arXiv:2603.11967v1 [math.AT] 12 Mar 2026

有向同调与上同调运算

Eric Goubault

2026年3月13日

摘要

本文简要介绍一种针对有向上同调的持久模方法，它与 [9] 中引入的有向同调互为对偶。我们阐述有向上同调的基本性质，尤其是上同调运算的性质；这些运算与某些同调运算存在部分关联。本文讨论预立方集的一个特定类别以及一般有向空间这两种情形。

1 引言

有向同调已被长期研究 [10, 9, 12, 5, 14, 3] ，但关于同调运算和上同调运算的研究却寥寥无几。在经典框架中，帽积和杯积发挥着重要作用，能够更精细地刻画这些拓扑不变量。

我们以 [9], 中引入的有向同调为基础，推导出两种主要运算。一种由有向路径和高阶路径的拼接诱导，同时产生同调运算和上同调运算。另一种由迹空间的“局部上同调环”上的经典杯积诱导，仅存在于有向上同调中。

在这篇简短的论文中，我们为全面研究这些运算铺平道路。还有许多问题有待研究，尤其是这两种有向上同调运算之间的相互作用，以及实际计算方面的问题。

目录 我们首先在第 2 节和第 3 节回顾所需的基本概念和定义，内容涉及有向空间及其组合对应对象——一类特定的预立方集。

随后，我们在第4节通过对 [9], 的构造取对偶来定义余边界映射；借此，我们得以在第5节定义路径代数上的有向上同调双模。对于一类特殊的预立方集合，我们在第7节构造了两个上同调运算： $\frown$和 $\smile$，其中 $\frown$是由立方链的拼接运算生成的同调运算 $\circledast$ 的对偶。

我们还简要介绍了在更一般的有向空间情形下相应的构造，参见第8节。

最后，我们在第9节中给出这些运算在有向上同调双模上的一些计算，这些计算基于 [2] 的结果。

2 有向空间背景

我们首先回顾 d-空间 [6, 13] 的概念：

定义 2.1。 有向空间是一个二元组 $\vec{X} = (X, dX)$，其中 X 是一个拓扑空间，dX 是 X 中连续路径的集合，称为该空间的有向路径，并满足：

(i) 每条常值路径都是有向路径

(ii) 有向路径的每个递增重参数化都是有向路径，即对于每条有向路径 $\gamma \in dX$，以及任意连续且递增的函数 φ： $[0,1] \to [0,1]$， $\gamma \circ \varphi \in dX$

(iii) 对任意有向路径 γ 和 δ，若满足 $\gamma(1) = \delta(0)$，则 $\gamma \cdot \delta$ 与 γ 和 δ 的拼接是一条有向路径

一个简单的有向空间例子是闭区间 $[0,1]$，其有向路径为递增函数 $[0,1] \to [0,1]$。这个空间就是有向单位区间。

有向空间之间的态射定义如下。

定义 2.2。 设 $\vec{X} = (X, dX)$ 和 $\vec{Y} = (Y, dY)$ 是两个有向空间。连续函数 $f : X \to Y$ 称为定向映射，或称 ***dimap***，当且仅当：

$$\forall \gamma \in dX, \quad f \circ \gamma \in dY$$

从有向单位区间到有向空间 X 的定向映射称为一条有向路径。 X 的有向路径恰好就是它的有向路径。

有向空间与定向映射（以及函数的复合）共同构成定向空间范畴。

在给定的有向空间中，从一个点到另一个点的路径集合赋予紧开拓扑。

定义 2.3. 设 $\vec{X} = (X, dX)$ 为一个有向空间，且 $x, y \in X$。
所有有向路径的集合 $\gamma \in dX$ 使得

$$\gamma(0) = x \ \ and \ \gamma(1) = y$$

连同紧开拓扑一起称为从 x 到 y 的路径空间，记作 $P(\vec{X})^y_x$

我们考虑关系 $\sim$“在保序双射重参数化下相同”，该关系定义为：$\gamma \sim \delta$ 当且仅当存在一个连续的保序双射函数

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

使得

$$\delta = \gamma \circ f$$

确实是一个等价关系。

定义 2.4。给定一个有向空间 $\vec{X} = (X, dX)$，从 $x \in X$ *to* $y \in X$ 的迹是从 x 到 y 的路径关于此处记作 $\sim$ 的等价关系的一个等价类。若 γ 是一条定向路径，我们将相应的迹记作 $[\gamma]$ 。

这使我们能够在迹上定义拼接 $*$，从而得到一个迹范畴。我们用 $Tr(\vec{X})$ 表示 $\vec{X}$ 的迹空间，并用 $Tr(\vec{X})_\alpha^\beta$ 表示 $Tr(\vec{X})$ 的子空间，该子空间由 X 中从点 α 到点 β 的迹组成。

3 预立方集合与立方链的背景

我们的结果将适用于一类特殊的预立方集，该类预立方集在 [17] 中被引入：

定义 3.1。设 X 是一个有限预立方集合。若映射 X **适当的**，则称其为适当的：

$$\bigcup_{n\geq 0} X_n : \ c \to \{d^0(c), d^1(c)\} \in 2^{X_0}$$

是单射，即 X 的立方体可以通过其起始顶点和终止顶点加以区分。

$\tilde{X}$ $\tilde{X}$ X 的**无环长度覆盖** 是预立方集合 $\tilde{X}$，其中 $\tilde{X}_n = X_n \times \mathbb{Z}$，且 $d_i^\epsilon(c, k) = (d_i^\epsilon(c)\ k + \epsilon)$。

我们用 Cub 表示 $Precub$的全子范畴，其对象为具有真非循环长度覆盖的有限预立方集合。

以下定义对于 Krzysztof Ziemianski [17]所进行的迹空间计算至关重要。我们对原始定义稍作调整，使 1-立方链可以为空；在这种情况下，它可以由顶点上的常值路径组成。我们将证明，这一约定有利于本文后续内容的展开。

定义 3.2。设 X 为一个预立方集，v和 $w \in X_0$ 为其中两个顶点。X 中从 v 到 w 的**立方链** 是一个由立方体构成的序列，其指标为 v 和 w, $c = (c_1, \ldots, c_l)_{v,w}$，其中 $c_k \in X_{n_k}$ 和 $n_k > 0, l \geq 0$，且满足以下条件之一：$l = 0$ 和 $v = w$，或者：

- $d^0(c_1) = v$,
- $d^1(c_l) = w$,

- $d^1(c_i) = d^0(c_{i+1})$ *for* $i = 1, \ldots, l-1$.

