。因此，

$$M/I^{n+1}M \cong R/(p^{n+1}, pX) \text{ and } I^nM/I^{n+1}M \cong (p^n, pX)/(p^{n+1}, pX).$$

现在，$(p^{n+1},\ pX)=(p)\cap(p^{n+1},\ X)$，这是理想 $(p^{n+1},\ pX)$ 在 R 中的一个主分解。因此 $\operatorname{Ass}_R\left(M/I^{n+1}M\right)=\{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$。由于极大理想 $\mathfrak{m}$ 湮灭模 $I^nM/I^{n+1}M$，可得 $\operatorname{Ass}_R\left(I^nM/I^{n+1}M\right)=\{\mathfrak{m}\}$。

(2) 由于 $M/IM \cong R/\mathfrak{p}$ 且 $(0:_M I) \cong (R/\mathfrak{p})(-1)$，于是得到 $v_{\mathfrak{p}}(M/IM)=0$以及 $v_{\mathfrak{p}}(0:_M I)=1$。注意，对于所有$n \geqslant 2$，$\mathfrak{p}=((pX):_R X)$ 和 $\mathfrak{p}=((p^n,\ pX):_R X)$，并且如果将 X 替换为 R 中任何其他次数更低的齐次元素，这些等式都不成立。因此

$$v_{\mathfrak{p}}\left(M/I^nM\right)=1=v_{\mathfrak{p}}(M)=v_{\mathfrak{p}}(0:_M I) \text{ for all } n \geqslant 2.$$

(3) 设 $n \geqslant 2$。注意到 $\mathfrak{m}=\left((p^n,pX):_R\ p^{n-1}\right)$，且 $I^{n-1}M/I^nM$由 p^{n-1} 的像生成。因此 $v_{\mathfrak{m}}(I^{n-1}M/I^nM)=0$。从而，由于$v_{\mathfrak{m}}(M/I^nM) \leqslant v_{\mathfrak{m}}(I^{n-1}M/I^nM)$，可得 $v_{\mathfrak{m}}(M/I^nM)=0$。

(4) 这由 (1)、(2) 和 (3) 可得。 □

在下面的例子中，我们证明定理 2.2 中的并 $\operatorname{Ass}_R(0:_M I) \cup \mathcal{B}_N(I)$ 不必是不交的。

例 4.2. 设 $R:=K[X,Y,Z]$ 是域 K 上三个变量的标准分次多项式环。考虑 $I:=(XY,Z)$、$\mathfrak{m}:=(X,Y,Z)$ 以及 $M:=R/(X^3,Y,XZ)$。则 $(0:_M I)=(X)M \neq 0$。此外，下列结论成立。

(1) $\operatorname{Ass}_R\left(M/I^nM\right)=\operatorname{Ass}_R\left(I^{n-1}M/I^nM\right)=\operatorname{Ass}_R(0:_M I)=\{\mathfrak{m}\}$ 对所有 $n \geqslant 1$ 均成立。因此，集合 $\operatorname{Ass}_R(0:_M I)$ 和 $\mathcal{B}_M(I)$ 并不互不相交。(2) $v(0:_M I)=v_{\mathfrak{m}}(0:_M I)=2$，并且

$$v\left(M/I^nM\right)=v_{\mathfrak{m}}\left(M/I^nM\right)=\begin{cases}2 & \text{if } n=1 \text{ or } n \geqslant 3\\ 1 & \text{if } n=2.\end{cases}$$

(3) $v\left(I^{n-1}M/I^nM\right)=v_{\mathfrak{m}}\left(I^{n-1}M/I^nM\right)=\begin{cases}2 & \text{if } n=1\\ n-1 & \text{if } n \geqslant 2.\end{cases}$

证明。由于 $\left((X^3,Y,XZ):_R(XY,Z)\right)=(X)$，我们有

$$(0:_M I)=(X)M=(X,Y)/(X^3,Y,XZ) \neq (0).$$

(1) 注意到 $\mathfrak{m}$ 消去模 $(0:_M I)$ 中的元素。因此 $\operatorname{Ass}_R(0:_M I)=\{\mathfrak{m}\}$。现在，$I^nM=\left(I^n+(X^3,Y,XZ)\right)/(X^3,Y,XZ)$，且单项式理想 $I^n+(X^3,Y,XZ)$ 由元素 X^3，Y,XZ,Z^n 生成，其中 $n \geqslant 1$。因此，$M/IM \cong R/(X^3,Y,Z)$。对于 $n \geqslant 2$，我们有

$$\frac{M}{I^nM} \cong \frac{R}{(X^3,Y,XZ,Z^n)} \text{ and } \frac{I^{n-1}M}{I^nM} \cong \frac{(X^3,Y,XZ,Z^{n-1})}{(X^3,Y,XZ,Z^n)}.$$