当上下文已清楚表明它们是什么时，我们常常会省略立方链的指标 v, w 。

序列 $(n_1, \ldots, n_l)$ 将称为立方链的 **类型** c,$dim(c) = n_1 + \ldots + n_l - l$ 为 c的 **维数**，而 $n_1 + \ldots + n_l$为c的**长度**。按照约定，我们令 $dim(()_{v,v}) = 0$：顶点上的常值路径的维数为零。从 v 到 w 的 X 中的这些立方链记为 $Ch(X)_v^w$，而维数等于 m （分别小于 m、小于或等于 m）的立方链集合记为 $Ch^{=m}(X)_v^w$ （分别记为 $Ch^{<m}(X)_v^w$、 $Ch^{\leq m}(X)_v^w$）。注意，立方链的维数为 0，当且仅当它只包含 1-立方，或者它是空立方链。

注 3.3。 维数为 *0* 的立方链可自然地与预立方集底层箭图中的有向路径（包括顶点上的常值路径）对应。

注记 3.4. *1*-立方链必定具有如下形式 $(c_1, \ldots, c_l)$，其中有唯一一个维数为 *2* 的 c_i ，其余各项的维数均为 *1*。事实上，每个维数严格大于 *1* 的胞腔都会使立方链的维数增加。

注记 3.5. 我们注意到，立方链的维数具有如下可加性：设 $c = (c_1, \ldots, c_l)$ 和 $d = (d_1, \ldots, d_k)$ 是两个立方链。若它们的拼接有定义，即当 $d^1(c_l) = d^0(d_1)$时，其拼接为立方链$e = (c_1, \ldots, c_l, d_1, \ldots, d_k)$。 e 的维数等于胞腔 c_i 和 d_j 的维数之和减去 $k + l$，因此等于 c的维数与 d的维数之和。

对于类型为 $(n_1, \ldots, n_l)$ 且维数为 $i = \sum n_i - l$ 的立方链 $c = (c_1, \ldots, c_l) \in Ch(X)_v^w$，给定一个整数 $k \in \{1, \ldots, l\}$ 和一个含有 r 个元素的子集 $\mathcal{I} \subseteq \{0, \ldots, n_k - 1\}^{j=1}$，其中 $0 < r < n_k$，定义立方链（如 [17] 中所作）：

$$d_{k,\mathcal{I}}(c) = (c_1, \ldots, c_{k-1}, d^0_{\mathcal{I}}(c_k), d^1_{\mathcal{I}}(c_k), c_{k+1}, \ldots, c_l) \in Ch(X)_v^w$$

其中 $\mathcal{I}^{\complement} = \{0, \ldots, n_k - 1\} \backslash \mathcal{I}$。这定义了一个胞腔复形，其胞腔的维数为$i$, $Ch^{=i}(X)$，对应于 i-立方链，且其面由 $d_{k,\mathcal{I}}$ 给出。

对于 R 一个给定的交换域，我们定义：

定义 3.6。 设 X 是一个预立方集合。我们称 $R_{i+1}[X]$ 为 $i \geq 0$ 由所有维数为 i 的立方链生成的 R- 模。

下面的公式给出于 [17]:

定义 3.7. 定义从 $R_{i+1}[X]$ 到 $R_i[X]$ 的**边界映射**如下：

$$\partial c \quad = \quad \sum_{k=1}^{l}\sum_{r=1}^{n_k-1}\sum_{\mathcal{I}\subseteq\{0,\ldots,n_k-1\}:\ |\mathcal{I}|=r} (-1)^{n_1+\ldots+n_{k-1}+k+r+1} sgn(\mathcal{I}) d_{k,\mathcal{I}}(c)$$

其中

$$sgn(\mathcal{I}) = \begin{cases} 1 & if \sum_{i\in\mathcal{I}} i \equiv \sum_{i=1}^{r} i \ mod\ 2 \\ -1 & otherwise \end{cases}$$

于是 $R_*[X] = (R_{i+1}[X], \partial)_{i\in\mathbb{N}}$ 是一个链复形。从任意 $v \in X_0$ 到任意 $w \in X_0$ 的立方链限制是 $R_*[X]$ 的一个子链复形，我们将其记为$R^w_{v,*}[X]$。

4 余边界映射

使得能够在 [9]中定义有向同调理论的边界映射 ∂ 不仅是 R-模映射，而且也是 $R[X]$-双模映射，其中 $R[X]$ 是 X 的底箭图上的路径代数（见 [9]）。

现在考虑如下构造。设 $R^*_n[X]$ 为 R-模

$$Hom_{_RMod}(R_n[X], R)$$

它是对所有$(\alpha,\beta) \in R_0[X]$的 R-模 $Hom_{_RMod}(R_n[X]^\beta_\alpha, R)$的直和，其中 $R_0[X]$ 在此表示可达状态对的集合。

我们现在定义余边界映射 $\partial^* : R^*_i[X] \to R^*_{i+1}[X]$ ，对于$f \in R^*_i[X]$如下:

$$\partial^*(f) = f \circ \partial$$

它是 $R^*_{i+1}[X]$ 的一个元素，因为 $\partial : \ R_{i+1}[X] \to R_i[X]$。

考虑 $R[X]^{op}$ $R[X]$的对代数，也就是说，它是一个与 $R[X]$ 具有相同底层 R-模的代数，但其内部乘法 $\times^*$ 是 $R[X]$的对内部乘法 $\times$: 对于 $R[X]^{op}$中的 p 和 q，有 $p\times^* q = q\times p$。现在，定义 $R^*_n[X]$ 上的 $R[X]^{op}$-双模结构: 对于 $R[X]^{op}$ 中的 p、 q 以及 $x \in R_n[X]$，有$f \in R^*_n[X]$:

$$p \bullet f \bullet q(x) = f(p \bullet f(x) \bullet q)$$

事实上，我们有:

$$\begin{array}{rcl} p' \bullet (p \bullet f \bullet q) \bullet q'(x) & = & p \bullet f(p' \bullet x \bullet q') \bullet q \\ & = & f(p \bullet (p' \bullet x \bullet q') \bullet q) \\ & = & f((p \times p') \bullet x \bullet (q' \times q) \\ & = & f((p' \times^* p) \bullet x \bullet (q \times^* q')) \\ & = & (p' \times^* p) \bullet f \bullet (q \times^* q')(x) \end{array}$$

事实上，我们定义的余边界映射是一个 $R[X]^{op}$-双模态射:

$$\begin{array}{rcl} \partial^*(p \bullet f \bullet q)(x) & = & (p \bullet f \bullet q)(\partial(x)) \\ & = & f(p \bullet \partial(x) \bullet q) \\ & = & f(\partial(p \bullet x \bullet q)) \\ & = & p \bullet (f \circ \partial) \bullet q(x) \\ & = & p \bullet \partial^*(f) \bullet q(x) \end{array}$$

注 4.1。 对于 $\rho \in R_n^*[X]_\alpha^\beta$ （即 $Hom_{_XMod}(R_n[X]_\alpha^\beta,\ R)$），以及 $p \in R[X]^{op}{}_\alpha^{\alpha'}$、 $q \in R[X]^{op}{}_{\beta'}^{\beta}$、 $p \bullet \rho \bullet q \in R_n^*[X]_{\alpha'}^{\beta'}$。

5 某些预立方集的有向上同调双模

现在我们可以定义预立方集合的上同调 $R[X]^{op}$-双模:

定义 5.1。 有限预立方集合 X 的**上同调模** 定义为阿贝尔范畴中复形的上同调 $(HM^{i+1})_{i\geq 0}[X]$，该复形属于 $R[X]^{op}$-双模范畴，由以下 $R[X]^{op}$-双模的上边缘算子给出∂^*： $R_i^*[X] \to R_{i+1}^*[X]$:

$$HM^{i+1}[X] = Ker\ \partial^*_{|R_{i+1}^*[X]}/Im\ \partial^*_{|R_i^*[X]}$$

备注 5.2。 请注意，在上述定义中， $i=0$, $Im\ \partial^*_{|R_i^*[X]} = 0$。

根据 [9], 的引理 5.7，商 $HM^{i+1}[X] = Ker\ \partial^*_{|R_{i+1}^*[X]}/Im\ \partial^*_{|R_i^*[X]}$可作为一个 R-模，与所有 R-模的余积相识别

$$Ker\ \partial^*_{R_{i+1}^*[X]_a^b}/Im\ \partial^*_{R_i^*[X]_a^b}$$

我们将其记为 $HM^{i+1}[X]_a^b$。如下所示，这些上同调模刻画了迹空间的上同调:

引理 5.3。 设 X 是一个有限预立方集，且它具有适当的无环长度覆盖， $a, b \in X_0$。那么， R-模 $HM^n[X]_a^b$, $n \geq 1$ 是从 a 到 b 的迹空间 $Tr(|X|)_a^b$ 的标准第 $n-1$ 上同调。

证明。 如上所定义的 $HM^*[X]_a^b$ 是上链复形$Ch(X)_a^b$ 的上同调；根据 [17], 的定理 1.7，它同构于迹空间 $Tr(|\ X\ |)_a^b$ 的（奇异）上同调。 □

6 有向同调运算

$R_i[X]$ 与 $R_j[X]$ 之间存在如下张量积。对于 c =(c_1, ..., c_n)，一个从 α 到 β 的 $i+1$-立方链 X；以及 d =(d_1, ..., d_m)，一个从 β 到 γ 的 $j+1$-立方链 β，我们定义:

$$c \otimes d = (c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_m)$$

当立方链 c和 d的端点不匹配时，我们定义 $c \otimes d$等于 0。然后通过双线性将 $\otimes$ 扩展到 $R_i[X] \times R_j[X]$。注意，此时 $\otimes$将 $R_i[X] \times R_j[X]$ 映射到 $R_{i+j-1}[X]$。张量积就是高阶立方路径的拼接，并扩展了串接运算 $\bullet$。

我们现在指出如下:

引理 6.1. 边界算子 ∂具有如下性质：对于任意 $c\,(i+1)$-立方体路径以及 d 任意($j+1$)-立方体路径：

$$\partial(c\otimes d)=\partial(c)\otimes d+(-1)^{|c|}c\otimes\partial(d)$$

证明。 首先假设 c 与 d 是立方链

当 c 与 d 的端点不匹配时，上述等式是平凡的（各项均为0）。

现设 c与 d具有相匹配的端点。令 $c=(c_1,\ldots,c_n)$（从而 $|c|=n$为 c的长度），且 $d=(d_1,\ldots,d_m)$。因此我们有$c\otimes d=(c_1,\ldots,c_n,d_1,\ldots,d_m)$。

Now:

$$\begin{aligned}
\partial(c\otimes d) &= \sum_{k=1}^{n+m}\sum_{r=1}^{n_k-1}\sum_{\mathcal{I}\subseteq\{0,\ldots,n_k-1\}:\ |\mathcal{I}|=r}(-1)^{n_1+\ldots+n_{k-1}+k+r+1}sgn(\mathcal{I})d_{k,\mathcal{I}}(c\otimes d)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n_k-1}\sum_{\mathcal{I}\subseteq\{0,\ldots,n_k-1\}:\ |\mathcal{I}|=r}(-1)^{n_1+\ldots+n_{k-1}+k+r+1}sgn(\mathcal{I})d_{k,\mathcal{I}}(c\otimes d)\\
&\quad+\sum_{k=n+1}^{m}\sum_{r=1}^{n_k-1}\sum_{\mathcal{I}\subseteq\{0,\ldots,n_k-1\}:\ |\mathcal{I}|=r}(-1)^{n_1+\ldots+n_{k-1}+k+r+1}sgn(\mathcal{I})d_{k,\mathcal{I}}(c\otimes d)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n_k-1}\sum_{\mathcal{I}\subseteq\{0,\ldots,n_k-1\}:\ |\mathcal{I}|=r}(-1)^{n_1+\ldots+n_{k-1}+k+r+1}sgn(\mathcal{I})d_{k,\mathcal{I}}(c)\otimes d\\
&\quad+(-1)^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{n_k-1}\sum_{\mathcal{I}\subseteq\{0,\ldots,n_k-1\}:\ |\mathcal{I}|=r}(-1)^{n_1+\ldots+n_{k-1}+k+r+1}sgn(\mathcal{I})c\otimes d_{k,\mathcal{I}}(d)\\
&= \partial(c)\otimes d+(-1)^{|c|}c\otimes d
\end{aligned}$$