对于 $n \geqslant 1$，由于 M/I^nM（因此 $I^{n-1}M/I^nM$）被 $\mathfrak{m}$ 的某个幂所湮灭，可得 $\operatorname{Ass}_R(M/I^nM)=\operatorname{Ass}_R(I^{n-1}M/I^nM)=\{\mathfrak{m}\}$。

(2) 注意，$\left((X^3,\ Y,\ XZ):_R X^2\right)=\mathfrak{m}$ 且 $\left((X^3,\ Y,\ Z):_R X^2\right)=\mathfrak{m}$，并且 X^2 是满足这些性质的 R 中次数最低的非零齐次元素。因此

$$v(0:_M I)=v_{\mathfrak{m}}(0:_M I)=2=v_{\mathfrak{m}}(M/IM)=v(M/IM).$$

可以验证

$$\big((X^3,Y,XZ,Z^2):_R Z\big)=\mathfrak{m}=\big((X^3,Y,XZ,Z^n):_R X^2\big) \text{ for } n\geqslant 3,$$

其中， Z 在 M/I^2M中的剩余类，以及 X^2 在 M/I^nM 中（对于 $n\geqslant 3$）的剩余类，是具有这些性质且次数为最小可能次数的非零齐次元素。因此，(2)中的陈述随之成立。

(3) 情形 $n=1$ 由(2)推出。于是我们固定 $n\geqslant 2$。模 $I^{n-1}M/I^nM$是由 Z^{n-1}的剩余类生成的非零循环 R-模，并且 $\mathfrak{m}=\big((X^3,Y,XZ,Z^n):_R Z^{n-1}\big)$。因此，所需结果成立。□

下面的例子表明，当 $\mathfrak{p}\in\mathcal{A}_N^M(I)\setminus V(I)$时，渐近地，函数$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)$不必是关于 n 的一次多项式。

例 4.3. 设 $R=K[X,Y,Z]$ 是域 K上的标准分次多项式环。考虑 $I:=(X,Y^2,Z^3)$，$\mathfrak{p}:=(X)$，$\mathfrak{q}:=(X,Y)$，$\mathfrak{m}:=(X,Y,Z)$，$M:=R/(X^3,XY^4)$，以及 $N:=(X^3,XY)/(X^3,XY^4)$。则$(0:_M I)=0$。此外，下列结论成立。

(1) $\operatorname{Ass}_R(M/N)=\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}$，且对于所有 $n\geqslant 3$.，$\operatorname{Ass}_R(M/I^nN)=\{\mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{m}\}$。(2) 对于所有 $n\geqslant 3$.，$v_{\mathfrak{p}}(M/I^nN)=4$、$v_{\mathfrak{q}}(M/I^nN)=3n-1$以及 $v_{\mathfrak{m}}(M/I^nN)=3n-2$。(3) 对于所有 $n\geqslant 3$，$v(M/I^nN)=4$。

证明。由于 $Z^3\in I$ 是 M-正则的，因此有 $(0:_M I)=0$。

(1) 注意到 $M/N\cong R/(X^3,\ XY)$。由于 $(X^3,\ XY)=(X)\cap(X^3,\ Y)$，可推出 $\operatorname{Ass}_R(M/N)=\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}\}$。记

$$J_n:=\big((X^3,XY^4)+I^n(X^3,XY)\big) \text{ for all } n\geqslant 1.$$

于是 $I^nN=J_n/(X^3,\ XY^4)$，且 $M/I^nN\cong R/J_n$。令 $n\geqslant 3$。容易看出

$$J_n=\big(X^3,XY^4,X^2Y^3Z^{3(n-2)},X^2YZ^{3(n-1)},XY^3Z^{3(n-1)},XYZ^{3n}\big).$$