□

这一张量运算进而在同调中生成映射，如下所述，至少对于预立方集合的一种受限情形是如此。

在本文的其余部分，**我们现在假设，所有 m-立方链 c 在$Ch^{=m}(X)_v^w$中，对所有 $v,\ w\in X_0$ 都具有相同的长度 $|c|$ （即立方链的长度仅依赖于其维数以及起点顶点与终点顶点）**。特别地，对于给出无循环 PV 程序语义的预立方复形，情况正是如此 [6]。

在这种情况下，对于任意 $c\in Ch^{=i+1}(X)_\alpha^\beta$ 和 $d\in Ch^{=j+1}(X)_\beta^\gamma$， $\partial(c\otimes d)=\partial(c)\otimes d+(-1)^{|c|}c\otimes\partial(d)$ 也同样成立，因为我们可以通过双线性扩展引理 6.1 的结果：根据假设，所有从 α 到 β 的 $(i+1)$-立方体链都具有相同的长度 $|c|$。现在：

引理 6.2。 我们有一类称为 *conc* 积的同调运算，它们由以下映射定义

$$\circledast:\ HM_i[X]_\alpha^\beta\otimes HM_j[X]_\beta^\gamma\to HM_{i+j-1}[X]_\alpha^\gamma$$

对于所有 $i\geq 1$、 $j\geq 1$ 和 $(\alpha、\ \beta)\in R_0[X]$。

证明。证明过程与分次微分模的任意边界算子相同。首先，我们注意到，循环的乘积仍然是循环，因为，如果 $\partial(c) = \partial(d) = 0$,

$$\begin{aligned}\partial(c \otimes d) &= \partial(c) \otimes d + (-1)^{|c|} c \otimes \partial(d) \\ &= 0\end{aligned}$$

现在注意，循环与边界的乘积是边界，因为若 c 满足 $\partial(c) = 0$ 且 $d = \partial(D)$,

$$\begin{aligned}\partial(c \otimes D) &= \partial(c) \otimes D + (-1)^{|c|} c \otimes \partial(D) \\ &= (-1)^{|c|} c \otimes d\end{aligned}$$

因此， $c \otimes d = (-1)^{|c|} \partial(c \otimes D) \in Im\ \partial$ 是边界。

我们定义循环 c 在 $HM_i[X]^\beta_\alpha$ 中的类 $[c]$ 与循环 d 在 $HM_j[X]^\gamma_\beta$ 中的类 $[d]$之间的 $\circledast$ 运算，其结果为 $[c] \circledast [d] = [c \otimes d]$。现在我们来验证这个定义是定义良好的。

事实上，假设 $[c'] = [c]$ 和 $[d'] = [d]$, 也就是说，存在 $C \in R_{i+1}[X]^\beta_\alpha$ 和 $D \in R_{j+1}[X]^\gamma_\beta$，使得 $c' = c + \partial(C)$ 且 $d' = d + \partial(D)$。于是:

$$c' \otimes d' = c \otimes d + c \otimes \partial(D) + \partial(C) \otimes d + \partial(C) \otimes \partial(D)$$

但是 c 是一个循环，而 $\partial(D)$ 是一个边界，因此正如我们上面刚刚看到的，$c \otimes \partial(D)$ 也是一个边界。同样， $\partial(C) \otimes d$ 是一个余边界。现在， $\partial(D)$ 是一个边界，因此是一个循环；特别地，由于 $\partial^2 = 0$, 所以 $\partial(C) \otimes \partial(D)$ 是一个边界与循环的积，因而也是一个边界。综上，我们得出$c' \otimes d'$ 模一个边界等于 $c \otimes d$，因此 $[c' \otimes d'] = [c \otimes d]$ 使得 $\circledast$ 的定义是良定义的。 □

注 6.3. 请注意，当 i 或 j 等于 *1* 时，*conc* 积是从$HM_1[X]^\beta_\alpha \times HM_j[X]^\gamma_\beta$ 到 $HM_1[X]^\gamma_\alpha$的映射。此外，这意味着模 $HM_1[X]$实际上是一个代数，其内部乘法为 $\circledast$。总之，我们可以将双模同调替换为一个约化版本，其中所有 $HM_i[X]$ 都是$HM_1[X]$-双模，而 $HM_1[X]$ 也同时是一个代数。

注记 6.4. 我们声称，引理 *6.2* 对所有具有真非循环长度覆盖的有限预立方集合仍然成立。证明时需要考察上述构造在 X 的无环长度覆盖上的应用，然后使用 *[15]* 的命题 *5.3*。

7 有向上同调运算

7.1 局部杯积

引理 7.1. 存在一个 R-模映射

$$\smile:\ HM^i[X]^\beta_\alpha \times HM^j[X]^\beta_\alpha \to HM^{i+j-1}[X]^\beta_\alpha$$

由 $|X|$ 从 α 到 β 在 X_0中的迹空间的杯积诱导。

证明。 根据引理 5.3，我们知道 R-模 $HM^n[X]_a^b$, $n \geq 1$，以及a， $b \in X_0$是从a 到 b的迹空间 $T(|X|)_a^b$的标准（$n-1$）阶上同调。实际上，我们在 $Tr(|X|)_a^b$的上同调上确实有一个杯积，因此所有 R-模 $HM^*[X]_\alpha^\beta$都配备了杯积 $\smile$: $HM^i[X]_\alpha^\beta \times HM^j[X]_\alpha^\beta \to HM^{i+j-1}[X]_\alpha^\beta$。 □

计算 $HM^*[X]$ 所依据的上链复形由一个 CW 复形给出。理论上，可以利用 [16]，的公式，或通过对底层 CW 复形进行单纯形化，给出杯积的显式公式。这留待未来研究。

注 7.2。 考虑 p 一个从 α 到 α' 的 *0*-立方链，其中 X_0 和 q 一个从 β' 到 β 的 *0*-立方链。 p 在左侧（相应地， q 在右侧）作用于元素 $x \in HM^i[X]_\alpha^\beta$（相应地，作用于 $y \in HM^j[X]$），得到元素 $p \bullet x \bullet q \in HM^i[X]$ 和 $p \bullet y \bullet q \in HM^j[X]$。我们声称$p \bullet (x \smile y) \bullet q = (p \bullet x \bullet q) \smile (p \bullet y \bullet q)$，这留待未来研究。

7.2 上同调内张量

在本节中，我们通过如下定义将同调运算 $\circledast$对偶化:

定义 7.3。 我们通过以下方式定义上链 $f \in R_i^*[X]_\alpha^\beta$和 $g \in R_j^*[X]_\beta^\gamma$ 上的对偶张量运算：对于 $c \in R_i[X]_\alpha^\beta$ 和 $d \in R_j[X]_\beta^\gamma$:

$$f \boxtimes g(c \otimes d) = f(c).g(d)$$

（其中 . 表示 R 中的乘积，并且 $f \boxtimes g$（z） $= 0$ 是从 α 顶端出发且不经过 β的 z（$i+j-1$）-立方链）

总体而言， $\boxtimes$ 运算给出一个从 $\coprod_{\beta \text{ 满足 } (\alpha,\ \beta) \in R_0[X],\ (\beta,\ \gamma) \in R_0[X]} R_i^*[X]_\alpha^\beta \times R_j^*[X]_\beta^\gamma$ 到 $R_{i+j-1}^*[X]_\alpha^\beta$ 的映射。

现在，考虑 $Y \in R_{i+j-1}[X]_\alpha^\gamma$，它们是 $Y = Y_1 \otimes Y_2$ 与 $Y_1 \in R_i[X]_\alpha^\beta$、$Y_2 \in R_j[X]_\beta^\gamma$ 的张量积，其中某个 β 满足:

$$\begin{aligned}
\partial^*(f \boxtimes g)(Y) &= f \boxtimes g(\partial(Y)) \\
&= f \boxtimes g(\partial(Y_1) \otimes Y_2 + (-1)^{|Y_1|} Y_1 \otimes \partial(Y_2)) \\
&= f \boxtimes g(\partial(Y_1) \otimes Y_2) + (-1)^{|Y_1|} f \boxtimes g(Y_1 \otimes \partial(Y_2)) \\
&= f(\partial(Y_1)).g(Y_2) + (-1)^{|Y_1|} f(Y_1).g(\partial(Y_2)) \\
&= \partial^*(f)(Y_1).g(Y_2) + (-1)^{|Y_1|} f(Y_1).\partial^*(g)(Y_2) \\
&= \partial^*(f) \boxtimes g(Y_1 \otimes Y_2) + (-1)^{|Y_1|} f \boxtimes \partial^*(g)(Y_1 \otimes Y_2)
\end{aligned}$$

（因为我们仍处于受限情形，即预立方集合满足：从 α 到 β 的 m-立方链长度相同。）

引理 7.4. 乘积 $\boxtimes$ 诱导一个从 $HM^i[X]_\alpha^\beta \times HM^j[X]_\beta^\gamma$到 $HM^{i+j-1}[X]_\alpha^\beta$的 R-模映射 $\curvearrowright$ 。

证明。与引理 6.2 的证明类似，这表明 $R_i^*[X]_\alpha^\beta$ 中一个余循环与 $R_j^*[X]_\alpha^\beta$ 中一个余循环的 $\boxtimes$ 乘积是 $R_{i+j-1}^*[X]_\alpha^\beta$ 中的一个余循环，并且余循环与余边界的乘积是余边界，从而说明$\boxtimes$可过渡到上同调类。 □

8 一般 d-空间情形下的同调与上同调运算

为完整起见，我们现在回顾 [8]第 6 节中的构造。我们回顾如下：维数 n 的标准单形是

$$\Delta_n = \left\{ (t_0, \ldots, t_n) \mid \forall i \in \{0, \ldots, n\},\ t_i \geq 0 \text{ and } \sum_{j=0}^{n} t_j = 1 \right\}$$

对于 $n \in \mathbb{N}$、 $n \geq 1$ 和 $0 \leq k \leq n$，拓扑 n-单形的第 k个（$n-1$）-面（包含）是子空间包含映射

$$\delta_k : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$$

由包含映射诱导

$$(t_0, \ldots, t_{n-1}) \to (t_0, \ldots, t_{k-1}, 0, t_k, \ldots, t_{n-1})$$

对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $0 \leq k < n$，第 k个退化 n-单形是满射

$$\sigma_k : \Delta_n \to \Delta_{n-1}$$

由满射诱导:

$$(t_0, \ldots, t_n) \to (t_0, \ldots, t_k + t_{k+1}, \ldots, t_n)$$

仍如在 [8], 中，我们将满足以下条件的连续映射称为有向$\vec{}$空间 X 的 p i-迹、 $i \geq 1$，或维数为 i 的迹:

$$p : \Delta_{i-1} \to Tr(\vec{X})$$

其满足:

- p(0) 不依赖于 t_0，.....， t_{i-1}，我们将其记为 s_p（“ p的起点”）
- 并且 p(1) 也是常数，我们将其记为 t_p （“p的终点”）

我们用 $T_i(\vec{X})$ 表示 $\vec{X}$ 中 i-迹的集合。我们用 $T_i(\vec{X})(a, b)$， a， $b \in \vec{X}$ 表示 $T_i(\vec{X})$ 中从 a 到 b 的 i- 迹所组成的子集。

简而言之，有向空间 X 的一个特定（$i-1$）单形，我们可以像往常一样为其定义边界映射和退化映射:

• 作用于（$i+1$）路径 p 上的映射 d_j、 $j=0$、.....、i： $\Delta_i \to Tr$（$\vec{X}$）、 $i \geq 1$:

$$d_j(p) = p \circ \delta_j$$

• 映射 s_k、 $k=0$，.....， $i-1$ 作用于 i-路径 p： $\Delta_{i-1} \to Tr(\vec{X})$， $i \geq 1$:

$$s_k(p) = p \circ \sigma_k$$

有向路径上的串接运算（我们记为 $*$）在端点相接时显然从左侧和右侧作用于 $Tr_i(\vec{X})^\beta_\alpha$。这些运算与边界算子及退化算子可交换，因此我们可以像对预立方集那样定义:

定义 8.1. 有向空间 X 的有向同调双模为
$HM_i[\vec{X}] = Ker\ \partial_{|C^i[\vec{X}]}/Im\ \partial_{|C^{i+1}}[\vec{X}]$。
有向空间 $\vec{X}$ 的有向上同调双模为 $HM^i[\vec{X}] = Ker\ \partial^*_{|C^i[\vec{X}]}/Im\ \partial^*_{|C^{i-1}}[\vec{X}]$。

注 8.2. 请注意，从形式上讲，这里的定义稍微复杂一些，因为对于一般的 d-空间，路径代数 $R[\vec{X}]$ 并非幺代数。关于如何在有向同调这一特定语境下理解非幺代数上的模，请读者再次参阅 *[11]* 和 *[1]* 。

与第 6 节预立方集的情形类似，拼接 $*$ 诱导出同调与上同调运算。

事实上，迹上的串接运算是从 $Tr(X)^\beta_\alpha \times Tr(X)^\gamma_\beta$ 到 $Tr(X)^\gamma_\alpha$ 的连续映射，因此诱导出从 $H_{i+j-2}(Tr(X)^\beta_\alpha \times Tr(X)^\gamma_\beta)$ 到 $H_{i+j-2}(Tr(X)^\gamma_\alpha$ 的映射。为简便起见，**我们现在假设 R是一个域**，那么根据 K¨unneth 公式， $H_{i+j-2}(Tr(X)^\beta_\alpha \times Tr(X)^\gamma_\beta)$ 同构于:

$$\bigoplus_{k+l=i+j-2} H_k(Tr(X)^\beta_\alpha) \times H_l(Tr(X)^\gamma_\beta) = \bigoplus_{k+l=i+j} HM_k[X]^\beta_\alpha \times HM_l[X]^\gamma_\beta$$

到 $HM_{i+j-1}[M]^\gamma_\alpha$。

类似地，存在一个连续映射 ${}^\beta Tr(X)^\gamma_\alpha$，它是从 α 到 γ、经过 β 的 X 中迹的子空间，映射到 $Tr(X)^\beta_\alpha \times Tr(X)^\gamma_\beta$。再次利用 K¨unneth 公式，在上同调中并结合上同调函子的逆变性，我们得到一个从 $\bigoplus_{k+l=i+j} HM^k[X]^\beta_\alpha \times HM^l[X]^\gamma_\beta$ 到 $H^{i+j-2}({}^\beta Tr(X)^\gamma_\alpha)$ 的映射。最后，我们
注意到，通过将 $H^{i+j-2}({}^\beta Tr(X)^\gamma_\alpha)$ 中上链 c 的等价类映射到 $H^{i+j-2}(Tr(X)^\gamma_\alpha)$ 中上链 d 的等价类，并将从 α 到 γ、经过 β 的 X 的 $(i+j-2)$-迹 p 映射到 $c(p)$（如果 p 经过 β），否则映射到 0，我们便得到一个从 $H^{i+j-2}({}^\beta Tr(X)^\gamma_\alpha)$ 到 $H^{i+j-2}(Tr(X)^\gamma_\alpha)$ 的 R-模映射。因此，我们有:

定义 8.3。我们称

$$\circledast: \bigoplus_{i+j=n} HM_i[\vec{X}]^\beta_\alpha \otimes HM_j[\vec{X}]^\gamma_\beta \to HM_{n-1}[\vec{X}]^\gamma_\alpha$$

$\vec{}$对于所有满足以下条件的 α、β、$\gamma \in X$： β 可从 α 到达，且 γ 可从 β 到达。我们称

$$\curvearrowright: \bigoplus_{i+j=n} HM^i[\vec{X}]_\alpha^\beta \otimes HM^j[\vec{X}]_\beta^\gamma \to HM^{n-1}[\vec{X}]_\alpha^\gamma$$

上同调中的诱导运算。

最后，我们有经典的“局部”杯积：

定义 8.4。我们记作：

$$\smile: HM^i[\vec{X}]_\alpha^\beta \times HM^j[\vec{X}]_\alpha^\beta \to HM^{i+j-1}[\vec{X}]_\alpha^\beta$$

迹空间中点与之间的$(i-1)$次上同调类与$(j-1)$次上同调类之间的杯积，其中 α 在 X 中可达。

9 上同调计算示例

考虑 [6], 的 PV语言中的 n 个进程并行运行，它们只能通过（$n-1$）个信号量进行弱同步。

就两个点对之间的迹空间的上同调而言（这两个点对被视为某些动作开始或结束时的局部时间元组），很容易看出，这类基于信号量的程序 [7] 在经典立方语义（一个维数为 n 的细分超立方体，其中缺少某些 n 立方体）下的等价几何模型由 $[0,k_1]\times[0,k_2]\times\ldots[0,k_n]\backslash\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$给出，其中 $\mathcal{O}$ 是由 $\{\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_k\}$ 半整数坐标点组成的集合。

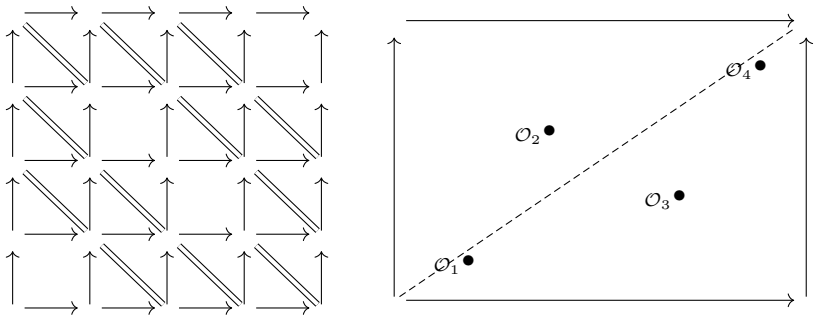
我们进一步限制可能的同步，使其满足：

$$\forall l=1,\ldots,d,\ \forall i\neq j,\ 1\leq i,j\leq k,\ \pi_l(\mathcal{O}_i)\neq\pi_l(\mathcal{O}_j)$$