然后，将 J_n 的最后一个生成元拆分，我们得到

$$\begin{aligned}J_n&=(X)\cap(X^3,Y)\cap(X^3,XY^4,X^2Y^3Z^{3(n-2)},X^2YZ^{3(n-1)},XY^3Z^{3(n-1)},Z^{3n})\\&=(X)\cap(X^3,Y)\cap\big(X^3,Y^4,X^2Y^3Z^{3(n-2)},X^2Z^{3(n-1)},Y^3Z^{3(n-1)},Z^{3n}\big).\end{aligned}$$

第二个等式是在逐一拆分 XY^4、$X^2YZ^{3(n-1)}$ 和 $XY^3Z^{3(n-1)}$ 后得到的。因此，我们得到 J_n 的一个主分解。因此，

$$\operatorname{Ass}_R(M/I^nN)=\{\mathfrak{p},\mathfrak{q},\mathfrak{m}\}.$$

(2) 固定 $n\geqslant 3$。我们分别将 x,y,z 记为 X,Y,Z 模 X^3,XY^4 的剩余类。对于 R 的一个理想 $\mathfrak{a}$，注意到

$$(I^nN:_M\mathfrak{a})=(J_n:_R\mathfrak{a})/(X^3,XY^4).$$

这有助于我们计算如下内容：

$$\begin{aligned}(I^nN:_M\mathfrak{p})=&\big(x^2,y^4,xy^3z^{3(n-2)},xyz^{3(n-1)},y^3z^{3(n-1)},yz^{3n}\big),\\(I^nN:_M\mathfrak{q})=&\big(x^3,xy^4,x^2y^3,xy^3z^{3(n-2)},x^2y^2z^{3(n-2)},x^2z^{3(n-1)},\\&xy^2z^{3(n-1)},xyz^{3n}\big)\\(I^nN:_M\mathfrak{m})=&\big(x^3,xy^4,x^2y^3z^{3n-7},x^2yz^{3(n-1)},xy^3z^{(3n-4)},x^2y^2z^{3n-4},\\&xyz^{3n},xy^2z^{3n-1}\big).\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

注意，若 $\mathfrak{a}$ 是 R 的一个理想，且 $u \in M$ 满足 $\mathfrak{a} = (I^n N :_R u)$，则必有 $u \in (I^n N :_M \mathfrak{a})$。因此，由 (4.3.1) 可得 $\mathfrak{p} = \left(I^n N :_R y^4\right)$、$\mathfrak{q} = \left(I^n N :_R x^2 z^{3(n-1)}\right)$和 $\mathfrak{m} = \left(I^n N :_R x^2 y^3 z^{3n-7}\right)$。此外，若分别用来自方程 (4.3.1) 中子模的任意次数更低的齐次元素替换元素 $y^4, x^2 z^{3(n-1)}$ 和 $x^2 y^3 z^{3n-7}$，这些等式将不再成立。这就证明了我们在 (2) 中的断言。

(3) 这显然可由 (2) 得出。 □

注 4.4. (1) 例 4.3 表明，当 $N \neq M$ 时，函数 $v(M/I^n N)$ 可能是渐近常数，尽管 $(0 :_M I) = 0$。当 $N = M$ 时，这种情况不太可能发生，见定理 1.5.(4)。(2) 在例 4.3 中，$\mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I) = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}\}$. 函数 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^n N)$ 是渐近常数，而函数 $v_{\mathfrak{q}}(M/I^n N)$ 是斜率为 3 的渐近线性函数。这里 $(I + \mathfrak{q})/\mathfrak{q} = (X,\ Y,\ Z^3)/(X,\ Y)$。因此，$\operatorname{indeg}((I + \mathfrak{q})/\mathfrak{q}) = 3$。

根据实验结果，我们预期，对于 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$，函数 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^n N)$ 是渐近常数，或是关于 n 的一次多项式。因此，我们以提出下面这个自然问题作为本文的结尾。

问题 4.5. 对于每个 $\mathfrak{p} \in \mathcal{A}_N^M(I) \setminus V(I)$，函数 $v_{\mathfrak{p}}(M/I^n N)$ 是否最终会成为常数或关于 n 的一次多项式?

References

[1] Vanmathi A 和 Parangama Sarkar. 单项式理想整闭包滤链的 v-数. arXiv:2506.09051, 2025年. 3[2] Vanmathi A 和 Parangama Sarkar. 符号幂滤链的 v-数. *Collect. Math.*, 第 1–21 页, 2025年. 3[3] Prativa Biswas, Mousumi Mandal 和 Kamalesh Saha. 分次理想 v-数的渐近行为与稳定性指数. arXiv:2402.16583, 2024. 3[4] M. Brodmann. Ass($M/I^n M$ 74 1 16 18,) 的渐近稳定性. 1979 1, 2 *Proc. Amer. Math. Soc.*, ( ): – . [5] Aldo Conca. 关于 v 152 6 2349 2351, 2024 2 -不变量的一[6] 则注记. *Proc. Amer. Math. Soc.*, ( ): – . Susan M. Cooper, Alexandra Seceleanu, Stefan O. Tohaneanu, Maria Vaz Pinto 和 Rafael H. Villarreal. Geramita理想的广义最小距离函数与代数不变量. *Adv. in Appl. Math.*, 112:101940, 34, 2020. 2[7] Hailong Dao. 关于商运算与特殊类型理想 . *Palest. J. Math.*, 10 388, 2021 2 383 4 ( ): – . [8] Antonino Ficarra 和 Pedro Macias Marques. 理想和的幂的 v- 函数 . *J.* , ( ):Paper No. . *Algebraic Combin.* 62 1 13, 21, 2025 3 [9] Antonino Ficarra 和 Emanuele Sgroi. 齐次理想 v-数的渐近行为. arXiv:2306.14243, 2023. 2[10] Antonino Ficarra 和 Emanuele Sgroi. 整数规划的渐近行为与分次滤链的 v-函数. *J. Algebra Appl.*, 第 2650236 页, 2025年. 3[11] Luca Fiorindo 和 Dipankar Ghosh. 分次理想的乘积与幂的 Vasconcelos 不变量的渐近行为. arXiv: 2401 17815 4, 2025 3 . v . Luca Fiorindo 和 Dipankar Ghosh. [12] 关于分次模 Vasconcelos 不变量的渐近行为. *Nagoya Math. J.*, 258:296–310, 2025年. 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11[13] Dipankar Ghosh 和 Siddhartha Pramanik. 涉及理想幂的分次（上）同调模的渐近 v-数. *J. Algebra*, 671:61–74, 2025年. 3[14] Alan K. Kingsbury 和 Rodney Y. Sharp. 某些素理想集合的渐近行为. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124 6 1703 1711, 1996 1, 6 ( ): – . Manohar Kumar, Ramakrishna [15] Nanduri 和 Kamalesh Saha. v-函数的斜率与 Waldschmidt常数. *J. Pure Appl. Algebra*, 229 2 107881, 13, 2025 3 ( ):Paper [16] No. . Mousumi Mandal 和 Partha Phukan. 理想分次族的渐近 v-数与 Newton-Okounkov区域. arXiv:2603.08838, 2026. 3

[17] 61 1 71 81, 1979 2 Stephen McAdam 和 Paul Eakin. 渐近 Ass. *J. Algebra*,
[18] *Math. Ann.* 83 1 2 24 66, 1921 1
( ): – . 埃米·诺特. 环域中的理想理论. , (-): – . [19] 2406 05567, 2024 Kamalesh Saha. 二
3
项式展开与 v-数. arXiv: . . [20] Kamalesh Saha 和 Nirmal Kotal. 关
于 Gorenstein 理想与 Frobenius 幂的 v-数. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*,
47 6 167, 17, 2024 3 ( ):Paper No. . Irena Swanson 和 Craig Huneke.,, *and modules*, 第
[21] *Integral closure of ideals rings*
Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 卷 336，剑桥：剑桥大学出版社，2006年. 5

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, West Ben-gal - 721302, India*Email address*: dipankar@maths.iitkgp.ac.in, dipug23@gmail.com*URL*: https://orcid.org/0000-0002-3773-4003

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, West Ben-gal - 721302, India*Email address*: nanduri@maths.iitkgp.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Kharagpur, West Ben-gal - 721302, India*Email address*: siddharthap@kgpian.iitkgp.ac.in, pramaniksiddhartha2@gmail.com*URL*: https://orcid.org/0009-0005-1219-4265