在本节中，我们取 $R=\mathbb{Z}$。

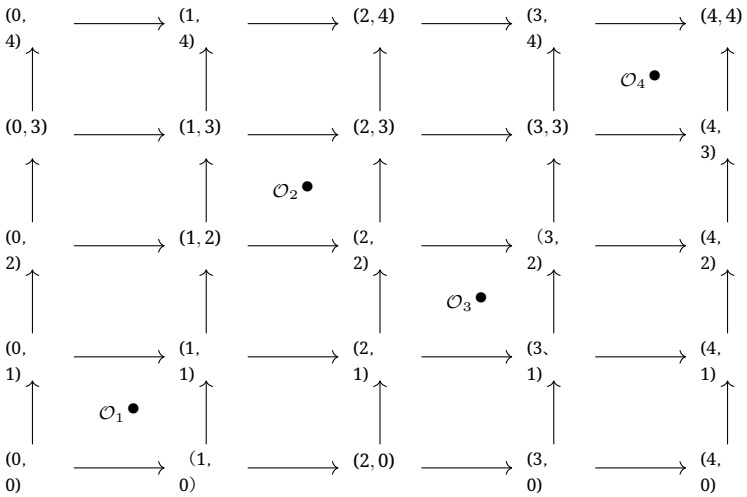
示例 9.1. 下面给出一个例子。左侧是维数为 *2* 的预立方集合（*2*-胞腔以双对角线表示），右侧是“等价”的 d空间，即一个去掉并标出四个点 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, $\mathcal{O}_4$的正方形。它是通过将空的 *2*-胞腔“收缩”为一个点得到的。所谓等价，是指根据 *[4]*的含义，它们对应的自然同调之间存在互模拟等价。

我们还将左侧预立方集合的骨架叠加到下方右图中，以获得计算相应迹空间上同调类所需的一对点：



将上方正方形的对角线作为全局时间，我们可以看出这是 *[2],* 的情形，其未来锥与 *[2]*的例***3.1.1***相同。

由 *[2]* 再次可知，该 d-空间的迹空间的上同调集中在***0***次。让我们计算下面所示预立方集合骨架中所有点对的生成元：



由 *[2],* 可知，点 u 与 v 之间迹空间的零阶上同调类与障碍 $\mathcal{O}_i$ 的链一一对应，这些链以 u开始、以 v结束。注意，偏序是按分量给出的，并且由于 $\mathcal{O}_1 = (1/2, 1/2)$、 $\mathcal{O}_2 = (3/2, 5/2)$、 $\mathcal{O}_3 = (5/2, 3/2)$ 和 $\mathcal{O}_4 = (7/2, 7/2)$，我们有 $\mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3 < \mathcal{O}_4$。

例如，对于 $u = (0,0)$ 和 $v = (5, 5)$，我们得到如下***12***个一阶定向上同调类（对应于 u 与 v之间迹空间的零阶上同调类）：

- $(u < v)$
- $(u < \mathcal{O}_1 < v)$，$(u < \mathcal{O}_2 < v)$，$(u < \mathcal{O}_3 < v)$，$(u < \mathcal{O}_4 < v)$

- $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2 < v)$, $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_3 < v)$, $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_4 < v)$, $(u < \mathcal{O}_2 < \mathcal{O}_4 < v)$, $(u < \mathcal{O}_3 < \mathcal{O}_4 < v)$,
- $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_2 < \mathcal{O}_4 < v)$, $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_3 < \mathcal{O}_4 < v)$

请注意，根据 *[2]*，，我们知道杯积具有幂等性：对于所有类 c、$c \smile c = c$。

现在，不同点对(u, v) 之间的第一个有向上同调类，是这些上同调类的一个子集，由在相应情形下成立的同一组链给出。例如，对于 $u = (0, 0)$ 和 $v = (3,2)$，我们得到 *4* 个上同调类：

- $(u < v)$
- $(u < \mathcal{O}_1 < v)$，$(u < \mathcal{O}_3 < v)$,
- $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_3 < v)$对于 $u = (3,2)$ 和 $v = (4, 4)$，我们得到：
- $u < v$,
- $u < \mathcal{O}_4 < v$

我们来举例说明上同调运算：

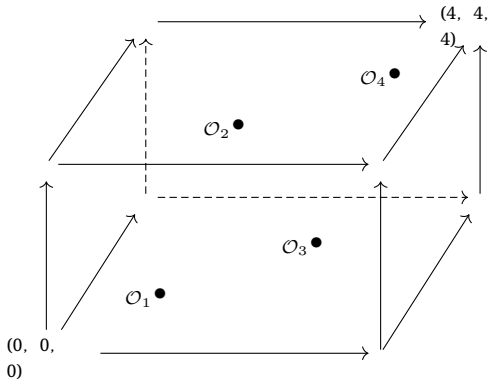
$$\frown\colon\ HM^1[X]^{(3,2)}_{(0,0)} \times HM^1[X]^{(4,4)}_{(3,2)} \to HM^1[X]^{(4,4)}_{(0,0)}$$

它将这些障碍链拼接起来，得到 *8* 个零阶上同调类：

- $(u < v)$
- $(u < \mathcal{O}_1 < v)$, $(u < \mathcal{O}_3 < v)$, $(u < \mathcal{O}_4 < v)$
- $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_3 < v)$, $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_4 < v)$, $(u < \mathcal{O}_3 < \mathcal{O}_4 < v)$,
- $(u < \mathcal{O}_1 < \mathcal{O}_3 < \mathcal{O}_4 < v)$

它们是仅有的不含 $\mathcal{O}_2$ 的障碍链（在 $(0,\ 0)$ 与 $(3,\ 2)$ 之间以及在 $(3,\ 2)$ 与 $(4,\ 4)$之间唯一不可达的障碍物）。

例 9.2. 现在我们来看下面这个三维示例：



四个点的坐标分别为$(1/2, 1/2, 1/2)$、$(3/2, 5/2, 3/2)$、$(5/2, 3/2, 5/2)$和$(7/2, 7/2, 7/2)$。注意，障碍物$\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$ 与 $\mathcal{O}_4$ 之间的可达性关系与例 *9.1* 中的相同。

现在，障碍物 $\mathcal{O}_i$ 的余维数为*2*，其在 *[2]* 中定义的相应回避类为 $c_i \in H^1(\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{O}_i)$ （因为 $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{O}_i$ 同伦等价于*1*-球面 S^1）。

因此， $u = (0, 0, 0)$ 与 $v = (4, 4, 4)$之间的迹空间的上同调环，从而相应有向空间的有向上同调模，由生成元 $c_1, \ldots, c_4$ 给出（ *[2]*的定理*3.7*）：

- 在一维（迹空间中为*0*）：*1*个生成元 $\emptyset$ （对应于空障碍链）

- 在二维（迹空间中为*1*）：*4*个生成元 c_1, c_2, c_3, c_4,
- 在三维（迹空间中为*2*）：*5*个生成元 $c_1 \smile c_2$, $c_1 \smile c_3$,$c_1 \smile c_4$, $c_2 \smile c_4$, $c_3 \smile c_4$,
- 在维数 *4*（迹空间中的维数为 *3*）时：有 *2* 个生成元 $c_1 \smile c_2 \smile c_4$, $c_1 \smile c_3 \smile c_4$

- 所有其他上同调模都是平凡的。

如果改变端点，我们会得到类似的计算。例如，对于$u = (0, 0, 0)$ 和 $v = (2, 3, 2)$，我们只得到包含“可达”生成元 $\mathcal{O}_1$ 和 $\mathcal{O}_3$的上同调类：

- 在维数 *1*（迹空间中的维数为 *0*）时：有 *1* 个生成元 $\emptyset$ （对应于空障碍链）

- 在维数 *2*（迹空间中的维数为 *1*）时：有 *2* 个生成元 c_1', c_3',
- 在三维（迹空间中的维数为 *2*）时：有 *1* 个生成元 $c_1' \smile c_3'$

事实上， u 与 v 之间的迹空间可以证明同伦等价于 $S^1 \times S^1$，因此所得的上同调环是(R, R)与自身的张量积，从而得到(R, R^2, R)。

我们还注意到，点 $u = (2, 3, 2)$ 与 $v = (4, 4, 4)$的上同调环为：

- 在维数*1*（迹空间中为*0*）：*1*个生成元 $\emptyset$ （对应于空障碍链）

- 在维数*2*（迹空间中为*1*）：*1*个生成元 c_4'',

这对应于迹空间中的一个圆 S^1 ，符合预期。
最后，从 $u = (1, 1, 1)$ 到 $v = (2, 2, 2)$，我们得到：

- 在维数 *1* 中（迹空间中的 *0*）：*1* 个生成元（空障碍链）

- 在维数 *2* 中（迹空间中的 *1*）：*2* 个生成元（c_2'''和 c_3'''）

这正如预期，对应于圆的楔和 S^1。

现在让我们举例说明 $HM^*[X]^{(2,3,2)}{}_{(0,\ 0,\ 0)} \curvearrowright HM^*[X]^{(4,4,4)}{}_{(2,\ 3,\ 2)}$上的上同调运算 $\curvearrowright$。由此得到 $HM^*[X]^{(4,4,4)}{}_{(0,\ 0,\ 0)}$的元素如下：

- 在维数 *1* 中：*1* 个生成元 $\emptyset = \emptyset \curvearrowright \emptyset$
- 在维数 *2* 中：$c_1' \curvearrowright c_4'' = c_1 \smile c_4$，$c_1' \curvearrowright c_3'' = c_1 \smile c_3$
- 在三维中：$(c_1' \smile c_3') \curvearrowright c_4'' = c_1 \smile c_3 \smile c_4$

这些仍然是非常特殊的情形，其中可达关系（障碍物之间）决定了所有上同调类。我们认为，在更微妙的情形下，$\curvearrowright$ 和 $\smile$ 会展现出更精细的相互作用。

参考文献

[1] Augustin Albert、J´er´emy Dubut 和 Eric Goubault。《阿贝尔框架双范畴中的同调代数：正合列与嵌入定理》，2026年。[2] Yuliy Baryshnikov。线性系统中的线性障碍物及其规避方法。《应用数学进展》，151：102579，2023年。[3] J´er´emy Dubut。真实并发几何模型的有向同伦与同调理论。博士论文，巴黎-萨克雷大学，2017年。[4] J´er´emy Dubut、Eric Goubault 和 Jean Goubault-Larrecq。有向同调理论与埃伦伯格-斯廷罗德公理。《应用范畴结构》，25(5)：775–807，2017年。[5]Ulrich Fahrenberg。有向同调。《理论计算机科学电子札记》，100：111–125，2004年。CONCUR 2003：CMCIM 和 GETCO。[6]Lisbeth Fajstrup、Eric Goubault、Emmanuel Haucourt、Samuel Mim- ram 和 Martin Raussen。有向代数拓扑与并发。施普林格，2016年。[7]Lisbeth Fajstrup、Eric Goubault、Emmanuel Haucourt、Samuel Mim- ram 和 Martin Raussen。有向代数拓扑与并发。施普林格出版公司，第一版，2016年。[8] Eric Goubault。对有向同调的半阿贝尔方法。《应用与计算拓扑学杂志》，8(2)：271–299，2024年。[9] Eric Goubault。有向同调与持久模。《应用与计算拓扑学杂志》，9(1)：3，2025年。

[10] Eric Goubault 和 Thomas P. Jensen。高维自动机的同调。载于 *CONCUR '92*，第三届国际并发理论会议，*1992*年*8*月*24*日至*27*日，美国纽约州石溪，论文集，第254–268页，1992年。[11] Eric Goubault 和 Eliot M´edioni。非幺环与代数上的同调代数及其在（∞，1）-范畴中的应用，2026年。准备中，可按需索取预印本。[12] Marco Grandis。不等逻辑空间、有向同调与非交换几何。《同调、同伦与应用》，6(1)：413–437，2004年。[13] Marco Grandis。有向代数拓扑：不可逆世界的模型。新数学专著丛书。剑桥大学出版社，2009年。[14] Alex Patchkoria。关于同调半模长正合列的正合性。《同伦及相关结构杂志》，1(1)：229–243，2006年。[15] Martin Raussen。迹空间的单纯模型 II：一般高维自动机。《代数与几何拓扑》，12(3)，2012年。[16] Hassler Whitney。关于复形中的乘积。《数学年刊》，39(2)，1937年。[17] Krzysztof Ziemia´nski。预立方集上的有向路径空间，2016年。